



تحلیل کمانش حرارتی صفحات دایره‌ای ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی

مهرداد جبارزاده^{۱*}، جعفر اسکندری جم^۲، محمود خسروی^۳

۱- استادیار گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

چکیده- در این مقاله، رفتار کمانش حرارتی صفحات دایره‌ای ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی دوطرفه تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت با در نظر گرفتن تئوری برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص مواد نسبت به سطح میانی صفحه متقارن و طبق قانون توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کند، به طوری که سطح میانی فلز خالص و طرفین صفحه، سرامیک خالص در نظر گرفته شده است. به منظور تعیین توزیع نیروی پیش کمانش، معادله غشایی با استفاده از روش پرتاب حل شده است. سپس معادلات پایداری به کمک روش طیفی مجازی با انتخاب توابع چبیشف به عنوان توابع پایه به صورت عددی حل شده است. نتایج عددی برای شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار و تغییرات ضخامت خطی و سهموی ارائه شده است. تأثیر پارامترهای مختلف چون شاخص کسر حجمی، تغییر پروفیل ضخامت و نسبت جانبی بر رفتار کمانش این صفحات مورد ارزیابی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌گان: کمانش حرارتی، صفحات دایره ای ضخامت متغیر، مواد تابعی، روش طیفی مجازی.

The analysis of thermal buckling of circular plates of variable thickness from functionally graded materials

M. jabbarzadeh^{1*}, J. Eskandari Jam², M. Khosravi³

1- Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad branch, Mashhad, Iran

2- Assoc. Prof., Malek Ashtar Univ. of Tech., Tehran, Iran

3- MsC student, Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad branch, Mashhad, Iran

* P.O.B. 9187144123, Mashhad, Iran. jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

Abstract- In this paper, the thermal buckling behavior of circular plates with variable thicknesses made of bimorph functionally graded materials, under uniform thermal loading circumstances, considering the first-order shear deformation plate theory has been studied. The material characteristics are symmetric to the middle surface of the plate and, based on the power law, vary along with thickness; where the middle surface is intended pure metal, and the sides are pure ceramic. In order to determine the distribution of pre-buckling force, the membrane equation is solved using the shooting method. And the stability equations are solved numerically, with the help of pseudo-spectral method by choosing Chebyshev functions as basic functions. The numerical results in clamped and simply supported boundary conditions and the linear and parabolic thickness variations are presented. And the influence of various parameters like volume fraction index, the thickness profile and side ratio on the buckling behavior of these plates has been evaluated.

Keywords: Thermal Buckling, Circular Plate of Variable Thickness, Functionally Graded Materials, Pseudo-Spectral Method.

۱- مقدمه

مواد تابعی^۱ در سالهای اخیر کاربردهای خاصی را در صنایع پیشرفته، به ویژه صنایع هوافضا و هسته‌ای یافته‌اند و با توجه به اهمیت موضوع، حجم قابل توجهی از تحقیقات را به خود اختصاص داده‌اند. به طور کلی مواد تابعی عموماً از مخلوط سرامیک با فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف ساخته می‌شوند. این مواد از نظر ریز ساختار غیرهمگن بوده و خصوصیات ساختاری شامل نوع توزیع و اندازه فازها، به طور پیوسته و هموار در آنها تغییر می‌کند و همین تغییر تدریجی منجر به تغییرات تدریجی در خواص مکانیکی و گرمایی این مواد می‌شود [۱].

صفحات با ضخامت متغیر به منظور برآوردن ملاحظات اقتصادی در مصرف مواد اولیه و یا سبک نمودن بخصوص در ساخت اجزای فضاپیماها، همواره مورد توجه طراحان بوده است و پژوهش‌های گسترده‌ای در این زمینه صورت گرفته است. با یک طراحی هوشمندانه برای چگونگی تغییر ضخامت، می‌توان استحکام و یا ظرفیت مقاومت در برابر کمانش و ارتعاشات را نسبت به یک صفحه ضخامت ثابت با همان مقدار ماده، به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشید.

تحلیل پایداری و مطالعه رفتار کمانش صفحات، همواره به عنوان یکی از مهمترین موضوعات در تحلیل سازه‌ها مورد توجه بوده است. اولین حل مسئله پایداری برای صفحات توسط برابان [۲] در سال ۱۸۹۱ انجام شده است. در این تحقیق کمانش یک صفحه دایره‌ای با تکیه‌گاه گیردار تحت بار یکنواخت شعاعی بررسی شده است. تیموشنکو و گیر [۳] مسئله پایداری انواع سازه‌های مهندسی شامل ستون‌ها، قاب‌ها، تیرهای خمیده، صفحات و پوسته‌ها را مورد بحث قرار داده‌اند. پس از آن المروث و بروش [۴] تحلیل جامعی از مسائل کمانش ستون‌ها، صفحات، پوسته‌ها و روش‌های مختلف برای فرمول‌بندی معادلات تعادل غیرخطی و پایداری مورد بررسی قرار داده‌اند. یاماکی [۵] کمانش صفحات حلقوی با بارگذاری روی لبه داخلی و خارجی را مورد بررسی قرار داده و در نتایج خود نشان داده‌اند که کمانش در این حالت لزوماً در مود اول اتفاق نمی‌افتد. ردی و خدیر [۶] تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد صفحات مستطیلی مرکب چند لایه با استفاده از تئوری

کلاسیک^۲، مرتبه اول^۳ و مرتبه سوم برشی^۴ در شرایط مرزی مختلف پرداختند. علاوه بر حل تحلیلی، حل عددی بر پایه روش اجزاء محدود در پژوهش آنها انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که تئوری کلاسیک، بار کمانش بحرانی را بیش از مقادیر واقعی برآورد می‌کند و با افزایش نسبت ضخامت به طول جانبی این اختلاف افزایش می‌یابد.

نجفی‌زاده و اسلامی [۷] تحلیل کمانش صفحات دایره‌ای از جنس مواد تابعی یک‌طرفه^۵ تحت انواع مختلف بارگذاری حرارتی برای شرایط مرزی گیردار مورد بررسی قرار داده‌اند. در این تحقیق از تئوری کلاسیک استفاده شده و حل تحلیلی ارائه شده است. نجفی‌زاده و هدایتی [۸] تحلیل کمانش حرارتی و مکانیکی صفحات دایره‌ای از جنس مواد تابعی یک‌طرفه با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی ارائه نموده و نتایج بدست آمده را با تئوری کلاسیک مقایسه کرده‌اند. در این تحقیق کمانش حرارتی و مکانیکی تنها برای شرایط مرزی گیردار بررسی شده است. نجفی‌زاده و حیدری [۹] تحلیل کمانش صفحات دایره‌ای از جنس مواد تابعی یک‌طرفه تحت انواع مختلف بارگذاری حرارتی برای شرایط مرزی گیردار و با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی مورد بررسی قرار داده‌اند. سپهری و همکارانش [۱۰] کمانش و پس کمانش حرارتی صفحات حلقوی ساخته شده از مواد تابعی با توزیع خواص در راستای شعاعی در انواع مختلف شرایط تکیه‌گاهی مورد مطالعه قرار داده‌اند. حل عددی بر پایه روش مربعات دیفرانسیلی بوده و نتایج برای تئوری برشی مرتبه اول و توزیع دما وابسته به خواص در راستای شعاعی ارائه شده است.

ونگ و همکارانش [۱۱] حل کمانش صفحات ضخامت متغیر دایره‌ای تحت فشار یکنواخت با فرض تئوری کلاسیک را مورد بررسی قرار داده‌اند. برای حل معادلات غشایی پیش کمانش از روش پرتاب استفاده شده و سپس معادلات پایداری با به کارگیری روش ریلی ریتز حل شده است. همچنین برای تغییر ضخامت به صورت خطی و سهموی، شکل هندسی بهینه برای مقاومت در برابر کمانش بدست آمده است. راجو و راتو [۱۲] پس کمانش صفحات دایره‌ای همگن با تغییر ضخامت خطی تحت بارگذاری گرمایی به صورت افزایش یکنواخت دما

2. Classic Plate Theory (CPT)

3. First-Order Shear Deformation Plate Theory (FSDT)

4. Third-Order Shear Deformation Plate Theory (TSDT)

5. One Sided FGM

1. Functionally Graded Material

اساس روش تعادل همسایه^۲ بدست آمده و با بکارگیری روش طیفی مجازی با انتخاب چند جمله‌ای‌های چبیشف به عنوان توابع پایه حل شده‌اند. تأثیر پارامترهای هندسی، خواص مواد و بارگذاری گرمایی بر رفتار کمانش صفحه در شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار، با جزئیات مورد بحث قرار گرفته و نتایج به صورت جدول و نمودار ارائه شده است. به منظور صحت‌گذاری، نتایج با مقادیر گزارش شده در پژوهش‌های پیشین مقایسه شده که تأیید کننده صحت و دقت نتایج بدست آمده است.

۲- معادلات حاکم بر مسئله

۲-۱- صفحات ضخامت متغیر

در صفحات از جنس مواد تابعی خواص بر اساس تغییر در کسر حجمی عناصر سازنده و معمولاً در راستای ضخامت تغییر می‌کند. یک صفحه دایره‌ای در نظر بگیرید که r و z به ترتیب بیانگر راستاهای شعاعی و ضخامت باشند. اگر ضخامت صفحه ثابت باشد، تابع کسر حجمی برای تمام مقاطع یکسان و تنها تابعی از z خواهد بود. اما اگر ضخامت صفحه متغیر باشد، اندازه ضخامت در راستای شعاعی متفاوت خواهد بود و تعریف کسر حجمی پیچیده‌تر خواهد شد.

با توجه به چگونگی تعریف کسر حجمی، در نظر گرفتن دو مدل برای صفحات ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی امکان‌پذیر است که به خصوص در فرایند تولید کاملاً متفاوت هستند. در مدل اول، تغییرات کسر حجمی وابسته به اندازه ضخامت در نظر گرفته می‌شود و از آنجا که اندازه ضخامت در راستای r متغیر است، کسر حجمی تابع هر دو r و z خواهد شد. برای ساخت این صفحه به روشی مانند متالورژی پودر باید علاوه بر کنترل بر ترکیب درصد سرامیک و فلز در راستای ضخامت در راستای درون صفحه‌ای نیز کنترل داشت. مدل دیگری نیز می‌توان برای صفحات ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی پیشنهاد داد. در این مدل تغییر کسر حجمی در راستای ضخامت از یک سطح، با یک تابعیت یکسان برای تمام مقاطع انجام می‌گیرد. بنابراین در یک فاصله مشخص از سطح، در تمام مقاطع، کسر حجمی یکسان خواهد بود.

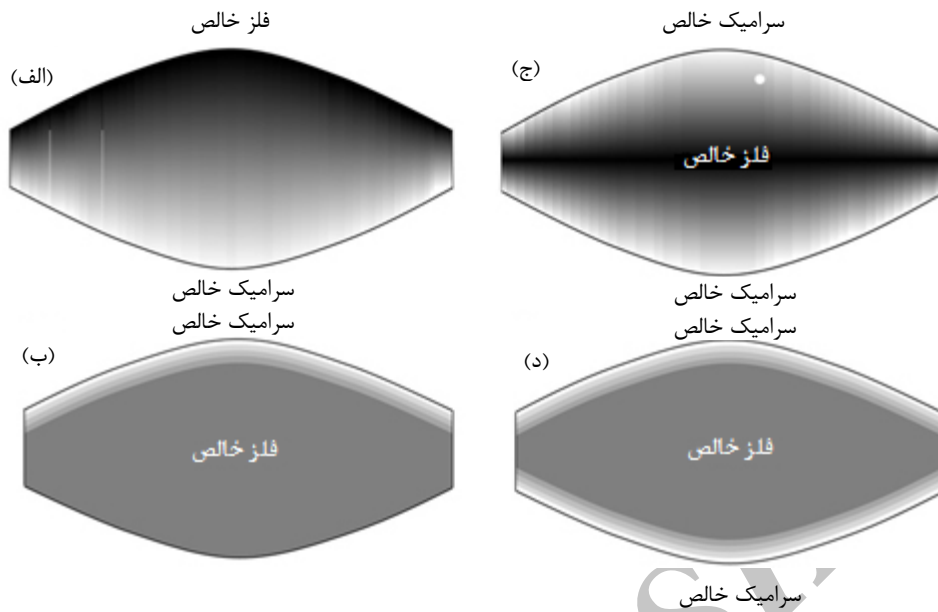
را مطالعه کرده‌اند. تحلیل کمانش حرارتی این ورق‌ها، با استفاده از روش اجزاء محدود انجام شده است. اوزاکسا و همکارانش [۱۳] با بهره‌گیری از روش اجزاء محدود و در نظر گرفتن آثار برشی به صورت تئوری برشی مرتبه اول، تحلیل کمانش مکانیکی و بهینه‌سازی ضخامت صفحات دایره‌ای را مورد مطالعه قرار داده‌اند.

نائی و همکارانش [۱۴] کمانش مکانیکی صفحات دایره‌ای از جنس مواد تابعی یک‌طرفه با ضخامت متغیر تحت فشار یکنواخت شعاعی را به روش اجزاء محدود بررسی کردند. شرایط مرزی بکار رفته برای ورق دایروی، ساده و گیردار می‌باشد. جلالی و همکارانش [۱۵] پایداری حرارتی صفحات دایره‌ای ضخامت متغیر ساندویچی با لایه‌های سطحی ضخامت ثابت از جنس مواد تابعی را با بکارگیری روش طیفی میان‌یابی بررسی کردند.

صفحات از جنس مواد تابعی، بسته به اینکه محیط با دمای بالا در یک‌طرف یا دوطرف صفحه اعمال شود، به دو دسته یک‌طرفه و دوطرفه^۱ تقسیم می‌شوند. در حالت یک‌طرفه، یک سطح سرامیک خالص و سطح دیگر فلز خالص است، در حالی که در حالت دوطرفه معمولاً دو سطح سرامیک خالص و صفحه میانی فلز خالص می‌باشد.

در صفحات دایروی از جنس مواد تابعی یک‌طرفه که تحت بارگذاری حرارت یکنواخت می‌باشد، عدم تقارن مواد نسبت به سطح میانی، سبب ایجاد گشتاور حرارتی قبل از کمانش در صفحه شده و باعث عدم دستیابی به دمای بحرانی کمانش می‌شود. ولی به دلیل این که تکیه‌گاه گیردار تحمل گشتاور خمشی را دارد، تنها امکان بررسی رفتار کمانش در شرایط تکیه‌گاه گیردار وجود خواهد داشت [۱۶]. اما در مواد تابعی دوطرفه به علت وجود تقارن مواد نسبت به سطح میانی، گشتاور حرارتی بوجود نیامده و امکان بررسی رفتار کمانش در شرایط تکیه‌گاه ساده و گیردار وجود خواهد داشت.

در تحقیق حاضر از تئوری برشی مرتبه اول و فرضیات غیرخطی فون کارمن برای تحلیل کمانش حرارتی صفحات دایروی ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی دوطرفه استفاده شده است. برای بدست آوردن معادلات تعادل از اصل انرژی پتانسیل پایدار استفاده شده است. سپس معادلات پایداری بر

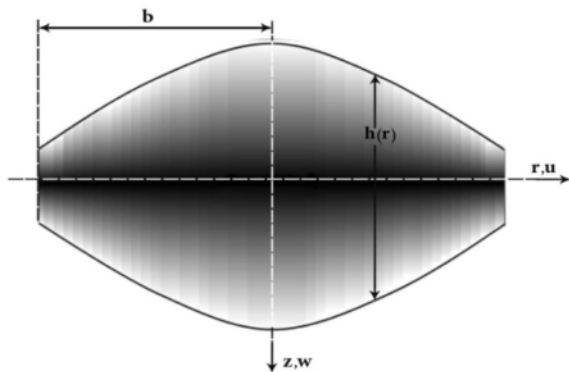


شکل ۱ انواع مختلف صفحات دایره ای ضخامت متغیر
 (الف) صفحه FGM یک طرفه با کسر حجمی وابسته به ضخامت (ب) صفحه FGM یک طرفه با لایه FGM ضخامت ثابت
 (ج) صفحه FGM دو طرفه با کسر حجمی وابسته به ضخامت (د) صفحه FGM دو طرفه با لایه FGM ضخامت ثابت.

شکل ۱ انواع مختلف صفحات دایره ای ضخامت متغیر

است و مختصات r و z آن به ترتیب در راستای شعاعی و ضخامت قرار دارند، در حالی که راستای محیطی به علت تقارن محوری در محاسبات وارد نمی‌شود.

u و w جابجایی‌های نقاط روی صفحه میانی به ترتیب موازی با راستای شعاعی و ضخامت هستند و ϕ دوران حول محور شعاعی است. ضخامت کلی صفحه $h(r)$ تابعی از موقعیت شعاعی خواهد بود. h_1 و h_2 به ترتیب ضخامت در مرکز و لبه صفحه ضخامت متغیر می‌باشند. تغییرات پروفیل ضخامت توسط پارامتر p نشان داده می‌شود.



شکل ۲ هندسه صفحه ضخامت متغیر مورد بررسی

این نحوه توزیع کسر حجمی، باعث ایجاد یک لایه از جنس مواد تابعی ضخامت ثابت می‌شود. پس از رسیدن به کسر حجمی ۱۰۰ درصد برای ماده دوم، با توجه به اینکه صفحه دارای ضخامت متغیر است ادامه ضخامت صفحه با ماده خالص دوم پر می‌شود. در واقع متغیر بودن ضخامت صفحه توسط بخش همگن صفحه انجام می‌شود. برای ساخت چنین صفحه ضخامت متغیر، تنها نیاز به کنترل درصد ترکیب کسر حجمی در راستای ضخامت نسبت به سطح مبدأ است. بر این اساس ساخت این مدل به ساخت صفحات ضخامت ثابت از جنس مواد تابعی شبیه‌تر خواهد بود و فرایند ساخت با سهولت بیشتری انجام می‌شود. صفحات از جنس مواد تابعی یک‌طرفه و دو‌طرفه بر اساس دو مدل معرفی شده برای تغییرات کسر حجمی در شکل ۱ نمایش داده شده است. صفحه مطالعه شده در پژوهش حاضر یک صفحه از جنس مواد تابعی دو طرفه، شکل ۱-ج است.

۲-۲- هندسه مسئله

هندسه مورد بررسی (شکل ۲) یک صفحه دایره‌ای به شعاع b است که نسبت به صفحه میانی خود متقارن است. دستگاه مختصات قطبی در مرکز صفحه روی صفحه میانی قرار گرفته

۲-۴- معادلات تعادل و پایداری

یک ورق دایره‌ای ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی دوطرفه به شعاع b و ضخامت متغیر $h(r)$ مفروض است. میدان جابجایی براساس تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} U(r, z) &= u(r) + z \varphi(r) \\ W(r, z) &= w(r) \end{aligned} \quad (6)$$

روابط کرنش-جابجایی براساس فرضیات فون کارمن و روابط (۶) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} + k_r z, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta0} + k_\theta z, \quad \gamma_{rz} = \varphi + w_{,r} \quad (7)$$

و کرنش‌های صفحه میانی به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{r0} = u_{,r} + \frac{1}{2}(w_{,r})^2, \quad \varepsilon_{\theta0} = \frac{u}{r} \quad (8)$$

و انحناءها نیز به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$k_r = \varphi_{,r}, \quad k_\theta = \frac{\varphi}{r} \quad (9)$$

با فرض اینکه مواد تابعی همسان‌گرد می‌باشند و با صرف‌نظر کردن از تنش‌ها در جهت ضخامت و ثابت بودن ضریب پواسون، روابط تنش-کرنش بر اساس قانون هوک به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) - \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) - \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \\ \tau_{rz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz} \end{aligned} \quad (10)$$

در روابط بالا $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ تنش‌های نرمال و τ_{rz} تنش برشی در هر نقطه از ضخامت ورق به فاصله z از صفحه میانی و ΔT تغییر دما از یک دمای مرجع می‌باشد.

با انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های تنش روی ضخامت صفحه می‌توان نیروها و گشتاورهای برابند را بر حسب مؤلفه‌های تنش به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} (N_r, N_\theta) &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} (\sigma_r, \sigma_\theta) dz \\ (M_r, M_\theta) &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} (\sigma_r, \sigma_\theta) z dz \\ Q_r &= K \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \tau_{rz} dz \end{aligned} \quad (11)$$

K ضریب اصلاح برشی تئوری مرتبه اول است که مقدار $\frac{5}{6}$ برای آن منظور می‌شود. با جایگذاری روابط (۱۰) در روابط

با وجود این که فرمول‌بندی و روش حل، انتخاب هر مقدار دلخواه برای p را ممکن می‌سازد، اما حل تنها برای حالت خطی و سهموی انجام شده است که p به ترتیب برابر با یک و دو در نظر گرفته می‌شود.

$$h(r) = h_1 + (h_2 - h_1) \left(\frac{r}{b} \right)^p \quad (1)$$

برای یک صفحه با حجم ثابت V ، رابطه (۲) بین پارامترهای هندسی برقرار است که در آن h_0 ضخامت یک صفحه ضخامت ثابت با همان حجم ماده می‌باشد. همچنین با معرفی پارامتر بدون بعد تغییر ضخامت Ω ، می‌توان چگونگی توزیع ماده را در راستای شعاعی بیان نمود. این پارامتر می‌تواند از صفر تا یک تغییر کند که مقدار صفر، نشان دهنده بیشترین ضخامت در مرکز و ضخامت صفر در لبه است، در حالی که مقدار یک، نشان دهنده بیشترین ضخامت در لبه و ضخامت صفر در مرکز است. مقدار $\Omega = 0.5$ بیان‌کننده یک صفحه با ضخامت ثابت است [۱۱].

$$h_0 = \frac{V}{\pi b^2} = h_1 + \frac{2(h_2 - h_1)}{p+2} \quad (2)$$

$$\Omega = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (3)$$

۲-۳- روابط حاکم بر مواد تابعی دوطرفه

مواد تابعی دسته‌ای از مواد ناهمگن هستند و خواص، تابعی از کسر حجمی مواد تشکیل دهنده یعنی سرامیک و فلز در هر نقطه است. بر این اساس، خواص مکانیکی و گرمایی ماده تابعی، مطابق رابطه (۴) و (۵) در نظر گرفته می‌شود که در آن V_m و V_c به ترتیب نشان دهنده کسر حجمی فلز و سرامیک است. N شاخص تابعیت توانی ماده تابعی دوطرفه است که چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و فلز را مشخص می‌کند. مقادیر صفر و بی نهایت برای این شاخص، به ترتیب معرف فلز خالص و سرامیک خالص است [۱۷].

$$\begin{aligned} E_f &= V_m E_m + V_c E_c \\ \alpha_f &= V_m \alpha_m + V_c \alpha_c \end{aligned} \quad (4)$$

$$V_m = \left(\frac{2z + h(r)}{h(r)} \right)^N \quad -\frac{h(r)}{2} \leq z \leq 0$$

$$V_m = \left(\frac{-2z + h(r)}{h(r)} \right)^N \quad 0 \leq z \leq \frac{h(r)}{2}$$

$$V_c = 1 - V_m \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& w_{,rr} \left\{ A_{55} + A_{11} \left(u_{,r} + \frac{3}{2} (w_{,r})^2 + v \frac{u}{r} \right) - N_r^T \right\} \\
& + w_{,r} \left\{ A_{55,r} + \frac{A_{55}}{r} + \left[\frac{A_{11}}{r} (1+v) + A_{11,r} \right] u_{,r} \right. \\
& + \frac{1}{2r} (A_{11} + r A_{11,r}) (w_{,r})^2 + v A_{11,r} \frac{u}{r} + A_{11} u_{,rr} \\
& \left. - \frac{N_r^T}{r} - N_{r,r}^T \right\} + A_{55} \varphi_{,r} + \left(A_{55,r} + \frac{A_{55}}{r} \right) \varphi = 0 \\
& D_{11} \varphi_{,rr} + \frac{1}{r} (D_{11} + r D_{11,r}) \varphi_{,r} \\
& - \frac{1}{r} \left(\frac{D_{11}}{r} - v D_{11,r} + r A_{55} \right) \varphi \\
& - A_{55} w_{,r} - M_{r,r}^T = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

معادلات بدست آمده، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی است. متغیرهای مستقل این دستگاه، (φ, w, u) هستند که در معادلات با یکدیگر کوپل شده‌اند.

برای بدست آوردن معادلات پایداری از معادلات غیرخطی تعادل معمولاً از روش تعادل در مجاورت استفاده می‌شود. این روش برای بررسی پایداری و محاسبه بار بحرانی کمانش براساس تعریف مفاهیم مسیره‌های تعادلی اولیه، ثانویه و نقطه دو شاخگی استفاده می‌شود. با استفاده از این روش می‌توان نقطه دو شاخگی را از حل معادلات دیفرانسیل خطی بدست آورد. بدین ترتیب که برای یک حالت تعادلی روی مسیر تعادلی اولیه، امکان وجود یک شکل تعادلی همسایه، تحت همان بار بررسی می‌شود. چنین شکل تعادلی در مجاورت تعادل اولیه، نشانه وجود یک نقطه دو شاخگی روی مسیر تعادلی است. نقاطی که در اثر تلاقی مسیره‌های تعادلی ایجاد می‌شوند نقاط دوشاخگی نامیده می‌شود و در چنین نقاطی معادلات تعادل دارای دو حل بوده که هر کدام متناظر به یک شاخه می‌باشند.

معادلات لازم برای این روش، از معادلات تعادل غیرخطی سازه با استفاده از روش اغتشاشات استخراج می‌شوند که در آن میدان‌های جابجایی (φ, w, u) با میدان $(w_0 + w_1, u_0 + u_1)$ جایگزین می‌شود که (φ_0, w_0, u_0) حالت تعادل اولیه یعنی قبل از کمانش را نشان می‌دهد و نشان دهنده یک حالت تعادل روی مسیر اولیه و (φ_1, w_1, u_1) جابجایی‌های بسیار کوچک در میدان جابجایی هستند. اما باید توجه کرد که در

(۱۱)، رابطه بین نیروها و گشتاورها بر حسب مؤلفه‌های کرنش را می‌توان به صورت رابطه (۱۲) بدست آورد:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} N_r \\ N_\theta \end{pmatrix} &= A_{11} \begin{bmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{r0} \\ \varepsilon_{\theta 0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_r^T \\ N_\theta^T \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} M_r \\ M_\theta \end{pmatrix} &= D_{11} \begin{bmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{r1} \\ \varepsilon_{\theta 1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_r^T \\ M_\theta^T \end{pmatrix} \\
Q_r &= A_{55} \gamma_{rz} \quad (12)
\end{aligned}$$

ضرایب A_{11} و D_{11} با انتگرال‌گیری روی خواص در راستای ضخامت بدست می‌آیند. به خاطر ضخامت متغیر صفحه، حدود انتگرال‌گیری تابعی از مختصات شعاعی هستند و در نتیجه این ضرایب نیز تابعی از موقعیت شعاعی خواهند بود.

$$\begin{aligned}
(A_{11}, D_{11}) &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} (1, z^2) Q_{11} dz \\
A_{55} &= K \frac{A_{11} (1-v)}{2} \quad (13)
\end{aligned}$$

نیروها و گشتاورهای برآیند گرمایی بر اثر بارگذاری حرارتی به صورت افزایش ΔT دما در صفحه بوجود می‌آیند. این نیروها و گشتاورهای گرمایی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
(N_r^T, M_r^T) &= \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \frac{E(z)}{(1-v)} \alpha(z) \Delta T (1, z) dz \\
(N_\theta^T, M_\theta^T) &= (N_r^T, M_r^T) \quad (14)
\end{aligned}$$

معادلات تعادل برای صفحات دایره‌ای را می‌توان با بکارگیری اصل انرژی پتانسیل پایدار بدست آورد.

$$\begin{aligned}
N_{r,r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} &= 0 \\
Q_r + r Q_{r,r} + (r N_r w_{,r})_{,r} &= 0 \\
M_{r,r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r &= 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

با استفاده از روابط بین نیروها و گشتاورهای برآیند با مؤلفه‌های میدان جابجایی، می‌توان معادلات تعادل را بر حسب مؤلفه‌های جابجایی بازنویسی کرد. با جایگذاری روابط (۷)، (۹) و (۱۲) در معادلات (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned}
& A_{11} w_{,r} w_{,rr} + \frac{1}{2r} (A_{11} (1-v) + r A_{11,r}) w_{,r}^2 \\
& + A_{11} u_{,rr} + \frac{1}{r} (A_{11} + r A_{11,r}) u_{,r} \\
& + \frac{1}{r} \left(v A_{11,r} - \frac{A_{11}}{r} \right) u - N_{r,r}^T = 0
\end{aligned}$$

1. Bifurcation Points

معادله (۱۸)، معادله غشایی صفحه نامیده می‌شود که یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب متغیر است. متغیر مستقل این معادله u_0 است که با بدست آوردن آن، نیروهای درون صفحه‌ای به صورت رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود.

$$\begin{pmatrix} N_{r0} \\ N_{\theta 0} \end{pmatrix} = A_{11} \begin{bmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,r} \\ \frac{u_0}{r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_{r0}^T \\ N_{\theta 0}^T \end{pmatrix} \quad (19)$$

بارگذاری گرمایی با افزایش یکنواخت دما است، که در این حالت لبه آزادی حرکت در راستای شعاعی ندارد و ممانعت از افزایش طول صفحه سبب ایجاد نیروی فشاری در آن می‌شود. به علت تقارن، جابجایی درون صفحه‌ای در مرکز صفحه صفر است. بنابراین شرایط مرزی معادله غشایی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u_0(0) &= 0 && \text{(در مرکز)} \\ u_0(b) &= 0 && \text{(در لبه)} \end{aligned} \quad (20)$$

همچنین جهت حل معادلات پایداری (۱۷) نیاز به شرایط مرزی برای تغییر مکان جانبی و دوران در مرکز و لبه صفحه دایره‌ای می‌باشد. لبه به دو صورت تکیه‌گاه ساده و گیردار می‌باشد. به خاطر تقارن محوری برش عرضی و دوران حول محور شعاعی در مرکز صفحه وجود ندارد. در نتیجه تغییرات جابجایی جانبی نیز در مرکز صفحه صفر خواهد شد. برای لبه با تکیه‌گاه ساده ممان خمشی شعاعی صفر است در حالیکه برای لبه گیردار دوران حول محور شعاعی صفر می‌باشد. بنابراین شرایط مرزی برای معادله پایداری به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 0, w_{1,r}(0) = 0 && \text{(در مرکز)} \\ w_1(b) &= 0, \varphi_1(b) = 0 && \text{(لبه با تکیه‌گاه گیردار)} \\ w_1(b) &= 0, \varphi_{1,r}(b) + \frac{v}{b} \varphi_1(b) = 0 && \text{(لبه با تکیه‌گاه ساده)} \end{aligned} \quad (21)$$

۳- حل معادلات عددی

۳-۱- حل معادله غشایی به روش پرتاب

برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر می‌توان از روش‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده کرد که یکی از متداول‌ترین آن‌ها روش رانج-کوتا است. اما دامنه کاربرد این روش‌ها به حل معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه محدود می‌شود. با استفاده از روش پرتاب می‌توان مسئله مقدار مرزی را به یک

حالت پیش کمانش صفحه هنوز دچار خمیدگی و تغییر مکان جانبی نشده است و w_0 و φ_0 برابر صفر است.

با جایگزینی این میدان‌های جدید در معادلات (۱۶)، تمامی عبارت‌هایی که شامل جابجایی کوچک نیستند از معادلات حاصله حذف می‌شوند. همچنین اگر افزایش جابجایی به اندازه کافی کوچک باشد، تنها عبارت‌های مرتبه اول جابجایی (u_1, w_1, φ_1) در معادلات باقی می‌مانند و عبارات مرتبه بالاتر حذف می‌شوند. بنابراین معادلات پایداری حاصل معادلاتی خطی و همگن بر حسب میدان جابجایی کوچک فرضی هستند. بنابراین معادلات پایداری به صورت رابطه (۱۷) بیان می‌شود.

بایستی توجه کرد که حل این دستگاه منجر به یافتن یک حالت تعادل همسایه برای حالت تعادل اولیه خواهد شد. متغیرهای مستقل این دستگاه (φ_1, w_1, u_1) هستند. N_{r0} نیروی شعاعی پیش کمانش است. این نیرو که بایستی از تحلیل پیش کمانش صفحه بدست آید، در واقع همان پارامتر ویژه مسئله مقدار ویژه است. کوچکترین بار پیش کمانش N_{r0} که به ازای آن یک مسیر تعادل ثانویه وجود دارد، به عنوان دمای بحرانی کمانش تعریف می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که در دستگاه معادلات پایداری بدست آمده، معادله اول از معادلات دوم و سوم مستقل است. بنابراین برای تعیین دمای بحرانی کمانش، معادلات دوم و سوم مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\begin{aligned} A_{11}u_{1,r} + \frac{1}{r}(A_{11} + rA_{11,r})u_{1,r} - \frac{1}{r^2}(A_{11} - vrA_{11,r})u_1 &= 0 \\ (A_{55} + N_{r0})w_{1,r} + [A_{55} + N_{r0} + r(A_{55,r} + N_{r0,r})]w_{1,r} & \\ + A_{55}\varphi_{1,r} + \frac{1}{r}(A_{55} + rA_{55,r})\varphi_1 &= 0 \\ D_{11}\varphi_{1,r} + \frac{1}{r}(D_{11} + rD_{11,r})\varphi_{1,r} & \\ - \frac{1}{r^2}(D_{11} - vrD_{11,r} + r^2A_{55})\varphi_1 - A_{55}w_{1,r} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

حالت پیش کمانش حالت تعادل قبل از وقوع کمانش است که از معادلات تعادل غیرخطی (۱۶) تعیین می‌شود. با در نظر گرفتن این موضوع، معادلات تعادل به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,r} + \frac{1}{r}(A_{11} + rA_{11,r})u_{0,r} & \\ - \frac{1}{r^2}(A_{11} - vrA_{11,r})u_0 - N_{r0,r}^T &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$x = \frac{2r}{b} - 1, \quad dx = \frac{2}{b} dr \quad (24)$$

$$x_1 = \frac{w_1}{b}, \quad x_2 = \varphi_1, \quad \bar{N}_{r0} = \frac{N_{r0}}{A_{55}}$$

$$\bar{N}'_{r0} = \frac{b N_{r0,r}}{2A_{55}}, \quad \bar{A}'_{55} = \frac{b A_{55,r}}{2A_{55}}$$

$$\bar{D}'_{11} = \frac{b D_{11,r}}{2D_{11}}, \quad \bar{F} = \frac{b^2 A_{55}}{D_{11}} \quad (25)$$

$$\bar{\nu}_{r0} + 1) x_1'' + 2 \left[\frac{(\bar{N}_{r0} + 1)}{(x + 1)} + (\bar{A}'_{55} + \bar{N}'_{r0}) \right] x_1'$$

$$x_2' + \left[\frac{1}{(x + 1)} + \bar{A}'_{55} \right] x_2 = 0$$

$$x_2'' + 2 \left[\frac{1}{(x + 1)} + \bar{D}'_{11} \right] x_2'$$

$$2 \left[\frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{\nu \bar{D}'_{11}}{(x + 1)} + \frac{\bar{F}}{4} \right] x_2 - \bar{F} x_1' = 0 \quad (26)$$

$$x_1'(-1) = 0, \quad x_2(-1) = 0 \quad (\text{در مرکز})$$

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 0 \quad (\text{لبه با تکیه‌گاه گیردار})$$

$$x_1(1) = 0 \quad (\text{لبه با تکیه‌گاه ساده})$$

$$x_2'(1) + \frac{\nu}{2} x_2(1) = 0 \quad (27)$$

متغیرهای مستقل در معادلات پایداری، جابجایی عرضی بدون بعد x_1 و دوران حول محور شعاعی x_2 هستند. در روش طیفی، حل به صورت مجموعی از توابع پایه چبیشف در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس متغیرهای x_1 و x_2 در i امین نقطه برهم‌آوری^۲ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$x_{1i} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j T_{i,j}, \quad x_{2i} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{i,j} \quad (28)$$

زیرنویس j ، بیان‌گر i امین چند جمله‌ای چبیشف و ضریب مجهول است؛ در حالی که زیرنویس i ، نشان‌دهنده i امین نقطه برهم‌آوری است. با جایگذاری این معادلات در معادلات پایداری (۲۶) و شرایط مرزی (۲۷) معادلات و شرایط مرزی بر حسب توابع پایه چبیشف بدست می‌آیند:

$$2(\bar{N}_{r0} + 1) \sum_{j=1}^{n+1} a_j T_{i,j}'' + 2 \left[\frac{(\bar{N}_{r0} + 1)}{(x + 1)} + (\bar{A}'_{55} + \bar{N}'_{r0}) \right]$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j T_{i,j}' + \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{i,j}' + \left[\frac{1}{(x + 1)} + \bar{A}'_{55} \right] \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{i,j} = 0$$

مسئله مقدار اولیه تبدیل و سپس با به کارگیری روش‌های متداول و ساده انتگرال‌گیری عددی چون روش رانج-کوتا حل نمود. معادله غشایی (۱۸) یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم است که با حل آن جابجایی درون صفحه‌ای u_0 و مشتق آن $u_{0,r}$ بدست می‌آید. برای حل از روش رانج-کوتای مرتبه چهار استفاده می‌شود. با استفاده از روابط نیرو-جابجایی می‌توان نیروی شعاعی درون صفحه‌ای را محاسبه کرد که به عنوان بار پیش کمانش در نظر گرفته می‌شود. باید توجه نمود که نیروی پیش کمانش در راستای شعاعی متغیر است و به ازای یک بارگذاری مشخص، نیروی پیش کمانش در نقاط تعیین شده به روش رانج-کوتا بدست می‌آید.

۳-۲- حل معادلات پایداری به روش طیفی میان‌بابی

روش‌های طیفی^۱ خانواده‌ای از روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل هستند. ایده اصلی این روش‌ها تقریب تابع مجهول $u(x)$ به وسیله جمع $(n + 1)$ جمله از توابع پایه $\zeta_j(x)$ است. جزئیات مباحث مربوط به روش طیفی در کتاب بوید [۱۸] آورده شده است.

$$u(x) \approx u_j(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \zeta_j(x) \quad (22)$$

انتخاب توابع پایه مناسب برای هر مسئله بر اساس هندسه آن انجام می‌شود. با وجود این که امکان انتخاب توابع پایه مختلف در روش‌های طیفی وجود دارد ولی چند جمله‌ای‌های چبیشف از مهم‌ترین و شاخص‌ترین توابعی هستند که در مسائل غیرنوسانی با هندسه محدود توصیه شده‌اند. ساده‌ترین راه برای بدست آوردن این توابع استفاده از رابطه بازگشتی (۲۳) بین آنها است.

$$T_1 = 1, \quad T_2 = x$$

$$T_{n+1} = 2x T_n - T_{n-1} \quad (23)$$

برای حل معادلات به روش طیفی میان‌بابی باید معادلات پایداری و شرایط مرزی را از محدوده فیزیکی $r \in [0, b]$ به بازه حل $x \in [-1, 1]$ منتقل کرد. با استفاده از تغییر متغیر (۲۴) و مقادیر بدون بعد (۲۵)، معادلات پایداری بدون بعد (۲۶) و شرایط مرزی (۲۷) را به صورت زیر بازنویسی نمود.

() نشان‌دهنده مشتق نسبت به متغیر x است.

گاهی ساده و گیردار تحت بارگذاری گرمایی ارائه شده است. تغییرات ضخامت به دو صورت خطی و سهموی در نظر گرفته شده است. از آنجا که مسئله حاضر تا به حال بررسی نشده است، در پژوهش‌های پیشین نتایجی به منظور مقایسه وجود ندارد. بنابراین در ابتدا به منظور صحت‌گذاری بر معادلات و روش حل، مسئله برای صفحات ضخامت متغیر همگن حل می‌شود. بعد از اطمینان از صحت و دقت روش مورد استفاده، رفتار کماتش صفحات دایره‌ای ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی دوطرفه ارزیابی و نتایج عددی ارائه شده است.

۴-۱- صفحات همگن

از آنجا که تعیین چگونگی توزیع بار پیش کماتش در راستای شعاعی پیش نیاز حل معادلات پایداری است، در ابتدا باید صحت نتایج بدست آمده برای بار پیش کماتش از حل معادله غشایی ارزیابی شود. با استفاده از رابطه بین تابع تنش و نیروی پیش کماتش (۳۳) می‌توان تغییرات تابع تنش بدون بعد f بر حسب مختصات شعاعی بدون بعد r/b را برای مقادیر مختلف پارامتر تغییر ضخامت Ω تحت بارگذاری دمایی مقایسه کرد.

$$f = \frac{r N_{r0}}{b N_{r0}(b)} \quad (33)$$

تغییرات تابع تنش بدون بعد بر حسب مختصات شعاعی بدون بعد r/b برای مقادیر مختلف پارامتر تغییر ضخامت Ω تحت بارگذاری دمایی به صورت افزایش یکنواخت دما در شکل ۳ نشان داده شده است. $\Omega = 0.5$ یک صفحه با ضخامت ثابت را نشان می‌دهد که نیروی شعاعی در راستای ضخامت ثابت است و بنابراین تابع تنش بدون بعد به صورت خطی در راستای شعاعی تغییر می‌کند. نتایج نشان می‌دهند که ثابت در نظر گرفتن بار شعاعی پیش کماتش برای صفحات با تغییرات شدید ضخامت، خطای زیادی ایجاد می‌کند.

به منظور صحت‌گذاری بر نتایج بدست آمده از حل معادلات پایداری به روش طیفی میان‌یابی، در ابتدا نتایج برای یک صفحه دایره‌ای ضخیم با ضخامت ثابت با نتایج بدست آمده توسط ونگ و همکارانش [۱۹] با استفاده از روش ریلی ریتز، راجو و راتو [۲۰] به وسیله روش گلرکین و اوزاکسا و همکارانش [۱۳] با به کارگیری روش اجزاء محدود در جدول ۱ مقایسه شده است. نتایج نشان دهنده دقت بالای نتایج بدست آمده به وسیله روش حاضر است.

$$2 \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{i,j}'' + 2 \left[\frac{1}{(x+1)} + \bar{D}'_{11} \right] \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{i,j}' - 2 \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\nu \bar{D}'_{11}}{(x+1)} + \frac{\bar{F}}{4} \right] \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{i,j} - \bar{F} \sum_{j=1}^{n+1} a_j T_{i,j}' = 0 \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j T_{1,j}' = 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{1,j} = 0 \quad (\text{در مرکز})$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j T_{n+1,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{n+1,j} = 0 \quad (\text{لبه با تکیه‌گاه گیردار})$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j T_{n+1,j} = 0 \quad (\text{لبه با تکیه‌گاه ساده})$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} b_j T'_{n+1,j} + \frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^{n+1} b_j T_{n+1,j} = 0 \quad (30)$$

با توجه به وجود دو متغیر مستقل، برای حل معادلات به معادله $(2n+2)$ جبری نیاز است. معادلات مربوط به شرایط مرزی (۳۰)، چهار معادله جبری در اختیار می‌دهند. $(2n-2)$ معادله مورد نیاز باقیمانده با انتخاب $(n-1)$ نقطه بر هم‌آوری و ارضای معادلات (۲۹) در این نقاط، تأمین می‌شوند.

در روش طیفی میان‌یابی، ضرایب مجهول با ارضای معادله دیفرانسیل در نقاط بر هم‌آوری بدست می‌آیند. هنگام استفاده از چند جمله‌ای‌های چیبیشف به عنوان توابع پایه، برای دست‌یابی به خطای کمینه، نقاط برهم‌آوری بر اساس شبکه‌بندی بهینه چیبیشف-گوس-لوباتو^۱ به صورت زیر انتخاب می‌شوند.

$$x(i) = -\cos\left(\frac{i\pi}{n-2}\right) \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (31)$$

در بارگذاری گرمایی، پارامتر بدون بعد کماتش λ_T از رابطه (۳۲) تعیین می‌شود. در این رابطه، ν_f و α_c به ترتیب نشان دهنده نسبت پواسون ماده تابعی دوطرفه و ضریب انبساط حرارتی سرامیک، ΔT_{cr} دمای بحرانی و h_0 ضخامت صفحه ضخامت ثابتی با همان حجم ماده استفاده شده است [۱۵].

$$\lambda_T = 12(1 + \nu_f) \Delta T_{cr} \alpha_c \left(\frac{b}{h_0}\right)^2 \quad (32)$$

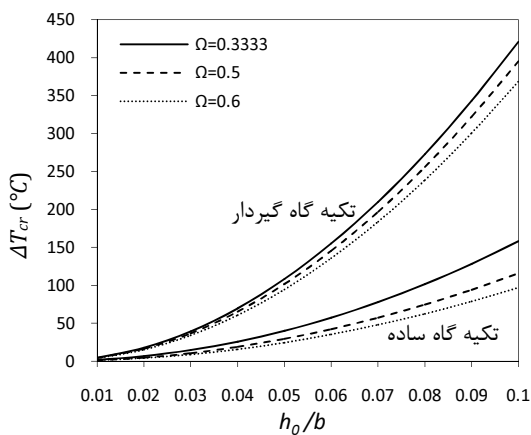
۴- بحث و نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی تحلیل کماتش صفحات دایره‌ای ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی دوطرفه در شرایط تکیه

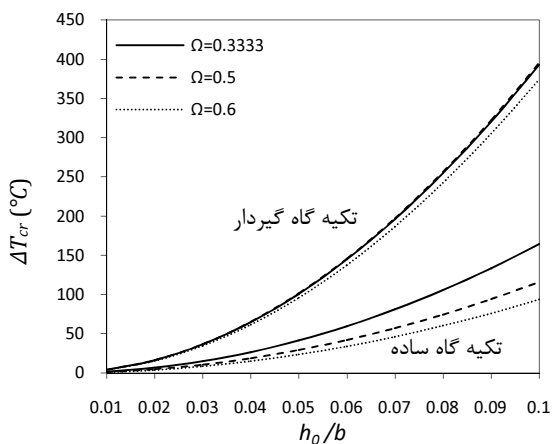
1. Chebyshev-Gauss-Lobatto Grid

پس از بررسی صحت نتایج معادلات پایداری برای صفحات با ضخامت ثابت، رفتار کمانش صفحات دایره‌ای ضخامت متغیر برای مقادیر مختلف پارامتر تغییر ضخامت Ω و نسبت جانبی h_1/b در جدول ۲ آورده شده است و با نتایج ارائه شده توسط راجو و راثو [۱۲] با به کارگیری روش اجزاء محدود مقایسه شده است. لازم به ذکر است که به خاطر امکان مقایسه، استثنائاً در این جدول برای محاسبه پارامتر کمانش گرمایی به جای استفاده از h_0 (ضخامت صفحه ضخامت ثابت معادل) از h_1 (یعنی ضخامت صفحه در مرکز) استفاده شده است.

شکل ۴، تغییرات دمای بحرانی کمانش ΔT_{cr} را بر حسب نسبت جانبی h_0/b برای مقادیر مختلف پارامتر Ω نشان می‌دهد.



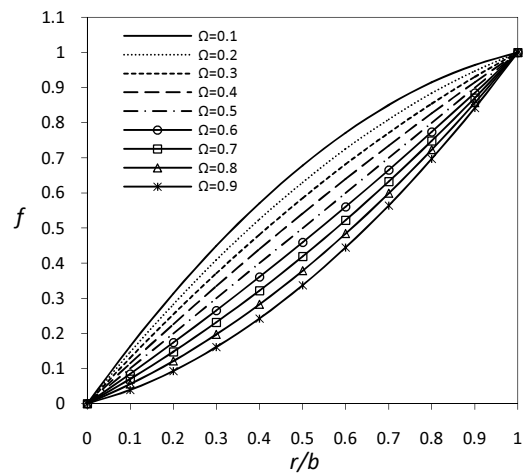
الف) تغییر ضخامت خطی



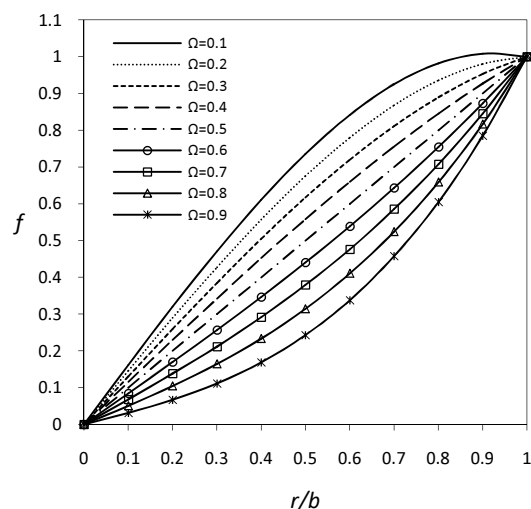
ب) تغییر ضخامت سهموی

شکل ۴ تغییرات دمای بحرانی کمانش برای تکیه‌گاه گیردار و ساده

با بررسی نتایج مشاهده می‌شود که افزایش نسبت جانبی h_0/b سبب کاهش پارامتر کمانش می‌شود. علت این امر افزایش تأثیر تغییر مکان‌های برشی جانبی با افزایش ضخامت صفحه است. این واقعیت در تئوری کلاسیک قابل مشاهده نیست و بنابراین تئوری کلاسیک دمای بحرانی کمانش را بیشتر از مقدار واقعی برآورد می‌کند و با افزایش ضخامت صفحه این خطا آشکار تر می‌شود. دلیل این امر از زاویه دیگر این است که چون تئوری کلاسیک درجات آزادی کمتری برای المان‌های سازه در نظر می‌گیرد، سازه سفت تر و مقاومت آن نسبت به تئوری‌های برشی بیشتر در نظر گرفته می‌شود و بنابراین دمای بحرانی کمانش را بیشتر از مقدار واقعی برآورد می‌کند.



الف) تغییر ضخامت خطی



ب) تغییر ضخامت سهموی

شکل ۳ تغییرات تابع تنش بدون بعد نسبت به موقعیت شعاعی بدون بعد به ازای مقادیر مختلف پارامتر تغییر ضخامت Ω .

جدول ۱ مقایسه پارامتر کمانش h_p صفحه دایره‌ای همگن با ضخامت ثابت

h_0/b					مراجع	نوع تکیه‌گاه
۰/۲	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۱	۰/۰۰۱		
۱۲/۵۷۲۵	۱۴/۰۹۰۹	۱۴/۵۲۹۶	۱۴/۶۷۵۹	۱۴/۶۸۱۹	نتایج حاضر	گیردار
۱۲/۵۷۲۵	۱۴/۰۹۰۹	۱۴/۵۲۹۶	۱۴/۶۷۵۹	۱۴/۶۸۱۹	ونگ و همکارانش [۱۹]	
۱۲/۵۷۲۵	۱۴/۰۹۱۰	۱۴/۵۲۹۹	-	۱۴/۶۸۲۵	راجو و راثو [۲۰]	
۱۲/۲۸۴۳	۱۳/۹۸۸۵	۱۴/۵۰۱۴	۱۴/۶۷۴۶	۱۴/۶۸۱۹	اوزاکسا و همکارانش [۱۳]	
۱۴/۶۸۴۲	۱۴/۶۸۴۲	۱۴/۶۸۴۲	۱۴/۶۸۴۲	۱۴/۶۸۴۲	تیموشنکو و گیر [۳]	
۴/۰۰۵۶	۴/۱۴۸۰	۴/۱۸۲۵	۴/۱۹۷۳	۴/۱۹۷۸	نتایج حاضر	ساده
۴/۰۰۵۶	۴/۱۴۸۰	۴/۱۸۵۳	۴/۱۹۷۳	۴/۱۹۷۸	ونگ و همکارانش [۱۹]	
۴/۰۰۵۶	۴/۱۴۸۱	۴/۱۸۵۲	-	۴/۱۹۷۸	راجو و راثو [۲۰]	
۳/۹۹۳۸	۴/۱۴۴۸	۴/۱۸۴۴	۴/۱۹۷۲	۴/۱۹۷۸	اوزاکسا و همکارانش [۱۳]	
۴/۲۰۲۵	۴/۲۰۲۵	۴/۲۰۲۵	۴/۲۰۲۵	۴/۲۰۲۵	تیموشنکو و گیر [۳]	

جدول ۲ مقایسه پارامتر کمانش حرارتی h_p صفحات دایره‌ای ضخامت متغیر همگن با تغییرات ضخامت خطی

h_1/b							Ω	نوع تکیه‌گاه	
۰/۱۵	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱			
نتایج ما	[۱۲]	نتایج ما	[۱۲]	نتایج ما	[۱۲]	نتایج ما	[۱۲]	گیردار	
۷/۹۲۴۱	۷/۸۸۷۸	۸/۱۵۶۲	۸/۱۲۰۰	۸/۳۰۲۰	۸/۲۶۶۰	۸/۳۵۱۷	۸/۳۱۶۰		۰/۳۷۵۰
۹/۲۳۳۳	۹/۲۱۶۳	۹/۵۴۸۸	۹/۵۳۲۰	۹/۷۴۸۷	۹/۷۳۲۱	۹/۸۱۷۱	۹/۸۰۰۸		۰/۴۱۱۸
۱۰/۵۸۴۱	۱۰/۵۸۳۵	۱۱/۰۰۰۱	۱۰/۹۹۹۹	۱۱/۲۶۵۷	۱۱/۲۶۶۰	۱۱/۳۵۷۲	۱۱/۳۵۷۸		۰/۴۴۴۴
۱۱/۹۸۳۰	۱۱/۹۸۴۹	۱۲/۵۱۸۶	۱۲/۵۲۰۸	۱۲/۸۶۳۶	۱۲/۸۶۶۰	۱۲/۹۸۲۹	۱۲/۹۸۵۵		۰/۴۷۳۷
۱۳/۴۱۵۷	۱۳/۴۱۵۹	۱۴/۰۹۰۹	۱۴/۰۹۱۱	۱۴/۵۲۹۶	۱۴/۵۲۹۹	۱۴/۶۸۱۹	۱۴/۶۸۱۹		۰/۵۰۰۰
۱۴/۸۸۱۸	۱۴/۸۷۱۹	۱۵/۷۱۷۸	۱۵/۷۰۷۶	۱۶/۲۶۶۱	۱۶/۲۵۵۷	۱۶/۴۵۷۴	۱۶/۴۴۷۲		۰/۵۲۳۸
۱۶/۳۸۱۳	۱۶/۳۴۸۵	۱۷/۴۰۱۳	۱۷/۳۶۶۹	۱۸/۰۷۶۶	۱۸/۰۴۱۲	۱۸/۳۱۳۳	۱۸/۲۷۸۰		۰/۵۴۵۵
۱۷/۸۹۷۰	۱۷/۸۴۱۴	۱۹/۱۲۳۳	۱۹/۰۶۵۸	۱۹/۹۴۳۲	۱۹/۸۸۴۴	۲۰/۲۳۲۲	۲۰/۱۷۳۴		۰/۵۶۵۲
۱۹/۴۳۶۸	۱۹/۳۴۶۷	۲۰/۸۹۴۴	۲۰/۸۰۱۰	۲۱/۸۷۸۷	۲۱/۷۸۳۳	۲۲/۲۲۷۶	۲۲/۱۳۱۹		۰/۵۸۳۳
۲/۸۰۵۷	۲/۶۹۵۶	۲/۸۳۵۳	۲/۷۲۴۲	۲/۸۵۳۴	۲/۷۴۱۷	۲/۸۵۹۵	۲/۷۴۷۶		۰/۳۷۵۰
۳/۱۰۸۵	۳/۰۲۴۸	۳/۱۴۴۴	۳/۰۵۹۹	۳/۱۶۶۳	۳/۰۸۱۳	۳/۱۷۳۷	۳/۰۸۸۵		۰/۴۱۱۸
۳/۴۲۱۲	۳/۳۶۵۴	۳/۴۶۴۳	۳/۴۰۷۸	۳/۴۹۰۶	۳/۴۳۳۸	۳/۴۹۹۵	۳/۴۴۲۵		۰/۴۴۴۴
۳/۷۴۸۰	۳/۷۱۹۲	۳/۷۹۹۲	۳/۷۷۰۱	۳/۸۳۰۷	۳/۸۰۱۲	۳/۸۴۱۳	۳/۸۱۱۸		۰/۴۷۳۷
۴/۰۸۷۵	۴/۰۸۷۵	۴/۱۴۸۰	۴/۱۴۸۱	۴/۱۸۵۲	۴/۱۸۵۳	۴/۱۹۷۸	۴/۱۹۷۸		۰/۵۰۰۰
۴/۴۴۱۳	۴/۴۷۱۲	۴/۵۱۲۴	۴/۵۴۲۸	۴/۵۵۶۱	۴/۵۸۶۹	۴/۵۷۰۹	۴/۶۰۱۸	۰/۵۲۳۸	
۴/۸۱۰۹	۴/۸۷۰۹	۴/۸۹۳۹	۴/۹۵۵۰	۴/۹۴۵۱	۵/۰۰۶۹	۴/۹۶۲۵	۵/۰۲۴۴	۰/۵۴۵۵	
۵/۱۹۳۲	۵/۲۸۶۹	۵/۲۸۹۶	۵/۳۸۵۲	۵/۳۴۹۲	۵/۴۴۵۹	۵/۳۶۹۴	۵/۴۶۶۵	۰/۵۶۵۲	
۵/۵۹۱۴	۵/۷۱۹۵	۵/۷۰۲۸	۵/۸۳۳۷	۵/۷۷۱۸	۵/۹۰۴۵	۵/۷۹۵۲	۵/۹۸۲۴	۰/۵۸۳۳	

ضخیم‌تر شدن صفحه و افزایش استحکام آن می‌شود و دمای بحرانی کمانش را افزایش می‌دهد.

هر چند که افزایش نسبت جانبی به علت افزایش تغییر مکان‌های برشی باعث کاهش پارامتر بدون بعد کمانش h_p می‌شود، اما باید توجه کرد که افزایش نسبت جانبی باعث

۴-۲- صفحات از جنس مواد تابعی دوطرفه

در این بخش، پس از بررسی صحت نتایج، رفتار کماتش صفحات دایره‌ای از جنس مواد تابعی دوطرفه با ضخامت متغیر تحت بارگذاری گرمایی ارزیابی و نتایج عددی ارائه شده است. ماده تابعی دوطرفه به صورت ترکیبی از آلومینیم (Al) به عنوان فلز و زیرکونیا (ZrO_2) به عنوان سرامیک در نظر گرفته می‌شود. خواص مکانیکی و گرمایی برای آلومینیم و زیرکونیا در جدول ۳ بیان شده است [۲۱].

شکل‌های ۵ تا ۸ ارتباط بین پارامتر کماتش λ_T و شاخص کسر حجمی N را برای مقادیر مختلف پارامتر تغییر ضخامت Ω در شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده نشان می‌دهد. نسبت جانبی $h_0/b=0.106$ و تغییر ضخامت خطی و سهموی در نظر گرفته شده است. دیده می‌شود که افزایش شاخص کسر حجمی سبب افزایش پارامتر کماتش می‌شود. دلیل این امر این است که افزایش شاخص کسر حجمی باعث افزایش کسر حجمی سرامیک در صفحه می‌شود که ضریب انبساط حرارتی آن کمتر از فلز است. در نتیجه تحت یک بارگذاری دمایی مشخص، نیروی فشاری کمتری در صفحه ایجاد شده و مقاومت صفحه در برابر کماتش افزایش می‌یابد. دیده می‌شود که افزایش شاخص کسر حجمی در گستره تقریبی بین صفر تا ۱۰ باعث افزایش قابل توجه در پارامتر کماتش می‌شود و پس از آن به تدریج تا رسیدن به یک صفحه کاملاً سرامیک افزایش می‌یابد.

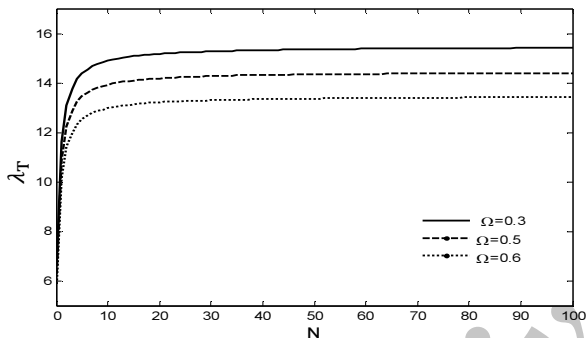
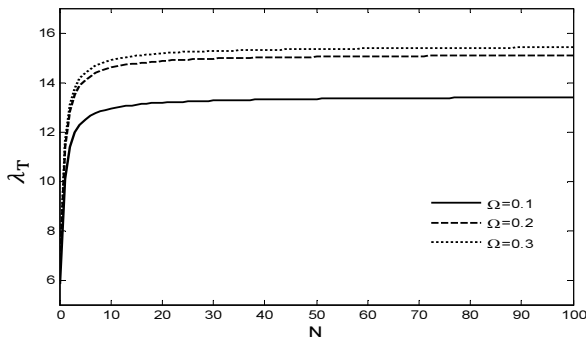
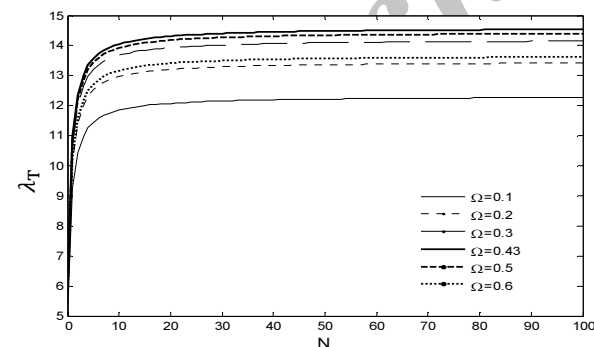
همان طور که در شکل ۵ دیده می‌شود، به ازای افزایش پارامتر تغییر ضخامت از ۰/۱ تا ۰/۳ پارامتر کماتش افزایشی و از ۰/۳ تا ۰/۶ پارامتر کماتش کاهش می‌یابد و برای $\Omega=0.43$ و شاخص کسر حجمی بیشتر از ۱۰، بیشترین مقدار پارامتر کماتش را در شرایط تکیه‌گاهی گیردار برای $h_0/b=0.106$ و $p=1$ خواهیم داشت.

جدول ۳ خواص تشکیل دهنده مواد تابعی دوطرفه.

ماده	مدول الاستیسیته (GPa)	نسبت پواسون	ضریب انبساط حرارتی ($1/^\circ C$)
آلومینیم	۷۰	۰/۳	23×10^{-6}
زیرکونیا	۱۵۱	۰/۳	10×10^{-6}

در شکل ۶، به ازای افزایش پارامتر تغییر ضخامت از ۰/۱ تا ۰/۴۳ پارامتر کماتش افزایشی و از ۰/۴۳ تا ۰/۶ پارامتر کماتش

کاهشی است و برای $\Omega=0.43$ و شاخص کسر حجمی بیشتر از ۱۰، بیشترین مقدار پارامتر کماتش برای $h_0/b=0.106$ و $p=2$ در شرایط تکیه‌گاهی گیردار خواهیم داشت.

شکل ۵ تغییرات پارامتر کماتش λ_T نسبت به N برای تکیه‌گاه گیردار و تغییر ضخامت خطی.شکل ۶ تغییرات پارامتر کماتش λ_T نسبت به N برای تکیه‌گاه گیردار و تغییر ضخامت سهموی.

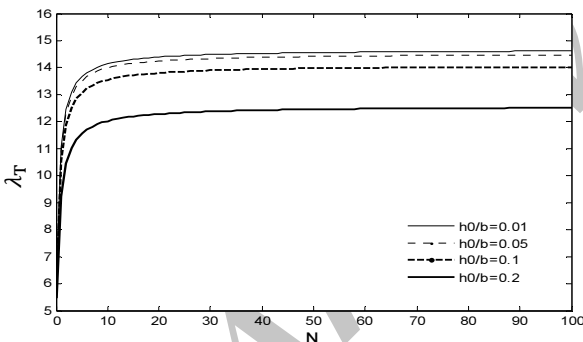
همان طور که در شکل ۷ و ۸ دیده می‌شود، به ازای افزایش پارامتر تغییر ضخامت از ۰/۱ تا ۰/۹ پارامتر کماتش، کاهشی به نظر می‌رسد و باید تغییرات با حساسیت بیشتری بررسی شود.

h_0/b را نشان می‌دهد. نتایج برای صفحات با ضخامت ثابت $(\Omega=0.5)$ و در شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده ارائه شده است.

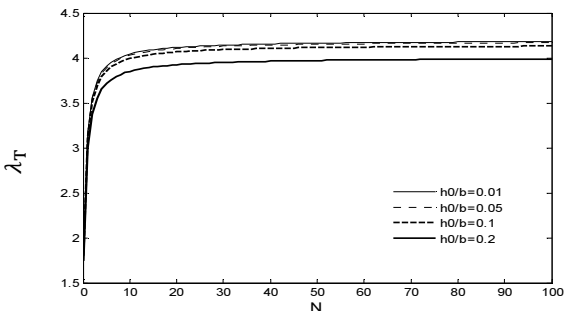
۵- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر رفتار کماتش صفحات از جنس مواد تابعی دوطرفه با ضخامت متغیر تحت بارگذاری گرمایی به صورت افزایش یکنواخت دما براساس تئوری برشی مرتبه اول و میدان جابجایی فون-کارمن مطالعه شده است. به علاوه دو مدل برای صفحات ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی متناظر با دو روش ساخت پیشنهاد شده است. در ادامه نتایج بدست آمده از این پژوهش جمع‌بندی می‌شود:

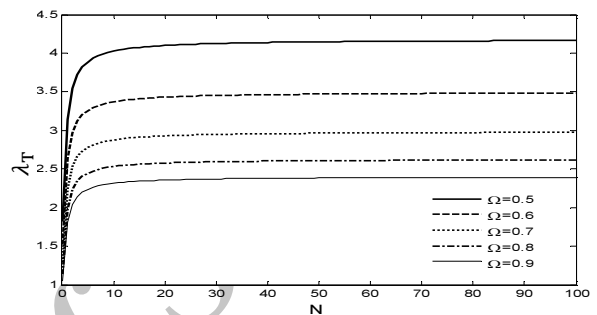
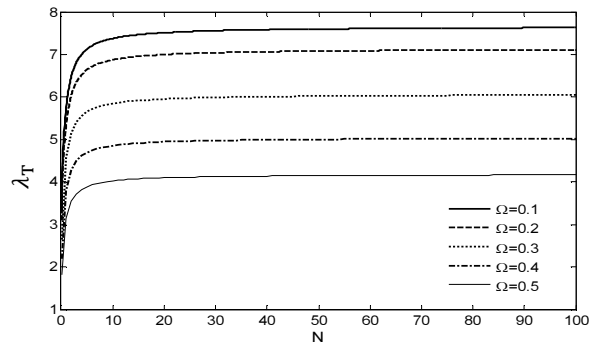
در صفحات دایروی از جنس مواد تابعی یک‌طرفه که تحت بارگذاری حرارت یکنواخت می‌باشد، عدم تقارن مواد نسبت به سطح میانی باعث عدم دستیابی به دمای بحرانی کماتش در شرایط تکیه‌گاهی ساده می‌شود. اما در صفحات از جنس مواد تابعی دوطرفه به علت وجود تقارن مواد نسبت به سطح میانی، گشتاور حرارتی بوجود نیامده و امکان بررسی رفتار کماتش در شرایط تکیه‌گاه ساده و گیردار وجود خواهد داشت.



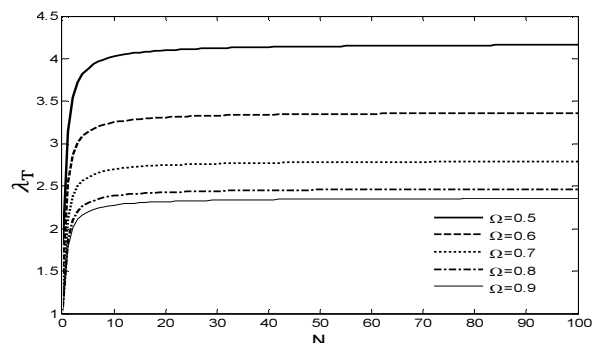
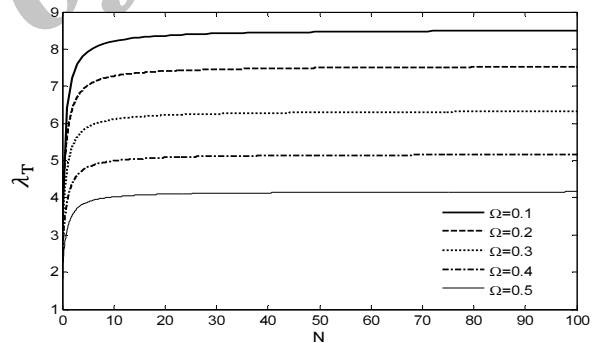
شکل ۹ تغییرات پارامتر کماتش λ_T نسبت به N برای مقادیر مختلف h_0/b برای تکیه‌گاه گیردار



شکل ۱۰ تغییرات پارامتر کماتش λ_T نسبت به N برای مقادیر مختلف h_0/b برای تکیه‌گاه ساده.



شکل ۷ تغییرات پارامتر کماتش λ_T نسبت به N برای تکیه‌گاه ساده و تغییر ضخامت خطی



شکل ۸ تغییرات پارامتر کماتش λ_T نسبت به N برای تکیه‌گاه ساده و تغییر ضخامت سهموی.

شکل‌های ۹ و ۱۰ تغییرات پارامتر کماتش λ_T و شاخص کسر حجمی N برای مقادیر مشخص نسبت ضخامت به بعد جانبی

- [2] Brayan G.H., "On the Stability of a Plane Plate under Thrust in Its Own Plane with Application to the Buckling of the Side of a Ship", *In Proce London Mathematical Society*, Vol. 22, 1891, pp. 54-67.
- [3] Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., New York, McGraw-Hill, 1961.
- [4] Brush D.O., Almroth B.O., *Buckling of Bars, Plates and Shells*, New York, McGraw-Hill, 1975.
- [5] Yamaki N., "Buckling of a Thin Annular Plate under Uniform Compression", *J. Applied Mechanics*, Vol. 25, 1958, pp. 267-273.
- [6] Reddy J.N., Khdeir A.A., "Buckling and Vibration of Laminated Composite Plate using Various Plate Theories", *J. AIAA*, Vol. 27, 1989, pp. 1808-1817.
- [7] Najafzadeh M.M., Eslami M.R., "First-Order-Theory-Based Thermoelastic Stability of Functionally Graded Material Circular Plates", *J. AIAA*, Vol. 40, 2002, pp. 444-50.
- [8] Najafzadeh M.M., Hedayati B., "Refined Theory for Thermoelastic Stability of Functionally Graded Circular Plates", *J. Thermal Stresses*, Vol. 27, 2004, pp. 857-880.
- [9] Najafzadeh M.M., Heydari H.R., "Thermal Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory", *J. Mech A/Solids*, Vol. 23, 2004, pp. 1085-1100.
- [10] Sepahi O., Forouzan M.R., Malekzadeh P., "Thermal Buckling and post Buckling Analysis of Functionally Graded Annular Plates with Temperature-Dependent Material Properties", *J. Mater and Design*, Vol. 32, 2011, pp. 4030-4041.
- [11] Wang C.M, Hong G.M, Tan T.J, "Elastic Buckling of Tapered Circular Plates", *J. Computers & Structures*, Vol. 55, 1995, pp. 1055-1061.
- [12] Raju K.K., Rao G.V., "Thermal Post-Buckling of Linearly Tapered Moderately Thick Isotropic Circular Plates", *J. Computer & Structures*, Vol. 58, 1996, pp. 655-658.
- [13] Ozakca M., Taysi N., Kolcu F., "Buckling Analysis and Shape Optimization of Elastic Variable Thickness Circular and Annular Plates-I. Finite Element Formulation", *J. Eng Struct*, Vol. 25, 2003, pp. 181-192.
- [14] Naei M.H., Masoumi A., Shamekhi A., "Buckling Analysis of Circular Functionally Graded Material Plate Having Variable Thickness under Uniform Compression by Finite-Element Method", *J. Mech. Eng. Sci*, Vol. 221, 2007, pp. 1241-1247.
- [15] Jalali S.K. , Naei M.H., Pooresolhjouy A., "Thermal Stability Analysis of Circular Functionally Graded Sandwich Plates of Variable Thickness using Pseudo-Spectral Method", *J. Material and Design*, Vol. 31, 2010, pp. 4755-4763.
- [16] Li Sh.R., Zhang J.H., Zhao Y.G., "Nonlinear Thermomechanical Post-Buckling of Circular FGM

به منظور تحلیل کمانش صفحات نیاز به حل معادلات غشایی برای یافتن بار پیش کمانش است. در صفحات با ضخامت متغیر معادله غشایی یک معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر است که استفاده از روش‌های عددی مناسب‌ترین راه حل است. در این پژوهش روش پرتاب که بطور همزمان از روش رانج-کوتای مرتبه چهار و تصحیح نیوتن رافسون استفاده می‌کند، برای حل معادله غشایی بکار گرفته شده است. با توجه به دقت مناسب نتایج بدست آمده و سادگی آن برای حل معادلات خطی، استفاده از این روش برای حل معادله غشایی صفحات ضخامت متغیر توصیه می‌شود. معادلات پایداری در واقع یک دستگاه معادلات همگن هستند که حل آنها منجر به حل یک مسئله مقدار ویژه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از روش طیفی میان‌یابی براساس توابع پایه چیبیشف برای مسئله کمانش صفحات دایره‌ای ضخامت متغیر روش حل مناسبی است و حتی برای صفحات با تغییرات ضخامت زیاد، همگرایی دارد.

با بررسی تأثیر پارامتر تغییر ضخامت Ω بر پارامتر کمانش حرارتی λ_T برای صفحات از جنس مواد تابعی دوطرفه تحت بارگذاری گرمایی، مشاهده می‌شود که یک مقدار بهینه برای پارامتر Ω برای نسبت ضخامت به بعد جانبی $h_0/b=0.106$ در شرایط تکیه‌گاهی گیردار وجود دارد که به ازای آن پارامتر کمانش بهینه می‌شود. به دلیل تغییرات شدید پارامتر Ω برای شرایط تکیه‌گاه ساده، مقدار بهینه بدست نیامده است.

با بررسی نتایج مشاهده می‌شود که افزایش نسبت ضخامت به بعد جانبی h_0/b سبب کاهش پارامتر کمانش می‌شود. در نتایج مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص کسر حجمی، کسر حجمی سرامیک افزایش می‌یابد و چون سفتی سرامیک از سفتی فلز بیشتر و انبساط حرارتی آن از فلز کمتر است، به این خاطر افزایش کسر حجمی سرامیک، مقاومت به کمانش حرارتی را افزایش می‌دهد.

همچنین در نتایج مشاهده می‌شود که مقاومت به کمانش حرارتی مواد تابعی دوطرفه در تکیه‌گاه گیردار بیش از ۳ برابر تکیه‌گاه ساده می‌باشد. نتیجه فوق برای مواد همگن نیز مشاهده شده است [۳].

۶- مراجع

- [1] Koizumi M., "The Concept of FGM", *J. Ceram Trans Func Grad Mater*, Vol. 34, 1993, pp. 3-10.

- [19] Wang C.M., Xiang Y., Kitipornchai S., Liew K.M., "Axisymmetric Buckling of Circular Mindlin Plates with Ring Supports", *J. Struct. Eng.*, Vol. 119, 1993, pp. 782-793.
- [20] Raju K.K., Rao G.V., "Finite Element Analysis of Post-Buckling Behavior of Cylindrical Orthotropic Circular Plates", *J. Fibre. Sci. Technol.*, Vol. 19, 1983, pp. 145-154.
- [21] Reddy J.N., "Analysis of Functionally Graded Plates", *J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, 2000, pp. 663-684.
- Plate with Geometric Imperfection", *J. Thin-Walled Structures*, Vol. 45, 2007, pp. 528-536.
- [17] Shen H.Sh., "Thermal Postbuckling Behavior of Shear Deformable FGM Plates with Temperature-Dependent", *J. Mechanical Sciences*, Vol. 49, 2007, pp. 466-478.
- [18] Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, New York, Dover, 2000.

Archive of SID