



# محاسبه ضرایب شدت تنش مود I بارگذاری برای قطعه خمش سه نقطه‌ای شیاردار

زهرة کاوه<sup>۱</sup>، مجیدرضا آیت‌اللهی<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۶۵، m.ayat@iust.ac.ir

**چکیده-** قطعه آزمایشگاهی خمش سه نقطه‌ای یکی از قطعات مهم برای مطالعه رفتار شکست قطعات شیارداری است که از مواد ترد مانند سنگ‌ها و سرامیک‌ها ساخته شده‌اند. از سوی دیگر، ضرایب شدت تنش شیاری مهم‌ترین پارامترهای تعیین‌کننده در تشخیص شکست ترد سازه‌های شیاردار محسوب می‌شوند. بنابراین محاسبه ضرایب شدت تنش شیاری برای مهندسان و محققان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از آنجا که روش‌های موجود برای محاسبه ضرایب شدت تنش شیاری اغلب دشوار بوده و نیاز به محاسبات پیچیده دارند، ارائه آن‌ها به صورت پارامترهای بی بعد ارجحیت دارد. در این مقاله، با استفاده از آنالیز اجزاء محدود و روش فرامعین، ضرایب شدت تنش قطعه مستطیلی شکل شیاردار تحت بارگذاری خمش سه نقطه‌ای به ازای پارامترهای مختلف هندسی و بارگذاری محاسبه شده است. سپس ضرایب به دست آمده به پارامترهای بی بعدی به نام ضرایب هندسی شیاری  $Y_1^V$  تبدیل شده و در قالب نمودارهایی مجزا ارائه شده‌اند. نشان داده شده است که هر کدام از سه پارامتر زاویه دهانه شیاری، طول شیاری و فاصله نسبی دو تکیه‌گاه از یکدیگر با مقدار  $Y_1^V$  نسبت مستقیم دارند. طراحان و مهندسان می‌توانند، بدون انجام محاسبات وقت‌گیر، مستقیماً از نتایج این مقاله برای محاسبه پارامترهای شکست نمونه‌های مشابه استفاده نمایند.

**کلیدواژه‌ها:** ضریب هندسی شیاری، شیاری V شکل نوک تیز، قطعه خمش سه نقطه‌ای، آنالیز اجزاء محدود، روش فرامعین

## Computation of mode I notch stress intensity factors in a V-notched TPB specimen

Z. Kaveh<sup>1</sup>, M. R. Ayatollahi<sup>2\*</sup>

1- MSc., Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran

2- Prof., Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran

\* P.O.B. 16765-163 Tehran, m.ayat@iust.ac.ir

**Abstract-** Three-point bend (TPB) specimen is an important test sample in fracture study of notched components made from brittle materials like rocks and ceramics. On the other hand, the notch stress intensity factors (NSIFs) are vital parameters in brittle fracture assessment of V-notched structures. Therefore, computation of NSIFs in TPB specimens is of practical interest to engineers and researchers. Since the available methods for calculating NSIFs are often cumbersome and need complicated calculations, it is preferred to show them as a set of dimensionless parameters. In this research, by using a finite element approach called FEOD method, the stress intensity factors are determined numerically for notched TPB specimens having different geometry and loading conditions. The obtained values of NSIF are then converted to dimensionless parameters called notch shape factors  $Y_1^V$  and are illustrated in a number of discrete figures. It is shown that each of the three parameters of: the notch opening angle, the notch length and the distance between the two supports has direct relation with  $Y_1^V$ . The results presented in this paper can be used by designers and engineers for performing the necessary fracture experiments through the TPB specimen without needing complicated and time-consuming calculations.

**Keywords:** Notch shape factor, Sharp V-notch, Three-point bend specimen, FE analysis, FEOD method

## ۱- مقدمه

شیارها و گوشه‌های تیز در بسیاری از قطعات و سازه‌های مهندسی مانند پیچ‌ها، مهره‌ها، چرخ‌دنده‌ها و جوش‌های گوشه وجود دارند. هنگامی که شعاع انحناى نوک شیار در مقایسه با طول آن بسیار کوچک باشد، می‌توان شیار را نوک تیز فرض نمود. ترک‌ها نیز به‌عنوان حالت خاصی از شیارهای تیز در نظر گرفته می‌شوند که در آن‌ها زاویه دهانه شیار برابر صفر است. در مواد ترد، مانند سرامیک‌ها، سنگ‌ها و شیشه‌ها، تمرکز شدید تنش در نزدیکی نوک شیار این مکان را به محل مناسبی برای جوانه‌زنی و رشد ترک تبدیل می‌نماید. ایجاد تخریب موضعی در نوک شیار منجر به کاهش حد تحمل بار و در نهایت شکست قطعه می‌شود. از این رو، مطالعه دقیق تنش در نزدیکی نوک شیار و توانایی پیش‌بینی آغاز شکست ترد در طراحی مطمئن قطعات شیاردار از اهمیت قابل ملاحظه‌ای برخوردار است.

تاکنون چندین معیار شکست برای پیش‌بینی شکست ترد در سازه‌های شیاردار پیشنهاد شده است که در اکثر آن‌ها از مفهوم تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی<sup>۱</sup> استفاده شده است. این معیارها عمدتاً براساس تنش بحرانی یا انرژی بحرانی می‌باشند. برای مثال، تئوری‌های ارائه‌شده توسط سورین [۱]، آیت‌اللهی و همکاران [۲]، آیت‌اللهی و ترابی [۳، ۴] براساس تنش می‌باشند، در حالی که تئوری‌های پیشنهادی توسط لگولون [۵]، لازارین و زامباردی [۶] و یوسیاش [۷] مفهوم انرژی را برای پیش‌بینی آغاز شکست به‌کار می‌برند. مروری بر مطالعات پیشین صورت‌گرفته نشان می‌دهد ضرایب شدت تنش شیار<sup>۲</sup> نقش مهمی در تشخیص آغاز شکست در قطعات شیاردار ایفا می‌کنند.

تعدادی تحقیق آزمایشگاهی نیز برای محاسبه چقرمگی شکست شیار انجام شده است که برای انجام آن‌ها اغلب از قطعات آزمایشگاهی استاندارد استفاده شده است. به‌عنوان مثال، صفحات مستطیلی شکل تحت بارگذاری خمش سه‌نقطه‌ای<sup>۳</sup> [۸-۱۰] یا خمش چهارنقطه‌ای<sup>۴</sup> [۱۱-۱۴]، صفحات مستطیلی شکل دارای شیار لبه‌ای در یک یا دو سمت که تحت بارگذاری کششی قرار دارند [۱۵، ۱۶]، قطعات دیسکی مانند دیسک برزلی دارای شیار

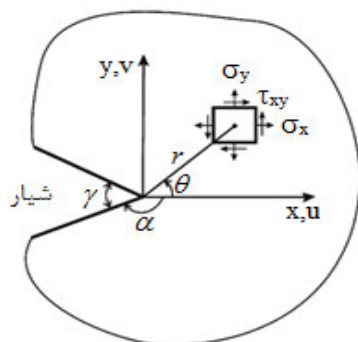
نوک تیز [۱۷] و قطعه نیم‌دایروی تحت خمش [۴] تعدادی از این نمونه‌های آزمایشگاهی می‌باشند. در این میان، قطعات آزمایشگاهی مستطیلی شکل تحت خمش، به دلیل سادگی ساخت و در نتیجه کم‌هزینه بودن، آسان بودن آزمایش آن‌ها و موثق بودن نتایجشان، از پرکاربردترین قطعات در محاسبه ضرایب شدت تنش و تعیین چقرمگی شکست مواد ترد می‌باشند. از قطعه خمش سه‌نقطه‌ای برای آزمایش‌های مود I خالص یا زمانی که مود I غالب است، بسیار استفاده می‌شود [۱۸-۲۱]، در حالی که قطعه خمش چهارنقطه‌ای بیشتر در شرایط مود ترکیبی به‌کار می‌رود [۲۲-۲۵].

از سوی دیگر، ضرایب شدت تنش مهم‌ترین پارامترهای تعیین‌کننده حوزه تنش در نزدیکی نوک شیارها هستند. بنابراین باید روش‌های مناسبی برای محاسبه آسان این پارامترها وجود داشته باشد. اگرچه برای شیارهای با زاویه دهانه صفر (ترک‌ها)، روش‌های متعدد عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی [۲۶-۳۳] برای یافتن ضرایب شدت تنش وجود دارد، اما روش‌های ارائه‌شده برای محاسبه ضرایب شدت تنش قطعات شیاردار که زاویه دهانه شیار در آنها صفر نیست [۳۴-۳۷] بسیار کم بوده و برای مقاصد کاربردی، اغلب پیچیده و وقت‌گیرند و نیاز به محاسبات طولانی دارند. در میان روش‌های موجود برای محاسبه ضرایب شدت تنش شیارها [۳۴-۳۷]، روش فرامعین<sup>۵</sup> که توسط آیت‌اللهی و نجاتی ارائه شده است [۳۸]، روش نسبتاً ساده‌ای بوده و نتایج آن نیز دقت بالایی دارند.

در این مقاله، ابتدا با انجام آنالیزهای اجزاء محدود و استفاده از روش فرامعین ضرایب شدت تنش برای قطعه پرکاربرد خمش سه‌نقطه‌ای در مود I خالص بارگذاری ( $K_I^V$ ) و در شرایط مختلف هندسی و بارگذاری محاسبه شده است. سپس نتایج عددی در قالب نمودارهایی مجزا برحسب پارامتر بدون بعد ضریب شدت تنش مود اول بارگذاری به‌نام ضریب هندسی شیار ( $Y_I^V$ ) ارائه شده است. نتایج ارائه‌شده در این مقاله مشکل کمبود داده در ارتباط با پارامترهای شکست شیار را تا حدی مرتفع می‌نمایند و همچنین طراحان و مهندسان می‌توانند، بدون انجام محاسبات وقت‌گیر، مستقیماً از آن‌ها برای محاسبه پارامترهای شکست نمونه‌های مشابه قطعه خمش سه‌نقطه‌ای استفاده نمایند.

1. Linear Elastic Fracture Mechanics
2. Notch stress Intensity Factors
3. Three Point Bend specimen
4. Four Point Bend specimen

5. Finite Element Overdeterministic Method



شکل ۱ هندسه شیار و تنش‌های نوک شیار در سیستم مختصات کارتزین

همان‌گونه که پیشتر نیز اشاره شد، ضرایب شدت تنش شیار از پارامترهای اساسی در ارزیابی شکست ترد قطعات شیاردار می‌باشند و اکثر تئوری‌های شکست پیشنهادی، پیش‌بینی‌های خود را براساس ضرایب شدت تنش شیار ارائه می‌دهند. در بخش‌های بعدی پس از توضیح کامل هندسه و مدلسازی اجزاء محدود قطعه، ضرایب شدت تنش برای حالات متفاوت هندسی و بارگذاری قطعه خمش سه‌نقطه‌ای محاسبه می‌شوند.

### ۳- هندسه قطعه

گراس و اسرالی [۴۰]، با به‌کارگیری روش تجمع مرزی در تابع تنش ویلیامز، پارامتر بدون بعد ضریب شدت تنش را برای قطعات مستطیلی‌شکل دارای ترک لبه‌ای<sup>۱</sup> و تحت خمش سه نقطه‌ای محاسبه نمودند. آن‌ها در این مطالعه اثر تغییر هندسه قطعه (تغییر طول نسبی ترک و فاصله تکیه‌گاه‌ها از خط مرکزی قطعه) را بررسی کرده و نتایج خود را در قالب نمودارهایی بیان نمودند. در این مقاله، مطالعه‌ای مشابه روی قطعات مستطیلی‌شکل تحت خمش سه‌نقطه‌ای و دارای شیار V شکل نوک تیز انجام گرفته است. شکل ۲ هندسه قطعه مستطیلی شیاردار خمش سه‌نقطه‌ای تحت بارگذاری مود I خالص را نشان می‌دهد. در این شکل،  $L$  طول قطعه،  $a$  طول شیار،  $W$  عرض قطعه،  $S$  فاصله دو تکیه‌گاه متقارن از یکدیگر و  $\gamma$  زاویه دهانه شیار است.  $P$  نیز نیروی اعمالی است که درست در امتداد خط مرکزی قطعه به آن وارد می‌شود. در چنین شرایط بارگذاری و هندسی، شیار مود I خالص بارگذاری را تجربه خواهد نمود.

## ۲- توزیع تنش الاستیک خطی در اطراف یک

### شیار V شکل نوک تیز

ویلیامز [۳۹]، برای اولین بار، روابطی برای محاسبه میدان تنش در نزدیکی شیارهای نوک تیز ارائه کرد. در روابط ویلیامز، رفتار ماده الاستیک خطی و ایزوتروپیک فرض شده است. مطابق حل ویلیامز، میدان تنش اطراف نوک شیار در مود اول بارگذاری از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۳۸]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{\lambda_n^1 A_n}{r^{1-\lambda_n^1}} \begin{pmatrix} (2+d_n) \cos(\lambda_n^1 - 1)\theta - (\lambda_n^1 - 1) \cos(\lambda_n^1 - 3)\theta \\ (2-d_n) \cos(\lambda_n^1 - 1)\theta + (\lambda_n^1 - 1) \cos(\lambda_n^1 - 3)\theta \\ -(d_n) \sin(\lambda_n^1 - 1)\theta + (\lambda_n^1 - 1) \sin(\lambda_n^1 - 3)\theta \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

که در آن:

$$d_n = \lambda_n^1 \cos 2\alpha + \cos 2\alpha \lambda_n^1 \quad (2)$$

در رابطه (۱)،  $r$  و  $\theta$ ، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، مختصات قطبی نوک شیار هستند.  $\text{Re}\{\}$  معرف قسمت حقیقی  $\{\}$  و  $n$  نشان‌دهنده مرتبه جملات بسط سری ویلیامز می‌باشد. زاویه  $\alpha$  را نیز می‌توان برحسب زاویه دهانه شیار  $\gamma$  به صورت  $\alpha = (2\pi - \gamma)/2$  نوشت. علاوه بر این، پارامتر  $\lambda_n^1$  مقادیر ویژه مود I بارگذاری می‌باشد که از حل معادله مشخصه زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_n^1 \sin 2\alpha + \sin 2\lambda_n^1 \alpha = 0 \quad (3)$$

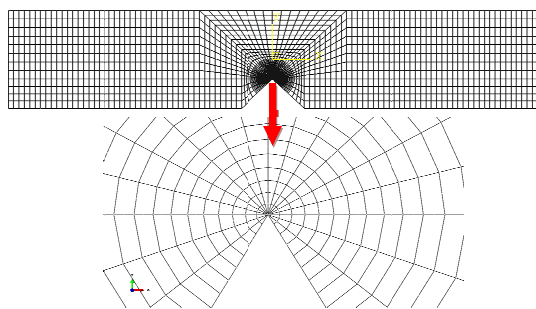
ضریب مود I ( $A_n$ ) در میدان اطراف نوک شیار، پارامتر مجهولی است که وابسته به شرایط هندسی و بارگذاری است. برای  $n=1$ ، ضرایب  $A_1$  مربوط به جمله سینگولار مود اول بارگذاری می‌باشد و مطابق رابطه (۴) با ضریب شدت تنش مود اول بارگذاری  $K_I^V$  ارتباط دارد.

$$K_I^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_1^1} \sigma_y(\theta=0) \right) = \sqrt{2\pi} \lambda_1^1 (1 + \lambda_1^1 - \lambda_1^1 \cos 2\alpha - \cos 2\alpha \lambda_1^1) A_1 \quad (4)$$

برای حالت خاصی از شیار که در آن  $\alpha = \pi$  (ترک)، طبق رابطه (۵)، ضریب  $A_1$  با پارامتر معروف ضریب شدت تنش  $K_I$  نسبت مستقیم دارد.

$$K_I = \sqrt{2\pi} A_1 \quad (5)$$

1. Single-edge

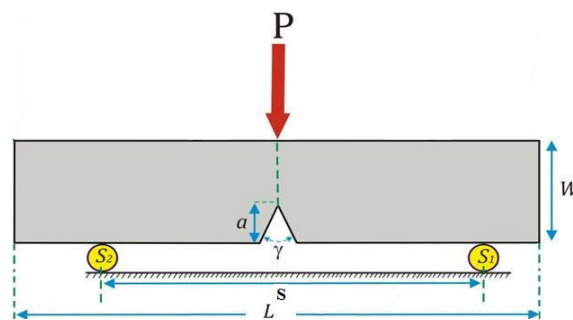


شکل ۳ نمونه‌ای از المان بندی مورد استفاده برای تحلیل اجزاء محدود، زاویه دهانه شیار  $\gamma=90^\circ$

هر دو المان از نوع جامد می‌باشند. برای قطعات خمش سه نقطه‌ای، نیروی اعمالی  $P$  برابر  $10 \text{ kN}$ ،  $L=200 \text{ mm}$  و ضخامت  $W=20 \text{ mm}$  و  $t=10 \text{ mm}$  انتخاب شدند. همچنین، همان‌طور که در جدول ۱ نیز نشان داده شده است، مقدار پارامتر هندسی  $S/W$  از ۴ تا ۱۰ و زاویه دهانه شیار از ۱۰ تا ۹۰ درجه تغییر می‌کند تا به ترتیب اثر جابه‌جایی تکیه‌گاه‌ها و تغییر زاویه دهانه شیار بر پارامتر نوک شیار ( $K_I^V$ ) بررسی شود. مقادیر ضریب پواسون و مدول یانگ نیز به دلخواه این مقادیر آن است که ضرایب بسط و ویلیامز مستقل از ثوابت ماده می‌باشند.

از میان روش‌های موجود برای محاسبه ضرایب شدت تنش شیارها، در این مقاله از روش فرامعین، به دلیل سادگی و دقت بالای نتایج آن، استفاده شده است [۳۸]. مزایای عمده این روش را می‌توان در چهار مورد زیر خلاصه نمود:

- استفاده از این روش، هم در تئوری و هم در محاسبات، ساده است.
  - این روش برای تمامی مسائل شیارها تحت بارگذاری درون صفحه‌ای کاربرد دارد.
  - در این روش، هم‌زمان با ضرایب شدت تنش شیارها، ضرایب جملات مرتبه بالاتر نیز محاسبه می‌گردند.
  - نتایج این روش بسیار دقیق می‌باشد.
- در این روش، با به‌کارگیری حوزه جابه‌جایی داخل صفحه حاصل از تحلیل اجزاء محدود برای یک قطعه شیاردار و برازش معادلات تحلیلی جابه‌جایی صفحه بر روی این حوزه، ضرایب سری ویلیامز، از جمله ضریب  $A_1$ ، با عملیات ماتریسی ساده‌ای محاسبه می‌شوند. ضمناً تعداد گره‌های انتخابی زمانی کافی



شکل ۲ هندسه قطعه مستطیلی شکل شیاردار تحت خمش سه نقطه‌ای

در این مطالعه، قطعه خمش سه نقطه‌ای تحت ۹۶ حالت متفاوت هندسی توسط نرم‌افزار اجزاء محدود تحلیل شده است. این ۹۶ حالت، همان‌گونه که در جدول ۱ آمده است، مربوط به ۴ حالت مختلف طول شیار  $a$ ، ۶ حالت متفاوت زاویه دهانه شیار  $\gamma$  و ۴ حالت مختلف فاصله تکیه‌گاه‌ها از یکدیگر  $S$  می‌باشد. در بخش بعدی جزئیات مدلسازی اجزاء محدود قطعات و روش محاسبه ضرایب شدت تنش شیارها ( $K_I^V$ ) ارائه می‌شود.

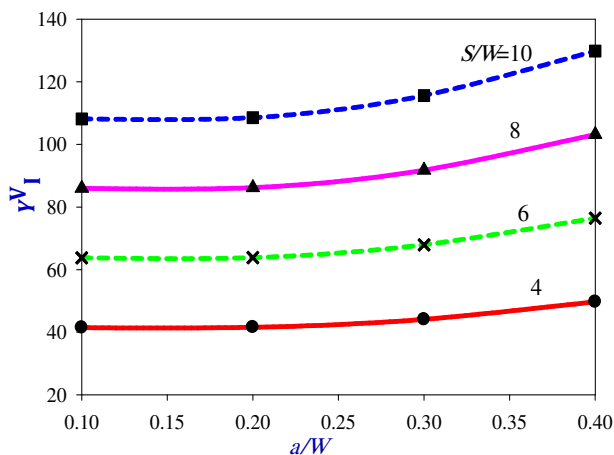
جدول ۱ ابعاد هندسی ۹۶ مدل مختلف قطعه خمش سه نقطه‌ای

پارامترها	مقادیر
$S/W$	۴، ۶، ۸، ۱۰
$a/W$	۰/۱، ۰/۲، ۰/۳، ۰/۴
$L/W$	۱۰
$\gamma$ (°)	۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۹۰

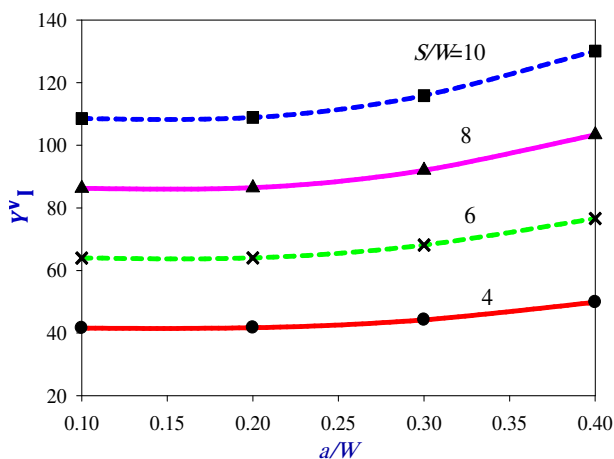
#### ۴- مدلسازی اجزاء محدود

تمامی ۹۶ مدل مختلف توسط نرم‌افزار آباکوس<sup>۱</sup> تحت شرایط تنش صفحه‌ای آنالیز شده‌اند. شکل ۳ نمونه‌ای از المان بندی استفاده شده در تحلیل اجزاء محدود قطعه خمش سه نقطه‌ای با زاویه دهانه شیار ۹۰ درجه را نشان می‌دهد. در این شکل، نمای نزدیک تری از المان‌های اطراف نوک شیار نیز نشان داده شده است. همان‌گونه که مشخص است، به دلیل تمرکز شدید تنش در ناحیه نزدیک نوک شیار، در این ناحیه از المان بندی بسیار ریزی استفاده شده است. برای اولین ردیف المان‌های اطراف نوک شیار، المان‌های مثلثی درجه دو شش‌گره‌ای<sup>۲</sup> و برای سایر قسمت‌های مدل، المان‌های چهارضلعی درجه دو هشت‌گره‌ای<sup>۳</sup> استفاده شده است.

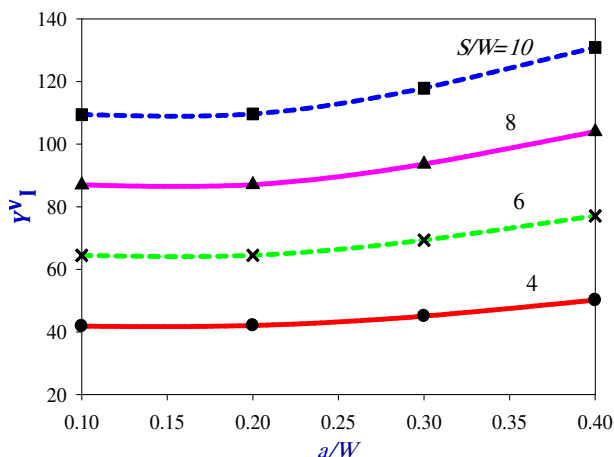
1. ABAQUS 6.9.2  
2. CPS6M  
3. CPS8R



شکل ۴ تغییرات  $Y_1^V$  برحسب طول شیار به ازای مقادیر مختلف فاصله تکیه‌گاه‌ها از یکدیگر (زاویه دهانه شیار ۱۰ درجه)



شکل ۵ تغییرات  $Y_1^V$  بر حسب طول شیار به ازای مقادیر مختلف فاصله تکیه‌گاه‌ها از یکدیگر (زاویه دهانه شیار، ۲۰ درجه)



شکل ۶ تغییرات  $Y_1^V$  بر حسب طول شیار به ازای مقادیر مختلف فاصله تکیه‌گاه‌ها از یکدیگر (زاویه دهانه شیار، ۳۰ درجه)

تلقی خواهد شد که افزایش تعداد گره‌ها باعث تغییر قابل توجهی در نتایج نشود. جزئیات بیشتر در مورد این روش را می‌توان در مراجع [۳۸، ۲۹] یافت. در بخش بعدی، نتایج به‌دست آمده از تحلیل اجزاء محدود قطعات خمش سه‌نقطه‌ای در قالب نمودارهای جداگانه نشان داده شده و نکات مهم آن مورد بحث قرار می‌گیرند.

### ۵- نتایج اجزاء محدود

پس از انجام تحلیل‌های اجزاء محدود و به‌دست آوردن ضرایب میدان مجاور نوک شیار  $(A_1)$ ، ضرایب شدت تنش مود اول بارگذاري با استفاده از معادله (۴) برای قطعات شیاردار محاسبه شدند. واضح است که این ضرایب عموماً تابعی از هندسه و شرایط بارگذاري قطعه شیاردار می‌باشند و در نتیجه برای قطعات متفاوت تغییر خواهند نمود. بنابراین، برای اینکه نتایج به‌دست آمده در این مقاله عمومی بوده و مستقل از مقادیر انتخابی برای ابعاد هندسی قطعه و مقدار بار باشند، ترجیح داده می‌شود که ضرایب شدت تنش شیار به شکل بی‌بعد زیر نشان داده شوند:

$$Y_1^V \left( \gamma, \frac{a}{L}, \frac{S}{L} \right) = (2\pi a)^{\lambda_1^I - 1} \frac{L t}{P} K_1^V \quad (6)$$

در معادله (۶)، ضریب هندسی شیار<sup>۱</sup> در مود اول بارگذاري،  $t$  ضخامت قطعه و  $\lambda_1^I$  اولین مقدار ویژه مود I می‌باشند. مقادیر  $\lambda_1^I$  به ازای زوایای مختلف دهانه شیار، که از معادله (۳) به دست می‌آید، در جدول ۲ آمده است.

نتایج به‌دست آمده از تحلیل اجزاء محدود برای زوایای ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه به ترتیب در شکل‌های ۴ تا ۹ نشان داده شده‌اند.

جدول ۲ مقادیر  $\lambda_1^I$  به ازای زوایای مختلف دهانه شیار

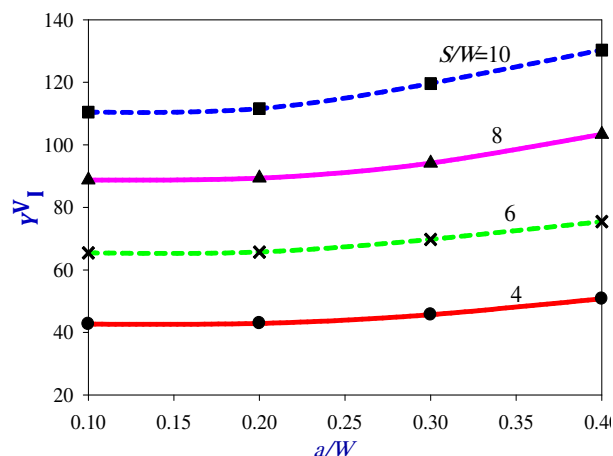
مقدار $\lambda_1^I$	زاویه دهانه شیار (درجه)
۰/۰۰۰۰۵	۰
۰/۵۰۰۰۵	۱۰
۰/۵۰۰۴۳	۲۰
۰/۵۰۱۴۵	۳۰
۰/۵۰۵۰۱	۴۵
۰/۵۱۲۲۲	۶۰
۰/۵۴۴۴۸	۹۰

1. Notch Shape Factor

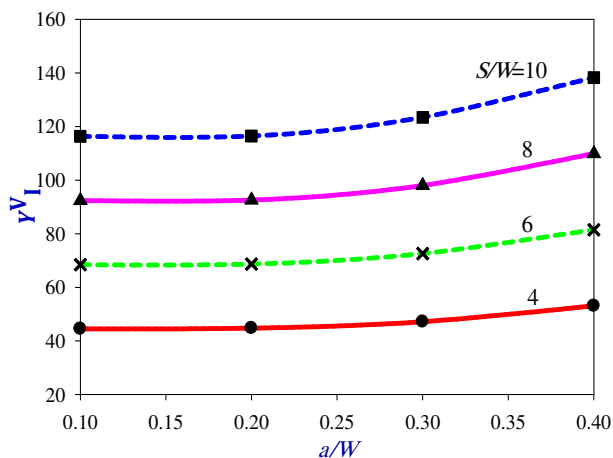
در اين شكل‌ها، تغييرات ضريب هندسي  $Y_1^V$  براي مقادير مختلف  $a/W$  (طول نسبي شيار) در يك زاويه ثابت نشان داده شده است. همچنين، در شكل ۱۰ تغييرات ضريب هندسي  $Y_1^V$  به ازاي تغيير  $S/W$  (فاصله نسبي تكيه‌گاه‌ها از يكدیگر) در يك زاويه ثابت (زاويه ۹۰ درجه) نشان داده شده است. شكل ۱۱ نیز تغييرات  $Y_1^V$  به ازاي تغيير زاويه دهانه شيار در فاصله ثابت دو تكيه‌گاه از يكدیگر ( $S/W=4$ ) را نشان می‌دهد. از اين نمودارها مشخص است که علاوه بر زاويه دهانه شيار ( $\gamma$ )، دو پارامتر طول شيار ( $a$ ) و فاصله دو تكيه‌گاه از يكدیگر ( $S$ ) نیز بر مقدار ضريب هندسي مود I ( $Y_1^V$ ) کاملاً تأثير گذارند. همچنين، نمودارهای ۴ تا ۹ نشان می‌دهند که براي مقدار ثابتی از زاويه دهانه شيار و در فاصله يکسان دو تكيه‌گاه از يكدیگر، با افزايش طول شيار، مقدار  $Y_1^V$  افزايش می‌يابد. اين نتيجه قابل پيش‌بینی بود چرا که با افزايش طول شيار، به دليل کاهش سطح مقطع تحمل ممان خمشی در محل شيار، مقاومت خمشی قطعه در اين محل کاهش يافته و در نتيجه مقدار تنش و ضريب شدت تنش افزايش می‌يابد.

با توجه به شكل ۱۰، مشاهده می‌شود که براي شيارهای با زاويه دهانه ثابت و طول يکسان، با افزايش فاصله تكيه‌گاه‌ها از يكدیگر، مقدار  $Y_1^V$  نیز به صورت خطی افزايش می‌يابد چرا که فاصله بيشتري بين دو تكيه‌گاه (زياد شدن بازوی خمش) منجر به ايجاد ممان خمشی بزرگ‌تری در نزديکی نوک شيار و در نتيجه بازشدگی بيشتري دهانه می‌شود. مورد ديگری که در شكل ۱۰ می‌توان مشاهده نمود اين است که در يك زاويه ثابت دهانه شيار، هرچه فاصله تكيه‌گاه‌ها از يكدیگر بيشتري می‌شود شدت افزايش  $Y_1^V$  به ازاي افزايش طول شيار نیز بيشتري می‌شود.

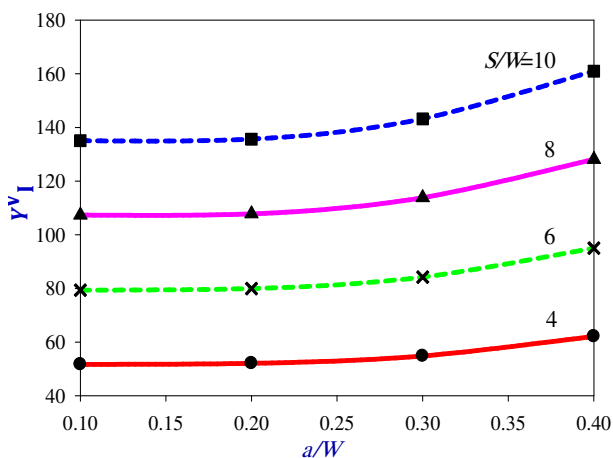
با توجه به شكل ۱۱، مشاهده می‌شود که در فواصل ثابت دو تكيه‌گاه از يكدیگر و طول يکسان شيار، با افزايش زاويه دهانه شيار از ۱۰ درجه تا ۴۵ درجه، مقدار  $Y_1^V$  تغيير چشمگیری نمی‌کند. اين تغيير تنها بين ۱ تا ۲ درصد است که می‌توان از آن چشم‌پوشي نمود، اما با تغيير زاويه دهانه شيار از ۴۵ درجه تا ۹۰ درجه با افزايش تقريباً ۲۵ درصدی  $Y_1^V$  مواجه می‌شویم که مقدار قابل توجهی است. بنابراین، براي آزمایش قطعه خمش سه‌نقطه‌ای در چنين شرايطی، می‌توان تنها یک نمونه قطعه را براي زاويه دهانه شيار کمتر از ۴۵ درجه آزمایش کرد و از حجم آزمایش‌ها کم نمود.



شكل ۷ تغييرات  $Y_1^V$  بر حسب طول شيار به ازاي مقادير مختلف فاصله تكيه‌گاه‌ها از يكدیگر (زاويه دهانه شيار، ۴۵ درجه)



شكل ۸ تغييرات  $Y_1^V$  بر حسب طول شيار به ازاي مقادير مختلف فاصله تكيه‌گاه‌ها از يكدیگر (زاويه دهانه شيار، ۶۰ درجه)



شكل ۹ تغييرات  $Y_1^V$  بر حسب طول شيار به ازاي مقادير مختلف فاصله تكيه‌گاه‌ها از يكدیگر (زاويه دهانه شيار، ۹۰ درجه)

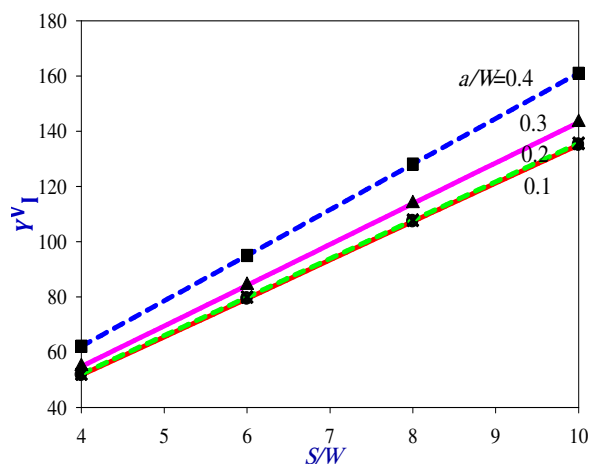
برای اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، بررسی پایداری و اعتبار مدل اجزاء محدود استفاده شده جهت محاسبه ضرایب شدت تنش قطعه خمش سه نقطه‌ای، ضروری می‌باشد. برای تحلیل پایداری نتایج، روی مدل‌های اجزاء محدود، مطالعات حساسیت المان‌بندی با اندازه‌های متفاوت المان صورت گرفت تا زمانی که ضرایب شدت تنش شیار به دست آمده با کوچک‌تر شدن اندازه المان‌ها تغییری نکردند. علاوه بر این، به منظور ارزیابی اعتبار نتایج، نتایج عددی اندک موجود برای قطعه خمش سه نقطه‌ای [۳۴، ۹] با نتایج به دست آمده در این مقاله مقایسه شدند. مراجع [۹] و [۳۴]، ۹ حالت مشابه با ۹۶ حالت بررسی شده در این مقاله را مدلسازی و تحلیل نموده و نتایج خود را برحسب پارامتر  $K_I^V tW^3/6P$  بیان کرده‌اند. با استفاده از معلومات این مراجع، نتایج آن‌ها به ضریب هندسی مود I  $(Y_I^V)$  که در این مقاله از آن استفاده شده تبدیل شده است. جدول ۳ ابعاد هندسی و ضرایب هندسی قطعه‌های مقایسه شده و درصد اختلاف بین نتایج را نشان می‌دهد. پارامتر هندسی  $S/W$  برای همه نمونه‌های مقایسه شده برابر با ۴ می‌باشد. در جدول ۳، پارامتر  $\Delta$  درصد اختلاف بین نتایج این مقاله و نتایج ارائه شده در مقالات [۱۶] و [۲۵] را نشان می‌دهد. این پارامتر مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \frac{Y_{I,P}^V - Y_{I,L}^V}{Y_{I,P}^V} \times 100 \quad (7)$$

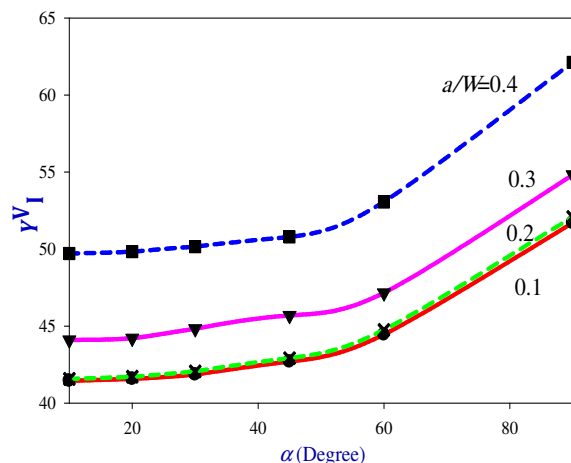
در معادله (۷) زیرنویس‌های  $L$  و  $P$  به ترتیب معرف نتایج ضریب هندسی  $Y_I^V$  مقاله حاضر و مقاله‌های دیگر است.

جدول ۳ پارامترهای هندسی قطعه TPB و درصد اختلاف بین نتایج مقاله حاضر و مراجع [۹، ۳۴]

$\Delta$ (%) [۳۴]	$\Delta$ (%) [۹]	$Y_I^V$ [۳۴]	$Y_I^V$ [۹]	$Y_I^V$ [P]	$a/W$	$\gamma$ (°)
۰/۰۷	-۰/۴۳	۴۱/۸۲	۴۲/۰۳	۴۱/۸۵	۰/۲	۳۰
۱/۲۴	۱/۳۱	۴۴/۴۹	۴۴/۴۶	۴۵/۰۵	۰/۳	۳۰
۰/۰۱	-۰/۱۲	۵۰/۱۰	۵۰/۲۱	۵۰/۱۵	۰/۴	۳۰
-۰/۲۵	-۰/۴۹	۴۴/۵۵	۴۴/۶۶	۴۴/۴۴	۰/۲	۶۰
-۰/۸۷	-۰/۱۳	۴۷/۵۶	۴۷/۲۱	۴۷/۱۵	۰/۳	۶۰
-۱/۲۸	-۰/۲۶	۵۳/۷۴	۵۳/۲۰	۵۳/۰۶	۰/۴	۶۰
۰/۰۹	-۰/۷۳	۵۱/۶۴	۵۲/۰۷	۵۱/۶۹	۰/۲	۹۰
-۲/۰۰	-۰/۵۳	۵۵/۹۲	۵۵/۱۱	۵۴/۸۲	۰/۳	۹۰
-۲/۶۲	-۱/۷۵	۶۳/۷۶	۶۳/۲۲	۶۲/۱۳	۰/۴	۹۰



شکل ۱۰ تغییرات  $Y_I^V$  بر حسب فاصله تکیه گاه‌ها از یکدیگر به ازای مقادیر مختلف طول شیار (زاویه دهانه شیار، ۹۰ درجه)



شکل ۱۱ تغییرات  $Y_I^V$  بر حسب زاویه دهانه شیار به ازای مقادیر مختلف طول شیار ( $S/W=4$ )

از شکل ۱۱، همچنین مشاهده می‌شود که در زاویه مشخصی از دهانه شیار و فاصله یکسان دو تکیه‌گاه از یکدیگر، با افزایش طول شیار، مقدار ضریب هندسی مود I یعنی  $Y_I^V$  افزایش می‌یابد، اما روند این افزایش از  $a/W=0.1$  تا  $a/W=0.2$  قابل ملاحظه نیست.

با بررسی تمامی نمودارها، می‌توان نتیجه گرفت که از بین سه پارامتر طول شیار، فاصله دو تکیه‌گاه از یکدیگر و زاویه دهانه شیار، پارامترهای طول شیار و زاویه دهانه شیار به ترتیب بیشترین و کمترین اثر را روی مقدار ضریب هندسی مود I  $(Y_I^V)$  دارند.

- Mixed Mode Loading", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 76, 2009, pp. 1883-1896.
- [4] Ayatollahi M. R., Torabi A. R., "Brittle Fracture in Rounded-Tip V-Shaped Notches", *Mater. Des.*, Vol. 31, No. 1, 2010, pp. 60-70.
- [5] Leguillon D., "Strength or Toughness? A Criterion for Crack Onset at a Notch", *Eur. J. Mech. A Solid*, Vol. 21, 2002, pp. 61-72.
- [6] Lazzarin P., Zambardi R., "A Finite-Volume-Energy Based Approach to Predict the Static and Fatigue Behavior of Components with Sharp V-Shaped Notches", *Int. J. Fract.*, Vol. 112, 2001, pp. 275-298.
- [7] Yosibash Z., Bussiba A., Gilad I., "Failure Criteria for Brittle Elastic Materials", *Int. J. Fract.*, Vol. 125, 2004, pp. 307-333.
- [8] Gross B., Mendelson A., "Plane Elastostatic Analysis of V-notched Plates", *NASA Technical Note*, NASA TN D-6040, 1970.
- [9] Zhao Z., Hahn H. G., "Determining the SIF of a V-Notch from the Results of a Mixed-Mode Crack", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 43, No. 4, 1992, pp. 511-518.
- [10] Dunn M. L., Suwito W., "Fracture Initiation at Sharp Notches: Correlation using Critical Stress Intensities", *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 34, No. 29, 1997, pp. 3873-3883.
- [11] Gogotsi G. A., "Fracture Toughness of Ceramics and Ceramic Composites", *Ceram. Int.*, Vol. 29, 2003, pp. 777-784.
- [12] Shahani A. R., Tabatabaei S. A., "Computation of Mixed Mode Stress Intensity Factors in a Four-Point Bend Specimen", *Appl. Math. Model.*, Vol. 32, 2008, pp. 1281-1288.
- [13] Dunn M. L., Suwito W., Cunningham S., May C. W., "Fracture Initiation at Sharp Notches under Mode I, Mode II, and Mild Mixed Mode Loading", *Int. J. Fract.*, Vol. 84, 1997, pp. 367-381.
- [14] Priel E., Bussiba A., Gilad I., Yosibash Z., "Mixed Mode Failure Criteria for Brittle Elastic V-Notched Structures", *Int. J. Fract.*, Vol. 144, 2007, pp. 247-265.
- [15] Gomez F. J., Elices M., "A Fracture Criterion for Sharp V-Notched Samples", *Int. J. Fract.*, Vol. 123, 2003, pp. 163-175.
- [16] Gomez F. J., Elices M., Palanas J., "The Cohesive Crack Concept: Application to PMMA at  $-60^{\circ}\text{C}$ ", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 72, 2005, pp. 1268-1285.
- [17] Berto F., Ayatollahi M. R., "Fracture Assessment of Brazilian Disc Specimens Weakened by Blunt V-Notches under Mixed Mode Loading by Means of Local Energy", *Mater. Des.*, Vol. 32, 2011, pp. 2858-2869.
- [18] Tseng A., "A three-Dimensional Finite Element Analysis of the Three-Point Bend Specimen" *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 13, 1980, pp. 939-943.

از جدول ۳ مشاهده می‌شود که نتایج مراجع [۹] و [۳۴] با حداکثر اختلاف ۲/۶۲ درصد، تطابق بسیار خوبی با نتایج این مقاله دارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش اجزاء محدود مورد استفاده برای محاسبه ضرایب هندسی و نتایجی که در شکل‌های ۴ تا ۱۱ نشان داده شده‌اند صحیح و معتبر می‌باشند.

## ۶- بحث و نتیجه‌گیری

برای مطالعه اثر هندسه و شرایط بارگذاری قطعه خمش سه‌نقطه‌ای شیاردار بر ضریب شدت تنش مود اول، این قطعه برای ۹۶ حالت متفاوت بارگذاری و هندسی توسط نرم‌افزار اجزاء محدود تحلیل شد و سپس با استفاده از نتایج این تحلیل و روش فرامعین ضرایب شدت تنش قطعات محاسبه شدند. سپس، نتایج به‌دست آمده در قالب نمودارهای مجزا بر حسب پارامتر بدون بعد "ضریب هندسی شیار" در مود اول بارگذاری  $(Y_I^V)$ ، برای زوایا، طول‌های مختلف شیار و فواصل مختلف دو تکیه‌گاه ارائه شد.

نشان داده شد که در قطعه خمش سه‌نقطه‌ای تحت بارگذاری مود I خالص هر کدام از سه پارامتر زاویه دهانه شیار  $(\gamma)$ ، طول شیار  $(a)$  و فاصله دو تکیه‌گاه از یکدیگر  $(S)$  (در صورت ثابت‌بودن دو پارامتر دیگر) با مقدار  $Y_I^V$  نسبت مستقیم دارند یعنی با افزایش هر کدام از این پارامترها،  $Y_I^V$  نیز افزایش و با کاهش آنها  $Y_I^V$  کاهش می‌یابد. همچنین، مشاهده شد که از بین این سه پارامتر  $(\gamma, a, S)$  پارامتر طول شیار بیشترین و پارامتر زاویه دهانه شیار کمترین تأثیر را روی مقدار  $Y_I^V$  دارند. در انتها، اعتبار و صحت روش ارائه‌شده برای محاسبه ضرایب هندسی شیار مورد ارزیابی قرار گرفت و تطابق بسیار خوبی بین نتایج مقاله حاضر و نتایج موجود در مقالات دیگر مشاهده شد.

## ۷- مراجع

- [1] Seweryn A., "Brittle Fracture Criterion for Structures with Sharp Notches", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 47, No. 5, 1994, pp. 673-681.
- [2] Ayatollahi M. R., Torabi A. R., Azizi P., "Experimental and Theoretical Assessment of Brittle Fracture in Engineering Components Containing a Sharp V-Notch", *Exp. Mech.*, Vol. 51, No. 6, 2011, pp. 919-932.
- [3] Ayatollahi M. R., Torabi A. R., "A Criterion for Brittle Fracture in U-Notched Components under



- Finite Element Analysis”, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, Vol. 34, No. 3, 2011, pp. 159-176.
- [30] Xiao Q. Z., Karihaloo B. L., Liu X. Y., “Direct Determination of SIF and Higher Order Terms of Mixed Mode Cracks by a Hybrid Crack Element”, *Int. J. Fract.*, Vol. 125, 2004, pp. 207-225.
- [31] Durig B., Zhang F., McNeill S. R., Chao Y. J., Peters W. H., “A Study of Mixed Mode Fracture by Photoelasticity and Digital Image Analysis”, *Opt. Laser Eng.*, Vol. 14, No. 3, 1991, pp. 203-215.
- [32] Noda N. A., Kihara T. A., “Variation of the Stress Intensity Factor Along the Front of a 3-D Rectangular Crack Subjected to Mixed-Mode Load”, *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 72, 2002, pp. 599-614.
- [33] Xuan Z. C., Khoo B. C., Li Z. R., “Computing Bounds to Mixed-Mode Stress Intensity Factors in Elasticity”, *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 75, 2006, pp. 193-209.
- [34] Gross B., Mendelson A., “Plane Elastostatic Analysis of V-Notched Plates”, *Int. J. Fract. Mech.*, Vol. 8, 1972, pp. 267-276.
- [35] Lin K. Y., Tong P., “Singular Finite Element for the Fracture Analysis of V-Notched Plate”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, 1980, pp. 1343-1354.
- [36] Carpenter W. C., “Mode I and mode II Stress Intensities for Plates with Cracks of Finite Opening”, *Int. J. Fract.*, Vol. 26, 1984, pp. 201-214.
- [37] Stern M., Becker E. B., Dunham R. S., “A Contour Integral Computation of Mixed Mode Stress Intensity Factors”, *Int. J. Fract.*, Vol. 12, 1976, pp. 359-368.
- [38] Ayatollahi M. R., Nejadi M., “Determination of NSIFs and Coefficients of Higher Order Terms for Sharp Notches using Finite Element Method”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 53, 2011, pp. 164-177.
- [39] Williams M. L., “Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Plates In Extension”, *J. Appl. Mech.*, Vol. 19, 1952, pp. 526-528.
- [40] Gross B., Srawley J. E., *Stress-Intensity Factors for Three-Point Bend Specimens by Boundary Collocation*, NASA TN D-3092, National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C., 1965.
- [19] Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A., “Generalized Fracture Toughness for Specimens with Re-Entrant Corners: Experiments Vs. Theoretical Predictions”, *Struct. Eng. Mech.*, Vol. 32, No. 5, 2009, pp. 609-620.
- [20] Yao X. F., Yeh H. Y., Xu W., “Fracture Investigation at V-Notch Tip using Coherent Gradient (CGS)”, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 43, 2006, pp. 1189-1200.
- [21] Nallathambi P., Karihaloo B. L., “Stress Intensity Factor and Energy Release Rate for Three-Point Bend Specimens”, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 25, No. 3, 1986, pp. 315-321.
- [22] Pinho S. T., Robinson P., Iannucci L., “Developing a Four Point Bend Specimen to Measure the Mode I Intralaminar Fracture Toughness of Unidirectional Laminated Composites”, *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 69, 2009, pp. 1303-1309.
- [23] Kudari S. K., Sharanaprabhu C. M., “On the Relationship between Stress Intensity Factor (K) and Minimum Plastic Zone Radius (MPZR) for Four Point Bend Specimen under Mixed Mode Loading”, *Int. J. Eng. Sci. Technol.*, Vol. 2, No. 5, 2010, pp. 13-22.
- [24] He M. Y., Cao H. C., Evans A. G., “Mixed-Mode Fracture: the Four-Point Shear Specimen”, *Acta Metall. Mater.*, Vol. 38, No. 5, 1990, pp. 839-846.
- [25] Fett T., “Stress Intensity Factors for Edge Crack Subjected to Mixed Mode Four-Point Bending” *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 15, 1991, pp. 99-104.
- [26] Tong P., Pian T. H. H., Lasry S. J., “A Hybrid Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 7, 1973, pp. 297-308.
- [27] Sanford R. J., Dally J. W., “A General Method for Determining Mixed-Mode Stress Intensity Factors from Isochromatic Fringe Patterns”, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 11, 1979, pp. 621-633.
- [28] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A., “Evaluation of Stress Field Parameters in Fracture Mechanics by Photoelasticity-Revisited”, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 56, 1997, pp. 25-45.
- [29] Ayatollahi M. R., Nejadi M., “An Over-Deterministic Method for Calculation of Coefficients of Crack Tip Asymptotic Field from