http://mechanics.journals.modares.ac.ir
مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۲ شماره ۶، اسفند ۱۳۹۱ ص ص ۶۹-۷۹
تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۱/۲/۲۰
پذیرش ۹۱/۶/۲۸
ارائه در سایت ۹۱/۹/۳۰

پایداری یک سیستم متشکل از سه محور با اتصال هوک

مسعود سلطان‌رضایی[۱]، محمدرضا قضاوی[۲*]، علی‌اصغر جعفری[۳]، اصغر نجفی[۴]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
۳- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر، تهران
۴- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، صندوق پستی ۱۱۱-۱۴۱۱۵، ghazavim@modares.ac.ir

چکیده- در این پژوهش، پایداری دینامیکی یک سیستم شامل سه شافت الاستیک پیچشی غیر هم‌محور به وسیله مدل سه درجه آزادی، که حالت فضایی (سه بعدی) دارد، بررسی شده است. شافت‌ها با دو اتصال هوک متصل گشته‌اند و در انتهای هر کدام، یک دیسک صلب قرار دارد. ابتدا معادلات حرکت برای سیستم استخراج شده است و پس از خطی‌کردن معادلات دیفرانسیل، به صورت دستگاه معادلات متیو- هیل بیان گردیده و پایداری مجموعه به روش مندرمی ماتریس تحلیل شده است. در انتها محدوده پایداری دینامیکی بر حسب پارامترهای سیستم از قبیل سرعت دورانی، زاویه محور شافت‌ها با یکدیگر، سختی و استحکام شافت‌ها بیان گردیده است. نمودارهای پایداری بر اساس پارامترهای مختلف ارائه شده است و مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت اینرسی دیسک‌ها و همچنین با کاهش زاویه اتصال هوک، پایداری افزایش می‌یابد.

کلیدواژگان: پایداری دینامیکی، سیستم شافت، ارتعاشات پیچشی، اتصال هوک

Stability of a system consisting of three-axis connected through Hooke's joints

M. Soltan Rezaee[1], M. R. Ghazavi[2]*, A. A. Jafari[3], A. Najafi[4]

1- MSc. Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran
2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran
3- Assoc. Prof., Mech. Eng., K. N. Toosi Univ. of Tech., Tehran, Iran
4- PhD Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran
* P. O. B. 14115-111 Tehran, ghazavim@modares.ac.ir

Abstract- In this study, dynamic stability of a system consisting of three torsionally elastic shafts with different rotation axises is analyzed. The system stability have been investigated by means of a three degree-of-freedom model in a spatial coordinate (three dimensional). Each shaft carrying a rigid disk at one end and have been linked through two Hooke's joints. Equations of motion for the system were derivated and after linearization of the differential equations are shown to consist of a set of Mathieu-Hill equations. Their stability are analyzed by means of a monodromy matrix method. Finally dynamic stability regions have been shown on system parameters such as rotational velocity, misalignment angle of shaft axis, stiffness and rigidity of shafts. The stability charts constructed on various parameters. It was observed that with increasing inertia disk ratio and decreasing hooke's joint angle cause more stability.

Keywords: Dynamic Stability, Shaft System, Torsional Vibration, Hooke's Joint

۱- مقدمه

سیستم شافت یکی از انواع سیستم‌های انتقال قدرت است که به خاطر داشتن سرعت بالا و وزن کم کاربردهای زیادی دارد. این سیستم مجموعه‌ای است که از چند شافت متصل به هم تشکیل شده است و در آن حرکت دورانی از شافت راننده به شافت(های) پیرو منتقل می‌شود. بر اساس کاربرد این مجموعه، محور شافت‌ها می‌توانند ناهم‌راستا باشند. برای اتصال شافت‌های غیرهم‌محور، روش‌های زیادی وجود دارد[۱]. یک راه متداول استفاده از اتصال هوک[۱] است که با نام‌های دیگری از جمله اتصال کاردان[۲]، اتصال یونیورسال[۳] و اتصال U[۴] نیز شناخته می‌شود. مزیت این اتصال نسبت به بقیه اتصالات و کوپلینگ‌های بین شافت‌ها[۵] تحمل گشتاور و نیروی محوری بالا، کار در زاویه‌های ناهم‌راستایی نسبتاً زیاد، قیمت پایین و تعمیر آسان می‌باشد. البته استفاده از این اتصال مشکلاتی نیز دارد؛ ناهم‌راستایی سبب می‌شود شافت(های) پیرو نوسان متناوب داشته باشد (حتی اگر سرعت شافت راننده ثابت باشد) که این نوسان ارتعاشات پیچشی را از شافت راننده به شافت(های) پیرو منتقل می‌کند و این امر می‌تواند موجب ناپایداری سیستم شود.

پرتر[۲] یک مدل یک درجه آزادی خطی از سیستم شافت را درنظر گرفت و مورد بررسی قرار داد. او با استفاده از تئوری فلوکه[۶] موفق به تهیه جدولی برای پیش‌بینی نواحی تشدید پارامتری اولیه شد. سپس پرتر و گرگری[۳] یک مدل یک درجه آزادی غیرخطی را درنظر گرفتند. آن‌ها با استفاده از روش پون‌کاره-لیاپانوف[۷] رفتار سیستم را مورد مطالعه قرار دادند. ایدینف و همکارانش[۴] به بررسی سیستمی که خیلی شبیه مدل قبل بود با همان روش پرداختند. چانگ[۵]، برای دستیابی به تقریب‌های مرتبه بالاتر، هر دو مدل یک درجه آزادی خطی و غیرخطی را مطالعه نمود. او تحلیل پایداری سیستم را به روش پرتربیشن[۸] انجام داد. آسوکتان و هوانگ[۶] به یک مدل دو درجه آزادی خطی پرداختند و از یک روش میانگین‌گیری برای تعیین نواحی تشدید پارامتری اولیه بهره بردند. همچنین آسوکتان و وانگ[۷] مدلی مشابه [۶] را به روش توان لیاپانوف[۹] بررسی نمودند. بعد از آن آسوکتان و میهن[۸] یک مدل دو درجه آزادی غیرخطی را مورد مطالعه قرار دادند و با روش عددی، بعضی رفتار نامنظم سیستم را به‌دست آوردند. دی‌اسمیت و همکارانش[۹] یک مدل دو درجه آزادی با استهلاک ویسکوز درنظر گرفتند و ناپایداری سیستم را با تئوری فلوکه بررسی کردند.

مازآی و همکارانش[۱۰] به مطالعه یک سیستم شافت با یک اتصال هوک پرداختند و نواحی ناپایداری را به روش مندرمی ماتریس[۱۰] به‌دست آوردند. آن‌ها[۱۱] تأثیر وجود مستهلک‌کننده در پایداری سیستم را در مدل انعطاف‌پذیر خطی و نیز مدل صلب خطی و غیرخطی بررسی کردند. همچنین در مقاله دیگری[۱۲] کمترین مقدار استهلاک مورد نیاز سیستم را برای انتقال از ناحیه ناپایدار پارامتریک به پایدار به‌دست آوردند. آن‌ها برای این منظور یک مدل صلب بر اساس مدل سایگو[۱۳] درنظر گرفتند و نواحی ناپایداری را به روش نامحدود هیل[۱۱] تخمین زدند. مازای و اسکات[۱۴] به بررسی یک مدل دو درجه آزادی با سرعت ورودی شتابدار پرداختند. سرعت زاویه‌ای شافت راننده از کمتر از مقداری که موجب تشدید سیستم شود شروع می‌شد و به صورت خطی افزایش می‌یافت. آن‌ها این مسئله را به روش مندرمی ماتریس و تعیین نامحدود هیل تحلیل کردند. سپس مازای[۱۵] به مطالعه درباره تشدید در سیستم انتقال قدرت و عبور از آن حالت پرداخت. او مدلی مانند [۱۴] درنظر گرفت. مازای معادلات دیفرانسیل ناهمگن سیستم را که معادلاتی با دوره تناوب مشخص بود استخراج و به روش انرژی بررسی کرد که یک سیستم به چه میزان می‌تواند در حالت تشدید بماند، بدون آنکه به آن آسیبی وارد شود.

بولوت[۱۶] به بررسی پاسخ فرکانسی شافت‌های دوار غیرخطی در سیستم محور دو درجه آزادی پرداخت و به همراه پارلار[۱۷] یک مدل دو بعدی غیرخطی را خطی‌سازی کرده، تحلیل پایداری آن را به کمک روش مندرمی ماتریس انجام دادند.

1. Hooke's joint
2. Cardan joint
3. Universal joint
4. U joint
5. Shaft couplings
6. Floquet theory
7. Poincare-lyapunov
8. Perturbation method
9. Lyapunov exponent
10. Monodromy matrix method
11. Hill's infinite method

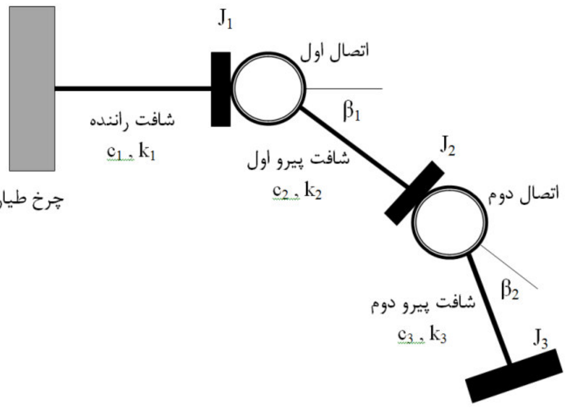
هدف از این پژوهش، تحلیل پایداری یک سیستم متشکل از سه محور با اتصال هوک است. در کارهای گذشته، پژوهشگران به مطالعه سیستم‌هایی با یک اتصال هوک پرداخته بودند. این سیستم‌ها دارای دو درجه آزادی می‌باشند. در بسیاری از سیستم‌های انتقال قدرت لازم است انتقال سرعت و گشتاور در خارج از صفحه و در محیط فضایی انجام شود. در چنین شرایطی نیاز به مدل سه درجه آزادی است که در آن از دو اتصال هوک برای انتقال حرکت دورانی استفاده می‌شود. در این موارد، تحلیل نواحی ناپایداری و بررسی انواع تشدیدهای سیستم حائز اهمیت است.

از جمله کاربردهای این مدل، استفاده از آن در سیستم انتقال قدرت کامیون‌ها و خودروهای سنگین سه‌محوره می‌باشد. همچنین، در مکان‌هایی که محدودیت فیزیکی وجود دارد و نمی‌توان با استفاده از تنها دو شافت (و با توجه به محدوده زاویه به‌کارگیری اتصال هوک) از مبدا تولید حرکت دورانی به نقطه‌ای رسید که توان و گشتاور مورد نیاز است، به‌کار می‌رود.

۲- شرح مسئله

اگر ضرایب موجود در معادله دیفرانسیل حرکت سیستم دارای پارامترهای تحریک خارجی باشند، در صورتی که فرکانس تحریک خارجی نسبت صحیحی از فرکانس مودهای ارتعاشی سیستم باشد، این ضرایب به صورت تحریک پارامتریک برای سیستم عمل می‌کنند و در نتیجه، ناپایداری پارامتریک در سیستم به‌وجود می‌آید[۱۸]. این نوع ناپایداری، در سیستم محور کمتر بررسی شده و ناشی از کوپلینگ پیچشی اعمالی بر شافت توسط اتصال یا کوپلینگ می‌باشد.

در این مقاله پایداری دینامیکی یک سیستم شافت، که با اتصال هوک متصل گشته، با روش مندرمی ماتریس بررسی شده است. برای این منظور، یک مدل سه درجه آزادی شامل سه شافت الاستیک پیچشی که بدون جرم و غیرهم‌محور بوده و هر کدام در یک سر به دیسکی صلب متصل گشته، درنظر گرفته شده است (شکل ۱). معادلات حرکت سیستم پس از استخراج، خطی‌کردن و بی‌بعدسازی با روش مندرمی ماتریس مورد تحلیل قرار گرفته است. در نهایت نتایج به صورت جداول پایداری بر حسب پارامترهای مختلف سیستم از جمله زاویه محور شافت‌ها و سرعت دوران ورودی گزارش شده است.



شکل ۱ شماتیک یک سیستم شافت در سه بعد (شافت راننده و شافت پیرو دوم می‌توانند در صفحات مختلف باشند.)

۳- مدل ریاضی

در این مدل سه شافت وجود دارد که شافت‌های راننده، پیرو اول و پیرو دوم نامیده شده‌اند. محور شافت‌ها هم‌راستا نیستند و به وسیله اتصال هوک به یکدیگر مرتبط شده‌اند. زاویه ناهم‌راستایی (اختلاف زاویه محورهای) شافت راننده و شافت پیرو اول β_1 و زاویه ناهم‌راستایی شافت پیرو اول و شافت پیرو دوم β_2 نامیده شده است. هر شافت دارای یک درجه آزادی است که در مجموع سیستم دارای سه درجه آزادی بوده و حالت فضایی (سه‌بعدی) دارد (شافت راننده و شافت پیرو دوم می‌توانند در دو صفحه مجزا باشند). هر شافت دارای سختی پیچشی k_i و استهلاک ویسکوز پیچشی c_i است و به یک دیسک با اینرسی دورانی J_i در انتهای سمت راست متصل گشته است. در انتهای سمت چپ شافت راننده، یک چرخ طیار وجود دارد تا این شافت با سرعت ثابت Ω_0 دوران کند. این مدل می‌تواند رفتار مدهای پایه سیستم را نشان دهد و در نتیجه فقط برای سیستم‌هایی می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد که فرکانس‌های پیچشی پایه شافت‌های آن‌ها هم‌مرتبه باشند.

ارتعاشات پیچشی سیستم طبق روابط زیر به‌دست می‌آید (پیوست الف ملاحظه شود).

$$J_1\ddot{\theta}_1 + c_1\dot{\theta}_1 - \eta_{01}c_2\dot{\theta}_2 + k_1\theta_1 - \eta_{01}k_1\theta_2 = 0 \qquad (۱)$$

$$J_2[\ddot{\theta}_2 + \eta_{01}\ddot{\theta}_1 + \dot{\eta}_{01}(\Omega_0 + \dot{\theta}_1)] + c_2\dot{\theta}_2 - \eta_{02}c_3\dot{\theta}_3 + k_2\theta_2 - \eta_{02}k_3\theta_3 = 0 \qquad (۲)$$

$$J_3[\ddot{\theta}_3 + \eta_{02}(\ddot{\theta}_2 + (\eta_{01}\ddot{\theta}_1 + \dot{\eta}_{01}(\Omega_0 + \dot{\theta}_1))) + \dot{\eta}_{02}(\dot{\theta}_2 + \eta_{01}(\Omega_0 + \dot{\theta}_1))] + c_3\dot{\theta}_3 + k_3\theta_3 = 0 \qquad (۳)$$

در این روابط θ_1، θ_2 و θ_3 مختصات پیچشی‌اند و $\dot{\theta}_1$، $\dot{\theta}_2$، $\dot{\theta}_3$ و $\ddot{\theta}_1$، $\ddot{\theta}_2$، $\ddot{\theta}_3$ به‌ترتیب نشان‌دهنده مشتقات اول و دوم نسبت به زمان است. η_{01} و η_{02} نسبت انتقال سرعت در اولین و دومین اتصال هوک می‌باشد[۱۹]

$$\eta_1 = \frac{\Omega_{out\,1}}{\Omega_{in\,1}(=\dot{\varphi}_1)} = \frac{\cos\beta_1}{1-\sin^2\beta_1\sin^2\varphi_1} \tag{۴}$$

$$\eta_2 = \frac{\Omega_{out\,2}}{\Omega_{in\,2}(=\dot{\varphi}_2)} = \frac{\cos\beta_2}{1-\sin^2\beta_2\sin^2\varphi_2} \tag{۵}$$

که در این روابط

$$\varphi_1 = \Omega_0 t + \theta_1 \tag{۶}$$

$$\varphi_2 = \Omega_{out\,1} t + \theta_2 \tag{۷}$$

معادلات حرکت سیستم غیرخطی می‌باشند. با بسط آن‌ها به وسیله سری مک‌لوران $\dot{\theta}_1$، $\dot{\theta}_2$، $\dot{\theta}_3$، $\ddot{\theta}_1$، $\ddot{\theta}_2$ و $\ddot{\theta}_3$ و صرف‌نظر از جملات غیرخطی، با فرض کوچک‌بودن مقادیر ارتعاشی و عدم وجود فرکانس‌های مرتبه بالا، معادلات (۱) تا (۳) به صورت خطی در می‌آیند (پیوست ب ملاحظه شود).

با تعریف پارامترهای بی‌بعد

$$\tau = \Omega_0 t,\ \ \Omega = \frac{\Omega_0}{\sqrt{k_1/J_1}},\ \ \zeta = \frac{c_1}{\sqrt{k_1 J_1}} \tag{۸}$$

معادلات حرکت به صورت بی‌بعد در آمده و در فرم برداری-ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix}\theta_1''\\ \theta_2''\\ \theta_3''\end{Bmatrix} + [E]\begin{Bmatrix}\theta_1'\\ \theta_2'\\ \theta_3'\end{Bmatrix} + [F]\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ -\eta_{01}'(\tau)\\ -\eta_{01}'(\tau)\eta_{02}'(\tau)\end{Bmatrix} \tag{۹}$$

در این رابطه θ_1'، θ_2'، θ_3' و θ_1''، θ_2''، θ_3'' به ترتیب نشان دهنده مشتقات اول و دوم نسبت به τ می‌باشند و E و F ماتریس‌های ۳×۳ هستند که درایه‌هایشان چنین است:

$$E_{11} = 2\zeta/\Omega$$
$$E_{12} = -2\eta_{01}(\tau)\alpha_1\zeta/\Omega$$
$$E_{13} = 0$$
$$E_{21} = \eta_{01}'(\tau) - 2\eta_{01}(\tau)\zeta/\Omega$$
$$E_{22} = 2(\alpha_1\zeta/\Omega)\left(\eta_{01}^2(\tau) + 1/\gamma_1\right)$$
$$E_{23} = -(2\alpha_2\zeta/\Omega\gamma_1)\eta_{02}(\tau)$$
$$E_{31} = \eta_{01}'(\tau)\eta_{02}'(\tau)$$
$$E_{32} = \eta_{02}'(\tau) - (2\alpha_1\zeta/\Omega\gamma_1)\eta_{02}(\tau)$$
$$E_{33} = 2(\alpha_2\zeta/\Omega)\left(\eta_{02}^2(\tau)/\gamma_1 + 1\right)$$
$$F_{11} = 1/\Omega^2$$
$$F_{12} = -\eta_{01}(\tau)\mu_1/\Omega^2$$
$$F_{13} = 0$$
$$F_{21} = \eta_{01}(\tau)/\Omega^2$$
$$F_{22} = (\mu_1/\Omega^2)\left(\eta_{01}^2(\tau) + 1/\gamma_1\right)$$
$$F_{23} = -(\mu_2/\Omega^2\gamma_1)\eta_{02}(\tau)$$
$$F_{31} = \eta_{01}''(\tau)\eta_{02}'(\tau)$$
$$F_{32} = (\mu_1/\Omega^2\gamma_1)\eta_{02}''(\tau)$$
$$F_{33} = (\mu_2/\Omega^2)\left(\eta_{02}^2(\tau)/\gamma_1 + 1/\gamma_2\right)$$

معادله (۹)، رابطه خطی‌سازی شده برای ارتعاشات پیچشی سیستم مورد نظر است که دوره تناوب آن π رادیان می‌باشد.

$$\eta_{01}(\tau) = \eta_{01}(\tau+\pi) = \frac{\cos\beta_1}{1-\sin^2\beta_1\sin^2\tau} \tag{۱۰}$$

$$\eta_{02}(\tau) = \eta_{02}(\tau+\pi) = \frac{\cos\beta_2}{1-\sin^2\beta_2\sin^2\tau} \tag{۱۱}$$

۴- تحلیل پایداری دینامیکی

معادله (۹) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایبی با دوره تناوب π (یک دستگاه معادلات متیو-هیل[1]) می‌باشد. پایداری این دستگاه به روش مندرمی ماتریس انجام می‌شود. روش مندرمی ماتریس[۲۰] تکنیکی ساده و قابل اطمینان است و برای تحلیل پایداری در سیستم‌هایی که تحریک پارامتریک دارند و مقدار ضرایب، هارمونیک و وابسته به زمان است مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش، پایداری تمام نقاط در یک محدوده تعیین شده، بر اساس پارامترهای سیستم بررسی می‌شود و از این رو دقت بالایی دارد و می‌تواند تمام نقاط ناپایدار موجود در محدوده را معین نماید؛ البته این کار را با انجام حجم زیادی از محاسبات ریاضی انجام می‌دهد و به همین دلیل زمان نسبتاً زیادی برای پاسخ‌دادن نیاز دارد و هرچه دقت بالاتری مورد نظر باشد، تعداد نقاط بیشتری را بررسی کرده، در نتیجه زمان بیشتری صرف می‌کند. در این روش، نتایج به صورت جداول پایداری بر حسب یک جفت از پارامترهای

1. A set of Mathieu-Hill equations

سیستم بیان می‌شود. این روش در ادامه به طور مختصر آورده شده است.

یک فضای حالت از سیستم بدین صورت می‌باشد:

$$u' = H\,(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\mu_1,\mu_2,\tau)\,u \qquad (۱۲)$$

$u=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_1',\theta_2',\theta_3'\}^T$ و H یک ماتریس ۶×۶ با دوره تناوب π به‌صورت زیر است.

$$H\,(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\mu_1,\mu_2,\tau)=\begin{bmatrix} O & I \\ -F & -E \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

I یک ماتریس واحد ۳×۳ و O یک ماتریس صفر ۳×۳ می‌باشد.

با توجه به تئوری فلوکه[۱۸]، حل این دستگاه بدین صورت است:

$$\Phi(\tau)=Q\,(\tau)e^{R\tau} \qquad (۱۴)$$

Q یک ماتریس با دوره تناوب π است و R یک ماتریس ثابت که به ماتریس ثابت دیگر یعنی S (ماتریس مندرمی) به صورت $R=(1/\pi)\log S$ وابسته است. اگر معادلات خطی شده باشند، $\Phi(0)=I$ و $S=\Phi(\pi)$ می‌باشد.

مقادیر ویژه ماتریس مندرمی $\sigma_k\,; k=1,2,3,4,5,6$ برای تحلیل پایداری سیستم به‌کار می‌روند. سیستم پایدار است، اگر و تنها اگر به ازای تمام kها $\mathrm{mod}(\sigma_k)\le 1$ باشد و یا $\mathrm{Re}(\sigma_k)\le 0$.

در این مقاله ماتریس مندرمی به وسیله انتگرال‌گیری عددی از معادله (۱۲) به‌دست آمده است و مقادیر ویژه آن محاسبه شده‌اند تا پایداری سیستم ارزیابی شود. روش رانج‌کوتا[۱] (RK۴۵) برای انتگرال‌گیری عددی استفاده و مقدار تلرانس کنترل خطا[۲]، مشابه مراجع گذشته، $۱۰^{-۸}$ درنظر گرفته شده است[۹].

۵- بررسی صحت مدل و تحلیل صورت گرفته

به دلیل اینکه در مراجع مختلف حل مسئله مورد نظر موجود نبوده، به منظور بررسی دقت روش حل به‌کار گرفته شده، در ابتدا مسئله بدون شافت پیرو دوم و در نتیجه اتصال هوک دوم، حل و با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. چنین فرضی به معنای آن است که مدل حالت صفحه‌ای داشته و در دو بعد توانایی حرکت دارد. تحلیل پایداری با درنظر گرفتن این مقادیر برای پارامترهای بی‌بعد مسئله انجام شده است:

$$\zeta=0.001,\ \ \alpha_1=1,\ \ \mu_1=1,\ \ \gamma_1=10$$

نتایج کارهای گذشته[۱۶] به صورت گراف‌هایی در شکل ۲ ارائه شده که اثر زاویه ناهم‌راستایی را در نسبت سرعت‌های مختلف بر پایداری دینامیکی محورها نشان می‌دهند.

در مرحله بعد، با درنظر گرفتن همین مقادیر، به تحلیل پایداری مدل ارائه‌شده در این مقاله پرداخته می‌شود تا صحت آن مورد بررسی قرار گیرد. نتایج در شکل ۲ گزارش داده شده است.

چنان که از شکل ۲ مشخص است، نتایج تحلیل پایداری از نظر شکل ظاهری و مکان قله‌ها انطباق خوبی داشته و تفاوت قابل توجهی وجود ندارد. بنابراین، محدوده‌هایی که توسط مدل ارائه‌شده، ناپایدار پیش‌بینی شده‌اند مورد تأیید مراجع نیز می‌باشند.

قبل از ارائه تحلیل پایداری در قالب موارد عددی، بحثی پیرامون نواحی ناپایدار مورد انتظار، لازم به طرح است. چنان که مشخص است، حوزه‌های ناپایداری بستگی به فرکانس‌های طبیعی سیستم دارند. بنابراین می‌توان با محاسبه و تحلیل اثرات متقابل آن‌ها و مقایسه با نواحی ناپایدار به‌دست آمده توسط مدل ارائه‌شده، صحت تحلیل و مدل را مورد بررسی قرار داد.

فرکانس‌های طبیعی سیستم شافت، با توجه به اثرات همساز[۳] و نیز ترکیبی[۴] که دارند، نواحی ناپایدار همساز و زیر همساز[۵] و نیز ترکیبی تجمیعی و تفریقی به‌وجود می‌آورند.

نواحی تشدید پارامتریک همساز Ω^H و زیر همساز Ω^S مرتبه kام از روابط زیر به‌دست می‌آیند[۱۵].

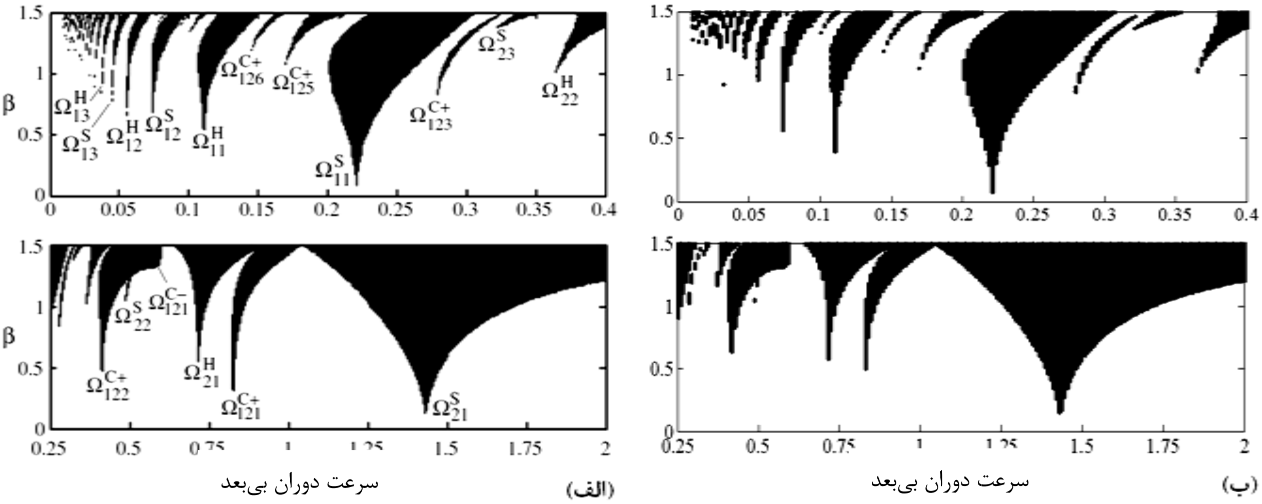
$$\Omega_{ik}^H=\frac{\omega_i}{2k},\ \ \Omega_{ik}^S=\frac{\omega_i}{2k-1}; i=1,2,3; k=1,2,3,\ldots \qquad (۱۵)$$

همچنین، نواحی تشدید پارامتریک ترکیبی تجمیعی Ω^{C+} و ترکیبی تفریقی Ω^{C-} مرتبه kام به صورت زیر است.

$$\Omega_{12k}^{C\pm}=\frac{\omega_2\pm\omega_1}{2k},\ \ \Omega_{13k}^{C\pm}=\frac{\omega_3\pm\omega_1}{2k},\ \ \Omega_{23k}^{C\pm}=\frac{\omega_3\pm\omega_2}{2k}$$
$$i=1,2,3;\ \ k=1,2,3,\ldots \qquad (۱۶)$$

1. Runge Kutta method
2. The value of error control tolerance

3. Harmonic
4. Combination
5. Sub-hormonic



شکل ۲ اثر زاویه ناهم‌راستایی، (الف) تحلیل گزارش داده شده در دیگر مراجع[۱۶]، (ب) تحلیل ارائه‌شده توسط مدل مقاله

با درنظر گرفتن $\beta_1 = 0$، $\beta_2 = 0$، $\zeta = 0$ و $\Omega = 1$ در معادله (۱۵)، فرکانس‌های طبیعی سیستم به‌دست می‌آیند.

$$\omega^6 + (1+\mu_1(1+\frac{1}{\gamma_1})+\mu_2(\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_1}))\omega^4 + (\frac{\mu_1}{\gamma_1}+\mu_2(\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_1})+\mu_1\mu_2(\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}))\omega^2 + \frac{\mu_1\mu_2}{\gamma_1\gamma_2} = 0 \tag{۱۷}$$

با فرض مقادیر $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$، $\mu_1 = \mu_2 = 1$، $\gamma_2 = 10$ و $\gamma_1 = 1$ برای پارامترهای سیستم، مقدار فرکانس‌های طبیعی (برحسب رادیان بر ثانیه) بدین صورت شده است.

$$\omega_1 = 0.178, \omega_2 = 1.025, \omega_3 = 1.737 \tag{۱۸}$$

نواحی تشدید پارامتریک همساز و زیر همساز و همچنین ترکیبی محاسبه‌شده تا مرتبه دوم ($k = 1,2$) به ترتیب از معادلات (۱۷) و (۱۸) و با درنظر گرفتن فرکانس‌های طبیعی در معادله (۲۰) محاسبه شده‌اند و در جدول ۱ و ۲ به تفکیک آمده است.

سپس طبق مفروضاتی که طی آن‌ها فرکانس‌های طبیعی در معادله (۲۰) به‌دست آمدند، تحلیل پایداری توسط مدل ارائه‌شده در مقاله به روش مندرمی ماتریس انجام گرفته و نتایج در شکل ۳ ارائه شده است.

چنان‌که از مقایسه جدول‌های ۱ و ۲ با شکل ۳ مشخص می‌شود، نواحی ناپایدار پیش‌بینی شده توسط مدل با نتایج محاسبه‌شده توسط معادلات تشدید پارامتریک از لحاظ شکل ظاهری و مکان قله‌ها هماهنگی داشته و تفاوت قابل توجهی وجود ندارد که این تطابق صحت تحلیل مدل را تصدیق می‌کند.

جدول ۱ نواحی ناپایدار همساز و زیر همساز

	Ω^H	Ω^S
Ω_{11}	۰/۰۸۹	۰/۱۷۸
Ω_{12}	۰/۰۴۵	۰/۰۵۹
Ω_{21}	۰/۵۱۳	۱/۰۲۵
Ω_{22}	۰/۲۵۶	۰/۳۴۲
Ω_{31}	۰/۸۶۹	۱/۷۳۷
Ω_{32}	۰/۴۳۴	۰/۵۷۹

جدول ۲ نواحی ناپایدار ترکیبی تجمیعی و ترکیبی تفریقی

	Ω^{C+}	Ω^{C-}
Ω_{121}	۰/۶۰۲	۰/۴۲۴
Ω_{122}	۰/۳۰۱	۰/۲۱۲
Ω_{231}	۱/۳۸۱	۰/۳۵۶
Ω_{232}	۰/۶۹۱	۰/۱۷۸
Ω_{131}	۰/۹۵۸	۰/۷۸۰
Ω_{132}	۰/۴۷۹	۰/۳۹۰

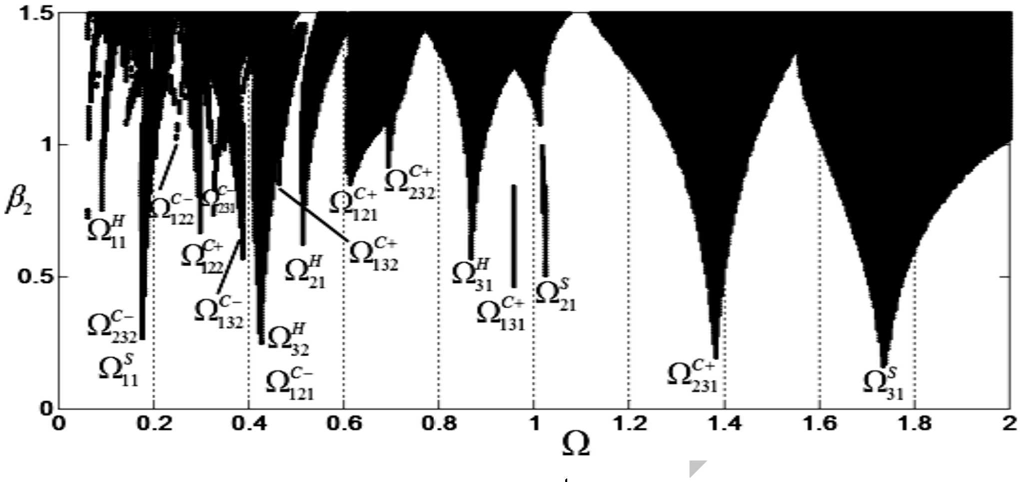
۶- حل عددی

در این بخش تحلیل پایداری دینامیکی سیستم در قالب موارد عددی انجام و نتایج به فرم جداول پایداری برحسب جفت پارامترهای $\beta_2 - \Omega$ در β_1 و γ_2های مختلف نشان داده شده

است تا تأثیر تغییر این ۴ پارامتر روی پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد.

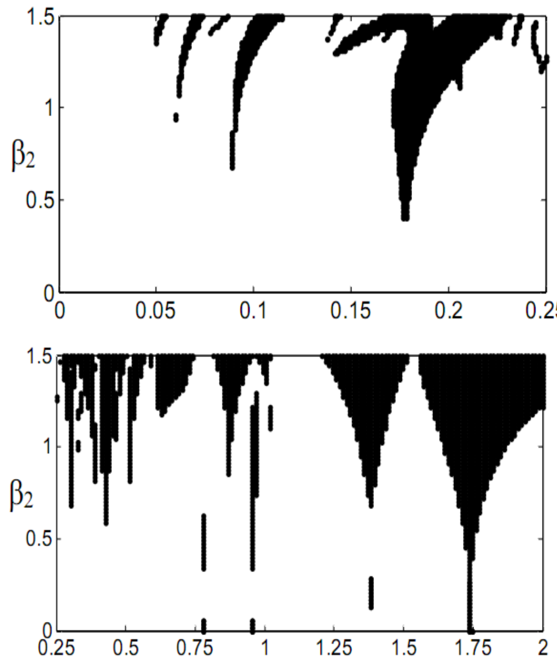
در تمام این موارد، $\zeta = 0.001$، $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ و $\mu_1 = \mu_2 = 1$ بوده و پایدرای سیستم به صورت نقطه به نقطه بررسی شده است (فاصله نقاط ۰/۰۱ و یا کمتر از آن درنظر گرفته شده است).

در ادامه اثر میزان ناهم‌راستایی اتصال هوک دوم β_2، در دو مقدار مختلف β_1 ($\beta_1 = 0.2,\ 0.4$) و دو مقدار مختلف نسبت اینرسی دیسک شافت سوم γ_2 ($\gamma_2 = 10,\ 100$) بررسی و نتایج به فرم جداول پایداری بر حسب جفت پارامترهای سیسستم $\beta_2 - \Omega$ در شکل‌های ۴ تا ۶ گزارش شده است. نواحی تیره نشان‌دهنده نواحی ناپایداری سیستم شافت است.



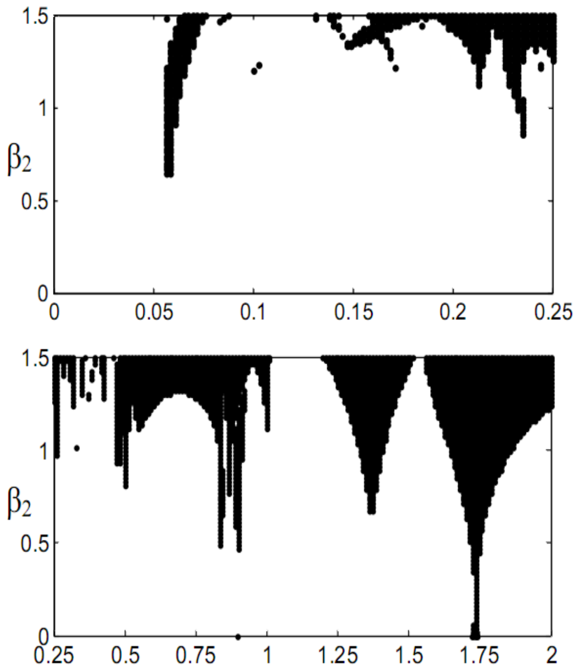
سرعت دوران بی‌بعد

شکل ۳ بررسی صحت تحلیل مدل سه بعدی، انطباق مقادیر جدول‌های ۱ و ۲ با نتایج حاصل از مدل ارائه شده در مقاله



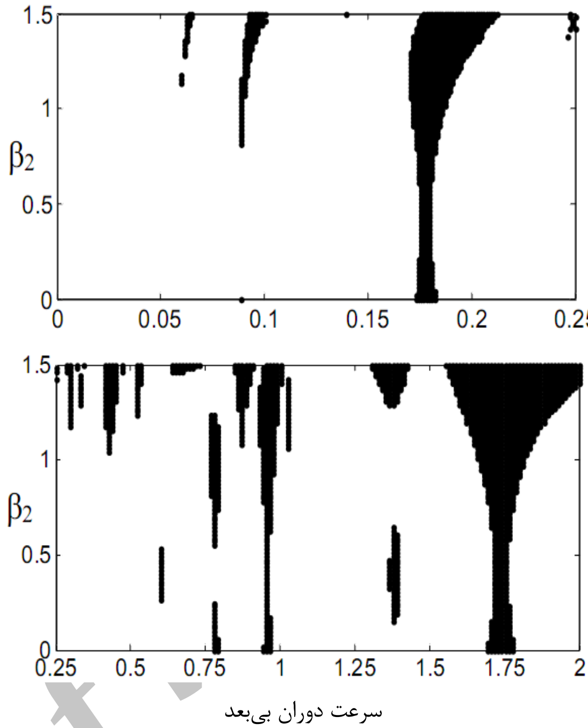
سرعت دوران بی‌بعد

شکل ۴ اثر زاویه ناهم‌راستایی دوم بر ناپایداری در $\beta_2 = 0.2\text{rad}$ و $\gamma_2 = 10$



سرعت دوران بی‌بعد

شکل ۵ اثر نسبت اینرسی بر ناپایداری در $\beta_2 = 0.2\text{rad}$ و $\gamma_2 = 100$



شکل ۶ اثر زاویه ناهم‌راستایی اول بر ناپایداری در $\gamma_2=10$ و $\beta_2=0.4\text{rad}$

پارامتر β_1 اثر قابل توجهی روی پایداری دینامیکی سیستم دارد؛ چنان که با افزایش زاویه ناهم‌راستایی اتصال هوک از صفر (اگر $\beta_1=\beta_2=0$ باشند، هیچ تحریک پارامتریکی در سیستم وجود ندارد) به سمت $\pi/2$ (اتصال هوک در زاویه $\pi/2$ قفل می‌شود و توانایی حرکتش را از دست می‌دهد)، نواحی ناپایداری گسترش می‌یابند. در عمل معمولاً زاویه ناهم‌راستایی به خاطر محدودیت‌های طراحی از $\pi/4$ کوچک‌تر است.

مقایسه بین شکل‌های ۴ و ۵ مشخص می‌کند، در اثر افزایش نسبت اینرسی از ۱۰ به ۱۰۰، نواحی ناپایدار در محدوده عملی $(\beta_2<\pi/4)$ محدودتر شده و نقاط پایدار سیستم افزایش خواهند یافت.

مقایسه بین شکل‌های ۴ و ۶ مشخص می‌کند افزایش زاویه ناهم‌راستایی اتصال اول، گرچه به‌ظاهر نواحی ناپایداری را کاهش می‌دهد، اما می‌تواند موجب ناپایداری سیستم شافت در زوایای ناهم‌راستایی کوچک اتصال دوم شود؛ زوایایی که برای طراحان در کاربردهای عملی بسیار حائز اهمیت است. چنان که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، این ناپایداری‌ها به گونه‌ای‌اند که تقریباً به ازای تمام مقادیر زاویه اتصال دوم وجود دارند.

این مدل دارای ضرایب پارامتریک (متغیر با زمان) است که مقادیر بزرگی دارند و اثر زیادی روی جواب‌ها می‌گذارند. از این رو به منظور حل آن از روش مندرمی ماتریس، که در تحلیل چنین مسائلی کاربرد دارد و بررسی پایداری را به صورت نقطه به نقطه انجام می‌دهد، استفاده شده است. این مطلب همچنین در مدل دوبعدی، که بسیار ساده‌تر است و در مرجع [۱۶] به روش مندرمی ماتریس حل شده است، منجر به تعیین نواحی ناپایدار جدیدی نسبت به مراجعی شد که از روش‌های دیگری برای حل استفاده کرده بودند.

۷- نتیجه‌گیری

یک سیستم متشکل از سه محور، که با دو اتصال هوک متصل گشته‌اند، به صورت سه درجه آزادی مدل شده است. پایداری دینامیکی این مجموعه به روش مندرمی ماتریس بررسی و نواحی ناپایداری بر اساس پارامترهای مختلف سیستم نشان داده شده است. مسئله مورد مطالعه در این پژوهش بررسی اثرات ناهم‌راستایی محورها بر پایداری سیستم در زوایای مختلف بین شافت‌های راننده، پیرو اول و پیرو دوم بوده است.

پارامترهای β (زاویه اتصال هوک)، γ (نسبت اینرسی دورانی دیسک‌ها) و Ω (نسبت سرعت شافت) اثرات قابل توجهی روی پایداری دینامیکی سیستم دارند.

با افزایش زاویه ناهم‌راستایی (زاویه اتصال هوک اول یا دوم) نواحی ناپایداری سیستم شافت در محدوده عملی $(\beta<\pi/4)$، که کاربرد بیشتری در طراحی‌ها دارد، افزایش می‌یابد.

با افزایش نسبت اینرسی، نواحی ناپایداری کاهش می‌یابد؛ یعنی هرچه اینرسی دورانی دیسک سوم بیشتر از دیسک اول باشد، محدوده‌های پایداری سیستم بیشتر می‌شود.

افزایش نسبت سرعت شافت در حالت کلی موجب افزایش ناپایداری می‌شود، ولی بسته به مقدار فرکانس‌های طبیعی سیستم، این امر می‌تواند موجب ناپایداری در بعضی سرعت‌های پایین شود؛ سرعت‌هایی که به ازای آن‌ها، حرکت سیستم نزدیک به فرکانس‌های طبیعی آن انجام می‌شود.

۸- لیست علایم و نشانه‌ها

α_1　نسبت استهلاک ویسکوز پیچشی شافت دوم به اول

α_2　نسبت استهلاک ویسکوز پیچشی شافت سوم به اول

β	زاویه اتصال هوک (rad)	
c	استهلاک ویسکوز پیچشی هر شافت ($kg.m^2/s$)	
η	نسبت انتقال سرعت اتصال هوک	
γ_1	نسبت اینرسی دورانی دیسک شافت دوم به اول	
γ_2	نسبت اینرسی دورانی دیسک شافت سوم به اول	
J	اینرسی دورانی دیسک ($kg.m^2$)	
k	سختی پیچشی شافت ($kg.m^2/s^2$)	
M	گشتاور ورودی به هر اتصال هوک (N.m)	
M^*	گشتاور خروجی از هر اتصال هوک (N.m)	
μ_1	نسبت سختی پیچشی شافت دوم به شافت اول	
μ_2	نسبت سختی پیچشی شافت سوم به شافت اول	
Ω_0	سرعت ورودی به شافت اول (rad/s)	
Ω_{in}	سرعت ورودی به اتصال هوک (rad/s)	
Ω_{out}	سرعت خروجی از اتصال هوک (rad/s)	
Ω	سرعت دورانی بی‌بعد (rad/s)	
τ	زاویه چرخ طیار (rad)	
θ	زاویه پیچشی شافت (rad)	

۹- پیوست

۹-۱- پیوست الف: تعیین معادلات حرکت سیستم شافت

معادلات حرکت سیستم شافت مورد مطالعه با یک روش ترکیبی به‌دست می‌آیند. بر این اساس سیستم به صورت سه قسمت مجزا (شافت راننده، شافت پیرو اول و شافت پیرو دوم) مورد بررسی قرار می‌گیرد. شافت راننده در شکل الف-۱ دیده می‌شود و معادله ارتعاشات پیچشی آن بدین صورت است:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -c_1\dot{\theta}_1 - k_1\theta_1 + M_1 \quad \text{(الف-۱)}$$

که M_1 گشتاور عکس‌العمل قسمت ورودی اتصال هوک اول می‌باشد و Ω_{in1} سرعت دورانی انتهای سمت راست شافت راننده و نیز قسمت ورودی اتصال اول است.

شافت پیرو اول در شکل الف-۲ دیده می‌شود و تحت اثر گشتاور عکس‌العمل $-M_1^*$ در قسمت خروجی اتصال هوک اول می‌باشد. این شافت دارای روابط زیر است.

$$c_2\dot{\theta}_2 + k_2\theta_2 - M_1^* = 0 \quad \text{(الف-۲)}$$

$$J_2[\ddot{\theta}_2 + \dot{\Omega}_{out1}] = -c_2\dot{\theta}_2 - k_2\theta_2 + M_2 \quad \text{(الف-۳)}$$

Ω_{out1} سرعت دورانی ابتدای شافت و نیز قسمت خروجی اتصال اول می‌باشد.

رابطه بین سرعت ورودی و خروجی اتصال اول بدین صورت است:

$$M_1 = \eta_{01}M_1^*;\ \eta_{01} = \Omega_{out1}/\Omega_{in1} \quad \text{(الف-۴)}$$

شافت پیرو دوم در شکل الف-۳ دیده می‌شود و تحت اثر گشتاور عکس‌العمل $-M_2^*$ در قسمت خروجی اتصال هوک دوم می‌باشد. این شافت دارای روابط زیر است:

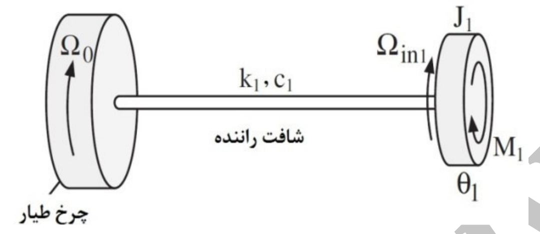
$$c_3\dot{\theta}_3 + k_3\theta_3 - M_2^* = 0 \quad \text{(الف-۵)}$$

$$J_3[\ddot{\theta}_3 + \dot{\Omega}_{out2}] = -c_3\dot{\theta}_3 - k_3\theta_3 \quad \text{(الف-۶)}$$

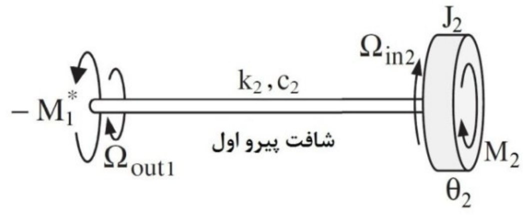
Ω_{out2} سرعت دورانی ابتدای شافت و نیز قسمت خروجی اتصال دوم می‌باشد.

رابطه بین سرعت ورودی و خروجی اتصال دوم بدین صورت است:

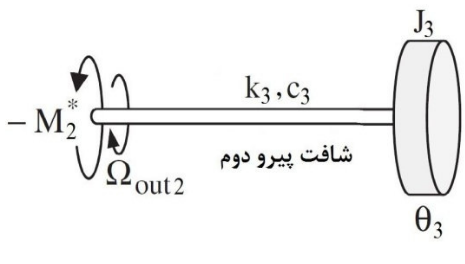
$$M_2 = \eta_{02}M_2^*;\ \eta_{02} = \Omega_{out2}/\Omega_{in2} \quad \text{(الف-۷)}$$



شکل الف-۱ قسمت اول سیستم، شافت راننده



شکل الف-۲ قسمت دوم سیستم، شافت پیرو اول



شکل الف-۳ قسمت سوم سیستم، شافت پیرو دوم

با جاگذاری مقادیر M_1، M_2، M_1^* و M_2^* در روابط، معادلات حرکت سیستم شافت مورد مطالعه به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$J_1\ddot{\theta}_1+c_1\dot{\theta}_1-\eta_{01}c_2\dot{\theta}_2+k_1\theta_1 \\ -\eta_{01}k_1\theta_2=0 \tag{الف-۸}$$

$$J_2[\ddot{\theta}_2+\dot{\Omega}_{out\,1}]+c_2\dot{\theta}_2-\eta_{02}c_3\dot{\theta}_3 \\ +k_2\theta_2-\eta_{02}k_3\theta_3=0 \tag{الف-۹}$$

$$J_3[\ddot{\theta}_3+\dot{\Omega}_{out\,2}]+c_3\dot{\theta}_3+k_3\theta_3=0 \tag{الف-۱۰}$$

۹-۲- پیوست ب: خطی‌سازی معادلات حرکت

مطابق مقاله باید با استفاده از سری مک‌لوران معادلات حرکت (۱) تا (۳)، بر حسب θ_1، θ_2 و θ_3 خطی‌سازی شوند. نکته مهمی که به منظور خطی‌سازی این معادلات باید درنظر گرفته شود، خطی‌سازی ضرایب نسبت انتقال سرعت و مشتق آن‌ها در دو اتصال هوک، η_{01}، η_{02}، $\dot{\eta}_{01}$ و $\dot{\eta}_{02}$، در معادلات حرکت می‌باشد، زیرا مطابق معادلات (۴) تا (۷) مقاله، این ضرایب متغیر و وابسته به θ_2 و θ_1 می‌باشند. اگر در $\theta_1=0$ و $\theta_2=0$ به‌ترتیب $\eta_1=\eta_{01}$ و $\eta_2=\eta_{02}$ باشند، خطی‌سازی این ضرایب با توجه به قاعده زنجیره‌ای بدین صورت خواهد بود:

$$\eta_1(\theta_1)\approx\eta_{01}+\left.\frac{\partial\eta_1}{\partial\theta_1}\right|_{\theta_1=0}\theta_1=\eta_{01}+\left.\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta_1}\right|_{\theta_1=0}\theta_1 \\ =\eta_{01}+\left.\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi_1}\right|_{\theta_1=0}\theta_1 \tag{ب-۱}$$

$$\dot{\eta}_1(\theta_1)=\frac{\partial\eta_1}{\partial t}=\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi_1}\dot{\varphi}_1=\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi_1}(\Omega_0+\dot{\theta}_1) \\ \approx\left(\left.\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi_1}\right|_{\theta_1=0}+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left.\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi_1}\right)\right|_{\theta_1=0}\theta_1\right)(\Omega_0+\dot{\theta}_1) \\ =\left(\frac{1}{\Omega_0}\dot{\eta}_{01}+\left.\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\varphi_1^2}\right|_{\theta_1=0}\theta_1\right)(\Omega_0+\dot{\theta}_1) \tag{ب-۲}$$

$$\eta_2(\theta_2)\approx\eta_{02}+\left.\frac{\partial\eta_2}{\partial\theta_2}\right|_{\theta_2=0}\theta_2=\eta_{02}+\left.\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta_2}\right|_{\theta_2=0}\theta_2 \\ =\eta_{02}+\left.\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi_2}\right|_{\theta_2=0}\theta_2 \tag{ب-۳}$$

$$\dot{\eta}_2(\theta_2)=\frac{\partial\eta_2}{\partial t}=\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi_2}\dot{\varphi}_2=\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi_2}(\eta_1(\Omega_0+\dot{\theta}_1)+\dot{\theta}_2) \\ \approx\left(\left.\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi_2}\right|_{\theta_2=0}+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left.\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi_2}\right)\right|_{\theta_2=0}\theta_2\right)(\eta_1(\Omega_0+\dot{\theta}_1)+\dot{\theta}_2) \\ =\left(\frac{\eta_1(\Omega_0+\dot{\theta}_1)+\dot{\theta}_2}{\eta_1(\Omega_0+\dot{\theta}_1)}\dot{\eta}_{02}+(\eta_1\Omega_0+\dot{\theta}_2)\left.\frac{\partial^2\eta_2}{\partial\varphi_2^2}\right|_{\theta_2=0}\theta_2\right) \tag{ب-۴}$$

در $\theta_1=0$ و $\theta_2=0$، به ترتیب مطابق معادلات (۶) و (۷) مقاله برای φ_1 و φ_2 داریم:

$$\left.\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi_1}\right|_{\theta_1=0}=\left.\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\varphi_1}\right|_{\theta_1=0}=\frac{\partial\eta_{01}}{\partial t}\frac{1}{\Omega_0}=\frac{1}{\Omega_0}\dot{\eta}_{01} \tag{ب-۵}$$

$$\left.\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\varphi_1^2}\right|_{\theta_1=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\frac{1}{\Omega_0}\dot{\eta}_{01}\right)\right|_{\theta_1=0}=\frac{\partial\dot{\eta}_{01}}{\Omega_0\partial t}\left(\frac{1}{\Omega_0}\right)=\frac{1}{\Omega_0^{\,2}}\ddot{\eta}_{01} \tag{ب-۶}$$

$$\left.\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi_2}\right|_{\theta_2=0}=\left.\frac{\partial\eta_2}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\varphi_2}\right|_{\theta_2=0}=\frac{\partial\eta_{02}}{\partial t}\frac{1}{(\Omega_0+\dot{\theta}_1)\eta_1}=\frac{1}{\Omega_0\eta_1}\dot{\eta}_{02} \tag{ب-۷}$$

$$\left.\frac{\partial^2\eta_2}{\partial\varphi_2^2}\right|_{\theta_2=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(\frac{1}{\eta_1(\Omega_0+\dot{\theta}_1)}\dot{\eta}_{02}\right)\right|_{\theta_2=0}=\frac{1}{\eta_1^{\,2}\Omega_0}\ddot{\eta}_{02} \tag{ب-۸}$$

با جاگذاری معادلات (ب-۵) و (ب-۶) در معادلات (ب-۱) و (ب-۲) و معادلات (ب-۷) و (ب-۸) در معادلات (ب-۳) و (ب-۴) و حذف تمامی جملات غیرخطی (توان‌های دو به بالا از θ_1، θ_2 و θ_3 و مشتقات آن‌ها)، بعد از بی‌بعدسازی معادلات روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\eta_1(\theta_1)=\eta_{01}+\frac{1}{\Omega_0}\dot{\eta}_{01}\theta_1 \tag{ب-۹}$$

$$\dot{\eta}_1(\theta_1)=\dot{\eta}_{01}+\frac{1}{\Omega_0}\dot{\eta}_{01}\dot{\theta}_1 \tag{ب-۱۰}$$

$$\eta_2(\theta_2)=\eta_{02}+\frac{1}{\Omega_0\eta_{01}}\dot{\eta}_{02}\theta_2 \tag{ب-۱۱}$$

$$\dot{\eta}_2(\theta_2)=\dot{\eta}_{02}+\frac{1}{\Omega_0\eta_{01}}\dot{\eta}_{02}\dot{\theta}_2 \tag{ب-۱۲}$$

اگر η_1، η_2، $\dot{\eta}_1$ و $\dot{\eta}_2$ در معادلات حرکت (۱) تا (۳) جاگذاری شوند و جملات غیرخطی از توان‌های دو به بالا از θ_1، θ_2 و θ_3 و مشتقات آن‌ها حذف و تنها جملات خطی نگه داشته شوند، بعد از بی‌بعدسازی معادلات حرکت، معادله (۹) مقاله به‌دست می‌آید.

۱۰- مراجع

[1] Lechner G., Naunheimer H., Ryborz J., *Automotive Transmissions: Fundamentals, Selection, Design and Application*, Second ed., New York, Springer, 2010, pp. 10-24.

[2] Porter B., “A Theoretical Analysis of the Torsional Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint”, *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 3, No. 4, 1961, pp. 324 -329.

[3] Porter B., Gregory R. W., “Non-Linear Torsional Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint’, *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 5, No 2, 1963, pp. 191-200.

[4] Eidinov M. S., Nyrko V. A., Eidinov R. M., Gashukov V. S., “Torsional Vibrations of a System with Hooke's Joint”, *Ural Polytechnic Institute*, Vol. 12, No. 3, 1976, pp. 98-106.

[5] Chang S. I., “Torsional Instabilities and Non-Linear Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint”, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 229, No. 4, 2000, pp. 993-1002.

[6] Asokanthan S. F., Hwang M. C., “Torsional Instabilities in a System Incorporating a Hooke's Joint”, *Trans. ASME*, Vol. 118, 1996, pp. 368-374

[7] Asokanthan S. F., Wang X. H., “Characterization of Torsional Instabilities in a Hooke's Joint Driven System via Maximal Lyapunov Exponents”, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 194, No. 1, 1996, pp. 83-91.

[8] Asokanthan S. F., Meehan P. A., “Non-Linear Vibration of Torsional System Driven by a Hooke's Joint”, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 233, No. 2, 2000, pp. 297-310.

[9] DeSmidt H. A., Wang K. W., Smith E. C., “Coupled Torsion-Lateral Stability of a Shaft-Disk System Drive Through a Universal Joint”, *J. Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 3, May 2002, pp. 261-273.

[10] Mazzei A. J., Argento A., Scott R. A., “Dynamic Stability of a Rotating Shaft Driven Through a Universal Joint”, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 222, No. 19, 1999, pp. 19-47.

[11] Mazzei A. J., Scott R. A., “Principal Parametric Resonance Zones of a Rotating Rigid Shaft Driven Through a Universal Joint”, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 244, No. 3, 2001, pp. 555-562.

[12] Mazzei A. J., Scott R. A., “Effects of Internal Viscous Damping on the Stability of a Rotating Shaft Driven Through A Universal Joint”, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 265, No. 1, 2003, pp. 863-885.

[13] Saigo M., “Transverse Vibration of a Rotor System Driven by a Cardan Joint”, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 95, No. 1, 1984, pp. 9-18.

[14] Mazzei A. J., Scott R. A., “Accelerating Through Resonance of a Universal Joint Driveline”, *Proceedings of the XXV International Modal Analysis Conference,* Orlando, 2007, paper 29.

[15] Mazzei A., “Passage through Resonance in a Universal Joint Driveline System”, *J. Vibrat. Control*, Vol. 17, No. 5, 2011, pp. 667-677.

[16] Bulut G., Turhan O., “On Nonlinear Vibrations of a Rotating Beam”, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 322, No. 1, 2009, pp. 314-335.

[17] Bulut G., Parlar Z., “Dynamic Stability of a Shaft System Connected Through a Hooke's Joint”, *J. Mechanism and Machine Theory*, Vol. 46, 2011, pp. 1689-1695.

[18] Nayfeh A. H., Pai P. F., *Linear & Nonlinear Structural Mechanics*, New York, Wiley, 2004, pp. 267-283.

[19] Seherr-Thoss H. C., Schmelz F., Aucktor E., *Universal Joints and Driveshafts*: *Analysis, Design, Applications*, Second ed., New York, Springer-Verlag, 2006, pp. 5-9.

[20] Meirovitch L., *Methods of Analytical Dynamics*, New York, McGraw-Hill, 1970, pp. 263-292.