



# بررسی تحلیلی انتقال حرارت پایای هدایتی نامتقارن در استوانه‌های کامپوزیتی به روش جداسازی متغیرها

محمدحسن کیهانی<sup>۱\*</sup>، امین امیری دلوئی<sup>۲</sup>

۱- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

\*shahroodut.ac.ir، ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، h\_kayhani@shahroodut.ac.ir

**چکیده-** در مطالعه حاضر مسئله انتقال حرارت دوبعدی نامتقارن در یک استوانه کامپوزیتی چندلایه به صورت تحلیلی بررسی شده است. شرایط مرزی در نظر گرفته شده در کلی‌ترین حالت (خطی) ممکن قرار دارد که می‌تواند تمامی مکانیزم‌های جابه‌جایی، هدایت و تشعشع را دربر گیرد. الیاف تحت زاویه مشخصی به دور استوانه پیچیده شده‌اند، به نحوی که زاویه الیاف و جنس مواد کامپوزیتی به کار رفته شده می‌تواند لایه به لایه تغییر کند. معادلات حاکم بر هدایت اورتوتروپیک استخراج گردیده و سپس با استفاده از روش دقیق جداسازی متغیرها، سری توزیع دما در هر لایه به دست آمده است. با اعمال شرایط مرزی کلی داخلی و بیرونی استوانه و همچنین برقراری شرایط پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین هر جفت از لایه‌ها، سه دستگاه معادلات مستقل برای به دست آوردن ضرایب مجهول سری دما ساخته شده‌اند. با استفاده از روابط توابع متعامد و الگوریتم توماس، این دستگاه‌های معادلات حل شده و روابطی بازگشتی و تحلیلی برای محاسبه ضرایب مجهول ارائه گردیده است. تاثیر پارامترهای طراحی، زاویه الیاف و جنس لایه‌ها روی توزیع دما، با استفاده از دو مثال عملی شامل شرایط مرزی پیچیده، بررسی و مقایسه شده است.

**کلیدواژگان:** حل تحلیلی، انتقال حرارت نامتقارن، استوانه کامپوزیتی، الگوریتم توماس، تبدیل فوریه

## Analytical investigation of asymmetric steady heat conduction in a composite cylinder using the separation of variables method

M. H. Kayhani<sup>1\*</sup>, A. Amiri Delouei<sup>2</sup>

1- Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran

2- PhD Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran

\*P.O.B. 3619995161 Shahrood, h\_kayhani@shahroodut.ac.ir

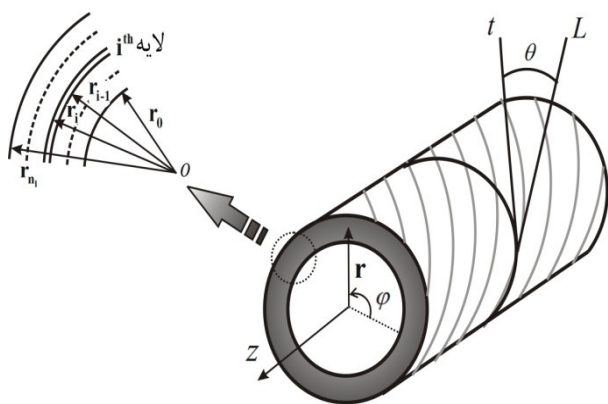
**Abstract-** In this study, 2D Asymmetric heat transfer in multi-layer composite cylinder is investigated, analytically. The boundary conditions are the most linear general boundary conditions which can cover all the heat transfer mechanisms consists of convection, conduction and radiation. The fibers are wound around the cylinder. The angle of fibers and composite materials can be changed layer by layer. The governing equation of orthotropic conduction has been extracted and temperature distribution series have been obtained using the separation of variables method. In order to find the unknown series' coefficients, three independent set of equations have been constructed by applying the boundary conditions inside/outside of cylinder and temperature/heat flux continuity between the layers. These set of equations have been solved using the orthogonal function relations and Thomas algorithm to find the recursive relation for unknown coefficients. The effect of design parameter, fiber angle and layers' materials, have been investigated via two functional examples.

**Keywords:** Analytical Solution, Asymmetric heat transfer, composite cylinder, Thomas Algorithm, Fourier Transformation

## ۱- مقدمه

همکاران [۲۵] همچنین مسئله انتقال حرارت در مختصات استوانه‌ای در حالت نامتقارن<sup>۲</sup> را تحت شرایط مرزی خاص بررسی نموده‌اند. جین و همکاران [۲۶] یک حل تحلیلی برای بررسی انتقال حرارت در مواد لایه‌ای با لایه‌های کروی شکل و هم‌مرکز ارائه داده‌اند. این حل برای شرایط مرزی نوع اول و دوم همگن ارائه شده است و خواص مواد در هر لایه ثابت است.

در کار حاضر یک حل تحلیلی دقیق برای انتقال حرارت دوبعدی در مختصات استوانه‌ای و راستای  $r-\phi$  ارائه شده است. همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، هندسه مسئله به صورت یک استوانه چندلایه می‌باشد که الیاف تحت زاویه دلخواه  $\theta$  در هر لایه به دور آن پیچیده شده‌اند. جنس لایه‌ها و زاویه الیاف دو پارامتر اختیاری است که می‌تواند لایه به لایه تغییر کند. شرایط مرزی دمایی در نظر گرفته شده، کلی‌ترین شرایط مرزی خطی ممکن است که می‌توان آن را به صورت ترکیبی از هدایت، جابه‌جایی و تشعشع در لایه بیرونی و داخلی کامپوزیت در نظر گرفت [۲۷]. اگر چه قبلاً کارهایی در زمینه انتقال حرارت نامتقارن توسط کیهانی و همکاران [۲۵] صورت گرفته است، اما این حل‌ها اولاً تنها تحت شرایط مرزی خاص تشعشع خورشیدی ارائه شده‌اند و قابل تعمیم به سایر شرایط مرزی نیستند و ثانیاً بحث تغییر خواص ماده کامپوزیتی شامل الیاف و ماتریس در هر لایه مطرح نشده و تمامی لایه‌ها هم‌جنس حل شده‌اند. در کار حاضر، سعی شده است علاوه بر شرایط مرزی کلی و قابل تعمیم به شرایط مرزی ساده‌تر، بحث تغییر خواص در هر لایه نیز اضافه گردد تا پارامترهای موثر در طراحی حرارتی این مواد کامل‌تر گردد.



شکل ۱ هندسه و لایه‌بندی مربوط به استوانه

در دهه‌های اخیر مواد کامپوزیتی به‌طور قابل ملاحظه‌ای در کاربردهای مختلف مهندسی مورد توجه قرار گرفته‌اند. این امر به دلیل اضافه شدن مزیت ترکیب خواص گوناگون فیزیکی، مکانیکی و حرارتی در این مواد است. مواد لایه‌لایه و کامپوزیتی دارای کاربردهای گسترده در زمینه‌های گوناگون نظیر صنایع هوافضا [۳-۱]، مخازن، مبدل‌های حرارتی، پره‌ها [۴-۷] و غیره می‌باشند. بنابراین پرداختن به مسائل مختلف مربوط به این مواد از جمله بحث انتقال حرارت در آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد. این تحلیل‌های دمایی در مسائل مربوط به فرایندهای تولید کامپوزیت‌ها [۸-۱۰] و بررسی تنش‌های دمایی در استوانه‌ها [۱۱-۱۳] از اهمیت بسزایی برخوردار می‌باشند، اما متأسفانه کمتر به این موضوع پرداخته شده است. در این حوزه اکثر کارهای انجام‌شده به صورت حل‌های عددی بوده‌اند. [۱۴-۱۸] و تنها موارد معدودی به صورت تحلیلی ارائه شده‌اند. حل‌های تحلیلی دوبعدی انجام‌شده در این بحث را می‌توان به چند بخش تقسیم نمود: حل‌های ارائه‌شده در مختصات کارتزین [۱۹-۲۱]، تحلیل‌های انجام‌شده در مختصات استوانه‌ای در راستای  $r-z$  [۲۲-۲۴] و راستای  $r-\phi$  [۲۵] و کارهای انجام‌شده در مختصات کروی [۲۶].

سالت [۲۰، ۱۹] انتقال حرارت دوبعدی در کامپوزیت‌ها را به صورت تحلیلی بررسی نموده است. این حل در مختصات کارتزین و تحت شرایط مرزی همگن ارائه شده است. حاجی شیخ و همکاران [۲۱] یک فرمولاسیون ریاضی برای میدان دما در حالت پایا در اجسام چندلایه و چندبعدی به دست آورده‌اند، آن‌ها اثبات نموده‌اند که مقادیر ویژه، برای حالتی که لایه‌ها همگن باشد، حقیقی است در حالی که برای حالت اورتوتروپ این مقادیر می‌توانند موهومی باشند. کیهانی و همکاران [۲۲] و امیری دلویی و همکاران [۲۳] به ترتیب مسئله انتقال حرارت متقارن<sup>۱</sup> پایا و ناپایا را تحت شرایط مرزی ترکیبی به‌طور جداگانه بررسی نموده‌اند. این حل‌ها به صورت دوبعدی و در راستای  $r-z$  انجام شده است. همچنین مسئله انتقال حرارت ناپایا در بین‌فین‌های کامپوزیتی نیز قبلاً توسط کیهانی و همکاران [۲۴] انجام پذیرفته است. این حل نیز در حالت متقارن انجام شده و شرایط مرزی خاص بین‌فین‌ها اعمال گردیده است. کیهانی و

متفاوت، سیستم مختصات اصلی و سیستم مختصات فرعی، بایستی تعریف گردد [۳۱]. سیستم مختصات فرعی به ما این امکان را خواهد داد تا خواص حرارتی را در جهات ثابت و منحصر به فرد بررسی کنیم. از طرفی دستگاه مختصات اصلی می‌تواند لایه به لایه تغییر کند و جهت آن در هر لایه وابسته به جهت‌گیری الیاف خواهد بود. بنابراین، دستگاه‌های مختصات فرعی و اصلی در هر لایه از کامپوزیت می‌توانند انحراف زاویه‌ای به اندازه  $\theta_i$  داشته باشند. شکل ۱ هندسه یک لمینیت تک‌لایه کامپوزیتی را نشان می‌دهد. زاویه  $\theta$  به صورت زاویه بین خط مماس بر دایره در جهت الیاف ( $L$ ) و خط مماس بر دایره در جهت  $\phi$  ( $t$ ) تعریف می‌شود. با استفاده از قانون بقای انرژی در یک المان استوانه‌ای و اعمال تانسور چرخش روی دستگاه مختصات اصلی، معادله انتقال حرارت کلی در یک لمینیت کامپوزیتی استوانه‌ای بر حسب مختصات فرعی به صورت زیر خواهد بود [۲۲-۲۵]:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + (k_{11} \cos^2(\theta) + k_{22} \sin^2(\theta)) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + (\sin^2(\theta) + k_{22} \cos^2(\theta)) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \sin(2\theta)(k_{11} - k_{22}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial z} \quad (2)$$

که در این رابطه  $k_{11}$  و  $k_{22}$  ضرایب انتقال حرارت هدایتی در جهات اصلی به ترتیب متناظر با راستای الیاف و راستای عمود بر الیاف می‌باشند. همچنین  $\rho$  و  $c_p$  به ترتیب نمایانگر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت می‌باشند. با توجه به اینکه در مقاله حاضر به بحث انتقال حرارت دو بعدی و پایا در جهات  $r - \phi$  خواهیم پرداخت، معادله (۲) به شکل زیر ساده‌سازی خواهد گردید [۲۵]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\mu_i^2 r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3)$$

$$\mu_i = \sqrt{\frac{k_{22}}{(\cos(\theta_i))^2 k_{11} + (\sin(\theta_i))^2 k_{22}}} \quad (4)$$

بایستی توجه داشت که در معادله (۳)، ضریب  $\mu$  تابعی از زاویه قرارگیری الیاف در هر لایه است؛ بنابراین علاوه بر پیچیده‌تر نمودن رابطه (۳)، باعث خواهد گردید تا معادله انتقال

ابتدا معادله حاکم برای هدایت اورتوتروپیک<sup>۱</sup> در هر یک از لایه‌ها در مختصات استوانه‌ای استخراج گردیده است. روش جداسازی متغیرها بر روی این معادله دیفرانسیل جزئی اعمال گردیده که حاصل آن دو معادله معمولی مرتبه دو در راستاهای شعاعی و محیطی است. مقادیر ویژه از شرایط مرزی پرئودیک در راستای  $\phi$  به دست آمده و سری توزیع دما در هر لایه مشخص شده است. در ادامه، با توجه به شرایط مرزی کلی در داخل و خارج استوانه، شرایط پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها و همچنین روابط مربوط به ضرایب سری فوریه، سه دستگاه معادلات جداگانه برای محاسبه ضرایب مجهول سری فوریه تشکیل شده است. این دستگاه‌های معادلات به صورت پنج‌قطری بوده و از الگوریتم توماس برای به دست آوردن ضرایب مجهول به صورت توابع تحلیلی و بازگشتی بهره برده‌ایم. در انتها نتایج حل حاصل با استفاده از دو مثال کاربردی شامل دو لوله کامپوزیتی چندلایه تحت شرایط مرزی پیچیده و متغیر بررسی گردیده است. اثرات مربوط به تغییر پارامترهای طراحی، شامل تغییر زاویه الیاف و جنس کامپوزیت در هر لایه، روی توزیع دما به تفصیل بحث شده است.

## ۲- هدایت در استوانه‌های کامپوزیتی

از آنجایی که مواد کامپوزیتی متعلق به دسته بزرگتری از مواد تحت عنوان مواد اورتوتروپ می‌باشند، انتقال حرارت در این مواد نیز تابعی از قوانین حاکم بر مواد اورتوتروپ می‌باشد. رابطه فوریه برای محاسبه شار حرارت در محیط‌های اورتوتروپ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشد [۲۸]:

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\phi \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در این رابطه  $q$  شار حرارتی،  $k_{ij}$  ضریب انتقال حرارت هدایتی و  $T$  دماست. البته تمامی ضرایب انتقال حرارت هدایتی معرفی شده در این رابطه مستقل از یکدیگر نیستند [۲۹، ۳۰]. به منظور بررسی انتقال حرارت در این مواد، دو سیستم مختصات

1. Orthotropic

$$\phi(\varphi) = A_n \cos(\mu\lambda_n \varphi) + B_n \sin(\mu\lambda_n \varphi) \quad (11)$$

با توجه به هندسه حلقوی مسئله و شرایط مرزی همگن پیوستگی دما و شار حرارت داریم:

$$G(0) = G(2\pi) \Rightarrow \phi(0) = \phi(2\pi) \quad (12)$$

$$G'(0) = G'(2\pi) \Rightarrow \phi'(0) = \phi'(2\pi) \quad (13)$$

از حل معادله (11)، با در نظر گرفتن شرایط مرزی معرفی شده توسط روابط (8) و (9)، مقادیر ویژه مسئله به دست خواهند آمد:

$$\lambda_n = \frac{n}{\mu}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (14)$$

معادله (9) در دسته معادلات اویلری جای می‌گیرد که دارای جواب عمومی زیر می‌باشند:

$$R(r) = \begin{cases} C_1 r^{\lambda_n} + C_2 r^{-\lambda_n} & n > 0 \\ C_3 \ln(r) + C_4 & n = 0 \end{cases} \quad (15)$$

نهایتاً توزیع دمای دوبعدی در هر یک از لایه‌ها به صورت حاصل ضرب دو تابع مستقل  $R(r)$  و  $\phi(\varphi)$  مشخص خواهد شد:

$$T^{(i)}(r, \varphi) = R(r) \times \phi(\varphi) = a_0^{(i)} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + b_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( a_{1n}^{(i)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{n}{\mu_i}} + b_{1n}^{(i)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\frac{n}{\mu_i}} \right) \cos(n\varphi) + \left( a_{2n}^{(i)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{n}{\mu_i}} + b_{2n}^{(i)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\frac{n}{\mu_i}} \right) \sin(n\varphi) \right] \quad (16)$$

در معادله (16)، زیرنویس‌ها و بالانویس‌های  $i$  نشانگر شماره هر لایه بوده و ثوابت مجهول  $a_0^{(i)}$ ،  $b_0^{(i)}$ ،  $a_n^{(i)}$ ،  $b_n^{(i)}$ ،  $c_n^{(i)}$  و  $d_n^{(i)}$  ضرایب سری فوریه (جمله صفرم، ضرایب کسینوسی و ضرایب سینوسی) می‌باشند. به منظور تعیین ضرایب مجهول، از شرایط مرزی خطی کلی در جهت شعاعی (معادلات 7 و 8) و همچنین پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها (معادلات 5 و 6) استفاده خواهیم نمود. - اعمال شرط مرزی داخل استوانه (معادله 7):

$$f_0(\varphi) = \frac{b_1}{r_0} a_0^{(1)} + a_1 b_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( a_1 a_{1n}^{(1)} + a_1 b_{1n}^{(1)} + \frac{b_1}{r_0} a_{1n}^{(1)} - \frac{b_1}{r_0} b_{1n}^{(1)} \right) \cos(n\varphi) + \left( a_1 a_{2n}^{(1)} + a_1 b_{2n}^{(1)} + \frac{b_1}{r_0} a_{2n}^{(1)} - \frac{b_1}{r_0} b_{2n}^{(1)} \right) \sin(n\varphi) \right] \quad (17)$$

حرارت لایه به لایه تغییر نماید. در نتیجه برای برقراری رابطه بین لایه‌های مختلف، اعمال معادلات پیوستگی دما و پیوستگی شار حرارت در مرز بین دو لایه ضروری به نظر می‌رسد. چنانچه  $r = r_i$  مرز بین دو لایه مجاور  $i$  و  $i+1$  باشد (شکل 1)، روابط مربوط به پیوستگی دما و شار حرارت به صورت زیر خواهند بود:

$$T^{(i)}(r_i, \varphi) = T^{(i+1)}(r_i, \varphi) \quad (5)$$

$$k^{(i)} \frac{\partial T^{(i)}(r_i, \varphi)}{\partial r} = k^{(i+1)} \frac{\partial T^{(i+1)}(r_i, \varphi)}{\partial r} \quad (6)$$

در مقاله حاضر شرایط مرزی در کلی‌ترین حالت (خطی) ممکن در نظر گرفته شده است که در کاربردهای گوناگون می‌تواند به شکل‌های مختلف شرایط مرزی حرارتی شامل هدایت، جابه‌جایی، تشعشع و یا ترکیب آن‌ها ساده شود. شکل کلی شرایط مرزی در جهت شعاعی به صورت زیر است [27]:

$$a_1 T(r_0, \varphi) + b_1 \frac{\partial T(r_0, \varphi)}{\partial r} = f_0(\varphi) \quad (7)$$

$$a_2 T(r_{n_i}, \varphi) + b_2 \frac{\partial T(r_{n_i}, \varphi)}{\partial r} = f_{n_i}(\varphi) \quad (8)$$

که  $f_1(\varphi)$  و  $f_2(\varphi)$  می‌توانند هر تابع دلخواهی باشند. ضرایب  $a_1$  و  $a_2$  ابعادی مشابه ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (یعنی  $W/m^2 K$ ) و ضرایب  $b_1$  و  $b_2$  ابعادی مشابه ضریب انتقال حرارت هدایتی (یعنی  $W/mK$ ) دارند.

### 3- حل تحلیلی تحت شرایط مرزی کلی

در این قسمت، یک حل تحلیلی دقیق برای توزیع دمای نامتقارن در لمینیت‌های استوانه‌ای کامپوزیتی ارائه گردیده است. معادله انرژی (رابطه 1) ارائه شده در بخش قبلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دو است که در کار حاضر از روش تحلیلی جداسازی متغیرها برای حل آن استفاده شده است. برای این منظور، توزیع دما به صورت حاصل ضرب دو تابع مستقل  $R(r)$  و  $\phi(\varphi)$  فرض شده و معادله انتقال حرارت به صورت دو معادله زیر جداسازی می‌شود:

$$r^2 F'' + rF' - \lambda_n^2 F = 0 \quad (9)$$

$$G'' + \mu^2 \lambda_n^2 G = 0 \quad (10)$$

مقادیر ویژه مسئله،  $\lambda_n$  ها، از اعمال شرایط مرزی در جهت شعاعی  $\varphi$  استخراج می‌گردند. جواب کلی معادله (10) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 & + (k^{(i)} \frac{n}{\mu_i} \frac{(r_i)^{\frac{n-1}{\mu_i}}}{r_0} a_{2n}^{(i)} - k^{(i)} \frac{n}{\mu_i} \frac{(r_i)^{\frac{-n-1}{\mu_i}}}{r_0} b_{2n}^{(i)}) \\
 & - k^{(i+1)} \frac{n}{\mu_{i+1}} \frac{(r_i)^{\frac{n-1}{\mu_{i+1}}}}{r_0} a_{2n}^{(i+1)} \\
 & + k^{(i+1)} \frac{n}{\mu_{i+1}} \frac{(r_i)^{\frac{-n-1}{\mu_{i+1}}}}{r_0} b_{2n}^{(i+1)} \sin(n\varphi) \quad (20)
 \end{aligned}$$

حال، با استفاده از روابط موجود برای ضرایب سری فوریه و مرتب‌نمودن روابط (۱۷) تا (۲۰) برحسب جملات صفرم، کسینوسی و سینوسی مربوط به توابع نشان داده شده در سمت چپ هر یک از معادلات (توابع  $f_1(\varphi)$  و  $f_2(\varphi)$  تابع ثابت صفر)، ثوابت مجهول به‌دست خواهند آمد. با در نظر گرفتن معادله (۱۷) داریم:

$$\frac{b_1}{r_0} a_0^{(1)} + a_1 b_0^{(1)} = F_0^0 \quad (21)$$

$$(a_1 + \frac{b_1}{r_0}) a_{1n}^{(1)} + (a_1 - \frac{b_1}{r_0}) b_{1n}^{(1)} = F_{1n}^0 \quad (22)$$

$$(a_1 + \frac{b_1}{r_0}) a_{2n}^{(1)} + (a_1 - \frac{b_1}{r_0}) b_{2n}^{(1)} = F_{2n}^0 \quad (23)$$

به طور مشابه از معادله (۱۸) چنین نتیجه می‌شود که:

$$(a_1 \ln(\frac{r_{nl}}{r_0}) + \frac{b_1}{r_0 r_{nl}}) a_0^{(n_i)} + a_1 b_0^{(n_i)} = F_0^{n_i} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 & (a_1 (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{n_i}}} + \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{n-1}{\mu_{n_i}}}) a_{1n}^{(n_i)} \\
 & + (a_1 (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{-n}{\mu_{n_i}}} - \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{-n-1}{\mu_{n_i}}}) b_{1n}^{(n_i)} = F_{1n}^{n_i} \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (a_1 (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{n_i}}} + \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{n-1}{\mu_{n_i}}}) a_{2n}^{(n_i)} \\
 & + (a_1 (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{-n}{\mu_{n_i}}} - \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{-n-1}{\mu_{n_i}}}) b_{2n}^{(n_i)} = F_{2n}^{n_i} \quad (26)
 \end{aligned}$$

با توجه به توضیحات داده‌شده، توابع نمایان شده در سمت راست معادلات (۲۱) تا (۲۶) از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$F_0^j = 1/2\pi \times \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) d\varphi, \quad j=0, n_i \quad (27)$$

$$F_{1n}^j = 1/\pi \times \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad j=0, n_i \quad (28)$$

$$F_{1n}^j = 1/\pi \times \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad j=0, n_i \quad (29)$$

- اعمال شرط مرزی خارج استوانه (معادله ۸):

$$\begin{aligned}
 f_{n_i}(\varphi) &= (a_1 \ln(\frac{r_{nl}}{r_0}) + \frac{b_1}{r_0 r_{nl}}) a_0^{(n_i)} + a_1 b_0^{(n_i)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} [ (a_1 (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{n_i}}} a_{1n}^{(n_i)} + a_1 (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{-n}{\mu_{n_i}}} b_{1n}^{(n_i)}) \\
 & + \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{n-1}{\mu_{n_i}}} a_{1n}^{(n_i)} \\
 & - \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{-n-1}{\mu_{n_i}}} b_{1n}^{(n_i)}) \cos(n\varphi) \\
 & + (a_1 (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{n_i}}} a_{2n}^{(n_i)} + a_1 (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{-n}{\mu_{n_i}}} b_{2n}^{(n_i)}) \\
 & + \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{n-1}{\mu_{n_i}}} a_{2n}^{(n_i)} \\
 & - \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} (\frac{r_{nl}}{r_0})^{\frac{-n-1}{\mu_{n_i}}} b_{2n}^{(n_i)}) \sin(n\varphi) \quad (18)
 \end{aligned}$$

- اعمال شرط پیوستگی دما در مرز بین دو لایه  $i$  و  $i+1$  (معادله ۵):

$$\begin{aligned}
 0 &= \ln(\frac{r_i}{r_0}) a_0^{(i)} + b_0^{(i)} - \ln(\frac{r_i}{r_0}) a_0^{(i+1)} - b_0^{(i+1)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} [ ((\frac{r_i}{r_0})^{\frac{n}{\mu_i}} a_{1n}^{(i)} + (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{-n}{\mu_i}} b_{1n}^{(i)} - (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{i+1}}} a_{1n}^{(i+1)} \\
 & - (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{-n}{\mu_{i+1}}} b_{1n}^{(i+1)}) \cos(n\varphi) + ((\frac{r_i}{r_0})^{\frac{n}{\mu_i}} a_{2n}^{(i)} + (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{-n}{\mu_i}} b_{2n}^{(i)} \\
 & - (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{i+1}}} a_{2n}^{(i+1)} - (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{-n}{\mu_{i+1}}} b_{2n}^{(i+1)}) \sin(n\varphi) \quad (19)
 \end{aligned}$$

- اعمال شرط پیوستگی شار حرارت در مرز بین دو لایه  $i$  و  $i+1$  (معادله ۶):

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{k^{(i)}}{r_i} a_0^{(i)} - \frac{k^{(i+1)}}{r_i} a_0^{(i+1)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} [ (k^{(i)} \frac{n}{\mu_i} (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{n-1}{\mu_i}} a_{1n}^{(i)} - k^{(i)} \frac{n}{\mu_i} (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{-n-1}{\mu_i}} b_{1n}^{(i)} \\
 & - k^{(i+1)} \frac{n}{\mu_{i+1}} (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{n-1}{\mu_{i+1}}} a_{1n}^{(i+1)} \\
 & + k^{(i+1)} \frac{n}{\mu_{i+1}} (\frac{r_i}{r_0})^{\frac{-n-1}{\mu_{i+1}}} b_{1n}^{(i+1)}) \cos(n\varphi)
 \end{aligned}$$

که در آن قرار گرفته‌اند (که شامل تغییرات جنس و زاویه ییاف می‌شوند) نیز می‌باشند. ضرایب مجهول به صورت روابط بازگشتی زیر با استفاده از الگوریتم توماس به دست آمده‌اند:

$$b_{\chi}^{(n_i)} = \gamma^{2n_i}$$

$$\begin{cases} a_{\chi}^{(i)} = \gamma^{2i-1} - b_{\chi}^{(i)} \beta_i \\ b_{\chi}^{(i-1)} = \gamma^{2i-2} - a_{\chi}^{(i)} \alpha_i \end{cases} \quad i = n_l, n_l - 1, \dots, 2$$

$$a_{\chi}^{(1)} = \gamma^1 - b_{\chi}^{(1)} \beta_1 \quad (36)$$

که اندیس  $\chi$  می‌تواند به صورت‌های  $0, 1n, 2n$  ظاهر شود تا تمامی مجهولات را پوشش دهد. روابط مربوط به  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  در هر یک از مقادیر  $\chi$  در پیوست (الف) ارائه شده است.

#### ۴- نتایج و بحث

در این قسمت، سعی شده است تا با ارائه دو نمونه عملی، توانایی رابطه تحلیلی ارائه شده برای حل مسائل کاربردی مربوط به لوله‌های چندلایه کامپوزیتی تحت شرایط مرزی نامتقارن بررسی گردد. برای این منظور، دو مثال عملی شامل دو لوله کامپوزیتی چندلایه، که یکی در معرض تابش آفتاب قرار داشته و دیگری قسمتی از لوله یک مبدل حرارتی است، در نظر گرفته شده است. از آنجا که در حل ارائه شده جنس و زاویه ییاف می‌تواند لایه به لایه تغییر کند، تاثیر دو فاکتور فوق به طور خاص در نتایج حل در نظر گرفته شده است. جدول ۱ خواص انواع کامپوزیت‌های پلیمری به کار برده شده در حل حاضر را نشان می‌دهد.

جدول ۱ خواص کامپوزیت‌های پلیمری [۳۳، ۳۲]

جنس ماتریس	جنس ییاف	$k_{11}$ (W/mK)	$k_{22}$ (W/mK)	$\rho$ (g/cc)
اپوکسی <sup>۱</sup> [32]	گرافیت <sup>۲</sup>	۳۷۰	۶/۵	۱/۹۴
لکسان <sup>۳</sup> [33]	ترمال گرافیت <sup>۴</sup>	۱۱/۴	۰/۷۴	۱/۴۶
زیتل <sup>۵</sup> [33]	ترموکرب <sup>۶</sup>	۱/۱	۰/۴	۱/۱۷

1. Epoxy
2. Graphite
3. Lexan
4. Thermal graphite
5. Zytel
6. Thermocarb

همچنین با توجه به رابطه (۱۹) داریم:

$$\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)a_0^{(i)} + b_0^{(i)} - \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)a_0^{(i+1)} - b_0^{(i+1)} = 0 \quad (30)$$

$$\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{\mu_i} a_{1n}^{(i)} + \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-\mu_i} b_{1n}^{(i)} - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{\mu_{i+1}} a_{1n}^{(i+1)} - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-\mu_{i+1}} b_{1n}^{(i+1)} = 0 \quad (31)$$

$$\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{\mu_i} a_{2n}^{(i)} + \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-\mu_i} b_{2n}^{(i)} + \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{\mu_{i+1}} a_{2n}^{(i+1)} - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-\mu_{i+1}} b_{2n}^{(i+1)} = 0 \quad (32)$$

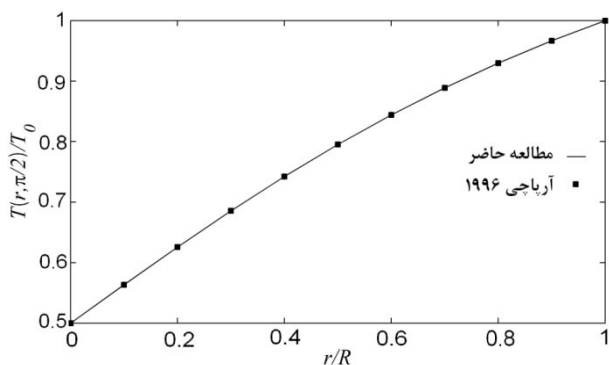
به طور مشابه از معادله (۲۵) می‌توان چنین نتیجه گرفت که:

$$k^{(i)} a_0^{(i)} - k^{(i+1)} a_0^{(i+1)} = 0 \quad (33)$$

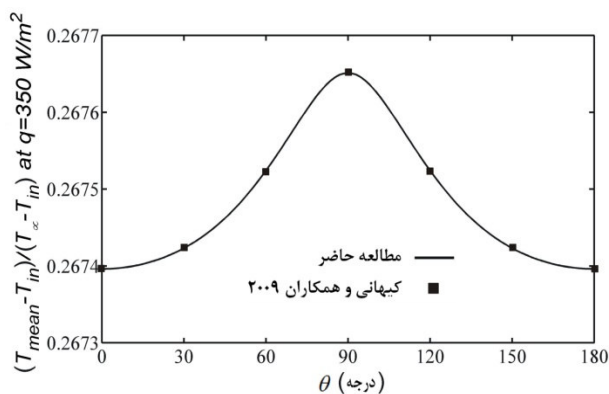
$$\frac{k^{(i)}}{\mu_i} \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{\mu_i-1} a_{1n}^{(i)} - \frac{k^{(i)}}{\mu_i} \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-\mu_i-1} b_{1n}^{(i)} - \frac{k^{(i+1)}}{\mu_{i+1}} \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{\mu_{i+1}-1} a_{1n}^{(i+1)} + \frac{k^{(i+1)}}{\mu_{i+1}} \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-\mu_{i+1}-1} b_{1n}^{(i+1)} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{k^{(i)}}{\mu_i} \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{\mu_i-1} a_{2n}^{(i)} - \frac{k^{(i)}}{\mu_i} \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-\mu_i-1} b_{2n}^{(i)} - \frac{k^{(i+1)}}{\mu_{i+1}} \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{\mu_{i+1}-1} a_{2n}^{(i+1)} + \frac{k^{(i+1)}}{\mu_{i+1}} \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-\mu_{i+1}-1} b_{2n}^{(i+1)} = 0 \quad (35)$$

بایستی توجه داشت که در تمامی معادلات معرفی شده در روابط (۳۰) تا (۳۲) و (۳۳) تا (۳۵)،  $1 < i < n_l$  می‌باشد. حال در آخرین مرحله، به منظور به دست آوردن ضرایب سری به ازای همه مقادیر  $n$  و برای هر یک از لایه‌ها، می‌بایست دستگاه معادلاتی متشکل از روابط ارائه شده در معادلات (۲۱) تا (۳۵) حل گردند. اما از آنجا که روابط مربوط به ضرایب  $a_0^{(i)}$  و  $b_0^{(i)}$  (معادلات (۲۱)، (۲۴)، (۲۷) و (۳۰))، ضرایب  $a_{1n}^{(i)}$  و  $b_{1n}^{(i)}$  (معادلات (۲۲)، (۲۵)، (۲۸) و (۳۱)) و ضرایب  $a_{2n}^{(i)}$  و  $b_{2n}^{(i)}$  (معادلات (۲۳)، (۲۶)، (۲۹) و (۳۲)) کاملاً مستقل از یکدیگر می‌باشند، این ضرایب می‌توانند به صورت کاملاً جداگانه حل گردند. دستگاه معادلات حاصل برای هر یک از این جفت ثوابت سری، دارای ماتریس ضرایبی پنج قطری خواهد بود. در مطالعه حاضر از الگوریتم توماس به منظور به دست آوردن روابط صریح و بازگشتی برای ضرایب سری استفاده شده است. شایان ذکر است روابط به دست آمده، علاوه بر شمارنده  $n$ ، تابعی از لایه‌ای



شکل ۲ تغییرات دمای بی‌بعد در جهت شعاعی (در زاویه  $\pi/2$ ) در یک لمینیت استوانه‌ای ایزوتروپ تحت شرایط مرزی دما ثابت



شکل ۳ تغییرات دمای میانگین بی‌بعد برحسب زاویه الیاف در یک لمینیت تک‌لایه استوانه‌ای تحت شار حرارتی خورشیدی

$$h_{out} = 20 \text{ W/m}^2 \text{K}, r_o = 30 \text{ cm}, r_{in} = 42 \text{ cm}$$

در این مقاله موارد زیر به‌عنوان مثال‌های عملی استفاده شده است:

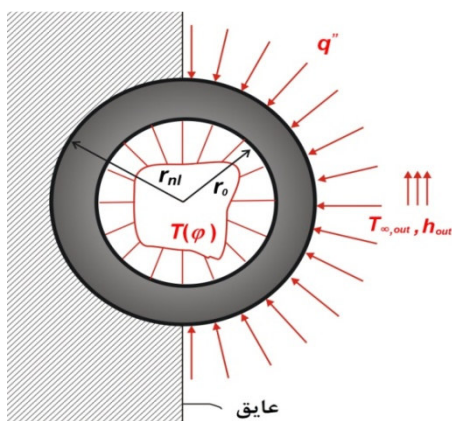
- نمونه ۱: یک لوله کامپوزیتی سه‌لایه که در معرض شار تشعشعی خورشید قرار گرفته است. شار حرارتی رسیده از خورشید در نزدیکی سطح زمین به‌طور متوسط برابر  $q'' = 1357 \text{ W/m}^2$  توزیع این شار روی سطح خارجی استوانه به‌صورت تابع  $q''(\varphi) = 1357 \times (1 - 0.15 \times |\cos(\varphi/2)|) \text{ W/m}^2$  فرض شده است. جدول ۲ و شکل ۴ ویژگی‌های حرارتی و مشخصات هندسی محیط در نظر گرفته شده را نشان می‌دهد. علاوه بر شار حرارتی متغیر روی سطح خارجی لوله، شرایط مرزی جابه‌جایی حرارتی در داخل و خارج لوله نیز لحاظ شده است.
- نمونه ۲: برای مثال دوم یک لوله کامپوزیتی پنج‌لایه به‌کار گرفته شده در یک مبدل حرارتی در نظر گرفته شده

از طرفی، به‌منظور بررسی اثر نحوه چیدمان و زاویه الیاف بر روی توزیع درجه حرارت در هر یک از لایه‌ها، سه نوع چیدمان مختلف شامل موارد زیر در نظر گرفته شده است:

۱. ایزوتروپیک: در این چیدمان زاویه تمام لایه‌ها برابر و مساوی  $90^\circ$  در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، لمینیت مانند یک ماده ایزوتروپ با  $k_{rr} = k_{\varphi\varphi} = k_{22}$  عمل می‌کند.
۲. اورتوتروپیک: زاویه الیاف در همه لایه‌ها برابر صفر درجه است (الیاف در جهت  $\varphi$  قرار گرفته‌اند). بنابراین لمینیت مانند یک ماده اورتوتروپیک با ضرایب  $k_{rr} = k_{11}$  و  $k_{\varphi\varphi} = k_{22}$  می‌باشد.
۳. شبه‌ایزوتروپیک: در این حالت چیدمان الیاف در لایه‌های مختلف به‌صورت زیر است:  $[0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ]$
۴. کراس پلای: یک نمونه عملی دیگر از آرایش الیاف که در آن زاویه الیاف به‌صورت زیر است:  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]$

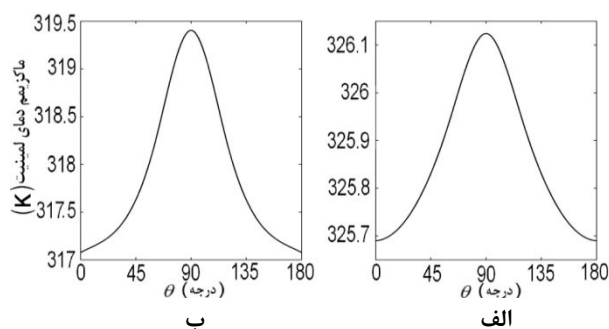
بررسی همگرایی جملات سری فوریه (معادله ۱۶) نشان می‌دهد که با محاسبه ۱۰۰۰ جمله اول سری، جواب‌ها با دقت قابل قبول همگرا خواهند شد. با توجه به این واقعیت که حل حاضر، در حالتی که زاویه الیاف در همه لایه‌ها  $90^\circ$  باشد، با حل مربوط به انتقال حرارت در یک استوانه ایزوتروپ در جهت  $r - \varphi$  یکسان است، لذا از حل ارائه‌شده توسط آرپاچی [۳۴] برای اعتبارسنجی و اثبات صحت حل ارائه‌شده استفاده شده است. حل ارائه‌شده توسط آرپاچی تحت شرایط مرزی دما ثابت در نیمه بالایی از محیط استوانه و دمای صفر در نیمه پایینی ارائه شده است که نتایج حاصل از این حل و حل ارائه‌شده در این مقاله در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل برمی‌آید، با توجه به تحلیلی بودن این دو حل، نمودارها کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند. علاوه بر این، نتایج به‌دست آمده با کار ارائه‌شده توسط کیهانی و همکاران [۲۵] نیز مقایسه گردیده است. این حل تنها تحت شرایط مرزی گرمایی خاص ارائه شده و جنس کامپوزیت در همه لایه‌ها از نوع گرافیت/پوکسی است. با توجه به تحلیلی بودن هر دو حل، تطابق کامل را شاهد هستیم (شکل ۳).

1. Isotropic
2. Quasi-isotropic
3. Cross-ply



شکل ۵ هندسه و شرایط مرزی مربوط به نمونه دوم

شکل‌های ۶-الف و ۶-ب تغییرات ماکزیمم دمای به وجود آمده داخل لمینیت مثال اول را برحسب زاویه الیاف نشان می‌دهند. با افزایش زاویه الیاف از صفر تا  $90^\circ$ ، مقدار ضریب  $\mu$  افزایش خواهد یافت تا به ماکزیمم مقدار خود در  $90^\circ$  برسد (معادله ۴). با توجه به معادله (۳)، افزایش این ضریب سبب کاهش میزان انتقال حرارت در جهت  $\varphi$  خواهد شد و در نتیجه یکنواختی توزیع دما کاهش یافته و ماکزیمم دما افزایش می‌یابد. همان‌طور که از این شکل‌ها برمی‌آید، با افزایش زاویه الیاف از صفر تا  $90^\circ$ ، ماکزیمم دمای لمینیت افزایش خواهد یافت. از طرفی چنانچه از مقایسه بین شکل‌های ۶-الف و ۶-ب مشخص می‌شود، نحوه چیدمان جنس لایه‌ها نیز تاثیر بسزایی در مقدار دمای ماکزیمی دارد که لمینیت استوانه‌ای تجربه می‌نماید. به طوری که با تغییر نحوه چیدمان لایه‌ها، ماکزیمم دما از  $326$  کلوین در چیدمان اول  $(k^{(1)} > k^{(2)} > k^{(3)})$  به  $319/5$  کلوین در چیدمان دوم  $(k^{(1)} < k^{(2)} < k^{(3)})$  کاهش خواهد یافت.



شکل ۶ تغییرات دمای ماکزیمم لمینیت برحسب زاویه الیاف در نمونه اول الف)  $k^{(1)} > k^{(2)} > k^{(3)}$  و ب)  $k^{(1)} < k^{(2)} < k^{(3)}$

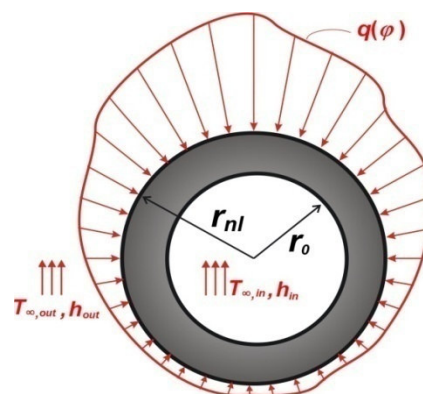
است. برای بررسی انتقال حرارت نامتقارن در این لوله، فرض شده است که دمای داخلی استوانه به صورت یک تابع غیر متقارن  $T(\varphi) = 50 \times (1 + |\cos(2\varphi)|)$  W/m<sup>2</sup> تغییر می‌کند. مشخصات هندسی و خصوصیات حرارتی مسئله در شکل ۵ و جدول ۳ بیان گردیده‌اند. همان‌گونه که از شکل ۵ برمی‌آید، شرایط مرزی خارجی لوله ترکیبی از شرایط جابه‌جایی، شار ثابت و شرط عایق در نیمی از محیط لوله فرض شده است. به منظور مقایسه همزمان تاثیر دو پارامتر زاویه الیاف و جنس لایه‌ها، نمودارهای تغییرات دمای میانگین لمینیت و ماکزیمم دمای لمینیت برحسب زاویه الیاف و چیدمان لایه‌ای گوناگون رسم شده است. چنین فرض شده است که زاویه الیاف در همه لایه‌ها با هم برابر باشند و به صورت همزمان از صفر تا  $180^\circ$  تغییر کند. ضخامت لایه‌ها نیز با یکدیگر برابر است.

جدول ۲ هندسه و شرایط مرزی برای نمونه اول

قطر خارجی (m)	۰/۳
ضخامت لایه‌ها (m)	۰/۰۵
دمای خارج (K)	۳۰۰
دمای داخل (K)	۳۱۰
ضریب جابه‌جایی خارجی (W/m <sup>2</sup> K)	۵۰
ضریب جابه‌جایی داخلی (W/m <sup>2</sup> K)	۱۰۰

جدول ۳ هندسه و شرایط مرزی برای نمونه دوم

قطر خارجی (m)	۰/۵
ضخامت لایه‌ها (m)	۰/۰۵
دمای خارج (K)	۳۰۰
ضریب جابه‌جایی خارجی (W/m <sup>2</sup> K)	۵۰

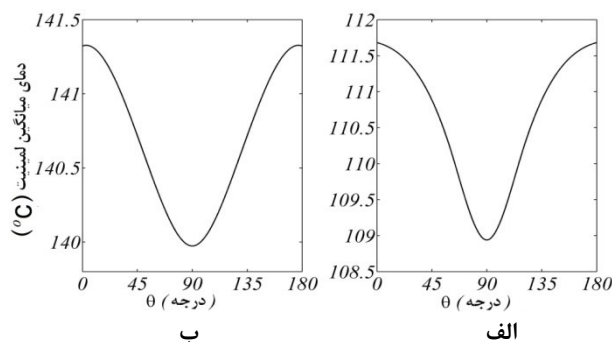


شکل ۴ هندسه و شرایط مرزی مربوط به نمونه اول

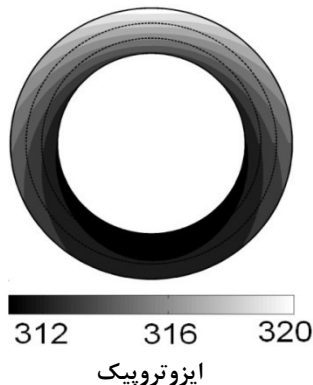
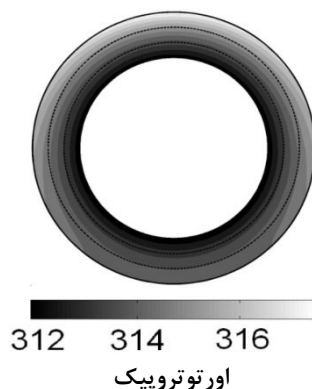
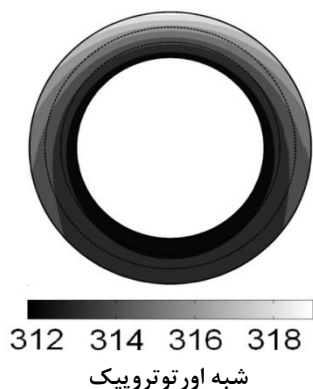


نحوه لایه‌بندی (از لحاظ جنس لایه‌ها) نیز مانند قبل در مقدار دمای میانگین موثر است (شکل ۷ الف و ب)، به نحوی که حدود ۳۰ درجه سانتی‌گراد اختلاف دما ایجاد خواهد شد. کانتورهای مربوط به توزیع دما در آرایش‌های الیاف مختلف ایزوتروپیک، اورتوتروپیک، شبه‌ایزوتروپیک و کراس پلای برای نمونه اول (شکل ۸) و نمونه دوم (شکل ۹) نشان داده شده است. در این شکل‌ها، جنس کامپوزیت در همه لایه‌ها یکسان و از نوع گرافیت اپوکسی در نظر گرفته شده است. تاثیر آرایش الیاف روی توزیع دما در این لمینیت‌ها کاملاً مشهود است. چنانچه از این شکل‌ها برمی‌آید، توزیع دما در این لمینیت‌ها همواره بین دو حالت حدی ایزوتروپیک و اورتوتروپیک قرار دارد. نحوه تاثیر تغییر جنس لایه‌ها روی توزیع دما در لمینیت نمونه اول توسط کانتورهای شکل ۱۰ نشان داده شده است. این کانتورها در آرایش الیاف شبه‌ایزوتروپیک رسم شده است. همان‌طور که از این کانتورها برمی‌آید، تغییر جنس لایه‌ها می‌تواند به‌طور قابل ملاحظه‌ای الگوهای توزیع درجه حرارت داخل لمینیت را تغییر دهد.

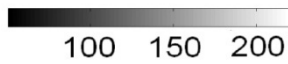
شکل ۷ تغییرات دمای میانگین لمینیت در نظر گرفته شده در مثال دوم را برحسب زاویه الیاف در دو آرایش مختلف لایه‌ها نشان می‌دهد. با توجه به شرایط مرزی مسئله و معادله (۳)، با افزایش زاویه الیاف از صفر تا ۹۰° میزان انتقال حرارت در جهت ۲ افزایش خواهد یافت، که این امر باعث افزایش انتقال حرارت از لمینیت استوانه‌ای و کاهش دمای میانگین لایه‌ها خواهد شد.



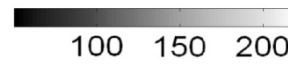
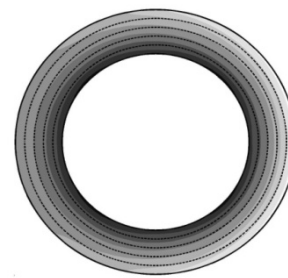
شکل ۷ تغییرات دمای میانگین لمینیت برحسب زاویه الیاف در نمونه دوم الف)  $k^{(1)} = k^{(2)} > k^{(3)} > k^{(4)} = k^{(5)}$  و ب)  $k^{(1)} = k^{(2)} < k^{(3)} < k^{(4)} = k^{(5)}$



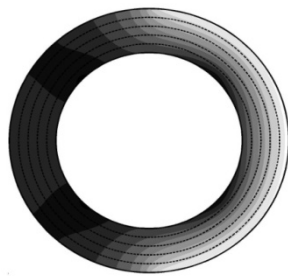
شکل ۸ کانتورهای توزیع دما برای آرایش الیاف مختلف در لمینیت نمونه اول



100 150 200  
شبه اورتروپیک



100 150 200  
اورتروپیک



100 150 200  
ایزوتروپیک



100 150 200  
کراس پلای

شکل ۹ کانتورهای توزیع دما برای آرایش الیاف مختلف در لمینیت نمونه دوم



312 316 320 324  
 $k^{(1)} < k^{(2)}, k^{(2)} > k^{(3)}, k^{(1)} > k^{(3)}$



314 317 320 324  
 $k^{(1)} > k^{(2)} > k^{(3)}$



312 314 316 318  
 $k^{(1)} < k^{(2)} < k^{(3)}$



312 314 316 318  
 $k^{(1)} > k^{(2)}, k^{(2)} < k^{(3)}, k^{(1)} < k^{(3)}$

شکل ۱۰ کانتورهای توزیع دما برای لایه‌بندی‌های مختلف لمینیت نمونه اول

### ۵- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، یک حل تحلیلی دقیق برای انتقال حرارت دوبعدی نامتقارن در استوانه‌های کامپوزیتی چندلایه ارائه گردیده است. معادله انرژی به دست آمده تحت کلی ترین شرایط مرزی خطی ممکن در جهت شعاعی در نظر گرفته شده است. از جمله مهم ترین نوآوری‌ها و نتایج به دست آمده از کار

حاضر به موارد زیر می توان اشاره نمود:

- حل ارائه شده یک حل تحلیلی و دقیق بوده که می تواند به عنوان معیاری برای سنجش حل های عددی و همچنین درک محسوس تر فرایند انتقال حرارت در کامپوزیت ها استفاده شود.
- حل ارائه شده تحت شرایط مرزی کلی بیان گردیده که قابل ساده سازی به شرایط مرزی ترکیبی (نوع اول، نوع دوم و یا سوم) می باشد.

• اثر دو عامل جنس لایه ها و زاویه الیاف در هر یک از لایه ها به عنوان دو پارامتر موثر در طراحی حرارتی لمینیت های کامپوزیتی از طریق دو نمونه عملی بررسی گردیده است.

• توزیع درجه حرارت در لمینیت های کامپوزیتی همواره بین دو حالت حدی، یعنی وقتی که زاویه الیاف در همه لایه ها صفر (آرایش اورتوتروپیک) و یا  $90^\circ$  (آرایش ایزوتروپیک) است، قرار دارد.

• تحت شرایط مرزی خاص ارائه شده، با افزایش زاویه الیاف از صفر تا  $90^\circ$ ، توزیع درجه حرارت در لمینیت یکنواخت تر خواهد گردید و در نتیجه دمای میانگین لمینیت کاهش خواهد یافت، در صورتی که دمای ماکزیمم لمینیت افزایش می یابد.

### ۶- پیوست الف: به دست آوردن ضرایب سری

روابط مربوط به  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  در هر یک از مقادیر  $\chi$  به صورت زیر است:

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{B_\chi^0}{A_\chi^0} \\ \gamma^1 &= F_\chi^0 \times \beta_1 \end{aligned} \right. \quad \text{(الف-۱)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{-A_\chi^{i+1} + B_\chi^{i+1} \times (\xi_i)}{(B_\chi^i + B_\chi^{i+1} \times (\tau_i)) - A_\chi^i \times \beta_i} \\ \gamma^{2i} &= -\gamma^{2i-1} \times A_\chi^i \times \alpha_{i+1} \end{aligned} \right. \quad \text{(الف-۲)}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n_l - 1$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{i+1} &= \frac{1}{(\xi_i) - \alpha_{i+1} \times (\tau_i)} \\ \gamma^{2i+1} &= -\gamma^{2i} \times B_\chi^i \times \beta_{i+1} \end{aligned} \right. \quad \text{(الف-۳)}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n_l - 1$

ضرایب کمکی  $\xi_i$  و  $\tau_i$  تنها به منظور ساده سازی روابط به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_i &= \frac{A_\chi^i \times A_\chi^{i+1} - A_\chi^i \times A_\chi^{i+1}}{A_\chi^i \times B_\chi^{i+1} - A_\chi^i \times B_\chi^{i+1}} \\ \tau_i &= \frac{-A_\chi^i \times B_\chi^i + A_\chi^i \times B_\chi^i}{A_\chi^i \times B_\chi^{i+1} - A_\chi^i \times B_\chi^{i+1}} \end{aligned} \right. \quad \text{(الف-۴)}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n_l - 1$

همچنین مقادیر ضرایب  $A_\chi$  و  $B_\chi$  مربوط به هر جفت از ضرایب به صورت زیر است (شایان ذکر است که  $A'_\chi$  و  $B'_\chi$  به ترتیب مشتق عبارات  $A_\chi$  و  $B_\chi$  هستند):

$$\left\{ \begin{aligned} A_0^0 &= \frac{b_1}{r_0} \\ A_{1n}^0 &= A_{2n}^0 = a_1 + \frac{b_1}{r_0} \\ B_0^0 &= a_1 \\ B_{1n}^0 &= B_{2n}^0 = a_1 - \frac{b_1}{r_0} \\ A_0^i &= \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right) \\ A_{1n}^i &= A_{2n}^i = \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{n/\mu_i} \\ B_0^i &= 1 \\ B_{1n}^i &= B_{2n}^i = \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{-n/\mu_i} \\ A_0^{n_i} &= a_1 \ln\left(\frac{r_{nl}}{r_0}\right) + \frac{b_1}{r_0 r_{nl}} \\ A_{1n}^{n_i} &= A_{2n}^{n_i} = a_1 \left(\frac{r_{nl}}{r_0}\right)^{n/\mu_{n_i}} + \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} \left(\frac{r_{nl}}{r_0}\right)^{n/\mu_{n_i}-1} \\ B_0^{n_i} &= a_1 \\ B_{1n}^{n_i} &= B_{2n}^{n_i} = a_1 \left(\frac{r_{nl}}{r_0}\right)^{-n/\mu_{n_i}} - \frac{b_1}{r_0} \frac{n}{\mu_{n_i}} \left(\frac{r_{nl}}{r_0}\right)^{-n/\mu_{n_i}-1} \end{aligned} \right. \quad \text{(الف-۶)}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n_l - 1$

## ۷- مراجع

- [13] Gilbert A., Kokini K., Sankarasubramanian S., "Thermal Fracture of Zirconia–Mullite Composite Thermal Barrier Coatings under Thermal Shock: A Numerical Study", *Surf. Coat. Technol.*, Vol. 203, 2008, pp. 91-98.
- [14] Iyengar V., "Transient Thermal Conduction in Rectangular Fiber Reinforced Composite Laminates", *Adv. Compos. Mater.*, Vol. 4, No. 4, 1995, pp. 327-342.
- [15] Sunao S., Takashi I., "Numerical Analysis of Heat Conduction Effect Corresponding to Infrared Stress Measurements in Multilamina CFRP Plates", *Adv. Compos. Mater.*, Vol. 8, No. 3, 1999, pp. 269-279.
- [16] Blanc M., Touratier M., "A Constrained Discrete Layer Model for Heat Conduction in Laminated Composites", *Comput. Struct.*, Vol. 83, 2005, pp. 1705-1718.
- [17] Kaminski M., "Homogenization-Based Finite Element Analysis of Unidirectional Composites by Classical and Multiresolutional Techniques", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 194, 2005, pp. 2147-2173.
- [18] Corlay C., Advani S. G., "Temperature Distribution in a Thin Composite Plate Exposed to a Concentrated Heat Source", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 50, 2007, pp. 2883-2894.
- [19] Salt H., "Transient Heat Conduction in a Two-Dimensional Composite Slab. I. Theoretical Development of Temperatures Modes", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, No. 11, 1983, pp. 1611-1616.
- [20] Salt H., "Transient Heat Conduction in a Two-Dimensional Composite Slab. II. Physical Interpretation of Temperatures Modes", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, No. 11, 1983, pp. 1617-1623.
- [21] Haji-Sheikh A., Beck J. V., Agonater, D., "Steady-State Heat Conduction in Multi-Layer Bodies", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 5, 2003, pp. 2363-2379.
- [22] Kayhani M. H., Norouzi M., AmiriDelouei A., "A General Analytical Solution for Heat Conduction in Cylindrical Multilayer Composite Laminates", *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 52, 2012, pp. 73-82.
- [23] Amiri Delouei A., Kayhani M. H., Norouzi M., "Exact Analytical Solution of Unsteady Axisymmetric Conductive Heat Transfer in Cylindrical Orthotropic Composite Laminates", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, 2012, pp. 4427-4436.
- [۲۴] کیهانی محمدحسن، نوروزی محمود، امیری دلوئی امین، "بررسی تحلیلی انتقال حرارت غیردایمی اورتوتروپیک بین فین‌های کامپوزیتی"، *مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس*، دوره ۱۱، شماره ۴، ۱۳۹۰، صص ۲۱-۳۲.
- [1] Krenkel W., Berndt F., "C/C–SiC Composites for Space Applications and Advanced Friction Systems", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. 412, 2005, pp. 177-181.
- [2] Jedidi J., Jacquemin F., Vautrin A., "Design of Accelerated Hygrothermal Cycles on Polymer Matrix Composites in the Case of a Supersonic Aircraft", *Compos. Struct.*, Vol. 68, 2005, pp. 429-437.
- [3] Von Klemperer C. J., Maharaj D., "Composite Electromagnetic Interference Shielding Materials for Aerospace Applications", *Compos. Struct.*, Vol. 91, 2009, pp. 467-472.
- [4] Xia Y., Jacobi A. M., "An Exact Solution to Steady Heat Conduction in a Two-Dimensional Slab on a One-Dimensional fin: Application to Frosted Heat Exchangers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 47, 2004, pp. 3317-3326.
- [5] Fang X., Zhang Z., Chen Z., "Study on Preparation of montmorillonite-Based Composite Phase Change Materials and Their Applications in Thermal Storage Building Materials", *Energy Convers. Manage.*, Vol. 49, 2008, pp. 718-723.
- [6] Pashah S., Arif A. F. M., Zubair S. M., "Study of Orthotropic Pin fin Performance through axisymmetric Thermal Non-Dimensional finite Element", *Appl. Therm., Eng.*, Vol. 31, 2011, pp. 376-384.
- [7] Mustafa M. T., Zubair S. M., Arif A. F. M., "Thermal Analysis of Orthotropic Annular fins with Contact Resistance: A closed-Form Analytical Solution", *Appl. Therm. Eng.*, Vol. 31, 2011, pp. 937-945.
- [8] Antonucci V., Giordano M., Hsiao K. T., Advani S. G., "A Methodology To Reduce Thermal Gradients due to the Exothermic Reactions in Composites Processing", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 45, 2002, pp. 1675-1684.
- [9] Guo Z. S., Du S., Zhang B., "Temperature field of Thick Thermoset Composite Laminates during Cure Process", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 65, 2005, pp. 517-523.
- [10] Behzad T., Sain M., "Finite Element Modeling of Polymer Curing in Natural Fiber Reinforced Composites", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 67, 2007, pp. 1666-1673.
- [11] Dlouhy I., Chlup Z., Boccaccini D. N., Atiq S., Boccaccini A. R., "Fracture Behavior of Hybrid Glass Matrix Composites: Thermal Ageing Effects", *Compos.*, Vol. 34, 2003, pp. 1177-1185.
- [12] Gilbert A., Kokini K., Sankarasubramanian S., "Thermal Fracture of Zirconia–Mullite Composite Thermal Barrier Coatings under Thermal Shock: An Experimental Study", *Surf. Coat. Technol.*, Vol. 202, 2008, pp. 2152-2161.

- [30] Powers J. M., "On the Necessity of Positive Semi-Definite Conductivity and on Sager Reciprocity in Modeling Heat Conduction in Anisotropic Media", *J. Heat Transfer Trans. ASME*, Vol. 126, No. 5, 2004, pp. 670-675.
- [31] Herakovich C. T., *Mechanics of Fibrous Composites*, New York, Wiley, 1998.
- [32] Shives G., Norley J., Smale M., Chen G., and Capp J., "Comparative Thermal Performance Evaluation of Graphite/Epoxy fin Heat Sinks", *Proc. of Intersociety for Thermal Conference (ITHERM)*, 2004, pp. 410-417.
- [33] Weber E., *Development and Modeling of Thermally Conductive Polymer/Carbon Composites*, PhD Thesis, Michigan, Michigan Technological University, 1999.
- [34] Arpaci V. S., *Conduction Heat Transfer*, Michigan, Addison-Wesley, 1966.
- [۲۵] کیهانی محمدحسن، شریعتی محمود، نوروزی محمود، "حل تحلیلی انتقال حرارت پایدار هدایتی در یک استوانه کامپوزیتی"، *مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس*، شماره ۳۷، ۱۳۸۸، صص ۱۳۵-۱۵۱.
- [26] Jain P. K., Singh S., Rizwan-uddin, "An Exact Analytical Solution for Two-Dimensional, Unsteady, Multilayer Heat Conduction in Spherical Coordinates", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, 2010, pp. 2133-2142.
- [27] Myint-U T., Debnath L., *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Boston, Birkhauser, 2007.
- [28] Ozisik M. N., *Heat Conduction*, Second Ed., New York, Wiley, 1993.
- [29] Fung Y. C., *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.