

تاریخچه مقاله: دریافت ۹۱/۲/۲۰ پذیرش ۹۱/۶/۲۰ ارائه در سایت ۹۱/۹/۳۰

# تحلیل سهبعدی ارتعاشات و سرعت بحرانی پوستههای استوانهای کامپوزیتی با تقویت کنندههای متعامد تحت بار محوری و فشار

كامران دانشجو '، رضا معدوليت '\*، مصطفى طالبى توتى "

۱ – استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران ۲ – دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران ۳ – دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران \* تهران، صندوق پستی ۱۳۱۱۴ –۱۶۸۴۶، madoliat

**چکیده** – در مقاله حاضر، ارتعاشات آزاد پوستههای استوانهای کامپوزیتی دوار، با تقویت *ک*نندههای متعامد تحت بار محوری یکنواخت و فشار، با تئوری سهبعدی لایهای مورد مطالعه قرار گرفته است. تقویت *ک*نندهها با فواصل مساوی از یکدیگر قرار گرفتهاند و دارای هندسه و جنس یکسانی می باشند. اتصال تقویت *ک*نندهها بر سطح خارجی پوسته بوده و به قصد مدلسازی ریاضی تقویت *ک*نندهها از روش المان جداگانه استفاده شده است. معادلات حرکت با نگرش انرژی و براساس اصل همیلتون حاصل می گردند. در استخراج معادلات حرکت از تئوری سهبعدی لاسانی جداگانه استفاده شده است. و اثرات نیروی کریولیس، شتاب جانب به مرکز و کشش حلقوی اولیه درنظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری سهبعدی لاستیسیته استفاده شده است. و اثرات نیروی کریولیس، شتاب جانب به مرکز و کشش حلقوی اولیه درنظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری سهبعدی لایهای، بر روی معادلات حرکت و شرایط مرزی در استیسیته استفاده شده است. و اثرات نیروی کریولیس، شتاب جانب به مرکز و کشش حلقوی اولیه درنظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری سهبعدی لایهای، بر روی معادلات حرکت و شرایط مرزی در راستای ضخامت جداسازی صورت گرفته است. شرایط مرزی پوسته در دو سر تکیه گاه ساده درنظر گرفته شده است. ترایت حرکت و سرایط مرزی در راستای ضرعای می تعادی مورت گرفته است. شرایط مرزی پوسته در دو سر تکیه گاه ساده درنظر گرفته شده است. تتایج حاصل از روش حاضر با نتایج سایر محققان و نتایج تحلیل عددی مقایسه و تطابق مناسبی مشاهده شده است. در نهایت تاثیر هندسه و نوع نتایج حاصل از روش حاضر با نتایج سایر محققان و نتایج تحلیل عددی مقایسه و تطابق مناسبی مشاهده شده است. در نهایت تاثیر هندسه و نوع تقویت کنندها، سرعت دورانی و مقدار نیروی محوری و فشار داخلی بر فرکانس طبیعی پوسته استوانهای تقویت شود موالعه قرار گرفته است. تقویت کنندهای سرعان و مقدان تازی گرویته است. با ستوانهای تقویت شده مورد مطالعه قرار گرفته است. تقویت کندها، سرعانه ی دورا، تقویت کنندهای مان با مولی و محیطی، تئوری سهبعدی الاستیسیته، سرعت بحرانی، تئوری لایهای

# Three-dimensional vibration analysis and critical speed of rotating orthogonally stiffened laminated cylindrical shells under axial load and pressure

K. Daneshjou<sup>1</sup>, R. Madoliat<sup>2\*</sup>, M. Talebitooti<sup>3</sup>

Prof., Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran
 Assoc. Prof., Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran
 PhD Student, Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran
 \* P. O. B. 16846-13114 Tehran, madoliat@iust.ac.ir

**Abstract-** In this paper, an approximate solution using layer-wise theory for the vibration analysis of rotating laminated cylindrical shells with ring and stringer stiffeners under axial load and pressure is presented. The cylindrical shells are stiffened with uniform interval and it is assumed that the stiffeners have the same material and geometric properties and cylindrical shell reinforced by outer stiffeners while stiffeners are treated as discrete elements. The equations of motion are derived by the Hamilton's principle. In deriving the governing equations three-dimensional elasticity theory are used and the study includes the effects of the Coriolis and centrifugal accelerations and the initial hoop tension. The layer-wise theory is used to discretize the equations of motion and the related boundary conditions through the thickness of the shells. The edges of the shell are restrained by simply supported boundary conditions. The presented results are compared with those available in the literature and also with the FE results and excellent agreement is observed. Finally, the results obtained include the relationship between frequency characteristics of stiffened cylindrical shell and different geometry of stiffeners, stiffener type, rotating velocities, amplitude of pressure and amplitude of axial load.

Keywords: Rotating Cylindrical Shell, Ring and Stringer Stiffeners, Three-Dimensional Elasticity Theory, Critical Speed, Layerwise Theory

#### ۱– مقدمه

پوستههای استوانهای دوار در بسیاری از کاربردهای صنعتی از قبیل روتور توربین گاز، سانتریفیوژها، کورههای پخت سیمان و سیستمهای دوار استفاده می شود. برای بالابردن سفتی پوسته از تقویت کننده استفاده می شود. پوسته های استوانه ای، که با المانهایی از نوع تیر تقویت شدهاند، به صورت گستردهای در سازههای مکانیکی از قبیل موشک، زیردریایی، خشک کنندههای دوار و مخازن سوخت هواپیما استفاده می شوند. در اکثر این موارد پوسته تحت بارهای دینامیکی قرار دارد و ممکن است دچار ارتعاش و کمانش و خستگی شود. بنابراین شناخت خصوصیات این سازهها از جمله فرکانس طبیعی و بار کمانش اجتنابناپذیر است. از طرفی، با توجه به نیاز روزافزون طراحی سازههای سبکوزن با استحکام بالا، لازم است که نسبت استحكام به وزن این سازهها تا حد امكان بالا باشد تا سازه طراحی شده از نظر مصرف مواد، انرژی و هزینه بهینه باشد. از جمله راههای رسیدن به این هدف، تقویت بهینه پوسته با المانهای تقویتکننده محیطی و طولی و همچنین استفاده از مواد مرکب می باشد.

مصطفی و علی[۱] از روش انرژی برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوستههای استوانهای تقویتشده، با درنظر گرفتن خمیدگی، کشیدگی و پیچیدگی تقویت کننده، استفاده کردند. نگ و لم[۲] ارتعاشات آزاد و سرعت بحرانی پوستههای ایزوتروپیک دوار تحت بار محوری ثابت را تحلیل کردند. ژاهو، لیو و نگ[۳] ارتعاشات پوستههای کامپوزیتی دوار با تقویت کنندههای متعامد را بررسی کردند. جعفری و باقری[۴] با روشهای عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی به بررسی ارتعاشات آزاد پوستههای استوانهای ایزوتروییک با تقویت کنندههای محیطی پرداختند و نتايج حاصل از سه روش فوق را با هم مقايسه كردند. خرمي و حسینیهاشمی[۵] با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به بررسی ارتعاشات پوسته استوانهای ساختهشده از مواد هدفمند پرداختند. در زمینه ارتعاشات یوسته مطالعات انجام گرفته با استفاده از تئوری سهبعدی الاستیسیته در مقایسه با دیگر تئوریها، به دلیل پچیدگی آن و در نظر گرفتن هر شش جزء میدان تنش و كرنش، بسيار كم مي باشد. از جمله اين تحقيقات مي توان به

مهندیسی مکانیک مدرس دورهٔ ۱۲ شمارهٔ ۶ اسفند ۱۳۹۱ www.SID.ir

مقاله نلسون [۶] در زمینه ارتعاشات پوسته استوانهای با طول نامحدود اشاره کرد. همچنین برای استوانه با طول محدود می توان کارهای هاتچنیسون و الازهری [۷] و لیسا [۸] را نام برد که با استفاده از روش ریلی ریتز این مسئله را مورد بررسی قرار دادند. ملکزاده و همکارانش [۹] با استفاده از تئوری لایهای و استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر به تحلیل ارتعاشات پوسته مطالعه خصوصیات استاتیکی و ارتعاشاتی پوسته کامپوزیتی با لایههایی دارای زاویه الیاف ۰ و ۹۰ درجه<sup>۲</sup> با استفاده از تئوری سهبعدی لایهای الاستیسیته و استفاده از فضای حالت به همراه روش دیفرانسیل کوادراچر پرداخت. همچنین کنی و علی بیگلو[۱۱]، با استفاده از تئوری سهبعدی و روش تحلیلی، ارتعاشات پوسته استوانهای چندلایه با لایه پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله، تحلیل دینامیکی پوستههای استوانهای کامپوزیتی دوار تقویتشده تحت اثر بار محوری ثابت و فشار، با شرایط مرزی تکیهگاه ساده در دوسر، با استفاده از تئوری سهبعدی لایهای، مطالعه میشود. برای استخراج معادلات متشکله حاکم بر پوسته از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده میشود. تاثیر پارامترهای مختلف نظیر سرعت دورانی پوسته، میزان بار محوری، فشار و نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده بر روی فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی بررسی شده است. اثر تقویت کنندهها با استفاده از روش جداگانه وارد معادلات شده و در نهایت نتایج حاصله با نتایج موجود در مقالات دیگر محققان و همچنین نتایج حاصل از تحلیل عددی توسط نرمافزار اباکوس<sup>7</sup> مقایسه شده که دارای همخوانی مناسبی میباشد.

### ۲- تئوری مسئله ۲-۱- هندسه مسئله

پوسته استوانهای کامپوزیتی با تقویتکنندههای متعامد، با سرعت زاویهای  $\Omega$  به دور محور تقارن طولی، مورد بررسی واقع شده است. سیستم مختصات متعامد  $(x,\theta,z)$  بر سطح مرجع بر روی لایه میانی پوسته قرار دارد. مطابق شکل ۱، در تئوری لایهای، پوسته به  $N_l$  لایه دلخواه فرضی تقسیم میشود. شعاع

<sup>1.</sup> Differential Quadrature Method

<sup>2.</sup> Cross-ply

<sup>3.</sup> Abaqus

 $\left\lceil \overline{C} \right\rceil = \left[ T \right]^{-1} \left[ C \right] \left[ T \right]$ 

ثابت  $R_j$  برای لایه j ام و جابهجاییهای  $u^j$   $u^j$  و  $w^j$  بهترتیب در جهات x و z درنظر گرفته می شود. پوسته دارای طول L و ضخامت h وتقویت کنندهها به صورت مستطیل شکل دارای ارتفاع  $d_{s'r}$  و پهنای  $b_{s'r}$  می باشند. فاصله مرکز سطح تقویت کنندهها تا سطح خارجی پوسته با  $z_{s'r}$  مشخص می گردد.



#### ۲-۲- تئوري سهبعدي الاستيسيته طبق تئورى سەبعدى الاستيسيتە، رابطە تنش-كرنش براى پوسته چندلایه به صورت زیر بیان میشود. $\{\sigma\} = \lceil \overline{C} \rceil \{\varepsilon\}$ (1) که در رابطه فوق مولفههای تنش و کرنش به صورت زیر است. $\{\boldsymbol{\sigma}\}^{T} = \{\boldsymbol{\sigma}_{x} \ \boldsymbol{\sigma}_{\theta} \ \boldsymbol{\sigma}_{z} \ \boldsymbol{\tau}_{\theta z} \ \boldsymbol{\tau}_{xz} \ \boldsymbol{\tau}_{x\theta}\}$ $\left\{\varepsilon\right\}^{T} = \left\{\varepsilon_{x} \quad \varepsilon_{\theta} \quad \varepsilon_{z} \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{x\theta}\right\}$ (٢) و ماتریس سفتی کاهشیافته $\left\lceil \overline{C} ight ceil$ به صورت زیر تعریف می شود. $\begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 \end{bmatrix}$ 0 $\overline{C}_{16}$ $\begin{bmatrix} \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C} & \bar{C} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix}$ (٣) $\bar{C}_{16}$ $\bar{C}_{26}$ $\bar{C}_{36}$ 0 $\overline{C}_{66}$ 0

ههندسی مکانیک هدرس دورهٔ ۱۲ شمارهٔ ۶. اسفند ۱۳۹۱

www.SID.ir

٨٢

$$\sum_{m=1}^{N} C_{m} C_{m$$

همچنین، رابطه ماتریس سفتی انتقالیافته با ماتریس

سفتی ماده به صورت زیر است.

(۴)

در رابطه فوق  $\alpha$  زاویه بین الیاف لایه کامپوزیتی و جهت مختصه x دستگاه مختصات میباشد. همچنین [C] ماتریس سفتی در دستگاه مختصات ماده میباشد و برای یک لایه کامپوزیتی به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = E_{11} \frac{1 - v_{23}v_{32}}{\Delta}, C_{22} = E_{22} \frac{1 - v_{31}v_{13}}{\Delta}$$

$$C_{33} = E_{33} \frac{1 - v_{21}v_{12}}{\Delta}$$

$$C_{12} = C_{21} = E_{11} \frac{v_{21} + v_{31}v_{23}}{\Delta}$$

$$C_{13} = C_{31} = E_{22} \frac{v_{13} + v_{12}v_{23}}{\Delta}$$

$$C_{23} = C_{32} = E_{33} \frac{v_{23} + v_{21}v_{13}}{\Delta}$$

$$C_{44} = G_{23}, C_{55} = G_{13}, C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = 1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13} \quad (Y)$$

$$v_{ij} = v_{ij} = \sigma_{01} + v_{12}v_{23} = v_{01} + v_{01}v_{02} + v_{01}v_{01} = v_{01} + v_{01}v_{02} + v_{01}v_{01} = v_{01}v_{01} + v_{01}v_{01} + v_{01}v_{01} = v_{01}v_{01} + v_{01}$$

تحليل سهبعدى ارتعاشات و سرعت بحراني پوستههاي



$$\mathcal{E}^{T} = \{ \mathcal{E}_{x} \quad \mathcal{E}_{\theta} \quad \mathcal{E}_{z} \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{x\theta} \}$$
(11)

## ۲-۳- استخراج معادلات حرکت

۲-۳-۱- تئوری لایهای

میدان جابهجایی برای *j* امین لایه از پوسته مورد نظر، با فرض شرط مرزی تکیهگاه ساده در دو سر، به صورت زیر تعریف میشود[۱۲].

$$u^{j} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{x}^{j}(z) \cos \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t)$$
$$v^{j} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\theta}^{j}(z) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t)$$
$$w^{j} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{z}^{j}(z) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t)$$
(17)

در این تئوری جزء جابهجایی در راستای ضخامت،  $\varphi$ ، به صورت تابعهای تکهای درونیاب لاگرانژین تعریف میشود که توابعی پیوستهاند که مشتق آنها ناپیوسته میباشد. در این تئوری تعداد زیرقسمتها در راستای ضخامت، i، میتواند مساوی و یا بیشتر از تعداد لایهها باشد و جزء جابهجایی در راستای ضخامت میتواند تابع چندجملهای خطی و یا مرتبه بالاتر باشد (شکل ۲). بنابراین، تابع  $\phi$  به صورت زیر تعریف میشود[۱۳].

$$\begin{split} \varphi_x^j(z) &= \alpha U^j + \beta U^{j+1} \qquad ; \qquad \beta = \frac{z - z_j}{h} \\ \varphi_\theta^j(z) &= \alpha V^j + \beta V^{j+1} \\ \varphi_z^j(z) &= \alpha W^j + \beta W^{j+1} \qquad ; \qquad \alpha = 1 - \beta \end{split}$$

مهندیسی مکانیک عدرس دورهٔ ۱۲ شمارهٔ ۶ اسفند ۱۳۹۱ www.SID.ir



شکل ۲ نمایش تغییرشکلها بر طبق تئوری لایهای

در رابطه (۱۳)  $z_j$  فاصله سطح پایینی لایه j ام از سطح  $W^{j+1}$  و  $V^{j+1}$  ،  $U^{j+1}$  ،  $W^{j}$  ،  $V^{j}$  ،  $U^{j}$  و مرجع يوسته مى باشد و مختصات عمومی لایه j ام میباشند. میدان جابهجایی تعریفشده در رابطه (۱۲) به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می گردد.  $\left\{ u^{j} \right\} = [N] \left\{ d^{j} \right\}$ (14) که  $\left\{ d^{\,j} \right\}$  به صورت زیر قابل بیان است.  $\left\{ d^{j} \right\}^{T} = \left\{ U^{j} V^{j} W^{j} U^{j+1} V^{j+1} W^{j+1} \right\}$ (10) و ماتریس [ N ] در پیوست ب آورده شده است. با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۸)، بردار کرنش به صورت زير قابل بيان است.  $\{\varepsilon\} = [B]\{d\}$ (18) که در رابطه فوق داریم: [B] = [D][N](17)

#### ۲-۳-۲- انرژی پوسته

انرژی کرنشی کششی و خمشی لایه *j*ام پوسته به وسیله رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$U_{\varepsilon}^{j} = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \{\sigma\}^{T} \cdot \{\varepsilon\} R_{j} d\theta dx dz \tag{1A}$$

در اثر چرخش پوسته نیروی گریز از مرکز در پوسته ایجاد خواهد شد که با نوشتن رابطه تعادل در جهت شعاعی المانی از

پوسته نیروی کشش حلقوی در اثر این چرخش به صورت زیر به دست خواهدآمد.

$$N_{j}^{\theta} = \rho_{j} R_{j} \Omega^{2} \tag{19}$$

انرژی کرنشی ایجادشده در پوسته در اثر این کشش حلقوی به صورت زیر بیان می گردد [۳].

$$U_{j}^{h} = \int_{vol} \frac{N_{j}^{\theta}}{2R_{j}^{2}} \left\{ \left( \frac{\partial u_{j}}{\partial \theta} \right)^{2} + \left( \frac{\partial v_{j}}{\partial \theta} + w_{j} \right)^{2} + \left( \frac{\partial w_{j}}{\partial \theta} - v_{j} \right)^{2} \right\} R_{j} d\theta dx dz$$
 (7.)

$$U_{j}^{N_{a}} = -\frac{N_{a}}{2}$$

$$\times \iiint_{vol} \left[ \left( \frac{\partial u_{j}}{\partial x} \right)^{2} + \left( \frac{\partial v_{j}}{\partial x} \right)^{2} + \left( \frac{\partial w_{j}}{\partial x} \right)^{2} \right] R_{j} dx d\theta dz$$
(71)

$$U_{j}^{P} = -\frac{P}{2} \iiint_{vol} \left[ \left( \frac{\partial^{2} w_{j}}{\partial \theta^{2}} + w_{j} \right) w_{j} \right] R_{j} d\theta dx dz \quad (\Upsilon\Upsilon)$$

$$I_{i}(z) = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho(z) \vec{V} \cdot \vec{V}$$

$$2 \frac{333}{vol}$$
 بردار سرعت در رابطه فوق برای هر نقطه از پوسته دوار به  
صورت زیر تعریف می شود.  
 $\vec{V} = i \vec{i} \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + w \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} + (\Omega \cdot \vec{i} \times w \cdot \vec{j} \cdot \vec{k})$ 

$$+(\Omega \vec{i} \times v^{j} \vec{j})$$
(14)

$$T^{j} = \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \left[ \left( u^{j} \right)^{2} + \left( v^{j} \right)^{2} + \left( w^{j} \right)^{2} \right] R_{j} d\theta dx dz}_{T_{1}^{j}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \left[ 2\Omega (vw - wv) \right] R_{j} d\theta dx dz}_{T_{2}^{j}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \left[ \Omega^{2} \left( v^{2} + w^{2} \right) \right] R_{j} d\theta dx dz}_{T_{3}^{j}} \qquad (\Upsilon\Delta)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۲۵) و همچنین با جایگذاری رابطههای (۱) و (۱۲) و (۱۶) در رابطه (۱۸)، بخش اول انرژی جنبشی  $T_1^j$  و همچنین انرژی کرنشی و خمشی پوسته به صورت زیر قابل بیان است.

$$T_{1}^{j} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{d} \right\}^{T} \left[ M_{sh}^{j} \right] \left\{ \dot{d} \right\}$$
$$U_{\varepsilon}^{j} = \frac{1}{2} \left\{ d \right\}^{T} \left[ K_{1}^{j} \right] \left\{ d \right\}$$
(79)

سفتی  $\begin{bmatrix} K_1^{\ j} \end{bmatrix}$ و  $\begin{bmatrix} M_{sh}^{\ j} \end{bmatrix}$ به ترتیب ماتریس جرم و ماتریس سفتی  $\begin{bmatrix} M_{sh}^{\ j} \end{bmatrix}$ لایه jام پوسته میباشند که به صورت زیر قابل حصول هستند.

$$M_{sh}{}^{j} = \frac{\pi L}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \alpha_{j}{}^{2} & 0 & 0 & \alpha_{j}\beta_{j} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{j}{}^{2} & 0 & 0 & \alpha_{j}\beta_{j} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{j}{}^{2} & 0 & 0 & \alpha_{j}\beta_{j} \\ \alpha_{j}\beta_{j} & 0 & 0 & \beta_{j}{}^{2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{j}\beta_{j} & 0 & 0 & \beta_{j}{}^{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{j}\beta_{j} & 0 & 0 & \beta_{j}{}^{2} \end{bmatrix} R_{j}dz \quad (\Upsilon Y)$$

$$K_1^{\ j} = \iiint_{vol} K_{rs}^1 R^j d\theta dx dz \tag{7A}$$

در ایههای  $K^1_{rs}$  ,(r,s=1...6) در رابطه (۲۸) در پیوست الف آورده شده است.

۲-۳-۳- انرژی تقویت کننده ها

در روش تحلیلی حاضر فرض بر این است که پوسته و تقویت کننده ها به صورت یکپارچه می باشند. به قصد برقراری رابطه بین جابه جایی تقویت کننده ها و پوسته و درنظر گرفتن خروج از مرکزیت تقویت کننده ها میدان جابه جایی هر نقطه از تقویت کننده به فاصله z از سطح خارجی پوسته در جهت های x و  $\sigma$  به صورت رابطه (۲۹) تعریف می شود.

$$u_{s} = u_{N_{1}+1} - z \frac{\partial w_{N_{1}+1}}{\partial x}$$

$$v_{s} = v_{N_{1}+1} - \frac{z}{R_{N_{1}}} \frac{\partial w_{N_{1}+1}}{\partial \theta}$$

$$w_{s} = w_{N_{1}+1} \qquad (19)$$

در رابطه فوق، ( $u_{Nl+1}, v_{Nl+1}, w_{Nl+1}$ ) جابهجایی سطح خارجی پوسته میباشد. بدینترتیب، کرنش استرینگر در جهت طولی و کرنش رینگ در جهت محیطی به صورت زیر بهدست میآید.

۸۴ www.SID.ir  $G_{sk}J_{sk}$  و می اطلی و  $N_s$  تعداد تقویت کننده های طولی و  $G_{sk}J_{sk}$  می الم می اشد. همچنین اسختی پیچشی تقویت کننده طولی kام می اشد. همچنین انرژی کرنشی تقویت کننده های محیطی با درنظر گرفتن اثرات کشش، خمش و پیچش به صورت زیر بیان می شود.

$$U_{r} = \sum_{k=1}^{N_{r}} \frac{1}{2} E_{rk} \int_{0}^{2\pi} \int_{A_{rk}} \varepsilon_{rs}^{2} dA_{rk} d\theta$$
$$+ \sum_{k=1}^{N_{r}} \frac{1}{2} G_{rk} J_{rk} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{R_{N}^{2}} \left(\frac{\partial^{2}w}{\partial\theta\partial x}\right)^{2} \left(R_{N} + d_{s} / 2\right) d\theta$$
(76)

که در این رابطه G<sub>rk</sub> J<sub>rk</sub> سختی پیچشی تقویتکننده حلقوی است.

#### ۲-۳-۴ اصل همیلتون

در این تحقیق، به قصد بهدست آوردن معادلات حرکت از اصل همیلتون استفاده شده است. با جایگذاری رابطه (۱۲) در روابط (۲۰)، (۲۱)، (۲۲) و (۲۵) و سپس اعمال اصل همیلتون و همچنین جداسازی ضرایب  $^{j} \, \delta V^{j}$ ،  $\delta V^{j}$ ،  $\delta V^{j}$ ،  $\delta V^{j+1}$ همچنین جداسازی ضرایب  $^{j} \, \delta V^{j}$ ،  $\delta V^{j}$ ،  $\delta V^{j+1}$  $\delta U^{j+1}$   $\delta V^{j}$  و  $^{j+1}$   $\delta V^{j}$ ،  $\delta V^{j+1}$   $\delta V^{j+1}$  $\delta V^{j+1}$  و  $^{j+1} \, \delta V^{j}$ ، تمام انرژیهای پوسته به صورت ماتریسی قابل بیان است و میتوان ماتریسهای سفتی و ژیروسکوپی را از آنها استخراج نمود. شکل ماتریسی این انرژیها در پیوست ب آورده شده است. همچنین با جاگذاری رابطه (۱۲) در روابط (۲۳)، (۳۳)، (۳۴)، (۵۳) و (۶۳) و اعمال رابطه (۲۱) در روابط (۲۲)، (۳۳)، (۳۴)، (۵۳) و (۶۳) و اعمال اصل همیلتون و جداسازی ضرایب  $_{j+1}^{j} \, \delta U_{N_{j+1}}$ اصل همیلتون و جداسازی ضرایب  $_{j+1}^{j} \, \delta U_{N_{j+1}}$ اس همیلتون و جداسازی ضرایب  $_{j+1}^{j} \, \delta U_{N_{j+1}}$ اس همیلتون و جداسازی ضرایب  $_{j+1}^{j} \, \delta U_{N_{j+1}}$ وال  $\delta V_{N_{j+1}}$  تمام انرژیهای تقویت کنندهها به فرم ماتریسی های این ماتریسها نیز در پیوست ب آورده شده است.

#### ۲-۴- روش حل مسئله

انرژی جنبشی و پتانسیل پوسته با جمع کردن انرژی جنبشی و پتانسیل هر کدام از لایهها بهدست می آید و با برهم گذاری ماتریسهای سفتی، جرم و ژیروسکوپ پوسته و تقویت کنندهها و مرتب کردن آنها بر حسب مرتبه فرکانس طبیعی ۵۰ رابطه مقدار ویژه فرکانسی پوسته تقویت شده به فرم ماتریسی زیر حاصل می گردد.

$$\left\{ [M]\omega^2 + [G]\omega + [K] \right\} \left\{ \delta \right\} = 0 \tag{(4.1)}$$

$$\varepsilon_{sx} = \frac{\partial u_{N_l+1}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_{N_l+1}}{\partial x^2} \tag{(7.)}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{R_{N_{l}}} \left( \frac{\partial v_{N_{l}+1}}{\partial \theta} - \frac{z}{R_{N_{l}}} \frac{\partial^{2} w_{N_{l}+1}}{\partial \theta^{2}} + w_{N_{l}+1} \right) \quad (\text{T1})$$

با استفاده از تئوری المان جداگانه به قصد مدل کردن تقویت کنندهها، انرژی جنبشی استرینگرها و رینگها به صورت زیر بیان می شود.

$$T_{s} = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{0}^{L} \int_{A_{sk}} \left[ \dot{u}_{s}^{2} + \dot{v}_{s}^{2} + \dot{w}_{s}^{2} + 2\Omega \left( v_{s} \dot{w}_{s} - w_{s} \dot{v}_{s} \right) + \Omega^{2} \left( v_{s}^{2} + w_{s}^{2} \right) \right] dA_{sk} dx \quad (\Upsilon\Upsilon)$$

$$T_{r} = \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{N_{r}} \int_{0}^{2\pi} \int_{A_{k}} \left[ \dot{u}_{r}^{2} + \dot{v}_{r}^{2} + \dot{w}_{r}^{2} + 2\Omega \left( v_{r} \dot{w}_{r} - w_{r} \dot{v}_{r} \right) + \Omega^{2} \left( v_{r}^{2} + w_{r}^{2} \right) \left( R_{N} + \frac{d_{s}}{2} \right) \right] dA_{rk} d\theta \qquad (\Upsilon\Upsilon)$$

به دلیل هندسه تقویت کننده ها، انرژی کرنشی به وجود آمده در اثر نیروی گریز از مرکز تنها در تقویت کننده های حلقوی قابل ذکر است و مقدار این انرژی در تقویت کننده های طولی قابل صرفنظر کردن است. بنابراین انرژی کرنشی در تقویت کننده های محیطی در اثر کشش حلقوی ناشی از دوران به صورت زیر قابل بیان می باشد [۳].

$$U_{rh} = \frac{N_{\theta}^{s}}{2R_{N}^{2}} \sum_{k=1}^{N_{r}} \int_{0}^{2\pi} \int_{A_{rk}} \left\{ \left( \frac{\partial u_{s}}{\partial \theta} \right)^{2} + \left( \frac{\partial v_{s}}{\partial \theta} + w_{s} \right)^{2} + \left( \frac{\partial w_{s}}{\partial \theta} - v_{s} \right)^{2} \left( R_{N} + \frac{d_{s}}{2} \right) \right\} dA_{rk} d\theta \qquad (3\%)$$

که در رابطه فوق،  $N_r$  و  $N_r$  بهترتیب تعداد تقویت کنندههای محیطی و مطح مقطع  $N_{lack}$  محیطی و سطح مقطع  $N_{lack}$ میده محیطی و سطح مقطع  $N_{lack}$ میدهد و همچنین  $N_{\theta}^s = \rho_r \Omega^2 \left( R_N + \frac{z_s}{2} \right)$ 

$$U_{s} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \frac{1}{2} E_{sk} \int_{0}^{L} \int_{A_{sk}} \mathcal{E}_{ss}^{2} dA_{sk} dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{N_{s}} \frac{1}{2} G_{sk} J_{sk} \int_{0}^{L} \frac{1}{R_{N}^{2}} \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial \theta \partial x}\right)^{2} dx \qquad (\text{Tabula})$$

مهندسی مکانیک مدرس دورهٔ ۱۲ شمارهٔ ۶. اسفند ۱۳۹۱ www.SID.ir

$$\begin{split} & [K] = \left[ K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K^s \right] \\ & [M] = \left[ M^{sh} + M^s \right] \\ & [G] = \left[ G^{sh} + G^s \right] \\ & \{\delta\}^T = \left\{ U^1 V^1 W^1 U^2 V^2 W^2 \dots U^{n_l + 1} V^{n_l + 1} W^{n_l + 1} \right\} \quad (\ref{eq:matrix}) \end{split}$$

رابطه (۳۸)، فرم غیراستاندارد رابطه مقدار ویژه میباشد. با بازنویسی آن به صورت زیر، فرم استاندارد رابطه مقدار ویژه فرکانسی حاصل می گردد[۱۴].

$$\left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -G \end{bmatrix}}_{A^*} - \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}}_{B^*} \omega \right) \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \omega \delta \end{matrix} \right\} = 0$$
 (\*.)

در این رابطه، I ماتریس یکه با ابعاد  $(I + _{I}) \times 3(N_{I} + 1)$  در این رابطه، I ماتریس  $[B^{*}]^{-1} [A^{*}]$  از میباشد. با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس  $[A^{*}]^{-1} [A^{*}]$  از رابطه (۴۰)، (۴۰) مقدار برای  $m_{i}$  حاصل میشود. دو مقدار کوچک این مقادیر انتخاب میشوند که یکی از آنها با فرکانس طبیعی موج پیشرونده و دیگری با فرکانس طبیعی موج پسرونده مطابقت دارد.

#### ۳- بحث بر روی نتایج

در نمایش نتایج نشانداده شده در شکلها، خطوط توپر نماینده فرکانس طبیعی موج پسرونده و خطوط خطچین نماینده فرکانس طبیعی موج پیشرونده میباشند. همچنین سرعت دورانی دارای واحد اندازه گیری دور بر ثانیه میباشد. خصوصیات مکانیکی مواد استفاده شده برای پوسته در این تحقیق در جدول ۱ و خصوصیات مکانیکی و هندسی تقویت کننده ها در جدول ۲ آورده شده است.

**جدول ۱** خصوصیات مکانیکی پوسته

دانسیته (kg/m <sup>3</sup> )	مدول برشی (GPa)	ضريب پواسون	مدول یانگ (GPa)	
18	۲/۹۲	۰ /٣	٧/۶	ايزوتروپيک
	$G_{11}=\Delta/9$	$v_{12}=\cdot/f$	E11=120	
1848	G <sub>13</sub> =٣	$\upsilon_{13}$ =•/Y	E <sub>22</sub> =1.	كربن-اپوكسى
	$G_{23}=\Delta/9$	$\upsilon_{23}=\cdot/\Upsilon$	$E_{33}=1$ .	

کامران دانشجو و همکاران

نوع تقويت كننده	استرينگر	رینگ
ارتفاع (mm)	٨	٨
پهنا (mm)	٢	٢
مدول یانگ (GPa)	٧.	٧٠
ضريب پواسون	• /٣	٠/٣
دانسیته (kg/m <sup>3</sup> )	YY/Y	YV/V

به قصد بررسی صحت تحلیل صورت گرفته، نتایج حاصل با نتایج منتشرشده در ادبیات موضوع مقایسه میشود. در مورد اول، به قصد مقایسه فرکانس طبیعی پوسته جدارنازک بدون تقویتکننده، تعداد تقویتکنندهها در تحقیق حاضر صفر درنظر تقویتکننده، تعداد تقویتکنندهها در تحقیق حاضر صفر مرنظر مغردینده و نتایج پارامتر فرکانسی  $\overline{\omega} = \omega R \sqrt{\rho / E_{22}}$  با نتایج بهدست آمده از تئوری کلاسیک مرجع [1۵] مقایسه گردیده و در جدول ۳ آورده شده است.

 $\overline{\omega} = \omega L \sqrt{\rho(1+v)/E}$  در دومین مقایسه، پارامتر فرکانسی  $E = \omega L \sqrt{\rho(1+v)/E}$  و  $\overline{\omega} = (\omega h/\pi) \sqrt{\rho/G}$  و  $\overline{\omega} = (\omega h/\pi) \sqrt{\rho/G}$  غیردوار جدارضخیم حاصل شده از تحقیق حاضر و مرجع [۱۶]، در جدول ۴ آورده شده است. نتایج برای نسبتهای مختلف h/L و h/R ارائه شده است که نشان از کارآمدی روش لایهای در مدل کردن پوسته جدارضخیم دارد.

شرايط	با	استوانهای	پوسته	$\overline{\omega} = \omega R$	$\sqrt{\rho / E_{22}}$	قايسه -	ل ۳ ما	جدوا
(1	n=	1, h/R=0.	002, I	(R=1)	يەگاە سادە	رزی تک	۵	

تحقيق حاضر	ساندرز[۱۵]	فلوگه[۱۵]	دانل[۱۵]	n	$\Omega$ (rps)
۱/•۶۱۳۸	1/08147	1/08188	1/08148	١	
•/太•٣٩٧	•/٨•۴٢١	•/٨•۴٢١	•/*•**1	۲	
۰/۵۹۸۱۹	•/۵٩٨۴٧	·/697EV	•/۵٩٨۴٨	٣	
•/۴۴۹۹۹	•/40•79	•/40.79	•/40•11	۴	• / 1
•/٣۴۵١١	•/٣۴۵۳۵	•/٣۴۵۳۵	•/٣۴۵٣٩	۵	
•/77•97	•/77•14	•/77•14	•/77•91	۶	
•/51760	•/71798	•/71794	•/71774	٧	
۱/•۶••۷	1/+8777	1/08575	1/+8272	١	
•/*•**	•/1.•099	•/1.•099	•/*•084	۲	
•/69894	۰/۵۹۹۸۱	•/۵۹۹۸۱	۰/۵۹۹ <b>۸</b> ۲	٣	
•/۴۴۸۹۹	•/4010•	•/40101	•/40108	۴	١/•
•/٣۴۴۴١	•/٣۴۶۵٨	•/٣۴۶۵٨	•/84997	۵	
•/77•79	•/77718	•/77719	۰/۲۷۲۲۵	۶	
•/٢١٧۶•	۰/۲۱۹۲۵	•/71979	۰/۲۱۹۳۶	۷	

تحلیل سهبعدی ار تعاشات و سرعت بحرانی پوستههای

جدول ۴ مقایسه پارامتر فرکانسی  $\overline{a}$  برای پوسته ایزوتروپیک

	(m=1, v=0.3)					
$\bar{\omega} = (\omega$	wh / $\pi$ ) $\sqrt{ ho}$	/G	$\overline{\omega} = \omega L$	$\sqrt{\rho(1+v)}$	) / E	E
h/R=•/۴	n=	٢		L/R=۱		
تحقيق حاضر	لوی[۱۶]	h/L	تحقيق حاضر	لوی[۱۶]	n	h/R
•/•۶۲١	•/•971	•/• ١	1/0880	1/0978	١	
•/•٧۴۵	•/•٧۴۵	٠/١	۰/۸۸۲۹	۰/۸۸۲۵	٢	
•/1701	•.1749	٠/٢	•/٨١•١	۰/۸۰۹۵	٣	٠/١
•/TVTF	۰.۲۷۱۹	٠/۴	•/៱٩٩۶	•/太٩٨٩	۴	
•/447•	•/4410	• /۶	1/1777	1/177.	۵	
•/8787	•/8754	•/٨	1/1298	١/١٨٨٩	١	
•//////	•/٨١٧•	١/٠	1/1+19	1/1•1•	٢	
			1/19,17	1/1977	٣	٠/٢
		Y	1/4901	1/4897	۴	
		)	1/9515	1/914.	۵	

در مورد سوم، به قصد بررسی صحت مدلسازی تقویت کنندهها، مقایسهای بین نتایج حاصل از تحلیل حاضر و نتایج مراجع [۱] و [۳] برای پوسته تقویتشده با استرینگر صورت گرفته است. خصوصیات هندسی و مکانیکی پوسته و استرینگر در جدول ۵ و مقایسه فرکانسی در جدول ۶ آورده شده است.

جدول ۵ خصوصیات هندسی و مکانیکی پوسته تقویتشده برای مقایسه نتایج جدول ۶

ضريب	مدول	پهنای	ارتفاع	طول	ضخامت	شعاع
پواسون	یانگ	استرينگر	استرينگر	پوسته	پوسته	پوسته
	(GPa)	(mm)	(mm)	(m)	(mm)	(m)
۰ /٣	۶۸/۹	۲/۵۵۴	٧/• ٢	۰/۶۰۹	• /۶۵	•/747

**جدول ۶** مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانهای با ۶۰ استرینگر خارجی

			_
تحقيق	ژاهو و	مصطفی و	شماره مود
حاضر	همکارانش[۳]	على[١]	محيطى
1148	1141	1141	١
४४१	848	۶۷۴	۲
471	429	477	٣
171	۲۹۹	298	۴
7 • 9	۲۳۱	222	۵
١٨٢	۱۹۸	۱۸۸	۶

در چهارمین مقایسه که در شکل ۳ نشان داده شده است، به بررسی فرکانس طبیعی حاصل از این روش و مرجع [۱۷] برای پوسته استوانهای با تقویت کنندههای متعامد پرداخته شده است. پوسته مربوطه، کامپوزیتی، دارای چیدمان [°00'00] و تقویت شده با ۱۰ رینگ و استرینگر میباشد. علت پایین تربودن فرکانس طبیعی نتایج تحلیل حاضر و نتایج مرجع [۱۷] اختلاف بین تئوریهای به کار برده شده میباشد.

در آخرین مقایسه که نتایج آن در جدول ۷ و شکل ۴ آورده شده است، مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانهای ایزوتروپیک غیردوار با تقویت کنندههای متعامد حاصل از روش تحلیلی حاضر و تحلیل عددی با استفاده از نرمافزار اجزای محدود اباکوس صورت گرفته است. در این نرمافزار برای مدل کردن پوسته و تقویت کنندهها بهترتیب از المانهای SSR و طبیعی حاصل از روش تحلیلی نسبت به نتایج تحلیل نرمافزار اجزای محدود در مدل کردن تقویت کنندهها نسبت به پوسته میباشد. در مدل تحلیلی، جابهجایی تقویت کنندهها بر اساس میباشد. در مدل تحلیلی، جابهجایی تقویت کنندهها بر اساس میباشد. در مدل تحلیلی، جابهجایی تقویت کنندهها بر اساس میباشد. در مدل تحلیلی، جابهجایی تقویت کنندهها بر اساس میباشد. در مدل تحلیلی، جابهجایی تقویت کننده است، در حالی که میرا زراز اجزای محدود این جابهجایی بر اساس جابهجایی مدل تحلیلی بیشتر و فرکانس طبیعی حاصل نیز بزر گتر خواهد بود.



**شكل ۳** تغييرات فركانس بر حسب شماره مود، مقايسه نتايج حاضر و (L=5m, R=1m, h=6mm, [0,90,0], N<sub>r</sub>=10, [1V] N<sub>s</sub>=10, m=1)

مهندسی مکانیک مدرس دورهٔ ۱۲ شمارهٔ ۶ اسفند ۱۳۹۱ www.SID.ir

,	, , , , , ,	, , ,
تحليل عددي اباكوس	تحقيق حاضر	شماره مود محيطي
۱۸۸/۴۹	۱۸۸/۳۵	٢
) • • / ) V	1 • • /٣١	٣
V8/•47	V8/873	۴
۸۸/۹۱۲	٨٩/۶٣٣	۵
۱۲۰/۲۸	171/874	۶
169/59	184/082	٧



جدول ۷ فرکانس پوسته استوانهای ایزوتروپیک تقویت شده، مقایسه





شکل ۴ نمایش شکل مودهای پوسته استوانهای با تقویت کنندههای متعامد حاصل از تحلیل عددی در نرمافزار اباکوس؛ الف) (m,n)=(1,6) (س,n)=(1,5)

تطابق بین نتایج در تمام موارد مقایسههای صورت گرفته، نشان از دقت و صحت روش ارائهشده برای پوسته استوانهای تقویتشده دارد.

شکل ۵ تاثیر نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده، در حالی که مساحت سطح مقطع تقویت کننده ثابت است، را بر روی فركانس طبيعي پوسته تقويتشده غيردوار نشان ميدهد. نتايج در مودهای مختلف محیطی، در حالی که مود طولی ۱ است، بهدست آمدهاند. با توجه به شکل، مشخص می شود که فرکانس طبیعی با افزایش نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده در تمام مودهای محیطی به جز مود اول افزایش می یابد. کاهش نامحسوس فرکانس در مود اول در نتیجه برتری اثر اینرسی تقویتکنندهها بر اثر سفتی آنها میباشد.

در شکل ۶، تاثیر سرعت دورانی بر فرکانس طبیعی پوسته تقویتشده و پوسته بدون تقویت کننده در مودهای محیطی مختلف نشان داده شده است. سرعت دورانی در تمام مودها باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود که این اثر در مودهای محيطى بالاتر از مود پايه محسوستر است. اما اختلاف بين فركانس طبيعي دو موج پسرونده و پيشرونده ناشي از سرعت دورانی در مودهای ابتدایی بارزتر میباشد. همچنین، اثر افزیشی فرکانس طبیعی ناشی از سرعت دورانی در پوسته تقویتشده کمتر می باشد که علت آن سفتی بیشتر این پوسته در مقابل پوسته بدون تقویت کننده می باشد. شایان ذکر است استفاده از تقویت کننده و همچنین افزایش سرعت دورانی باعث تعويض مود پايه و پايينترآمدن آن ميشود.

پدیده سرعت بحرانی را میتوان در شکل ۷ مشاهده کرد. سرعت بحرانی به سرعتی گفته می شود که در آن سرعت، فرکانس طبيعي موج پيشرونده پوسته دوار به صفر ميرسد. این سرعت با نقطه برخورد منحنی فرکانسی موج پیشرونده با محور افقی مطابقت دارد. در این سرعت کوچکترین نامیزانی موجود در پوسته باعث بروز پدیده رزونانس و جابهجاییهای شدید در پوسته می گردد. در شکل ۷ اثر رینگ و استرینگر را بر سرعت دورانی می توان مشاهده کرد. با توجه به شکل، پرواضح است که اثر رینگ در افزایش سرعت بحرانی نامحسوس و استرینگر باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود. باید توجه داشت که پدیده سرعت بحرانی در پوسته استوانهای زمانی اتفاق میافتد که مود طولی و مود محیطی دارای مقدار ۱ باشند که در این مود نیز اثر تقویت کنندههای طولی در بالابردن سفتی پوسته بیشتر میباشد. شایان ذکر است که همیشه افزایش سرعت بحرانی مطلوب طراح نمیباشد.

120



شكل ۷ تغییرات فركانس طبیعی بر حسب سرعت دورانی، بررسی اثر (R=1.5m, L=2πR, نوع تقویتكننده بر سرعت بحرانی h=3mm,m=n=1,[0°/90°/0°], Carbon-Epoxy, N<sub>a</sub>=-0.9 N<sub>cr</sub>)

در شکل ۸ اثر بار محوری ثابت بر سرعت بحرانی پوسته تقویت شده نشان داده شده است. در این شکل منظور از  $N_{cr}$  بار کمانش کلی پوسته تقویت شده می باشد و بار اعمالی بر پوسته به منظور پیشگیری از کمانش باید کسری از این مقدار باشد. بار کمانش کلی پوسته را می توان از رابطه (۴۰) با حذف ترمهایی که شامل  $\Omega$  و  $\omega$  می باشد و حل مسئله مقدار ویژه بهدست آورد. با توجه به این شکل، مشخص می شود که افزایش بار محوری فشاری باعث کاهش سرعت بحرانی می شود که حساسیت این کاهش با افزایش بار فشاری بیشتر می شود.



**شکل ۸** حساسیت سرعت بحرانی به بار محوری فشاری (R=1.5m, L=2πR, h=3mm, m=n=1, [0°/90°/0°], Carbon-Epoxy, N<sub>s</sub>=N<sub>r</sub>=4)

در شکل ۹ اثر فشار داخلی و خارجی بر سرعت بحرانی پوسته استوانهای تقویتشده نشان داده شده است. در این شکل



**شكل 7** تغییرات فركانس بر حسب شماره مود در سرعتهای دورانی مختلف؛ الف) N<sub>r</sub>=10, N<sub>s</sub>=5 (، ب) N<sub>r</sub>=0, N<sub>s</sub>=0 (L=3m,R=1m,h=3mm,[0°/90°/0°],m=1,Carbon-Epoxy)

مهندیسی مکانیک مدرس دورهٔ ۱۲ شمارهٔ ۶. اسفند ۱۳۹۱ www.SID.ir

منظور از  $P_{cr}$  فشار خارجی میباشد که باعث کمانش پوسته میشود و مانند بار کمانش محوری بهدست میآید. با توجه به شکل، مشخص میشود که با افزایش فشار داخلی، سرعت بحرانی پوسته افزایش مییابد که اثر افزایشی آن در فشارهای داخلی بالا کاهش مییابد و با افزایش فشار خارجی بر پوسته، سرعت بحرانی پوسته کاهش مییابد و حساسیت سرعت بحرانی به فشار خارجی در فشار با مقدارهای بالا بیشتر است. همچنین، اثر افزایشی و کاهشی فشار و بار محوری در تمام سرعتهای دورانی بر فرکانس طبیعی پوسته قابل پیشبینی است.



**شکل ۹** حساسیت سرعت بحرانی به فشار داخلی و خارجی (L=10m, R=1m, h=3mm, m=n=1, [0°/90°/0°], Carbon-Epoxy, N<sub>s</sub>=N<sub>r</sub>=4)

#### ۴- نتیجهگیری

در این تحقیق، با استفاده از تئوری سهبعدی الاستیسیته و تئوری لایهای، به تحلیل ارتعاشات و سرعت بحرانی پوسته استوانهای کامپوزیتی دوار با تقویت کنندههای متعامد پرداخته شد. همچنین، اثرات سرعت دورانی، شماره مود محیطی، نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کنندهها، بار محوری و فشار بر روی فرکانس طبیعی بررسی گردید. برخی از نتایج این تحقیق به صورت زیر ارائه می گردد.

۱- بررسی نتایج این اطمینان را حاصل میکند که تئوری
 لایه از کارآمدی مناسبی در تحلیل ارتعاشات پوسته
 استوانه ای تقویت شده برخوردار است.

۲- با افزایش نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کنندهها، فرکانس
 طبیعی در تمام مودهای محیطی به جز مود اول افزایش مییابد.

۳- اثر سرعت دورانی بر فرکانس طبیعی در پوسته بدون تقویت کننده در قیاس با پوسته تقویت شده بیشتر است.
 همچنین، افزایش سرعت دورانی و تعداد تقویت کننده ها باعث کاهش شماره مود پایه می گردد.
 ۲- استفاده از استرینگر باعث افزایش سرعت بحرانی می گردد، در حالی که استفاده از رینگ تاثیر محسوسی بر سرعت بحرانی پوسته استوانه ای تقویت شدارد.
 ۵- افزایش فشار خارجی و بار محوری فشاری باعث کاهش سرعت به بار و فشار با می گردد می می گردد.

#### ۵- پيوستها

۵-۱- پيوست الف

درایههای ماتریس سفتی رابطه (۲۶) به صورت زیر میباشد.

$$K^{1}_{11} = \left[C_{11}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2} \alpha_{j}^{2} + C_{55}\left(\frac{\partial\alpha_{j}}{\partial z}\right)^{2} + \frac{C_{66}n^{2}\alpha_{j}^{2}}{R_{j}^{2}}\right] \frac{\pi L}{2} \qquad (1-id)$$

$$K^{1}_{12} = \left(-\frac{\left(C_{66}+C_{12}\right)}{R_{j}}n\frac{m\pi}{L}\alpha_{j}^{2}\right) \frac{\pi L}{2} \qquad (1-id)$$

$$K^{1}_{13} = \left[-\left(-C_{55}+C_{13}\right)\frac{\partial\alpha_{j}}{\partial z}\frac{m\pi}{L}\alpha_{j} - \frac{C_{12}}{R_{j}}\frac{m\pi}{L}\alpha_{j}^{2}\right] \frac{\pi L}{2} \qquad (1-id)$$

$$K^{1}_{14} = \left[C_{11}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\beta_{j}\alpha_{j} + C_{55}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) + \frac{C_{66}n^{2}\beta_{j}\alpha_{j}}{R_{j}^{2}}\right] \frac{\pi L}{2} \qquad (1-id)$$

$$K_{15}^{1} = \left[ -(C_{66} + C_{12}) \frac{n}{R_{j}} \frac{m\pi}{L} \beta_{j} \alpha_{j} \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\Delta - \Delta L)$$

$$K_{16}^{1} = \left[ -(C_{55} + C_{13}) \frac{m\pi}{L} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \alpha_{j} \right]$$

$$K_{21} = K_{12}$$
 (۲–الف)

$$\begin{split} & K^{1}_{34} = K^{1}_{43} & (19 - idl) \\ & K^{1}_{35} = \left[ \left( C_{22} + C_{44} \right) \frac{n\alpha_{j}\beta_{j}}{R_{j}^{2}} \\ & + \left( C_{44} + C_{23} \right) \frac{n}{R_{j}} \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \beta_{j} \right] \frac{\pi L}{2} & (19 - idl) \\ & K^{1}_{36} = \left[ \left( C_{22} + C_{44} n^{2} \right) \frac{\beta_{j}\alpha_{j}}{R_{j}^{2}} + C_{33} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^{2} \beta_{j}\alpha_{j} + \frac{C_{23}}{R_{j}} \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^{2} \beta_{j}\alpha_{j} + \frac{C_{23}}{R_{j}} \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + \frac{C_{23}}{R_{j}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \alpha_{j} \right] \frac{\pi L}{2} & (14 - idl) \\ & K_{41} = K_{14} & (19 - idl) \\ & K_{42} = \left( - \frac{\left( C_{66} + C_{12} \right)}{R_{j}} n \frac{m\pi}{L} \alpha_{j}\beta_{j} \right) \frac{\pi L}{2} & (7 - idl) \\ & K^{1}_{43} = \left[ - \left( C_{55} + C_{13} \right) \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \frac{m\pi}{L} \beta_{j} \\ & - \frac{C_{12}}{R_{j}} \frac{m\pi}{L} \alpha_{j}\beta_{j} \right] \frac{\pi L}{2} & (7 - idl) \\ & K^{1}_{44} = \left[ C_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + C_{55} \left( \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \right)^{2} \\ & + \frac{C_{66}}{R_{j}^{2}} n^{2} \beta_{j}^{2} \right] \frac{\pi L}{2} & (77 - idl) \\ & K_{45} = \left[ - \left( C_{66} + C_{12} \right) \frac{n}{R_{j}} \frac{m\pi}{L} \beta_{j}^{2} \right] \frac{\pi L}{2} & (77 - idl) \\ & K_{45} = \left[ - \left( C_{66} + C_{12} \right) \frac{n}{R_{j}} \frac{m\pi}{L} \beta_{j}^{2} \right] \frac{\pi L}{2} & (77 - idl) \\ & K^{1}_{46} = \left[ - \left( -C_{55} + C_{13} \right) \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \frac{m\pi}{L} \beta_{j} \\ & - \frac{C_{12}}{R_{j}} \frac{m\pi}{L} \beta_{j}^{2} \right] \frac{\pi L}{2} & (77 - idl) \\ & K^{1}_{46} = \left[ - \left( C_{66} + C_{12} \right) \frac{n}{R_{j}} \frac{m\pi}{L} \beta_{j}^{2} \right] \frac{\pi L}{2} & (77 - idl) \\ & K^{1}_{46} = \left[ - \left( C_{15} + C_{13} \right) \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \frac{m\pi}{L} \beta_{j} \\ & - \frac{C_{12}}{R_{j}} \frac{m\pi}{L} \beta_{j}^{2} \right] \frac{\pi L}{2} & (77 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{15} & (76 - idl) \\ & K^{1}_{52} = K^{1}_{25} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{52} = K^{1}_{25} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{15} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{15} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{25} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{25} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{25} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{51} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{25} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{51} & (75 - idl) \\ & K^{1}_{51} = K^{1}_{51}$$

. .

 $K^{1}_{53} = K^{1}_{35}$  (YY-illi)

 $K^{1}_{54} = K^{1}_{45}$  (YA-ilia)

$$K^{1}_{31} = K^{1}_{13} \tag{17-(14)}$$

$$K^{1}_{32} = K^{1}_{23} \tag{14-1}$$

$$\begin{split} K^{1}{}_{33} = & \left[ \left( C_{22} + C_{44} n^{2} \right) \frac{\alpha_{j}^{2}}{R_{j}^{2}} + C_{33} \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \right. \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^{2} \alpha_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}} \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \alpha_{j} \\ & + \frac{C_{23}}{R_{j}} \frac{\partial \alpha_{j}}{\partial z} \alpha_{j} \right] \frac{\pi L}{2} \end{split}$$
 (16)

مهندسی مکانیک مدرس دورهٔ ۱۲ شمارهٔ ۶ اسفند ۱۳۹۱ www.SID.ir

$$\begin{split} \begin{split} & \kappa_{1,3}^{1} = \kappa_{2,3}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,3}^{1} = \kappa_{2,3}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,3}^{1} = \kappa_{1,3}^{2} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,4}^{1} = \kappa_{1,5}^{2} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,4}^{1} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{1} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{1} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{1} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{2} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{2} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{2} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{2} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{2} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{2} = \kappa_{1,5}^{1} & (\nabla - idl) \\ & \kappa_{1,5}^{2} = \kappa_{1,5}^{1} & \kappa_{1,5}^{2} = \left[ (C_{22} + C_{44}) \frac{\beta_{j}^{2}}{R_{j}^{2}} + C_{34} \left( \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \right)^{2} \right] \frac{\pi L}{2} & (\nabla - idl) \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + \frac{C_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} - \frac{C_{44}}{R_{j}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} - \frac{C_{44}}{R_{j}^{2}} \frac{\partial \beta_{j}}{\partial z} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{44}}}{R_{j}^{2} - \sigma_{1}^{2} \beta_{j}^{2}} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{23}}{R_{j}^{2}} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C_{55}}{R_{j}^{2}} \beta_{j} \\ & + C_{55} \left( \frac{m\pi}{R} \right)^{2} \beta_{j}^{2} + \frac{C$$

(ب-۲)

ھپنندىسى ھكائىيگ ھەرىسى دورە ١٢ شمارە F، اسفند ١٣٩١

۹۲ www.SID.ir

$$\begin{split} U_{N_{\mu}}^{j} &= -N_{\mu}\pi b_{\mu}^{2} \frac{\frac{h}{2}}{2} \int_{0}^{L} \left[ \begin{matrix} A^{2} & 0 & 0 & AB & 0 & 0 \\ 0 & F^{2} & 0 & 0 & FH & 0 \\ 0 & 0 & F^{2} & 0 & 0 & FH \\ AB & 0 & 0 & B^{2} & 0 & 0 \\ 0 & FH & 0 & 0 & H^{2} & 0 \\ 0 & 0 & FH & 0 & 0 & H^{2} \\ \hline & & & & \\ \hline & & & \\ T_{2}^{j} &= \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{0}^{L} \left[ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pn^{2}A^{2} & 0 & 0 & Pn^{2}BA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pn^{2}BA & 0 & 0 & Pn^{2}B^{2} \\ \hline & & & \\ T_{2}^{j} &= \frac{\pi L}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{0}^{L} \left[ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\alpha_{j}^{2} & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}\alpha_{j} & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}\alpha_{j} & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}\alpha_{j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}\alpha_{j} & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}^{2} \\ 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}\alpha_{j} & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}^{2} \\ 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}\alpha_{j} & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_{j}^{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}F^{2} & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}HF \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho(z)\Omega^{2}HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}H^{2} \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}H^{2} \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}H^{2} \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}H^{2} \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}H^{2} \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^{2}H^{2} \\ \hline & & & \\$$

۶- مراجع

- Mustafa B. A. J., Ali R., "An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells", *Computer and Structures*, Vol. 32, 1989, pp. 355-363.
- [2] Ng T. Y., Lam K. Y., "Vibration and Critical Speed of a Rotating Cylindrical Shell Subjected to

$$\begin{split} A &= \alpha_j \cos(\frac{m\pi x}{L}), \ B &= \beta_j \cos(\frac{m\pi x}{L}) \\ F &= \alpha_j \sin(\frac{m\pi x}{L}), \ H &= \beta_j \sin(\frac{m\pi x}{L}) \quad (Y-\downarrow) \end{split}$$

مهندهسی مکانیک هدرس دورهٔ ۱۲ شمارهٔ ۶ اسفند ۱۳۹۱ www.SID.ir

که در روابط فوق داریم:

[11] Shell using State Space Differential Quadrature Method", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, 2009, pp. 738-747.

انجمن هوافضای ایران، اصفهان، ۱۳۸۸.

- [13] Reddy J. N., Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, 2<sup>nd</sup> Ed., Boca Raton, Florida, CRC press, 2004.
- [14] Setoodeh A. R., Tahani M., Selahi E. "Hybrid Layerwise-Differential Quadrature Transient Dynamic Analysis of Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells Subjected to Dynamic Pressure", *Compos. Struct.*, Vol. 93, 2011, pp. 2663-2670.
- [15] Ng T. Y., Hua L., Lam K. Y., "Generalized Differential Quadrature for Free Vibration of Rotating Composite Laminated Conical Shell with Various Boundary Conditions", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 45, 2003, pp. 567-587.
- [16] Lam K. Y., Loy C. T., "Analysis of Rotating Laminated Cylindrical Shells by Different Thin Shell Theories", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, 1995, pp. 23-35.
- [17] Loy C. T., Lam K. Y., "Vibration of Thick Cylindrical Shells on the Basis of Three-Dimensional Theory of Elasticity", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, No. 4, 1999, pp. 719-737.
- [18] Talebitooti M., Ghayour M., Ziaei-Rad S., Talebitooti R., "Free Vibrations of Rotating Composite Conical Shells with Stringer and Ring Stiffeners", Arch. Appl. Mech., Vol. 80, No. 3, 2010, pp. 201-215.

Axial Loading", *Applied Acoustics*, Vol. 56, 1999, pp. 273-282.

- [3] Zhao X., Liew K. M., Ng T. Y., "Vibration of Rotating Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells with Stringer and Ring Stiffeners", *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, 2002, pp. 529-545.
- [4] Jafari A. A., Bagheri M., "Free Vibration of Rotating Ring Stiffened Cylindrical Shells with Non-Uniform Stiffener Distribution", *J Sound Vib*, Vol. 296, 2006, pp. 353-376.
- [۵] خرمی کمیل، حسینیهاشمی شاهرخ، "تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانهای نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند (FGM) با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM)"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۱، شماره ۲، ۱۳۹۰، صص ۹۳–۱۰۶.
- [6] Nelson R. B., Dong S. B., Kakra, R. D., "Vibrations and Waves in Laminated Orthotropic Circular Cylinders", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, 1971, pp. 429-444.
- [7] Hutchinson J. R., El-Azhari S. A., "Vibrations of Free Hollow Circular Cylinders" *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 1986, pp. 641-646.
- [8] So J. Y., Leissa A. W., "Free vibrations of Thick Hollow Circular Cylinders from Three-Dimensional Analysis", *Journal of vibration and Acoustics*, Vol. 119, 1997, pp. 89-95.
- [9] Malekzadeh P., Farid M., Zahedinejad P., "A Three- Dimensional Layerwise-Differential Quadrature Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shells", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 85, 2008, pp. 450-458.
- [10] Alibeigloo A., "Static and Vibration Analysis of Axi-Symmetric Angle-Ply Laminated Cylindrical