



## تحلیل و بررسی ضربه کم سرعت بر روی نانوتیر اویلر-برنولی با استفاده از تئوری غیر محلی الاستیسته

سجاد صیفوری<sup>۱</sup>، غلامحسین لیاقت<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۴۱-۱۴۱۱۵، ghlia530@modares.ac.ir

**چکیده-** در این تحقیق یک روش تحلیلی جدید برای بررسی ضربه کم سرعت یک نانوذره بر روی یک نانوتیر اویلر برنولی و بر اساس تئوری غیر محلی ارائه شده است. با در نظر گرفتن معادلات ارتعاش آزاد تیر، ایمپالس وارد شده به نانوتیر با شرایط مرزی مناسب بیان شده است. با توجه به تأثیر پارامترهای غیر محلی، تغییر شکل دینامیکی پیش‌بینی شده توسط تئوری غیر محلی، همیشه از مقدار تغییر شکل دینامیکی، تئوری کلاسیک بیشتر است. در ادامه تأثیر شرایط مرزی و جرم پرتابه بر روی تغییر شکل بررسی شده است. نتایج حاصل از این روش، با استفاده از تحلیل‌های موجود و بر اساس تئوری الاستیسته و تئوری تیر کلاسیک، برای دو ماده مختلف (فولاد و آلومینیوم) مقایسه شده و همگرایی مناسبی مشاهده شده است. به‌طور کلی با افزایش پارامتر غیر محلی، تغییر شکل ماکزیمم وسط نانوتیر، افزایش یافته و مقدار همه فرکانس‌های نانوتیر در همه نسبت‌های جرم، کاهش یافته است.

**کلیدواژه‌گان:** تئوری غیر محلی، ضربه کم سرعت، نانوتیر.

## Low velocity impact of a nanoparticle on euler-bernoulli nanobeam using a nonlocal elasticity model

S. Seifoori<sup>1</sup>, GH. Liaghat<sup>2\*</sup>

1- PhD. Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran.

2- Prof., Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran.

\* P. O. B. 14115-141 Tehran, Iran. ghlia530@modares.ac.ir

**Abstract-** In this paper, analytical solutions of low velocity transverse impact of a nanoparticle on a nanobeam are presented by using the nonlocal theory to bring out the effect of the nonlocal behavior on dynamic deflection. Impact of a mass on simply supported and clamped nanobeams are investigated by using nonlocal Euler-Bernoulli beam theory. In order to obtain an analytical result for this problem, an approximate method has been developed wherein the applied impulse is replaced by a suitable boundary condition. A number of numerical examples with analytical solutions for both nonlocal and classic beam have been presented and discussed. The dynamic deflection predicted by the classical theory is always smaller than those predicted by the nonlocal theory due to the nonlocal effects. The inclusion of the nonlocal effect increases the magnitudes of dynamic deflection and decreases frequencies. Furthermore, the mass and the velocity of the nanoparticle (striker) have significant effects on the dynamic behavior of nanobeam.

**Keywords:** Nonlocal Elasticity, Low Velocity Impact, Nanobeam.

## ۱- مقدمه

برای بررسی مسائل مربوط به نانومکانیک روش‌های متفاوت تحلیلی، عددی و تجربی وجود دارد. در سال‌های اخیر استفاده از تئوری غیر محلی در تحلیل نانو تیرها مرسوم شده است. تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک و غیر محلی الاستیسیته در تعریف تنش است. بیشتر تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته، بر اساس روابط ساختاری هایپرالاستیک استوار هستند که فرض می‌کند تنش هر نقطه، به صورت تابعی از کرنش‌های همان نقطه است. تئوری غیر محلی که ابتدا توسط ارینگن [۱-۳] ارائه شد، بیانگر این است که تنش هر نقطه نه تنها تابعی از میدان کرنش آن نقطه است بلکه تابع کرنش همه نقاط محیط پیوسته است. این قبیل تئوریها در برگیرنده اطلاعاتی از نیروهای مابین اتم‌ها و اندازه طول‌های داخلی (اثر مقیاس کوچک) که در روابط ساختاری به صورت پارامترهای مادی تعریف می‌شوند، هستند. تئوری غیر محلی در بررسی انتشار موج تنش الاستیک، انتشار موج داخل کامپوزیت‌ها، مکانیک شکست، ارتعاشات آزاد و اجباری تیر و ورق و غیره مورد استفاده قرار گرفته است [۴،۵]. با توجه به موارد گفته شده ممکن است نانوتیوب (نانوتیر) توسط نانوذره مورد اصابت قرار گیرد. بررسی پدیده ضربه در مقیاس ماکرو، به‌طور وسیعی توسط محققان بررسی شده است [۶،۷].

در این مقاله پدیده ضربه کم سرعت یک نانوذره بر روی یک تیر اویلر برنولی و بر پایه تئوری غیر محلی بررسی شده است. بر اساس این روش ایمپالس وارد شده به نانوتیر در اثر ضربه با شرایط مرزی مناسب و با توجه به مقدار اندازه حرکت پرتابه و نانوتیر درست بلافاصله بعد از برخورد، بیان شده است. بنابراین در این حالت همان طور که در قسمت‌های بعد نشان داده شده است، فقط نیاز به حل معادلات ارتعاشات آزاد نانوتیر است. شرایط مرزی ساده و گیردار و همچنین تأثیر پارامترهای غیر محلی و نسبت جرم نانوتیر به نانوذره بررسی شده و معادلات مربوطه بدست آمده تحلیل شده است. لازم به ذکر است که تحلیل‌های انجام شده در این مقاله جدید بوده و بررسی ضربه در نانوتیر برای اولین بار ارائه شده است.

## ۲- مدل تیر اویلر برنولی بر اساس تئوری غیر محلی

برای یک تیر اویلر- برنولی همگن ایزوتروپیک، رابطه ساختاری

غیر محلی به صورت رابطه (۱) است [۵].

$$\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (\mu = e_0^2 a^2) \quad (1)$$

در این رابطه  $E$  مدول الاستیسیته است. با صفر قرار دادن پارامتر غیر محلی  $\mu$ ، به رابطه ساختاری در حالت کلاسیک می‌رسیم. با صرف نظر کردن از اثر اینرسی دورانی معادله ارتعاشات عرضی تیر اویلر- برنولی بدست می‌آید [۸،۹].

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Q + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

در این رابطه  $V$  منتجه نیروی برشی بر روی سطح مقطع تیر و  $Q$  توزیع نیروی عرضی، در طول محور  $x$  است و رابطه زیر برقرار است:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3)$$

که  $M$  ممان خمشی تیر است:

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA \quad (4)$$

با توجه به رابطه (۱) ممان خمشی می‌تواند با رابطه (۵) بیان شود:

$$M - \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad I = \int_A z^2 dA \quad (5)$$

با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۵) ممان خمشی غیر محلی بر حسب جابجایی عرضی تیر بیان می‌شود [۸-۱۰].

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \left( \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Q \right) \quad (6)$$

همچنین به‌طور مشابه نیروی برشی از رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$V = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \left( \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (7)$$

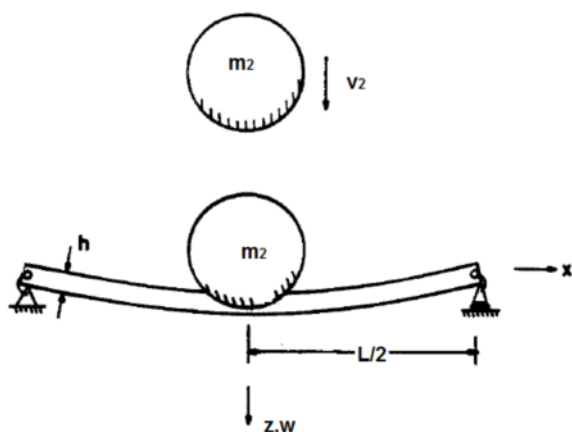
سرانجام معادله حرکت غیر محلی نانوتیر اویلر- برنولی، بر اساس جابجایی عرضی از رابطه (۸) بدست خواهد آمد [۵،۹،۱۰].

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = Q - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (8)$$

## ۳- ضربه کم سرعت نانوذره بر روی نانوتیر اویلر

## برنولی

برای حل این مسأله به صورت تحلیلی، ایمپالس وارد شده به



شکل ۱ برخورد نانوذره به نانوتیر

با جایگذاری شرایط معادله (۱۵) در رابطه (۱۱)، رابطه (۱۶) بدست می‌آید.

$$C = -A \frac{k_e \cosh\left(\frac{k_e L}{2}\right)}{k_f \cos\left(\frac{k_f L}{2}\right)} \quad (16)$$

همچنین ناپیوستگی برش تیر در نقطه تماس (نقطه برخورد)، باید مساوی نیروی عکس‌العمل وارد بر پرتابه باشد. بنابراین برای برخورد مرکزی و با توجه به تقارن رابطه (۱۷) بیان می‌شود [۶].

$$V = \frac{1}{2} m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{at} \quad x = \frac{L}{2} \quad (17)$$

لازم به ذکر است با توجه به تقارن، نصف نیروی وارد شده به تیر از طرف پرتابه، در هر تکیه‌گاه وارد می‌شود، بنابراین برای نیروی برش در هر طرف تیر ضریب ۱/۲ با توجه به رابطه (۱۷) ظاهر خواهد شد. با توجه به رابطه (۷) و با در نظر گرفتن مقدار صفر برای نیروی عرضی  $Q=0$ ، برای رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$-EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu(\rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}) = \frac{1}{2} m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2} \quad (18)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۱۸) رابطه (۱۹) بدست خواهد آمد.

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \mu q^4 \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{m_2 L q^4 W}{2 m_1} \quad (19)$$

که  $m_1 = \rho A L$  جرم نانوتیر است. سرانجام با جایگذاری معادله (۱۹) در معادله (۱۱) معادله مشخصه نانوتیر اویلر-

صورت شرایط مرزی مناسب بیان می‌شود. بنابراین تنها حل معادلات ارتعاشی آزاد تیر، بررسی می‌شود:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = 0 \quad (9)$$

حل عمومی این معادله برای ارتعاشات آزاد نانوتیر در رابطه (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است [۹، ۱۱].

$$w(x, t) = W(x) \cdot e^{i\omega t} \quad (10)$$

که  $\omega$  فرکانس تیر است و همچنین خواهیم داشت:

$$W(x) = A \sinh(k_e x) + B \cosh(k_e x) + C \sin(k_f x) + D \cos(k_f x) \quad (11)$$

که ثابتهای  $A, B, C, D$  از شرایط مرزی و با توجه به نوع تکیه‌گاه‌های ساده و یا گیردار مانند آنچه که در بخش‌های (۱-۳) و (۲-۳) توضیح داده شده است، بدست خواهند آمد. برای دیگر مقادیر خواهیم داشت [۹]:

$$k_f = q \sqrt{\frac{\sqrt{4 + (\mu^2 q^4)} + (\mu q^2)}{2}} \quad (12)$$

$$k_e = q \sqrt{\frac{\sqrt{4 + (\mu^2 q^4)} - (\mu q^2)}{2}}$$

که در این رابطه  $\mu$  پارامتر غیر محلی است. همچنین برای  $q$  در رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$q = \sqrt{\frac{\omega}{c_0}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (13)$$

که در این رابطه  $\omega$  فرکانس نانوتیر است که با استفاده از معادله مشخصه نانوتیر تعیین خواهد شد.  $E$  مدول الاستیسیته،  $I$  ممان اینرسی،  $\rho$  چگالی و  $A$  سطح مقطع نانوتیر است.

### ۳-۱- نانوتیر با تکیه‌گاه ساده

در حالت کلی نانوذره‌ای به جرم  $m_2$  و سرعت  $v_2$  بر روی نانوتیری به طول  $L$ ، مطابق شکل ۱ برخورد می‌کند. برای تیر با تکیه‌گاه ساده، شرایط مرزی متشکل از صفر بودن مقدار جابجایی و ممان، در دو طرف تیر است [۵، ۱۲، ۱۳].

$$W(x) = 0, \quad M = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu q^4 W = 0 \quad (14)$$

با جایگذاری دو شرط رابطه (۱۴) در رابطه (۱۱) و در  $x=0$  داریم:  $B=D=0$  همچنین در اثر تقارن در وسط تیر، شیب تغییر شکل، باید مساوی صفر باشد [۶]:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{L}{2}, t \right) = 0 \quad (15)$$

$$\sum_{a=1}^{\infty} \omega_a G_a \left\{ \frac{2m_1}{L} \int_0^{L/2} X_a X_b dx + m_2 X_a \left(\frac{L}{2}\right) X_b \left(\frac{L}{2}\right) \right\} \\ = \frac{2m_1}{L} \int_0^{L/2} X_b \varphi(x) dx + m_2 X_b \left(\frac{L}{2}\right) \varphi \left(\frac{L}{2}\right) \quad (26)$$

با استفاده از انتگرال گیری مستقیم می توان نشان داد هنگامی که  $a \neq b$  باشد، قسمت سمت چپ معادله (26) صفر خواهد شد. بنابراین ثابت  $G_a$  از رابطه (27) بدست خواهد آمد:

$$G_a = \frac{1}{\omega_a} \cdot \left( \frac{\frac{2m_1}{L} \int_0^{L/2} X_a \varphi(x) dx + m_2 X_a \left(\frac{L}{2}\right) \varphi \left(\frac{L}{2}\right)}{\frac{2m_1}{L} \int_0^{L/2} X_a^2 dx + m_2 X_a^2 \left(\frac{L}{2}\right)} \right) \quad (27)$$

در لحظه اولیه، شرایط رابطه (28) برقرار است:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{برای} \quad t = 0, x \neq \frac{L}{2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = v_2 \quad \text{برای} \quad t = 0, x = \frac{L}{2} \quad (28)$$

بنابراین رابطه (27) به رابطه (29) تبدیل خواهد شد.

$$G_a = \frac{1}{\omega_a} \left( \frac{m_2 v_2 X_a \left(\frac{L}{2}\right)}{\frac{2m_1}{L} \int_0^{L/2} X_a^2 dx + m_2 X_a^2 \left(\frac{L}{2}\right)} \right) \quad (29)$$

سرانجام جابجایی دینامیکی نانوتیر اویلر- برنولی با جایگذاری رابطه (29) در رابطه (22-ب) بدست خواهد آمد:

$$w(x, t) = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_a} \left( \frac{m_2 v_2 X_a \left(\frac{L}{2}\right)}{\frac{2m_1}{L} \int_0^{L/2} X_a^2 dx + m_2 X_a^2 \left(\frac{L}{2}\right)} \right) \\ \times \left( \frac{\sinh(k_{e_a} x)}{\cosh\left(\frac{k_{e_a} L}{2}\right)} - \frac{k_{e_a}}{k_{f_a}} \frac{\sin(k_{f_a} x)}{\cos\left(\frac{k_{f_a} L}{2}\right)} \right) \sin(\omega_a t) \quad (30)$$

### ۳-۲- نانوتیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار

برای تیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار، شرایط مرزی عبارت از صفر بودن مقدار جابجایی و شیب در دو طرف تیر است [۵، ۱۲، ۱۳].

$$W(0) = 0, \quad \frac{dW(0)}{dx} = 0 \quad (31-الف)$$

$$W(L) = 0, \quad \frac{dW(L)}{dx} = 0 \quad (31-ب)$$

با جایگذاری دو شرط رابطه (31-الف) در رابطه (11) و در  $x=0$  داریم:  $B=-D$  و  $C = -A \cdot k_e / k_f$

برنولی برای تکیه‌گاه ساده و بر حسب  $q$  بدست خواهد آمد:

$$\frac{Lq^4}{k_e(k_e^2 + k_f^2)} \left[ \tanh\left(\frac{k_e L}{2}\right) - \frac{k_e}{k_f} \tan\left(\frac{k_f L}{2}\right) \right] = 2m \quad (20)$$

که  $m = m_1 / m_2$  نسبت جرم نانوتیر به پرتابه (نانوذره) است. چون رابطه (20) دارای چندین ریشه بر حسب فرکانس است، جواب کلی به صورت رابطه (21) در نظر گرفته خواهد شد.

$$w(x, t) = \sum_{a=1}^{\infty} W_a(x) \cdot e^{i\omega_a t} = \sum_{a=1}^{\infty} W_a(x) \cdot (E_a \sin(\omega_a t) + iF_a \cos(\omega_a t)) \quad (21)$$

به علت اینکه در لحظه اولیه (صفر) جابجایی نانوتیر صفر است خواهیم داشت:

$$w(x, 0) = 0, F_a = 0 \quad (22-الف)$$

با جایگذاری رابطه (22-الف) در (21) خواهیم داشت:

$$w(x, t) = \sum_{a=1}^{\infty} G_a X_a \sin(\omega_a t) \quad (22-ب)$$

که در این رابطه روابط زیر برقرار است:

$$G_a = A_a E_a \cosh\left(\frac{k_{e_a} L}{2}\right), \\ X_a = \frac{\sinh(k_{e_a} x)}{\cosh\left(\frac{k_{e_a} L}{2}\right)} - \frac{k_{e_a}}{k_{f_a}} \frac{\sin(k_{f_a} x)}{\cos\left(\frac{k_{f_a} L}{2}\right)} \quad (22-ج)$$

ثابت  $G_a$  در حقیقت در برگیرنده جایگزینی ایمپالس وارده شده به نانوتیر، با سرعت اولیه مناسب است. اگر پرتابه با سرعت اولیه  $v_2$  به قسمت مرکز نانوتیر برخورد کند، آنگاه اندازه حرکت تیر و پرتابه بلافاصله بعد از برخورد، باید برابر اندازه حرکت اولیه باشد [۶]:

$$\int \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} dS = m_2 v_2 \quad (23)$$

که انتگرال  $dS$  روی کل جرم پرتابه و نانوتیر است. حال رابطه (24) در نظر گرفته می شود:

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \sum_{a=1}^{\infty} \omega_a G_a X_a \equiv \varphi(x) \quad (24)$$

اگر دو طرف رابطه در  $X_b$  ضرب شود:

$$\sum_{a=1}^{\infty} \omega_a G_a X_a X_b \equiv \varphi(x) X_b \quad (25)$$

حال اگر رابطه (24) در  $m_2$  ضرب شود و مقدار انتگرال در وسط تیر، با توجه به المان جرم نانوتیر  $dm_1 = (m_1 / L) dx$  به رابطه (25) اضافه شود، با توجه به تقارن خواهیم داشت:

## ۴- اعتبارسنجی نتایج

برای اعتبارسنجی نتایج در این قسمت، نتایج حاصل از تئوری الاستیسته و تئوری تیر که در [۱۴] آمده است، با نتایج حاصل از این مقاله مقایسه خواهد شد. برای مقایسه نتایج، خواص پرتابه و هدف همانند جدول ۱ انتخاب شده است. در این مقایسه دو آزمایش انجام شده است. در آزمایش اول، هم پرتابه و هم هدف فولادی هستند و در آزمایش دوم، جنس پرتابه و هدف از آلومینیوم انتخاب شده است. لازم به ذکر است برای مقایسه نتایج حاصل از این مقاله با نتایج [۱۴] کافی است که مقدار پارامتر غیر محلی  $\mu = 0$  را قرار داده تا نتایج برای مقیاس ماکرو قابل قیاس باشند.

طول و ضخامت تیر در [۱۴] به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۰۰ میلی‌متر است. شکل پرتابه و هدف همانند شکل ۱ است. تیر به صورت یک بلوک مربعی و پرتابه به صورت کره‌ای به شعاع ۱۰ میلی‌متر است. تیر از نوع تکیه‌گاه ساده بوده و در نتیجه برای مقایسه نتایج از رابطه (۳۰) با در نظر گرفتن دو جمله از سری استفاده شده است. حداکثر جابجایی مرکز تیر برای سرعت و نسبت جرم ۱ (سرعت پرتابه  $v_2 = 1 \text{ m/s}$  و جرم پرتابه همانند جرم تیر است،  $m=1$ ) و بر حسب میلی‌متر در جدول ۲ نشان داده شده است.

همان گونه که از نتایج جدول ۲ ملاحظه می‌شود، مقدار حداکثر جابجایی محاسبه شده با روش جدید و برای یک تیر در مقیاس بزرگ (ماکرو)، همخوانی مناسبی با نتایج [۱۴] دارد.

## جدول ۱ خواص پرتابه و هدف برای دو آزمایش مختلف [۱۴]

نوع ماده برای پرتابه و هدف	مدول الاستیسیته (GPa)	چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )
فولاد	۲۰۶	۷۸۴۱
آلومینیوم	۷۱	۲۷۵۰

## جدول ۲ حداکثر جابجایی مرکز تیر (mm)

نوع ماده	تئوری الاستیسیته [۱۴]	تئوری تیر [۱۴]	رابطه (۳۰)
فولاد	۰/۳۶۸	۰/۳۰۴	۰/۳۴۶
آلومینیوم	۰/۳۷۳	۰/۳۲۵	۰/۳۵۲

لازم به ذکر است که روابط نهایی این تحقیق (روابط (۳۴) و (۳۰))، با تعریف پارامتر غیر محلی  $\mu$  برای یک نانوتیر (تیر در

با جایگذاری حل عمومی (رابطه (۱۱)) در روابط (۱۵) و (۱۹) معادله مشخصه نانوتیر اویلر- برنولی برای تکیه‌گاه دو سرگیردار و بر حسب  $q$  بدست خواهد آمد:

$$\frac{Lq^4}{2mk_e^3} \left[ \sinh\left(\frac{k_e L}{2}\right) - B \cosh\left(\frac{k_e L}{2}\right) - \frac{k_f}{k_e} \sin\left(\frac{k_f L}{2}\right) + B \cos\left(\frac{k_f L}{2}\right) \right] = \left[ \cosh\left(\frac{k_e L}{2}\right) - B \sinh\left(\frac{k_e L}{2}\right) + \frac{k_f^2}{k_e^2} \cos\left(\frac{k_f L}{2}\right) + B \frac{k_f^3}{k_e^3} \sin\left(\frac{k_f L}{2}\right) \right],$$

$$B = \frac{\cosh\left(\frac{k_e L}{2}\right) - \cos\left(\frac{k_f L}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{k_e L}{2}\right) + \frac{k_f}{k_e} \sin\left(\frac{k_f L}{2}\right)} \quad (32)$$

مانند قسمت قبل برای تکیه‌گاه ساده، در اینجا نیز رابطه (۳۲) دارای چندین ریشه بر حسب فرکانس است لذا جواب کلی به صورت رابطه (۲۱) در نظر گرفته خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

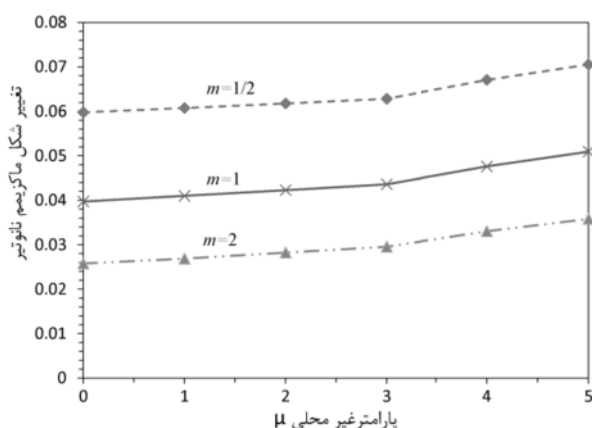
$$w(x, t) = \sum_{a=1}^{\infty} G_a X_a \sin(\omega_a t), \quad G_a = A_a E_a,$$

$$X_a = \left[ \sinh\left(\frac{k_{ea} x}{2}\right) - B_a \cosh\left(\frac{k_{ea} x}{2}\right) - \frac{k_{fa}}{k_{ea}} \sin\left(\frac{k_{fa} x}{2}\right) + B_a \cos\left(\frac{k_{fa} x}{2}\right) \right]$$

$$B_a = \frac{\cosh\left(\frac{k_{ea} L}{2}\right) - \cos\left(\frac{k_{fa} L}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{k_{ea} L}{2}\right) + \frac{k_{fa}}{k_{ea}} \sin\left(\frac{k_{fa} L}{2}\right)} \quad (33)$$

سرانجام جابجایی دینامیکی نانوتیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه دو سرگیردار همانند قسمت قبل و با استفاده از روابط (۲۳) تا (۲۸) بدست خواهد آمد:

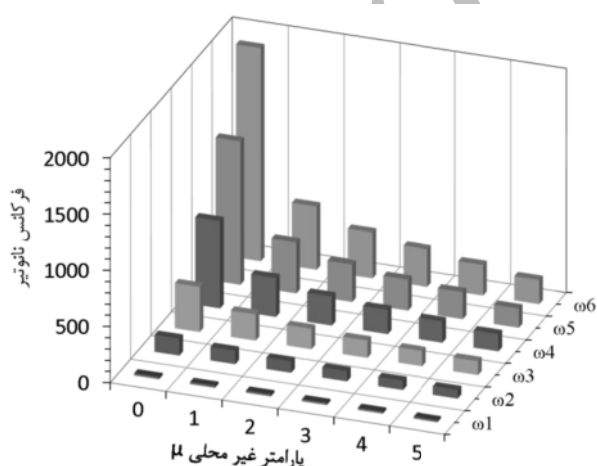
$$w(x, t) = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_a} \cdot \left( \frac{m_2 v_2 X_a \left(\frac{L}{2}\right)}{2m_1 \int_0^{L/2} X_a^2 dx + m_2 X_a^2 \left(\frac{L}{2}\right)} \right) \times \left[ \sinh\left(\frac{k_{ea} x}{2}\right) - B_a \cosh\left(\frac{k_{ea} x}{2}\right) - \frac{k_{fa}}{k_{ea}} \sin\left(\frac{k_{fa} x}{2}\right) + B_a \cos\left(\frac{k_{fa} x}{2}\right) \right] \cdot \sin(\omega_a t) \quad (34)$$



شکل ۳ تغییر شکل ماکزیمم نانوتیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار در مقابل تغییرات پارامتر غیر محلی

همان گونه که از شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر غیر محلی  $\mu$ ، تغییر شکل ماکزیمم وسط نانوتیر، در همه نسبت‌های جرم، افزایش یافته است. همچنین با افزایش جرم پرتابه (کاهش نسبت جرم)، تغییر شکل ماکزیمم برای هر دو تکیه‌گاه ساده و گیردار، به ازای همه مقادیر  $\mu$ ، افزایش یافته است.

مقادیر فرکانس‌های اول تا ششم در مقابل تغییرات پارامتر غیر محلی  $\mu$ ، به ازای نسبت جرم  $m=1$  برای تکیه‌گاه ساده و گیردار، به ترتیب بر اساس معادله‌های مشخصه (۲۰) و (۳۲) در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است.



شکل ۴ تغییرات فرکانس‌های اول تا ششم با پارامتر غیر محلی برای نانوتیر با تکیه‌گاه ساده

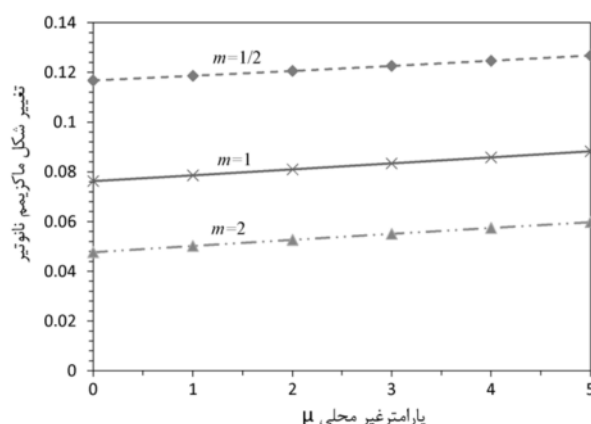
مقیاس نانو) داده شده است، این در حالی است که با صفر قرار دادن پارامتر غیر محلی می‌توان از این روابط برای یک تیر در مقیاس بزرگ و بر اساس تئوری کلاسیک استفاده کرد (همانند کار سایر محققان [۵، ۱۱] برای مسائل استاتیکی و ارتعاشی نانوتیرها). در قسمت بعد درباره نتایج عددی حاصل از روابط این تحقیق، بحث خواهد شد.

## ۵- نتایج عددی و بحث

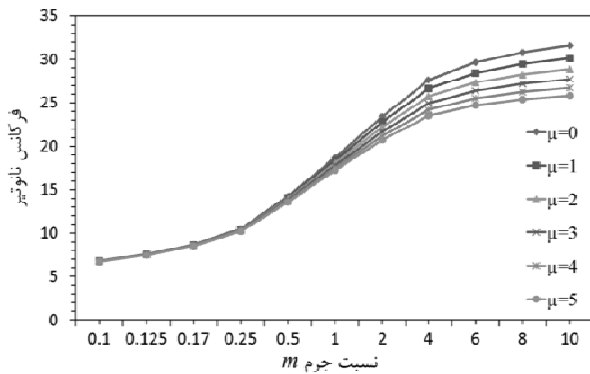
برای بررسی روابط این تحقیق از پارامترهای زیر و براساس [۵] استفاده شده است. (لازم به ذکر است با توجه به مرجع ذکر شده به علت اینکه این پارامترها برای مقایسه نتایج آورده شده است، بدون بعد در نظر گرفته می‌شوند):

$$E = 30 \times 10^6, L = 10, h = 0.1, \rho = 1, v_2 = 1 \quad (35)$$

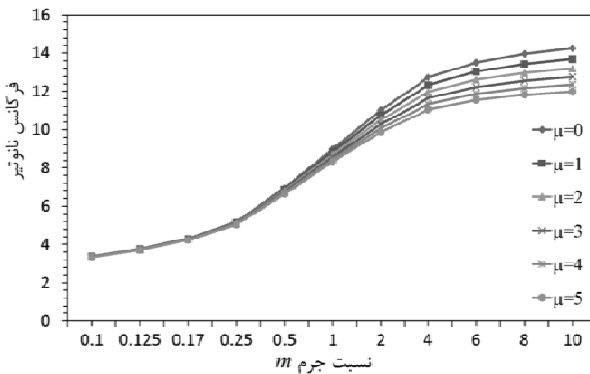
که در این رابطه  $v_2$  سرعت پرتابه بوده و جرم پرتابه با توجه به نسبت جرم در نظر گرفته خواهد شد ( $m = m_1 / m_2$ ) نسبت جرم نانوتیر به پرتابه (نانوذره) است. لازم به ذکر است، می‌توان این پارامترها را در مقیاس نانو و بر حسب نانومتر بیان کرد. در این صورت به عنوان مثال سرعت بر حسب نانومتر بر ثانیه در نظر گرفته خواهد شد. مقدار تغییر شکل ماکزیمم نانوتیر با تکیه‌گاه ساده و گیردار در مقابل تغییرات پارامتر غیر محلی  $\mu$ ، به ترتیب بر اساس روابط (۳۰) و (۳۴) و با در نظر گرفتن شش جمله از سری و برای مقادیر نسبت جرم  $m=1/2, 1, 2$  در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است.



شکل ۲ تغییر شکل ماکزیمم نانوتیر با تکیه‌گاه ساده در مقابل تغییرات پارامتر غیر محلی



شکل ۶ تغییرات فرکانس اول به نسبت جرم به ازای مقادیر پارامتر غیر محلی برای نانوتیر با تکیه‌گاه ساده

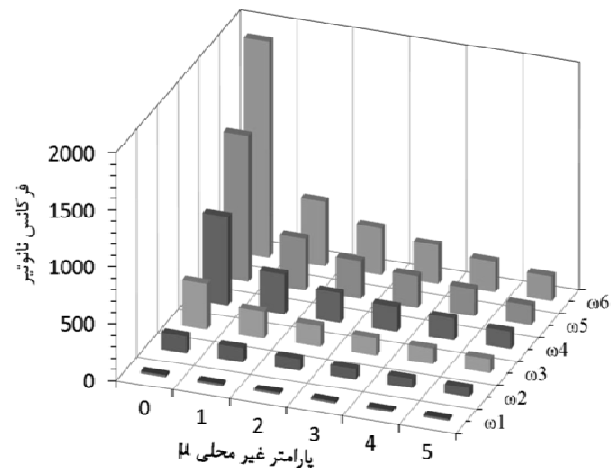


شکل ۷ تغییرات فرکانس اول به نسبت جرم به ازای مقادیر پارامتر غیر محلی برای نانوتیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار

بر اساس این روش ایمپالس وارد شده به نانوتیر در اثر ضربه با شرایط مرزی مناسب و برای دو تکیه‌گاه ساده و گیردار بیان شده است. ابتدا نتایج حاصل از این روش، با استفاده از تحلیل‌های موجود و بر اساس تئوری الاستیسته و تئوری تیر کلاسیک و برای دو ماده مختلف (فولاد و آلومینیوم) مقایسه شده و همگرایی مناسبی مشاهده شده است.

در مرحله بعد با استفاده از مقادیر عددی درج شده در سایر مقاله‌ها، نتایج حاصل از این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است. به‌طور کلی با افزایش پارامتر غیر محلی  $\mu$ ، تغییر شکل ماکزیمم وسط نانوتیر، افزایش و مقدار همه فرکانس‌های نانوتیر در همه نسبت‌های جرم، کاهش یافته است.

تغییر شکل ماکزیمم وسط نانوتیر در همه مقادیر غیر محلی، برای تکیه‌گاه ساده بیشتر از تکیه‌گاه دو سرگیردار است. فرکانس‌های نانوتیر با تکیه‌گاه دو سرگیردار، به ازای همه مقادیر غیر محلی، بیشتر از تکیه‌گاه ساده است و این نتیجه به علت صلبیت بیشتر نانوتیر با تکیه‌گاه دو سرگیردار است.



شکل ۵ تغییرات فرکانس‌های اول تا ششم با پارامتر غیر محلی برای نانوتیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار

همان گونه که از تصاویر مشاهده می‌شود، به ازای افزایش پارامتر غیر محلی  $\mu$ ، فرکانس‌های اول تا ششم کاهش پیدا کرده‌اند. همچنین مقدار فرکانس به ازای هر پارامتر غیر محلی مشخص، از فرکانس اول تا ششم افزایش پیدا کرده است. مقدار فرکانس‌های اول تا ششم برای نانوتیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار، به علت صلبیت بیشتر، در همه موارد بیشتر از تکیه‌گاه ساده است.

فرکانس اول نانوتیر و مقدار جابجایی مربوط به آن، بیشترین تأثیر را در ماکزیمم جابجایی مرکز نانوتیر دارد. تغییرات فرکانس اول نانوتیر، بر حسب نسبت جرم و همچنین با در نظر گرفتن اثر پارامترهای غیر محلی، در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است.

همان گونه که در شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت جرم (کاهش جرم پرتابه نسبت به نانوتیر)، فرکانس اول نانوتیر در هر دو شرایط مرزی ساده و دوسرگیردار، افزایش یافته است. علاوه بر این، با افزایش مقدار پارامتر غیر محلی، فرکانس اول برای هر دو تکیه‌گاه کاهش یافته است. مقدار کاهش فرکانس مطابق شکل‌های ۶ و ۷، در نسبت‌های جرم بزرگتر بیشتر است.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تحلیلی جدید، برای بررسی ضربه کم سرعت یک نانوذره، بر روی یک نانوتیر اویلر- برنولی و بر اساس تئوری غیر محلی ارائه شده است.

## ۷- مراجع

- [8] Simsek M., "Nonlocal Effects in the Forced Vibration of an Elastically Connected Double-Carbon Nanotube System under a Moving Nanoparticle", *Computational Materials Science*, Vol. 50, No. 7, 2011, pp. 2112-2123.
- [9] Lu P., Lee H.P., Lu C., Zhang P.Q., "Dynamic Properties of Flexural Beams using a Nonlocal Elasticity Model", *Journal of Applied Physics*, Vol. 99, No. 7, 2006, pp. 73510-73519.
- [10] Lu P., Lee H.P., Lu C., Zhang P.Q., "Application of Nonlocal Beam Models for Carbon Nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 16, 2007, pp. 5289-5300.
- [11] Reddy J.N., "Nonlocal Nonlinear Formulations For Bending of Classical and Shear Deformation Theories of Beams and Plates", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 11, 2010, pp. 1507-1518.
- [12] Yang J., Ke L.L., Kitipornchai S., "Nonlinear Free Vibration of Single-Walled Carbon Nanotubes Using Nonlocal Timoshenko Beam Theory", *Physica E*, Vol. 42, No. 5, 2010, pp. 1727-1735.
- [13] Wang C.M., Zhang Y.Y., He X.Q., "Vibration of Nonlocal Timoshenko Beams", *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 10, 2007, pp. 105401-105410.
- [14] Schonberg W.P., "Predicting the Low Velocity Impact Response of Finite Beams in Cases of Large Area Contact", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 8, No. 2, 1989, pp. 87-97.
- [1] Eringen A.C., "On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation And Surface Waves", *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, 1983, pp. 4703-4710.
- [2] Eringen A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [3] Eringen A.C., Edelen D.G.B., "On Nonlocal Elasticity", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 3, 1972, pp. 233-248.
- [4] Wang C.Y., Zhang J., Fei Y.Q., Murmu T., "Circumferential Nonlocal Effect on Vibrating Nanotubes", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 58, No. 1, 2012, pp. 86-90.
- [5] Reddy J.N., "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, 2007, pp. 288-307.
- [6] Goldsmith W., *Impact, The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids*, Edward Arnold, London, 1960.
- [7] Seifoori S., Liaghat G.H., "A Semianalytical and Numerical Study of Penetration And Perforation of an Ogive-Nose Projectile Into Concrete Targets Under Normal Impact", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 225, No. 8, 2011, pp. 1782-1797.

Archive