

مقاله پژوهشی کامل تاریخ دریافت -۹۱/۷/۱ تاریخ پذیرش ۹۱/۹/۲۵ ارائه در سایت -۹۲/۲/۳۰

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با استفاده از مدل رتبه کاسته

همايون امداد '*، عليرضا مستوفىزاده'، سيد ابوالفضل موسوىنيا ّ

۱- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

۲- استادیارمهندسی هوافضا ، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین شهر

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین شهر

* شیراز، صندوق پستی ۳۴۷۴، hemdad@shirazu.ac.ir

چکیده-در این مقاله، رویکرد کنترل بهینه برای کنترل فعال دنباله تشکیلشده در پشت سیلندر مربعی شکل در رژیم جریان آرام (۲۰۰ = R) مورد مطالعه قرار گرفته است. هنگامی که معادلات ناویر ⊣ستوکس بهعنوان معادلات حالت مورد استفاده قرار می گیرند، گسستهسازی معادلات کنترل بهینه منجر به یک مسئله با اندازه بزرگ می شود که از لحاظ محاسباتی خیلی سنگین می باشد. در طی فرایند کنترل بهینه، به منظور کاهش تعداد متغیرهای حالت، از مدل رتبه کاسته بر مبنای مدهای POD بهعنوان معادلات حالت استفاده شده است. برای بهدست آوردن معادلاتی که برای کنترل مناسب هستند، با معرفی یک تابع کنترل به مدل رتبه کاسته و معرفی یک ورودی کنترل جدید، این معادلات اصلاح شدهاند و با به کار گیری روش شبه خطی سازی، که از روش های عددی برای حل معادلات کنترل بهینه است، خط مسیر بهینه برای ورودی کنترل بهدست آمده است. تحریک جریان، از طریق دمش و مکش سیال صورت می گیرد. نتایج به دست آمده در قسمت نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. کلیدواژگان:کنترل بهینه، ریزش گردابه، دمش و مکش، مدل رتبه کاسته، مدهای POD

Optimal control of vortex shedding around square cylinder via reduced order model

H. Emdad^{1*}, A. R. Mostofizadeh², S. A. Mousavinia

1- Assis. Prof, Mech. Eng., ShirazUniv, Shiraz, Iran.

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., MalekAshtarUniv of Tech., Shahinshahr, Iran.

3- Msc Student of Areospace. Eng., MalekAshtarUniv of Tech, Shahinshahr,Iran

* P.O.B. 3474, Shiraz, hemdad@shirazu.ac.ir

Abstract- In this paper, optimal control of vortex shedding behind square cylinder in laminar flow regime (Re=200) has been investigated. When Navier-Stokes equations are used as state equations, the discretization of the optimality system leads to large scale optimization problems that represent a tremendous computational task. In order to reduce the number of state variables during the optimization process, a Reduced-Order Model (ROM) based on POD modes is derived to be used as state equations. Then, these equations are modified by introducing a Control Function to ROM in order to gain equations which are suitable for optimal control. Optimal trajectory for control input has been found by employment of Quasi-linearization which is one of the numerical methods for solving optimal control **Keywords:** Optimal Control, Vortex Shedding, Suction and Blowing, Reduced Order Model, POD Modes.

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

همایون امداد و همکاران

۱– مقدمه

پدیده اندر کنش بین سیال و سازه در جدایش جریان و دنباله اجسام ارزش ویژهای در فیزیک جریان داشته و همچنین در آیرودینامیک و هیدرودینامیک کاربرد زیادی دارد. تعداد زیادی از مشکلات ناشی از برهم کنش سیال و سازه ناشی از ریزش گردابه ناپایا در پشت اجسام ناهموار میباشد. مثالهایی از کاربردهای عملی که در معرض این موضوع قرار دارند، عبارتاند از: دنبالههای پشت برجک زیردریایی و نگهدارندههای شعله در موتورهای توربین جت.

در شکل ۱ نمونهای از حرکت دورهای^۲ و نظمیافته ورتیسیتی، که با عنوان خیابان ون کارمن^۳ شناخته می شود، برای یک سیلندر مربعی شکل نشان داده شده است.



شکل ۱ خیابان ون کارمن تشکیلشده در پشت سیلندر مربعشکل در رینولدز ۲۰۰

این ریزش گردابهها، باعث القاء نیروهای نوسانی به جسم میشوند، که معمولاً به مؤلفههای نیروی پسا^۴ در راستای جریان و نیروی برا^۵ در راستای عمود بر مسیر جریان تجزیه میشود. اگر جسم انعطافپذیر باشد و یا بتواند حرکت کند، این نیروها میتوانند باعث نوسان جسم و منجر به مشکل ارتعاشات ناشی از گردابه^۶ شوند و اگر فرکانس ریزش گردابه نزدیک به فرکانس طبیعی جسم باشد، تشدید حاصله میتواند منجر به نوساناتی با دامنه زیاد شود و درنهایت به شکست سازه بیانجامد. درک این مسئله، از اهمیت زیادی در طراحی و نگهداری ساختارهای مختلف برخوردار است و کنترل این پدیده میتواند منجر به کاهش اثرات زیانبار آن شود. سازههای کنار ساحل، نظیر

کابلهای نگهدارنده، دکلها و بالابرها و لولههای استخراج نفت در دریاها و اقیانوسها، و بناهایی با نسبت طول به عرض زیاد که در معرض جریانات هوا قرار دارند، نظیر دودکشها، ساختمانهای بلند، پلها و سیستمهایی که توسط کابل معلق شدهاند، از این موارد هستند.

تاکنون پیشرفتهای زیادی در گسترش روشهای کنترلی مختلف حاصل شده است؛ اگرچه کنترل سیال هنوز یکی از موضوعات فعال تحقیقاتی است. به دلیل ماهیت غیرخطی معادلات ناویر – استوکس و پیچیدگی دینامیک جریان، طراحی و به کار بردن یک سیستم کنترلی هنوز چالش برانگیز است. به کار بردن یک سیستم کنترلی هنوز چالش برانگیز است. به منظور کاهش پیچیدگی معادلات حاکم، معمولاً مدلهای به منظور کاهش پیچیدگی معادلات حاکم، معمولاً مدلهای ایجاد این مدلها استفاده از مدهای متعامد مناسب (POD)[^] و تصویر سازی گالرکین^۹ معادلات حاکم بر روی این مدها می باشد. DD وسیله ای را فراهم می کند تا یک پایه (مد) بهینه یا به عبارتی دارای حداقل درجه آزادی تولید کند، که از مریق آن دینامیک سیستم نشان داده می شود. POD همچنین با نام بسط کارهونن لوییو^{۱۰} در آمار، تحلیل مؤلفه های اصلی^{۱۱} یا توابع متعامد تجربی^{۲۱}، در متالوژی شناخته می شود.

تاکنون تحقیقهای متعددی برای کنترل جریان حول اجسام ساده نظیر سیلندرهای دایروی و مربعی شکل، به منظور درک بهتر عمل کنترل، صورت گرفته است. نمونه هایی از این مطالعات در ادامه آورده شدهاند.

در سال ۱۹۹۶، تانگ یک روش برای کنترل فعال جریانات جداشده ارائه کرد. روش پیشنهادشده در این تحقیق، برای یک جریان تراکمناپذیر حول سیلندر دایروی در رینولدز ۱۰۰ بهکار گرفته شده و عمل کنترل از طریق چرخش سیلندر انجام گرفته است. مدل رتبه کاسته با استفاده از تکنیک تجزیه متعامد مناسب^{۱۳} بهدست آمده است. برای کنترل معادلات از دو روش تابع کنترل^{۱۴} و روش پنالتی^{۱۵} استفاده شده است. در

- 7. Reduced order models
- 8. Proper Orthogonal Decomposition
- 9. Galerkin projection
- 10. Karhunen-Loeve expansion
- 11. Principal component analysis
- 12. Empirical orthogonal functions
- 13.Proper orthogonal decomposition 14.Control function
- 15.Penalty method

^{1.} Bluff bodies

^{2.} Periodic

^{3.} Von Karman street

^{4.} Drag

^{5.} Lift

^{6.} Vortex induced vibration

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

این مطالعه اشاره شده است که برای بهدست آوردن توابع پایه برای مدل رتبه کاسته، میدان تحریکنشده نمیتواند نماینده خوبی برای استخراج مدهای پایه باشد و قادر نیست کنترل جریان را پیشبینی کند. از طرفی انتخاب نامناسب تابع کنترل میتواند نتایج نادرستی را پیشبینی کند و حتی موجب مغشوشتر شدن میدان جریان شود. در این مطالعه، برای کنترل جریان از کنترل بهینه استفاده شده است و تابع کنترل با چرخش ساده سیلندر با یک سرعت ثابت در یک جریان ساکن، بهدست آمده است[1–۴].

در سال ۱۹۹۷، سانجای میتال سعی کرد با قراردادن یک سیلندر ثانویه و خیلی کوچکتر در میدان دنباله^۱ ریزش گردابههای پشت سیلندر را کم و متوقف کند. او توانست در رینولدزهای کم و مشخصی ریزش گردابه را کاملا متوقف کند[۵].

در سال ۲۰۰۱، ژیجین لی با استفاده از یک روش بر مبنای فرمول بندی الحاقی^۲، که برای کنترل بهینه سیستمهای توزیع شده و مسائل کنترلی با ابعاد زیاد مناسب است، کنترل جریان حول سیلندر دایروی را تا رینولدز ۱۱۰ از طریق دمیدن و مکیدن جریان انجام داد. در این مطالعه، سه تابع عملکرد براساس معیارهای انرژی، ورتیسته و پسای ویسکوز⁷ ارائه شده است. برای حداقل کردن تابع هزینه از روش شبهنیوتون دی اف پی⁴ استفاده شده است. در همین سال، هومسکو به همراه ژیجین لی از روش یادشده با استفاده از چرخش سیلندر سعی کردند ریزش گردابهها را متوقف کنند. آنها مقدار بهینه سرعت زاویهای سیلندر را در محدوده رینولدز ۶۰ تا بهدست آوردند[۷،۶].

در سال ۲۰۰۲، لوسا زانتی سعی کرد، با استفاده از کنترل غیرفعال و از طریق مکش جریان، ریزش گردابه یک صفحه تخت که نسبت به جریان آزاد مورب بود را متوقف کند. مکندهها در لبه حمله قرار داده شدند و برای تعیین مقدار درست مکش از مدل یتانسیل استفاده شد[۸].

در سال ۲۰۰۵، یک مطالعه عددی برای کاهش نیروهای اعمالی سیال بر روی سیلندر دوبعدی در یک کانال، توسط ژو و

1. Wake

همکارانش، انجام گرفت. آنها، به منظور کنترل جریان حول سیلندر مربعی شکل، یک صفحه کنترل عمودی را در بالادست جریان قرار دادند. نیروهای اعمالی سیال بر روی سیلندر، فرکانس ریزش گردابه و الگوهای جریان در ارتفاعها و مکانهای مختلف صفحه کنترلی مورد بررسی قرار گرفتند. مطالعات عددی نشان دادند که نهتنها نیروی پسای سیلندر بهطور قابل توجهی توسط صفحه کنترلی کاهش پیدا کرد، بلکه نوسانات نیروی برا نیز کاهش داده شد. همچنین، محل بهینه صفحه کنترلی برای حداقل کردن نیروی پسای سیلندر در هر ارتفاع صفحه پیدا شد[۹].

در سال ۲۰۰۸، جسی ویلر از مدل رتبه کاسته بههمراه کالیبرهکردن استفاده کرد و به نتایج دقیقتری نسبت به مدل رتبه کاسته رایج دست یافت. ایده کالیبرهکردن، نزدیک نگه داشتن ساختار مدل رتبه کاسته به ساختار مطلوب با تنظیم ضرایب متغیرهای حالت در مدل رتبه کاسته میباشد. در این مطالعه، همچنین از کالیبرهکردن برای بهدست آوردن قانون بازخورد تناسبی⁶ برای کنترل نیز استفاده شده است[۱۰].

در سال ۲۰۰۸، لایک و همکارانش اثر دمش و مکش جریان را بر روی ریزش گردابه پشت یک سیلندر مربعی قرار گرفته در یک کانال مورد بررسی قرار دادند. آنها عمل دمش و مکش را از طریق شکافهایی که در پاییندست جریان و بر روی سطح کانال تعبیه شده بود انجام دادند[۱۱].

در سال ۲۰۰۸، ساید ترکی از یک صفحه شکافنده^{⁷ افقی برای کنترل ریزش گردابهها در پشت یک سیلندر مربعی شکل استفاده کرد. او اعداد رینولدزهای بین ۱۱۰ تا ۲۰۰ را مورد بررسی قرار داد و توانست یک رابطه خطی برای طول بحرانی صفحه، که در آن طول ریزش گردابهها محو می شدند، پیدا کند[۱۲].}

در سال ۲۰۱۰، امران اختر، بعد از توسعه یک کد سهبعدی جریان حول سیلندر دایروی و استفاده از پردازش موازی، مدل رتبه کاسته را با استفاده از مدهای POD تشکیل داد و بعد از خطی کردن معادلات حول میدان متوسط جریان، از تئوری کنترل کلاسیک و جابهجایی قطبها استفاده کرد تا بتواند مقدار سرعت مکش جریان را بهدست بیاورد[۱۳].

^{2.} Adjoint formulation

^{3.} Viscouse drag

^{4.} Quasi-Newton DFP (Davidon-Fletcher-Powell)

^{5.} Feedback Proportional Law

^{6.} Splitter Plate

تحقیق حاضر از فرمول بندی تابع جریان-ورتیسیته برای حل این معادلات استفاده شده است.

در این روش، تغییر متغیر به گونهای صورت می گیرد که مؤلفههای سرعت با ورتیسیتی گ و تابع جریان ۷۷ جایگزین می شوند. مقدار ورتیسیتی برای جریان دوبعدی می تواند در سیستم مختصات کارتزین به صورت زیر نوشته شود:

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{(7)}$$

و تابع جریان در این سیستم مختصات، توسط روابط زیر تعریف می شود:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{(f)}$$

با استفاده از متغیرهای جدید و حذف فشار از معادله مومنتوم (۲)، معادله زیر بهدست می آید:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + u \frac{\partial\xi}{\partial x} + v \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} \right)$$
 (Δ)

معادله مشتق جزئی حاصله، که از نوع سهموی میباشد، معادله انتقال ورتیسیته خوانده میشود. معادله دیگر که شامل دو متغیر جدید کم و ۷ میشود، میتواند با جایگزینی معادله (۴) در معادله (۳) بهدست آید که معادله زیر را نتیجه میدهد:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi \tag{(8)}$$

این معادله مشتق جزئی که از نوع بیضوی میباشد، معادله تابع جریان^۳ خوانده میشود. بهعنوان یکی از نتایج این تغییر متغیر، معادلات ناویر استوکس تراکمناپذیر دوبعدی، که ترکیب سهموی-بیضوی بودند، به یک معادله سهموی و یک معادله سهموی -بیضوی شکسته شدهاند. این معادلات با استفاده از اندازه ضلع سیلندر l بهعنوان مقیاس طولی و سرعت جریان آزاد u_0 بهعنوان مقیاس سرعت بی بخو. بنابراین عدد رینولدز به صورت μ / l_0

برای حل عددی معادلات حاکم، روش اختلاف محدود^۲ به کار گرفته شده است. برای گسسته سازی مکانی از شبکهای که در شکل ۲ نشان داده شده، استفاده شده است. ابعاد این شبکه ۲۱۹×۲۱۹ می باشد. کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

در این مطالعه، سعی بر آن است که ریزش گردابههای پشت یک سیلندر مربعیشکل با استفاده از دمش و مکش جریان از روی سطوح سیلندر، متوقف یا کم شود. از نوآوریهای انجام شده در این مقاله میتوان به استفاده همزمان از مکش جریان از روی سطوح فوقانی و تحتانی سیلندر و دمش جریان از ضلع پشتی سیلندر برای تحریک جریان و همچنین استفاده از یک تابع کنترل برای اعمال اثر هر دو دمنده و دو مکنده در مدل رتبه کاسته اشاره کرد.

در ادامه ابتدا به چگونگی شبیهسازی میدان جریان میپردازیم. بعد از آن روش استخراج مدهای POD و تصویرسازی گالرکین کنترل بهینه توضیح داده میشوند و درنهایت نتایج حاصل از کنترل بهینه ارائه میشوند.

۲− شبیهسازی میدان جریان معادلات حاکم بر جریان سیال، معادلات ناویر-استوکس هستند، که برای جریان تراکمناپذیر بهصورت زیر میباشند: معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

معادله مومنتوم:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j u_i \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i}$$
(7)

که در آن u_i v, p, p, p و v بهترتیب، مؤلفههای سرعت، فشار، چگالی و ویسکوزیته سینماتیک سیال میباشند. این معادلات ترکیبی از یک دستگاه معادلات مخلوط بیضوی- سهموی میباشند و همزمان با هم حل میشوند. سرعت و فشار مجهولهای این معادلات میباشند. مشکل اساسی در حل این معادلات این است که بین معادله پیوستگی و مومنتوم از نظر فشار هیچگونه ارتباط مستقیمی وجود ندارد. در واقع معادله پیوستگی تنها یک قید محسوب میشود و در عمل کمکی به حل این معادلات نمیکند. برای حل این مشکل رویکردهای حل این معادلات نمیکند. برای حل این مشکل رویکردهای مختلفی از جمله روش تراکمپذیری مصنوعی⁽، روشهای تصویرسازی^۲، فرمولبندی بر اساس ورتیسیته-سرعت و فرمولبندی بر اساس تابع جریان-ورتیسیته، ارائه شدهاند. در

^{3.} Stream function equation

^{4.} Finite difference

^{1.} Artificial compressibility method

^{2.} Projection methods



کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

۳- مدهای POD

POD زیرفضای لازم براساس مدهای بهینه یا پایههایی که دارای حداقل درجه آزادی هستند را فراهم میکند. POD بهطور موفقیت آمیزی بر روی بسیاری از سیستمهای مهندسی و علمی نظیر مدل کردن دینامیک سیستم رتبه کاسته و پردازش تصویر به کار گرفته شده است و همچنین از آن بهطور گستردهای برای شناسایی ساختارهای اصلی در جریانات آشفته استفاده شده است.

در قسمت بعد به چگونگی استخراج مدهای POD از

میدانهای سرعت شبیهسازی شده پرداخته می شود.

بیان ریاضی بهینهبودن مدها به این صورت است که باید ϕ ای محاسبه شود که متوسط تصویر u بر روی ϕ را، که بهطور مناسبی نرمال شده است، بیشینه کند[۱۶].

 $\max \frac{<|(u,\phi)|^2 >}{\|\phi\|^2}$ Solution by the second secon

$$\left\|\boldsymbol{\Phi}\right\| = \left(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{Y}$$

با استفاده از حساب تغییرات، می وان نشان داد که معادله (۷) معادل با مسئله مقدار ویژه انتگرال فردهولم^۷ است، که به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\int_{\Omega} R_{ij}(x, x') \Phi^{j}(x') dx' = \lambda \Phi^{j}(x)$$
 (A)

R(x,x') که در آن i و j تعداد مؤلفههای سرعت و R(x,x') تانسور همبستگی زمانی-مکانی دونقطهای، Λ مقادیر ویژه و j^{j} ها، توابع ویژه یا همان مدهای POD میباشند. با حل مسئله مقدار ویژه بالا، میتوان مدهای POD را به دست آورد. در سال ۱۹۸۷، سرویچ روش تصاویر[^] را به عنوان یک روش کارآمدتر برای به دست آوردن مدهای POD نسبت به حل مستقیم مسئله مقدار ویژه (π) معرفی کرد[19]. در این روش مستقیم مسئله مقدار ویژه (π) معرفی کرد[10]. در این روش دادههای میدان جریان (u,v) حاصل از شبیه سازی عددی یا

شکل ۲ شبکه تولیدشده برای منفصلسازی میدان حل

برای حل معادله انتقال تابع ورتیسیته، از رویکرد رانج کوتا مرتبه ^۹ استفاده شده است و برای اینکه فیزیک جریان بهدرستی مدل شود، برای جداسازی ترمهای انتقالی^۲، در گرههای داخلی، جداسازی بالادست مرتبه دو^۲ و در گرههای مرزی، بالادست مرتبه یک^۲، بهکار گرفته شده است. برای حل معادله تابع جریان که از نوع بیضوی میباشد، روش ضمنی تناوبی مستقیم^۵ (ADI) بهکار برده شده است.

بهمنظور اعتبارسنجی میدان جریان شبیهسازی شده، در زاویه حمله صفر، نیروی پسا و عدد استروهال⁶ در ۳ عدد رینولدز متفاوت با دیگر مطالعات مقایسه شدهاند. در جدول ۱ مشاهده میشود که تطابق خوبی بین آنها وجود دارد.

از طرفی، بهمنظور بررسی تاثیر اندازه شبکه بر روی نتایج بهدستآمده، بعد از اینکه اندازه شبکه به ۱/۵ برابر افزایش داده شد، نتایج جدید دوباره مورد بررسی قرار گرفتند. مشاهده شد که نتایج کمتر از ۴ درصد تغییر کردند. بنابراین میتوان نتیجه گرفت که نتایج حاصله استقلال مناسبی از اندازه شبکه دارند.

جدول ۱ مقایسه نیروی پسا و عدد استروهال کار حاضر و دیگر مطالعات در زاویه حمله صفر

گرا و همکارانش[۱۵]		سوهانكارو همكارانش[۱۴]		مطالعه حاضر		
Cd_t	St	Cd_t	St	Cd_t	St	Re
1/48	٠/١٢	1/44	•/140	۱/۳۶	۰/۱۴	۱۰۰
1/41	٠/١۴	۱/۴۰	•/181	١/٣٩	۰/۱۵	۱۵۰
۱/۴۸	٠/١۴	1/47	•/180	1/49	٠/١۵	۲۰۰

1- Runge-Kutta 4th order

⁷⁻ Fredholm integral eigenvalue problem

⁸⁻ Snapshot

²⁻ Convection terms

³⁻ Second order upwind

⁴⁻ First order upwind

⁵⁻ Alternative Direct Implicit method

⁶⁻ Strouhal number

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعیشکل با ...

آزمایشهای تجربی در یک ماتریس $w_{2N\times S}$ ، که در معادله (۹) نشان داده شده است، قرار می گیرند. هر ستون بیانگر دادههای یک لحظه زمانی یا یک تصویر از جریان و S مجموع تصاویر برای N گره درون میدان است.

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} u_1^{(2)} \cdots u_1^{(S)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N^{(1)} u_N^{(2)} \cdots u_N^{(S)} \\ v_1^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_1^{(S)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_N^{(1)} v_N^{(2)} \cdots v_N^{(S)} \end{bmatrix}$$
(9)

$$WW^{T} = U\Sigma^{2} U^{T}$$
 (1.)

که در آن Σ ماتریس مقادیر تکین و U ماتریس توابع ویژه میباشد.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{1}^{(1)} \, \boldsymbol{\Phi}_{1}^{(2)} \, \cdots \, \boldsymbol{\Phi}_{1}^{(S)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{N}^{(1)} \, \boldsymbol{\Phi}_{N}^{(2)} \, \cdots \, \boldsymbol{\Phi}_{N}^{(S)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{1}^{(1)} \, \boldsymbol{\Phi}_{1}^{(2)} \, \cdots \, \boldsymbol{\Phi}_{1}^{(S)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{N}^{(1)} \, \boldsymbol{\Phi}_{N}^{(2)} \, \cdots \, \boldsymbol{\Phi}_{N}^{(S)} \end{bmatrix}}, \boldsymbol{\Sigma} = diag \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{3} \end{bmatrix} \quad (11)$$

 σ_i ها، که مقادیر مثبت غیرصفر هستند و از بزرگ به σ_i ماه، که مقادیر مثبت غیرصفر هستند و از بزرگ به کوچک در ماتریس Σ قرار دارند، با رابطه $\lambda_i^2 = \sigma_i^2$ با مقادیر ویژه λ_i ارتباط پیدا می کنند. این مقادیر برای مرتب کردن توابع ویژه POD به منظور ساختن سیستم دینامیکی و نشان دادن انرژی موجود در هر مد مورد استفاده قرار می گیرند.

این توابع پایه میتوانند بهطور مؤثرتر از طریق تجزیه به مقادیر تکین (SVD)، بهدست بیایند. با استفاده این روش ماتریس تصاویر بهصورت $W = U\Sigma V^T$ تجزیه میشود که در آن Σ ماتریس مقادیر ویژه با اندازه $S \times S$ ، U ماتریس توابع ویژه با اندازه $S \times N$ و V یک ماتریس متعامد با اندازه $S \times S$ میباشد. شایان ذکر است که این روش کاربرد محدودی دارد، خصوصا زمانی که اندازه گرهها (N) زیاد باشد.

در ساخت مدل رتبه کاسته، میدان سرعت بهصورت مجموع جریان متوسط (\overline{u}) و نوسانات سرعت (u') نوشته شده و جریان W متوسط $< u > \overline{u} = \langle u \rangle$ متوسط زمانی مجموع دادههاست از \overline{u} کم می شود، سپس نوسانات برحسب توابع ویژه POD به صورت زیر بسط داده می شوند:

$$u(x,t) = \overline{u}(x) + u'(x,t)$$

$$\approx \overline{u}(x) + \sum_{i=1}^{M} q_i(t) \Phi_i(x) \qquad (17)$$

که در آن M تعداد مدهای POD استفاده شده در تصویرسازی است. متوسط میدان جریان در شکل π نشان داده شده است.



شکل ۳ متوسط میدانهای سرعت، الف) در جهت جریان، ب) عمود بر جهت جریان در رینولدز ۲۰۰

برای به دست آوردن داده های میدان جریان، بعد از پایاشدن ریزش گردابه میدان گردابه بعد از تشکیل ماتریس برای محاسبه توابع ویژه و برداشته و بعد از تشکیل ماتریس برای محاسبه توابع ویژه و ویژه بعد ویژه متاظر آن ها، از SVD استفاده شده است. مقادیر ویژه به دست آمده انرژی موجود در مد *i*ام بسط را تعیین می کنند. هرچه مقدار ویژه یک مد بیشتر باشد، نشان دهنده این می کنند. هرچه مقدار ویژه یک مد بیشتر است. در شکل ۴، می کنند. هرچه مقدار ویژه به دست آمده این محاور ویژه موجود در مد *i*ام بسط را تعیین می کنند. هرچه مقدار ویژه یک مد بیشتر باشد، نشان دهنده این ویژه به صورت $\beta_{i} = \frac{1}{i} \Lambda_{i}$ نرمال شده است. مشاهده می کنیم که هر جفت از مدها دارای مقدار ویژه این مقادیر مقدار ویژه این مقدار ویژه می می می می کنیم مه می می ایند.

بهمنظور پیداکردن سهم هر مد در انرژی کل سیستم، انرژی تجمعی⁽ بهصورت $\lambda_i = \sum_{i=1}^{S} \lambda_i$ تعریف میشود. در شکل ۵ تغییر انرژی تجمعی جریان برحسب تعداد مدها رسم شده است.

¹⁻ Cumulative energy

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...



مشاهده میشود که بیشترین انرژی در تعداد کمی از مدهای اول جای دارد. دو تابع ویژه اول بهطور واضح بیشترین انرژی سیستم را بهدام می اندازند. در مطالعه حاضر، ۳ مد اول شامل ۹۸ درصد انرژی جریان میباشد.

در شکلهای ۶ و ۷، کانتورهای ۶ مد اول در جهت جریان و عمود بر جهت جریان رسم شدهاند. نظیر زوجهای مقادیر ویژه، یک الگوی مشابه در مدهای POD مشاهده می شود. این الگوها نسبت به محور افقی متقارن هستند. از مقادیر ویژه متناظر هر مد مشاهده می شود که بیشترین انرژی در دو مد اول قرار دارند و مدهای POD متناظر ساختارهای بزرگتری را نمایش میدهند.





 $(\Phi_i^u = 1, 2, ..., 6)$ شکل ۶ مدهای مؤلفه سرعت در جهت جریان ($\Phi_i^u = 1, 2, ..., 6$) در رینولدز ۲۰۰

(۵)



۲۰۰ در رینولدز ($\Phi_i^v = 1, 2, ..., 6$)

در قسمت بعد روش ساخت مدل رتبه كاسته ارائه مى شود.

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

۴- مدل رتبه کاسته

مدل های رتبه کاسته سیالات تراکمناپذیر، با کاهش درجه آزادی سیستم، راهی را برای افزایش چشمگیر سرعت حل گرهای جریان فراهم میکنند. هدف این مدلها تسخیر فیزیک اصلی جریان تحت کنترل و همزمان کاهش هزینه حل مدل است. توابع پایه POD بیشترین انرژی موجود در دادههای آزمایشگاهی و عددی را میگیرند و این مدها را یک نماینده مناسب برای زیرفضای مدلهای رتبه کاسته میکنند.

مدل های سیستم دینامیکی رتبه کاسته شامل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی می شوند که به شکل زیرند: $\dot{q} = F\left(q
ight)$ (۱۳)

این مدلها میتوانند بهطور مؤثر برای استراتژیهای کنترلی بهکار گرفته شوند.

۴-۱- تصویرسازی گالرکین

تصویرسازی گالرکین یک روش برای بهدست آوردن یک تقریب برای سیستمهای دینامیکی با ابعاد زیاد است. در این روش، دینامیک سیستم بر روی یک زیرفضا که دارای ابعاد کمی است تصویر میشود. در مطالعه حاضر، از مدهای POD بهعنوان زیرفضای تصویرسازی گالرکین استفاده شده است و معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر بر روی این مدها تصویر میشوند.

تصویرسازی با ضرب داخلی مدهای POD، در معادله مومنتوم انجام می گیرد، بهطوری که:

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_{k}, \frac{\partial u}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{p} - \frac{1}{\operatorname{Re}_{D}}\nabla^{2}\boldsymbol{u}\right) = 0$$

$$k = 1, \dots, M \tag{14}$$

که در آن $\Omega = \int_{\Omega} ab \ d\Omega$ نشان دهنده ضرب داخلی بین a و d است و M تعداد مد استفاده شده در تصویر سازی \mathcal{P} تعداد مد استفاده شده در تصویر سازی \mathcal{P} الرکین است. ضرب داخلی، دو معادله مومنتوم را (سه معادله \mathcal{P} در حالت سهبعدی) تنها به یک معادله کاهش می دهد. به عبارت M در حالت سهبعدی) به Mمعادله (\mathcal{P} در حالت سهبعدی) به Mمعادله تقلیل می یابد.

۴–۲– مدل معادلات دیفرانسیل معمولی

با تصویرکردن معادلات ناویر⊣ستوکس بر روی مدهای POD، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی با

ضرایب ثابت بهدست میآید. این معادلات در زیر نشان داده شده است.

$$\dot{q}_{k}(t) = A_{k} + \sum_{m=1}^{M} B_{km} q_{m}(t)$$

+
$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{M} C_{kmn} q_{n}(t) q_{m}(t)$$
(10)

$$A_{k} = \frac{1}{\operatorname{Re}_{D}} \left(\Phi_{k}, \nabla^{2} \overline{u} \right) - \left(\Phi_{k}, \overline{u} \cdot \nabla \overline{u} \right)$$

$$B_{km} = -\left(\Phi_{k}, \overline{u} \cdot \nabla \Phi_{m} \right) - \left(\Phi_{k}, \Phi_{m} \cdot \nabla \overline{u} \right)$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Re}_{D}} \left(\Phi_{k}, \nabla^{2} \Phi_{m} \right)$$

$$C_{kmn} = -\left(\Phi_{k}, \Phi_{m} \cdot \nabla \Phi_{n} \right) \qquad (19)$$

در معادله (۱۵)، A یک بردار $1 \times M$ است که از میدان متوسط به دست آمده است. C یک تانسور است که نشان دهنده ترمهای مرتبه دو غیرخطی است و B قسمت خطی سیستم دینامیکی است، که یک ماتریس با ابعاد $M \times M$ است.

۴-۳- نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته

اگر سه مد اول را برای ساختن مدل رتبه کاسته مورد استفاده C و C و G و A رقرار گیرد و بعد از تصویرسازی گالرکین، ضرایب A و CFD با موجود در معادله (۱۵) محاسبه شوند، آنگاه مسئله CFD با NTM موجود در معادله (۱۵) محاسبه شوند، آزادی کاهش مییابد. این معادله بهروش رانج کوتای مرتبه 4 در زمان حل شده است $e_i p$ ها در زمانهای مختلف محاسبه میشوند.

برای حل این معادله در زمان، به یک سری شرایط اولیه نیاز است. این شرایط اولیه را میتوان از رابطه (۱۷) بهدست آورد. $q_i^0 = (u'_0, \Phi_i)$ (۱۷)

این رابطه با استفاده از خاصیت متعامدبودن مدها بهدست آمده است.

در شکل ۸، پیشرفت زمانی ضریب مدهای q_1 و q_2 و q_2 و q_3 نمایش داده شده است. همان طور که مشخص است، با اینکه پدیده فیزیکی اصلی یک حالت نوسانی و تکرارشونده دارد، ولی دامنه ضرایب مدها در حال رشد هستند. این واگرایی بهدلیل ناپایداریهای ناشی از ترم خطی معادله (۱۵) است، اگرچه ترم غیرخطی مدل رتبه کاسته از رشد بیش از اندازه ضرایب زمانی جلوگیری می کند[۱۳].

نادرستی را پیش بینی کند و حتی موجب مغشوش تر شدن میدان جریان شود. در روش تابع کنترل، تصاویر از جریان تحریک شده برداشته می شوند و میدان سرعت به صورت زیر بسط داده می شود: می شوند و میدان سرعت به صورت زیر بسط داده می شود: می شوند و میدان سرعت به صورت زیر (بسط داده می شود: می شوند و میدان سرعت به صورت زیر (بسط داده می شود: می شوند و میدان سرعت به صورت زیر (بسط داده می شود: می شوند و میدان سرعت به صورت زیر (می شود: می شوند و میدان سرعت به صورت زیر (می شود: می شوند و میدان سرعت به صورت زیر (می شود: می شود: می شوند و میدان سرعت (می شود: می شود:

که در رابطه بالا Mc تعداد مد کنترلی است، Γ_i ها توابع کنترلی مناسبی هستند که شرایط مرزی غیرهمگن ناشی از محرکهای جریان را ارضا میکنند و γ_i ورودی کنترل میباشد. در این روش، مدهای POD بعد از کمکردن تابع کنترل از هر تصویر بهدست میآید. ما میتوانیم بهصورت ریاضی ماتریس تصاویر W را بهصورت زیر تعریف کنیم:

$$W = u\left(x, t^{k}\right) - \sum_{i=1} \gamma_{i}\left(t^{k}\right) \Gamma_{i}\left(x\right)$$
(19)

بهعبارت دیگر، تصاویر بهگونهای تعریف میشوند که شرایط مرزی همگن روی سطح سیلندر را ارضا کنند.

۴-۵- مدل رتبه کاسته اصلاح شده

با جایگزینی معادله (۱۸) در معادلات ناویر-استوکس و تصویر کردن این معادلات بر روی مدهای ϕ_k ، به معادله زیر میرسیم.

$$\dot{q}_{k}(t) = A_{k} + \sum_{m=1}^{M} B_{km} q_{m}(t)$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \sum_{m=1}^{M} C_{kmn} q_{n}(t) q_{m}(t) + \sum_{m=1}^{Mc} H_{km} \dot{\gamma}_{m}(t)$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{Mc} J_{kmn} \gamma_{n}(t) q_{m}(t) + \sum_{m=1}^{Mc} \mathcal{K}_{km} \gamma_{m}(t)$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{Mc} \mathcal{L}_{kmn} \gamma_{n}(t) \gamma_{m}(t)$$
(Y ·)

$$\begin{split} \mathbf{H}_{km} &= -(\boldsymbol{\varPhi}_{k}, \boldsymbol{\Gamma}_{m}) \\ \mathbf{J}_{kmn} &= -(\boldsymbol{\varPhi}_{k}, \boldsymbol{\Gamma}_{n} \cdot \nabla \boldsymbol{\varPhi}_{m}) - (\boldsymbol{\varPhi}_{k}, \boldsymbol{\varPhi}_{m} \cdot \nabla \boldsymbol{\Gamma}_{n}) \\ \mathcal{K}_{kmn} &= -(\boldsymbol{\varPhi}_{k}, \boldsymbol{\bar{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\Gamma}_{m}) - (\boldsymbol{\varPhi}_{k}, \boldsymbol{\Gamma}_{m} \cdot \nabla \boldsymbol{\bar{u}}) \\ &+ \frac{1}{\operatorname{Re}_{D}} (\boldsymbol{\varPhi}_{k}, \nabla^{2} \boldsymbol{\Gamma}_{m}) \\ \mathcal{L}_{kmn} &= -(\boldsymbol{\varPhi}_{k}, \boldsymbol{\Gamma}_{m} \cdot \nabla \boldsymbol{\Gamma}_{n}) \end{split}$$
(71)



شکل ۸ تغییرات زمانی ضرایب مدهای ۱، ۲ و ۳ در رینولدز ۲۰۰

۴-۴- مدل رتبه کاسته به همراه کنترل

برای کنترل جریان از دمنده و مکندههایی بر روی سطح سیلندر استفاده کردهایم، تا بتوانیم از طریق آنها جدایش جریان را بهتعویق بیاندازیم و بهتبع آن میزان ریزش گردابه را کاهش دهیم. برای انجام کنترل، ما از روش تابع کنترل برای ایجاد مدل رتبه کاسته استفاده کردهایم.

در مطالعهای که توسط تانگ انجام شد، مشخص شد که برای بهدست آوردن توابع پایه برای مدل رتبه کاسته، میدان تحریکنشده نمیتواند نماینده خوبی برای استخراج مدهای پایه باشد و قادر نیست کنترل جریان را پیشبینی کند. ازطرفی انتخاب نامناسب تابع کنترل میتواند نتایج

> مهندسی مکانیک مدوس مرداد ۱۳۹۲، دورهٔ ۱۳ شمارهٔ ۵ www.SID.ir

سرعت دمش: ۲۵/۰ سرعت جریان طول شکاف: ۲/۰ طول ضلع سیلندر سرعت دمش: ۲۵/۰ سرعت جریان آزاد طول شکاف: ۲/۰ طول ضلع سیلندر سرعت دمش: ۲۵/۰ سرعت جریان طول شکاف: ۲/۰ طول ضلع سیلندر سرعت دمش: ۲۵/۰ سرعت جریان طول شکاف: ۲/۰ طول ضلع سیلندر

شکل ۹ محل محرکهای جریان و سرعت جتهای سرعت در رینولدز ۲۰۰



شکل ۱۰ تابع کنترل تولیدشده برای رینولدز ۲۰۰، الف) در جهت جریان، ب) عمود بر جهت جریان

۵- کنترل بهینه مدل رتبه کاسته

در کار حاضر، تئوری کنترل بهینه، بهمنظور طراحی یک قانون کنترلی برای یک مدل رتبه کاسته، به کار گرفته شده است. این تئوری مزیتهای زیادی نسبت به انتخابهای دیگر دارد که آن را برای هدف تحقیق حاضر مناسب می کند.

اول از همه، بهدلیل اینکه اگر مقدار ورودی کنترل بیش از اندازه بزرگ انتخاب شود نمیتواند بهدرستی فیزیک جریان را کنترل کند، مقادیر بزرگ ورودی کنترل هیچ ارزش فیزیکی ندارند و باید بهگونهای از آنها اجتناب شود. در کنترل بهینه، این کار بهسادگی، با اضافهکردن یک جمله به تابع عملکرد، انجام میگیرد. این جمله شامل مربع وزندار ورودی میباشد. در فرایند بهینهسازی تابع عملکرد، این جمله اجازه نمیدهد که ورودی بهطور ناخواسته بیش از اندازه رشد کند. هرچه مقدار

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

در مطالعه حاضر، مشتق زمانی سرعت مکش و دمش جریان یا بهعبارتی شتاب جریانهای محرک، *ن*/، بهعنوان ورودی اصلی کنترل انتخاب شده است. با این انتخاب، یک معادله دیگر به معادلات حالت اضافه میشود:

 $\gamma_c = \dot{\gamma} \tag{(TT)}$

همچنین، در مسئله حاضر، ما تنها از یک مد کنترلی، بهمنظور شبیهسازی محرکهای جریان، استفاده کردهایم. گرچه میتوان از چندین مد کنترلی بهمنظور کنترل بهتر جریان استفاده کرد.

۴-۶- طراحی تابع کنترل

همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، برای کنترل جریان ما با معرفی یک مد کنترلی معادلات رتبه کاسته را اصلاح میکنیم. حال مسئله حاضر این است که چگونه میتوان این مدرا طراحی کرد، به گونهای که بتواند اثر کنترل را به خوبی نشان دهد.

یک راه ساده شبیهسازی محرکها با یک سرعت مناسب، در یک جریان ساکن میباشد. یک تصویر بهدست آمده از این میدان جریان میتواند انتخاب خوبی برای مد کنترلی باشد. تانگ برای کنترل جریان با استفاده از چرخش سیلندر، برای ساخت تابع کنترل، از این روش استفاده کرد. او سیلندر را در یک سیال ساکن با سرعت زاویهای ثابت بهچرخش درآورد[۱].

اثر مد كنترلى كه با اين روش ساخته مى شود، به دليل عدم حضور جریان میدان آزاد در شبیهسازی، محلی است. یک روش دیگر برای تولید مد کنترلی به صورتی است که در ادامه می آید. ما جریان حول سیلندر را، در حالی که محرکهای جریان فعال هستند، شبیهسازی میکنیم و این جریان را جریان تحریک شده مینامیم. از این جریان تحریک شده با برداشتن تعدادی تصوير متوسط زماني مي گيريم. به طور مشابه، جريان حول سیلندر را در حالتی که محرکها فعال نیستند، شبیهسازی مىكنيم و متوسط زمانى اين جريان را نيز محاسبه مىكنيم. با کم کردن این دو میدان از یکدیگر و تقسیم بر سرعت جت سیال، میتوان یک مد کنترلی بهدست آورد که نهتنها شرایط مرزی ناهمگن روی مرز سیلندر را ارضا میکند، بلکه اثرات اغتشاشات ناشی از محرکها کل میدان را تحت تأثیر قرار میدهد. در شکل ۹ محل و سرعت جتهای جریان مشخص شده است و در شکل ۱۰ مد کنترلی طراحی شده در رینولدز ۲۰۰ نمایش داده شده است.

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

همایون امداد و همکاران

بیشتری برای ضریب این جمله لحاظ شود، مقدار کمتری برای ورودی کنترل محاسبه میشود.

دوم، در مسائل کنترل، تعریف کردن یک سیگنال مرجع مناسب برای سیستم راحت نیست. به عبارت دیگر، سختی هایی در انتقال هدف کنترل به زبان ریاضی وجود دارد. این هدف می تواند کاهش نیروی پسا یا افزایش انتقال گرما یا حتی کاهش آن باشد. این امکان وجود ندارد که به طور واضح، سیگنال مرجع را معرفی و سیگنال خطا را با کم کردن حالت حاضر از حالت مرجع محاسبه کنیم [۱۸].

سوم، معادلات دیفرانسیل حاکم شامل دو ترم غیرخطی هستند؛ یکی از آنها حاصل ضرب دو متغیر حالت و دیگری حاصل ضرب یک متغیر حالت و ورودی کنترل است. نتایج بهدست آمده برای کنترلرهای خطی نظیر PID در کنترل سیستمهایی که بهطور ذاتی غیرخطی هستند، موفقیت محدودی را نشان دادهاند[۱۹]. گرچه، کنترل بهینه یک قانون کنترل غیرخطی را تشکیل میدهد و انتظار میرود که نتایج بهتری در این موارد داشته باشد[۲۰].

در جمعبندی، با درنظر گرفتن همه موانعی که در حل مسائل کنترل جریان وجود دارد، کنترل بهینه یکی از کارآمدترین روشهایی است که میتواند به کار گرفته شود.

۶-۱- تئوری کنترل بهینه
 سیستم زیر را درنظر بگیرید که دینامیک یک سیستم غیرخطی
 را که با زمان تغییر می کند، توصیف می کند.
 (۲۳)

هدف مسئله کنترل بهینه پیداکردن ورودی *u* در بازه زمانی t ≥ t ≥ t است، بهگونهای که سیستم را در خط مسیری قرار دهد که تابع عملکرد، نظیر آنچه در رابطه (۲۴) تعریف شده است، بههمراه قیود همراه با آن، اکسترمم شود.

 $\mathbf{J}(u) = h\left(x\left(t_{f}\right), t_{f}\right) + \int_{t_{0}}^{t_{f}} g\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right) dt \quad (\Upsilon \mathcal{F})$

تابع J تابع عملکرد یا تابع هزینه نامیده می شود که در آن h_{f} و g توابعی اسکالر هستند و t_{0} و t_{1} ، بهترتیب زمان آغازین و زمان انتهایی فرایند کنترل می باشند. t_{f} ، بسته به مسئله، ممکن است آزاد فرض شود یا اینکه مقدارش مشخص شود. قیود همان معادلات سیستم دینامیکی (معادله ۲۰) هستند، که باید هم زمان با اکسترمم کردن تابع عملکرد ارضاء گردند.

مهندسی مکانیک مدرس مرداد ۱۳۹۲، دورهٔ ۱۳ شمارهٔ ۵ www.SID.ir

در مطالعه حاضر تابع عملکرد به صورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\mathbf{J} = 1/2 \int_{t_0}^{t_f} \left(\int_{\Omega} \xi^2 d\,\Omega + R\,\gamma_c^2 \right) dt \tag{70}$$

که در آن، ^۲ر بیانگر ورتیسیته جریان سیال، γ_c ورودی کنترل و R یک مقدار ثابت است و ضریب وزن خوانده می شود. حضور ترم دوم در معادله بالا برای تحمیل نوعی قید به مسئله می اشد و اجازه نمی دهد که ورودی کنترل بیش از اندازه مطلوب بزرگ شود.

در معادله (۲۵) مشاهده می کنیم که تابع عملکرد برحسب متغیرهای حالت مطرح نشده است. بنابراین، لازم است که قبل از شروع محاسبات کمی تغییر داده شود. با نوشتن این تابع برحسب متغیرهای حالت، به رابطه زیر می سیم:

$$\mathbf{J} = 1/2 \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{M+1} q_i q_j Q_{ij} + R \gamma_c^2 \right) dt$$
 (YF)

برای حداقل کردن این تابع ما از روش شبهخطیسازی^۱ استفاده کردهایم. در این روش، معادلات غیرخطی کنترل بهینه حول یک مسیر مشخص خطی میشوند. سپس این معادلات خطی بهروش عددی حل میشوند.

۰/۱ در مطالعه حاضر، فرایند بهینهسازی در فواصل زمانی ۰/۱ ثانیه انجام گرفته است و مقدار ضریب وزن، ۳۱/۰ انتخاب شده است. در ادامه نتایج کنترل بهینه آورده شده است.

۶- نتایج کنترل بهینه

در این قسمت، نتایج حاصل از کنترل بهینه با استفاده از روش عددی شبهخطیسازی برای رینولدز ۲۰۰ ارائه شده است. مقدار ضریب وزن بهاختیار ۲۳۱۰ انتخاب شده است. ضریب وزن به گونهای انتخاب می شود که هم بتواند فیزیک جریان را بهدرستی مدل کند و هم اینکه نیازهای طراحی را برآورده کند. بنابراین این مقدار بسته به شرایط مسئله و نیازهای طراحی متفاوت است. با امتحان چندین ضریب وزن، برای رینولدز ۲۰۰ این عدد انتخاب شده است. تعداد مدهای POD برای ساخت معادلات کنترل نیز ۷ عدد درنظر گرفته شده است. با افزایش بیشتر مدها در این عدد رینولدز، نتایج تغییر محسوسی را نشان نمی دادند و تنها باعث افزایش حجم و زمان انجام

^{1.} Quasilinearization

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

محاسبات می شدند. از طرفی، در اعداد رینولدز بالاتر و با پیچیده ترشدن جریان، مدهای پایین تر نقش فعال تری در شبیه سازی جریان دارند. از این رو لازم است که در اعداد رینولدز بالاتر که جریان به سمت تلاطم میل می کند، از تعداد بیشتری مد برای ساخت مدل رتبه کاسته و همچنین مدل کنترلی استفاده کرد.

خط مسیر بهدست آمده برای ورودی کنترل در شکل ۱۱ نشان داده شده است. همانگونه که قابل مشاهده است، خط مسیر بهدست آمده یک رفتار سینوسی دارد. در ابتدای فرایند کنترل سرعت جت جریان در حال افزایش میباشد، اما بعد از رسیدن به مقدار مشخصی این سرعت کم میشود. این رفتار را این گونه میتوان توضیح داد که بعد از اینکه سرعت جت تا یک مقدار مشخص افزایش پیدا کرد و ریزش گردابه متوقف شد، تا شروع شکل گرفتن گردابه بعدی احتیاجی نیست که این سرعت بیشینه باقی بماند.

بهمنظور امتحان نتایج، خط مسیر بهدست آمده را بهعنوان ورودی برای کد اصلی تعریف میکنیم و تأثیر آن را بر میدان جریان بررسی میکنیم. در شکل ۱۲ میدان جریان کنترلشده و کنترلنشده در فواصل زمانی یک ثانیه نمایش داده شدهاند. اثر کنترل بهینه در کاهش اندازه دنباله بهخوبی مشاهده میشود.

روش پیشنهادی برای کنترل دنبالههای پشت سیلندر مربعی شکل در اعداد رینولدز ۴۰۰، ۴۰۰ و ۸۰۰ نیز تست شده است و نتایج مطلوبی بهدست آمدند. شایان ذکر است که در این اعداد رینولدز لازم است که محل دمندهها و مکندهها تغییر پیدا کنند تا به صورت مؤثرتر جریان را تحریک کنند. در مقاله حاضر، به ارائه نتایج در عدد رینولدز ۲۰۰ اکتفا شده است.

۷- نتیجهگیری

در این مقاله، روشی برای کنترل دنبالههای تشکیلشده در پشت سیلندر مربعی شکل ارائه شد. در این روش، با استفاده از مدل رتبه کاسته بر مبنای مدهای POD ، معادلات حاکم بر جریان سیال، که از نوع مشتقات جزئی هستند، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شدند و با معرفی یک تابع کنترل، دیفرانسیل معمولی تبدیل شدند و با معرفی یک تابع کنترل، ورودی کنترل بهینه آماده شدند و برای به دست آوردن عددی برای کنترل بهینه است، به کار گرفته شد.



شکل ۱۲ میدانهای جریان حول سیلندر، الف) کنترلنشده، ب) کنترلشده در رینولدز ۲۰۰

Optimal Control, Computational Aerospace Sciences Laboratory, 1996.

- [2] Tang K. Y., Numerical Simulation and Control of Separated Incompressible Flow, MSc Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics at MIT University, 1996.
- [3] Graham W. R., Peraire J., Tang K. Y., "Optimal Control of Vortex Shedding using Low Order Model-Part 1: Open-Loop Model Development", IJNME, Vol. 44, No. 7, 1999, pp. 945-972.
- [4] Graham W. R., Peraire J., Tang K. Y., "Optimal Control of Vortex Shedding using Low Order Model-Part 2: Model-Based Control", IJNME, Vol 44, No. 7, 1999, pp. 973-990.
- [5] Mittal S., Raghuvanshi A., "Suppression of Vortex Shedding Using Control Cylinder", The Seventh Asian Congress of Fluid Mechanics, Chennai (Madras), 1997.
- [6] Li Z., Navon I. M., Hussaini M. Y., Le Dimet F. X., "Optimal Control of Cylinder Wakes via Suction and Blowing", Journal of Computer & Fluids, Vol. 32, No. 2, 2003, pp. 149-171.
- [7] Homescu C., Navon I. M., Li Z., "Suppression of Vortex Shedding for Flow around a Circular Cylinder using Optimal Control", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 38, No. 1, 2002, pp. 43-69.
- [8] Zannetti L., Iollo A., "Passive Control of the Vortex Wake Past a Flat Plate at Incidence", Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 16, No. 3, 2002, pp. 211-230.
- [9] Zhoua L., Chengb M., Hungb K. C., "Suppression of fluid Force on a Square Cylinder by Flow Control", Journal of Fluids and Structures, Vol. 21, No. 2, 2005, pp. 151-167.
- [10] Weller J., Lombardi E., Iollo A., "Robust Model Identification of Actuated Vortex Wakes", Journal of Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 238, No. 4, 2009, pp. 416-427.
- [11] Layek G. C., Midya C., Gupta A. S., "Influences of Suction and Blowing on Vortex Shedding behind a Square Cylinder in a Channel", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 43, No. 9, 2008, pp. 979-984.
- [12] Turki S., "Numerical Simulation of Passive Control on Vortex Shedding behind Square Cylinder using Splitter Plate", Engineering Application of Computational Fluid Mechanic, Vol. 2, No. 4, 2008, pp. 514-524.
- [13] Akhtar I., Nayfeh A. H., "Model Based Control of Laminar Wake Using Fluidic Actuation", Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol. 5, No. 4, 2010, pp. 133-141.
- [14] Sohankar A., Davidson L., "Numerical Simulation of Unsteady Flow Around a Square Two-Dimensional Cylinder", Twelfth Australaian Fluid

نتایج بهدست آمده حاکی از آن است که روش ارائهشده می تواند برای کنترل ناپایداریهای تولیدشده در پشت سیلندر مؤثر باشد.

۸- فهرست علايم

- فرکانس ریزش گردابه (1/s) f تابع هميلتونين Η تابع عملکرد یا تابع هزینه J طول ضلع سیلندر مربع شکل (m) l تعداد مدهای POD М
 - - تعداد توابع كنترلي Mc
 - Р فشار میدان جریان (Pascal)

متغير همراه حالت
$$p$$

POD ضریب زمانی مدهای
$$q$$

$$(St = \frac{fl}{u_0})$$
عدد استروهال St St

(s) زمان شروع کنترل (s)
$$t_0$$

Uورودى كنترل

$$(m/s)$$
متوسط سرعت جریان (m/s)

علايم يوناني

- تابع كنترل Г ضريب زماني تابع كنترل γ ورتيسيته ξ چگالی سیال ρ مد POD Φ
 - تابع جريان ψ

۹- مراجع

[1] Tang K. Y., Graham W. R., Peraire J., Active Flow Control using a Reduced Order Model and

Numerical Methods in Fluids, Vol. 53, No. 2, 2006, pp. 305-332.

- [19] Linnick M. N., Fasel H. F., "A High-Order Immersed Interface Method for Simulating Unsteady Incompressible Flows on Irregular Domains", *Journal of Computational Physics*, Vol. 204, No. 1, 2005, pp. 157-192.
- Y., Reduced-Order [20] Hou Modeling ofIncompressible Jet Flow using Proper Orthogonal **Decomposition** and Galerkin Projection, Dissertation for the Degree of Master of Science in Electrical and Computer Engineering, Northeastern University, 2010.
- [21] Sina Fardisi, Control of Flow using Proper Orthogonal Decomposition, MSc Dissertation, Mechanical Engineering Department of Shiraz University, 2006.

کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با ...

Mechanics Conference, The University of Sydney, Australia, 1995.

- [15] Gera B., Sharma Pavan K., Singh R. K., "CFD Analysis of 2D Unsteady Flow around a Square Cylinder", *International Journal of Applied Engineering Research, DINDIGUI*, Vol. 1, No. 3, 2010, pp. 602-610.
- [16] Holmes P., Lumley J. L., Berkooz G., *Turbulence*, *Coherent Structures*, *Dynamical Systemsand Symmetry*, First Edition, USA, Cambridge, 1996.
- [17] Sirovich L., "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures. Part 1: Coherent Structures", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 45,1987, pp. 524-529.
- [18] Ding H., Shu C., Yeo K. S., Xu D., "Numerical Simulation of Flows Around Two Circular Cylinders by Mesh-Free Least Square-Based Finite Difference Methods", *International Journal for*