



روش بولتزمن شبکه‌ای برای مدلسازی محفظه‌های با مرز مایل و متحرک

محسن نظری^{۱*}، محمدحسن کیهانی^۲، حسنی شکری^۳

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، mnazari@shahroodut.ac.ir

چکیده- در این مقاله، جریان سیال پایا و تراکم‌ناپذیر در داخل یک محفظه دوبعدی به شکل‌های مثلث قائم‌الزاویه، دوزنقه و محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی و نیم‌دایره، با وجود دیواره متحرک با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. تاثیر شکل هندسی محفظه بر الگوی جریان نیز مورد بحث قرار گرفته است. برای محفظه مثلثی، نیم‌دایره و محفظه‌ای با دیواره دایروی، تاثیر تغییرات عدد رینولدز بر الگوی جریان بررسی شده است. در محفظه با دیواره دایروی، ملاحظه می‌شود که با تغییر اندازه دیواره‌های بالا و پایین محفظه، که به معنی تغییر در اندازه کمان‌های جدا شده از دایره است، الگوی جریان کاملاً متفاوتی شکل می‌گیرد. برای محفظه دوزنقه‌ای در عدد رینولدز ثابت، تاثیر زاویه اضلاع بر روی الگوی جریان نیز بررسی شده است. با افزایش زاویه اضلاع در محفظه دوزنقه‌ای، گردابه پایین محفظه پهن‌تر و سرانجام به دو گردابه مجزا تقسیم می‌شود. نتایج به دست آمده از روش بولتزمن شبکه‌ای، با نتایج موجود، مقایسه و اعتبارسنجی شده است. روش بولتزمن شبکه‌ای، روشی مناسب و کارا برای مدلسازی جریان در این نوع محفظه‌هاست.

کلیدواژگان: روش بولتزمن شبکه‌ای، دقت مرتبه دوم، دیواره مایل، دیواره متحرک

LBM for modeling cavities with curved and moving boundaries

M. Nazari^{1*}, M. H. Kayhani², H. Shokri³

1- Assis. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

3- MSc. Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, mnazari@shahroodut.ac.ir

Abstract- In this paper, steady incompressible flow patterns inside two-dimensional triangle, trapezoidal, semi-circular and arc-square cavities with moving boundaries are studied via lattice Boltzmann method. The effects of geometry of the cavities on flow pattern are also discussed. The effects of Reynolds number on the flow patterns in triangular, semi-circular and arc-square cavities are studied. Also, for arc-square cavity, it can be observed that by changing the size of top and bottom walls which means a change in the size of cut arcs from the circular, different flow patterns are formed. The influences of the side angles at constant Reynolds number on the flow patterns in the trapezoidal cavities are investigated. It is found out that the vortex near the bottom wall of trapezoidal cavity breaks up into two smaller vortices as side angles increase. The obtained results of the lattice Boltzmann method and the presented boundary condition are compared with those presented in the literature. It can be seen that the lattice Boltzmann method is a suitable method for flow simulation in the mentioned cavities.

Keywords: Lattice Boltzmann Method, Second Order Precision, Curved Boundary, Moving Boundary

۱- مقدمه

بررسی جریان در محفظه‌ای که دیوار بالایی آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند از مسائل کلاسیک و شناخته‌شده‌ای است که اغلب برای بررسی دقت و کارایی روش‌های عددی در حل مسائل ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر در هندسه‌های ساده به کار می‌رود. در دهه‌های اخیر روش‌های مختلفی برای حل این مسئله به کار رفته است که می‌توان به روش المان محدود، روش اختلاف محدود و روش بولتزمن شبکه‌ای^۱ اشاره کرد [۱-۳].

در سال‌های اخیر روش بولتزمن شبکه‌ای در تحلیل جریان سیال به‌عنوان راه کارآمد جایگزین برای روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، رشد چشم‌گیری داشته است. روش بولتزمن شبکه‌ای بر پایه مدل میکروسکوپی استوار است که در آن مجموعه رفتار ذرات در یک سیستم، برای شبیه‌سازی مکانیک پیوسته از یک سیستم به کار گرفته می‌شود [۴]. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، محاسبات ساده‌تر، سهولت اعمال شرایط مرزی و قابلیت موازی‌شدن است که برای حل مسائلی با هندسه پیچیده، دارای کاربرد فراوانی است [۵-۶].

در سال ۱۹۹۵، هو و همکارانش [۷] نتایج حاصل از روش بولتزمن شبکه‌ای را در یک محفظه مربعی دوبعدی با سایر روش‌های موجود مقایسه و کارایی این روش را اثبات کردند. از آن به بعد تحقیقات زیادی برای حل مسئله بیان‌شده در محفظه‌های مربعی با ابعاد مختلف با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای انجام شده است. از جمله می‌توان به کارهای پاتیل و همکارانش [۸] و لین و همکارانش [۹] اشاره کرد. پاتیل ساختار گردابه‌ها در یک محفظه مربعی با نسبت ارتفاع به پهناهای مختلف که از ۱/۵ به ۴ تغییر می‌کرد را در اعداد رینولدز ۵۰ تا ۳۲۰۰ مورد بررسی قرار داد. در کار لین نیز در همین نسبت در اعداد رینولدز ۱۰۰ تا ۷۵۰۰ ساختار گردابه‌ها و سرعت در خط مرکزی محفظه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. جریان‌های واقعی در طبیعت و صنعت اغلب در هندسه‌های پیچیده‌تری دیده می‌شود. مثلاً در محفظه‌های به‌شکل دوزنقه یا مثلث و یا در محفظه‌هایی با دیواره منحنی. ساختار گردابه‌ها در این محفظه‌ها تفاوت زیادی با یک محفظه مربعی دارد، اما متأسفانه کارهای کمی تاکنون در این زمینه انجام شده است. لی [۱۰] و

گاسکل [۱۱] به حل این مسئله در یک محفظه مثلثی پرداختند. مککویین [۱۲] و پارامن [۱۳] جریان در یک محفظه دوزنقه‌ای را بررسی کردند که در تمام این مطالعات از روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی برای شبیه‌سازی جریان استفاده شده است. با توجه به مزایای یادشده برای روش بولتزمن شبکه‌ای، استفاده از این روش برای شبیه‌سازی این محفظه‌ها مناسب به نظر می‌رسد. فودهایل [۱۴] از روش بولتزمن شبکه‌ای در یک محفظه مثلثی قائم‌الزاویه در اعداد رینولدز بالا استفاده کرد. همچنین، ژانگ جریان در محفظه دوزنقه‌ای را با این روش مورد بررسی قرار داد [۱۵]. هر چند شبیه‌سازی الگوی جریان در محفظه مثلثی و دوزنقه‌ای با روش بولتزمن شبکه‌ای قبلاً مورد بررسی قرار گرفته است، اما بنابر دلایلی که در بخش‌های بعد بیان خواهد شد، در این مطالعه مجدداً بررسی شده‌اند. همچنین، الگوی جریان در محفظه با دیواره دایروی به روش بولتزمن شبکه‌ای برای اولین بار در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

جریان لزج چرخشی، در محفظه‌ای که دیواره بالایی آن به‌صورت مماس، خطی و پایا رانده می‌شود، موقعیتی مناسب برای بررسی و مطالعه بسیاری پدیده‌های اساسی برای جریان تراکم‌ناپذیر مانند گردابه‌های گوشه‌ای^۲، گردابه‌های طولی^۳، گردابه‌های تیلور گورتلر لایک^۴، حالت گذرا و شرایط آشفته است. از طرفی، جریان در محفظه‌ای با دیواره متحرک از جمله مسائلی است که اغلب در کاربردهای مهندسی با آن مواجه می‌شویم. از جمله این کاربردها می‌توان به خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی، سیستم خشک‌کردن و مطالعات ژئوفیزیک اشاره کرد. برای جزئیات بیشتر می‌توان به مطالعات شانکار [۱۶]، شریف [۱۷] و ازتاب [۱۸] مراجعه کرد. همچنین، این موضوع از مسائل مهم در علوم کاربردی ریاضی برای به‌دست آوردن نتایج پنج‌مارک^۵ از کدهای نوشته‌شده است که در کارهای مانسوتی [۱۹]، جیا [۲۰] و برونو [۲۱] آورده شده است.

۲- بولتزمن شبکه‌ای

مدل بولتزمن شبکه‌ای از روش گاز شبکه‌ای منشا گرفته است. نخستین بار هاردی، پومیو و پازیس در سال ۱۹۷۶، اولین مدل

2. Corner vortices
3. Longitudinal vortices
4. Taylor-Gortler-Like (TGL) vortices
5. Benchmark

1. Lattice Boltzmann

$$f_{\alpha}^{\sim}(\bar{x}, t) - f_{\alpha}(\bar{x}, t) = -\frac{1}{\tau_v} [f_{\alpha}(\bar{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\bar{x}, t)] \quad (2)$$

$$f_{\alpha}(\bar{x} + \bar{e}_{\alpha} \delta t, t + \delta t) = f_{\alpha}^{\sim}(\bar{x}, t) \quad (3)$$

مرحله جاری شدن بلافاصله پس از مرحله برخورد شروع شده و توابع توزیع در جهت سرعت خود به سمت گره‌های مجاور حرکت می‌کنند. در این معادلات \bar{e}_{α} بردار سرعت ذرات در جهت α است که با استفاده از مدل D_2Q_9 ، به صورت زیر قابل بیان است [27]:

$$e_{\alpha} = \begin{cases} (0,0) & \alpha=9 \\ ([\cos[(\alpha-1)\pi/2], (\sin[(\alpha-1)\pi/2])c] & \alpha=1,2,3,4 \\ \sqrt{2}([\cos[(\alpha-5)\pi/2+\pi/4], (\sin[(\alpha-5)\pi/2+\pi/4])c] & \alpha=5,6,7,8 \end{cases} \quad (4)$$

که $c = \delta x / \delta t$ سرعت جاری شدن در بولتزمن شبکه‌ای است، δx معرف اندازه شبکه و δt گام زمانی می‌باشد. در معادله (1) معرف زمان آرامش بدون بعد است.

در معادله (1) تابع توزیع تعادلی $f_{\alpha}^{eq}(\bar{x}, t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{\alpha}^{eq}(\bar{x}, t) = \omega_{\alpha} \rho [1 + \frac{3}{c^2} (\bar{e}_{\alpha} \cdot \bar{u}) + \frac{9}{2c^2} (\bar{e}_{\alpha} \cdot \bar{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \bar{u}^2] \quad (5)$$

که در این معادله \bar{u} و ρ به ترتیب سرعت و چگالی ماکروسکوپی است. ω_{α} تابع وزنی است که در مدل D_2Q_9 برابر است با:

$$\omega_{\alpha} = \begin{cases} 4/9 & \alpha=9 \\ 1/9 & \alpha=1,2,3,4 \\ 1/36 & \alpha=5,6,7,8 \end{cases} \quad (6)$$

مقادیر ماکروسکوپی، چگالی و سرعت نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^9 f_{\alpha} \quad (7)$$

$$\rho \bar{u} = \sum_{\alpha=1}^9 \bar{e}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (8)$$

به کمک آنالیز چاپمن-انسکوگ می‌توان نشان داد که معادله مومنوم و بقای جرم از معادله (1) قابل استخراج است [20]:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u} \quad (10)$$

گاز شبکه‌ای را برای شبیه‌سازی جریان سیال ارائه نمودند [22]. این مدل در سال ۱۹۸۶ توسط فریش و همکارانش بهبود یافت [23]. معادله بولتزمن شبکه‌ای اولیه در سال ۱۹۸۸ توسط مک نامارا و زانتی [24] برای پاسخگویی به یکی از مشکلات اصلی روش گاز شبکه‌ای ایجاد شد و آن مشکل اغتشاشات آماری بود. اندکی بعد آشکار شد که بولتزمن شبکه‌ای می‌تواند اغلب مشکلات دیگر روش گاز شبکه‌ای را نیز به طور طبیعی برطرف کند. بنابراین روش بولتزمن شبکه‌ای به سرعت به یک موضوع مستقل تحقیقاتی تبدیل شد و معایب باقی مانده روش گاز شبکه‌ای یک به یک برطرف گردید. از آن جمله می‌توان به کارهای هیگورا و جیمنز در سال ۱۹۸۹ [25] اشاره کرد. به این ترتیب رایج‌ترین مدل بولتزمن شبکه‌ای، که برای تحلیل جریان‌های سیال به کار می‌روند، بیان شد. در این روش همانند روش‌های گاز شبکه‌ای، ذرات مجازی در روی یک شبکه منظم برخورد داده می‌شوند. ولی این بار به جای مشخص نمودن آرایش ذرات مجازی، احتمال حضور این ذرات در مسیرهای مختلف معرفی و استفاده می‌شود؛ یعنی این سوال مطرح می‌شود که احتمال حضور یک ذره اطراف موقعیت x در زمان t چقدر است؟ $f_{\alpha}(\bar{x}, t)$ چگالی احتمال و یا به طور ساده تر تابع توزیع نامیده می‌شود. در واقع در این روش، همانند روش گاز شبکه‌ای، تجدید آرایش ذرات طی مراحل برخورد و جاری شدن رخ می‌دهد و فقط به جای قواعد برخورد قبلی از معادله بولتزمن برای محاسبه توابع توزیع جدید استفاده می‌گردد.

هر چند مدل‌های روش بولتزمن شبکه‌ای مستقیماً از روش گاز شبکه‌ای منشأ گرفته شده است، هی و لو [26] نشان دادند که معادله بولتزمن شبکه‌ای می‌تواند مستقیماً از معادله پیوسته بولتزمن به دست آید و استقلال معادله بولتزمن شبکه‌ای را به صورت تئوری نشان دادند.

۲-۱- معادله بولتزمن برای تحلیل جریان

با استفاده از معادله بولتزمن، تغییرات تابع توزیع احتمال f به صورت زیر قابل بیان است [27]:

$$f_{\alpha}(\bar{x} + \bar{e}_{\alpha} \delta t, t + \delta t) - f_{\alpha}(\bar{x}, t) = -\frac{1}{\tau_v} [f_{\alpha}(\bar{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\bar{x}, t)] \quad (1)$$

در روش بولتزمن شبکه‌ای، این معادله شامل دو بخش است؛ مرحله برخورد (معادله ۲) و مرحله جاری شدن (معادله ۳):

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha}(\bar{x}_b, t) = & (1 - \chi) \tilde{f}_{\alpha}(\bar{x}_f, t) + \chi f_{\alpha}^*(\bar{x}_b, t) \\ & + 2\omega_{\alpha} \rho \frac{3}{c^2} \bar{e}_{\alpha} \cdot \bar{u}_{\omega} \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن χ فاکتور وزنی است که به Δ بستگی دارد. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^*(\bar{x}_b, t) = & f_{\alpha}^{(eq)}(\bar{x}_f, t) + \\ & \omega_{\alpha} \rho (x_f, t) \cdot \frac{3}{c^2} \bar{e}_{\alpha} \cdot (\bar{u}_{bf} - \bar{u}_f) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{bf} = & \bar{u}_{ff} = (\bar{x}_{ff}, t), \\ \chi = & \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau - 2)}, \text{ if } 0 \leq \Delta \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{bf} = & \frac{1}{2\Delta} (2\Delta - 3) \bar{u}_f + \frac{3}{2\Delta} \bar{u}_w, \\ \chi = & \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau - 1/2)}, \text{ if } \frac{1}{2} \leq \Delta \leq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

در معادلات بالا، $\bar{e}_{\alpha} = -\bar{e}_{\alpha}$ و $\bar{x}_{ff} = \bar{x}_f + \bar{e}_{\alpha} \delta t$ است. $\bar{u}_w = \bar{u}(x_w, t)$ سرعت سیال مجاور مرز و \bar{u}_{bf} سرعت دیوار مرزی و \bar{u}_{ff} معرف یک سرعت مجازی است.

با جاگذاری معادله (15) در (14) داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha}(\bar{x}_b, t) = & \tilde{f}_{\alpha}(\bar{x}_f, t) - \chi [f_{\alpha}(\bar{x}_f, t) - f_{\alpha}^{(eq)}(\bar{x}_f, t)] \\ & + \omega_{\alpha} \rho (\bar{x}_f, t) \frac{3}{c^2} \bar{e}_{\alpha} \cdot [\chi (\bar{u}_{bf} - \bar{u}_f) - 2\bar{u}_w] \end{aligned} \quad (18)$$

معادله بالا شرط عدم لغزش را با دقت مرتبه دو روی دیواره‌ها اعمال می‌کند.

۳- حل عددی و معتبرسازی نتایج

در این مقاله، به‌منظور معتبرسازی حل عددی، جریان سیال در داخل یک محفظه مثلثی قائم‌الزاویه و سپس در یک محفظه نوزنقه‌ای، محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی و محفظه‌ای به‌شکل نیم‌دایره، که دیوار بالایی آن‌ها با سرعت ثابت U از سمت راست به چپ حرکت می‌کند، بررسی خواهد شد. دو محفظه مثلثی در شکل ۲-الف برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۱۵۰۰ و ۲۰۰۰ مورد بررسی قرار گرفته است. تعداد نقاط شبکه برای این محفظه 400×400 در نظر گرفته شده است. محاسبات تا رسیدن به یک سرعت ثابت برای نقاط شبکه ادامه می‌یابد. همچنین، مشاهده شد که با افزایش تعداد نقاط شبکه تا 800×800 تغییری در نتایج رخ

در معادله (۱۰)، فشار p معادله حالت را ارضا می‌کند و برابر است با:

$$p = \rho \frac{c^2}{3} \quad (11)$$

ویسکوزیته سینماتیکی ν نیز از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\nu = (\tau_{\nu} - 0.5) c^2 / 3 \quad (12)$$

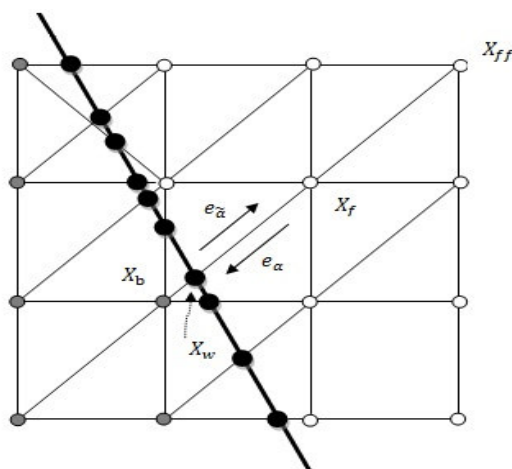
۲-۲- اعمال شرایط مرزی برای دیوار مایل

شکل ۱ نشان‌دهنده دیوار مایلی است که ناحیه جامد و سیال را از هم جدا می‌کند. دایره‌های سیاه نشان‌دهنده محل برخورد مرز با شبکه‌بندی (x_w) ، دایره‌های توخالی گره‌های سیال (x_b) و دایره‌های خاکستری نشان‌دهنده گره‌های جامد (x_f) می‌باشند. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، برای اعمال مرحله جاری‌شدن روی گره x_f ، به $\tilde{f}_{\alpha}(x_b, t)$ نیاز است. مقدار تابع توزیع بلافاصله پس از برخورد است.

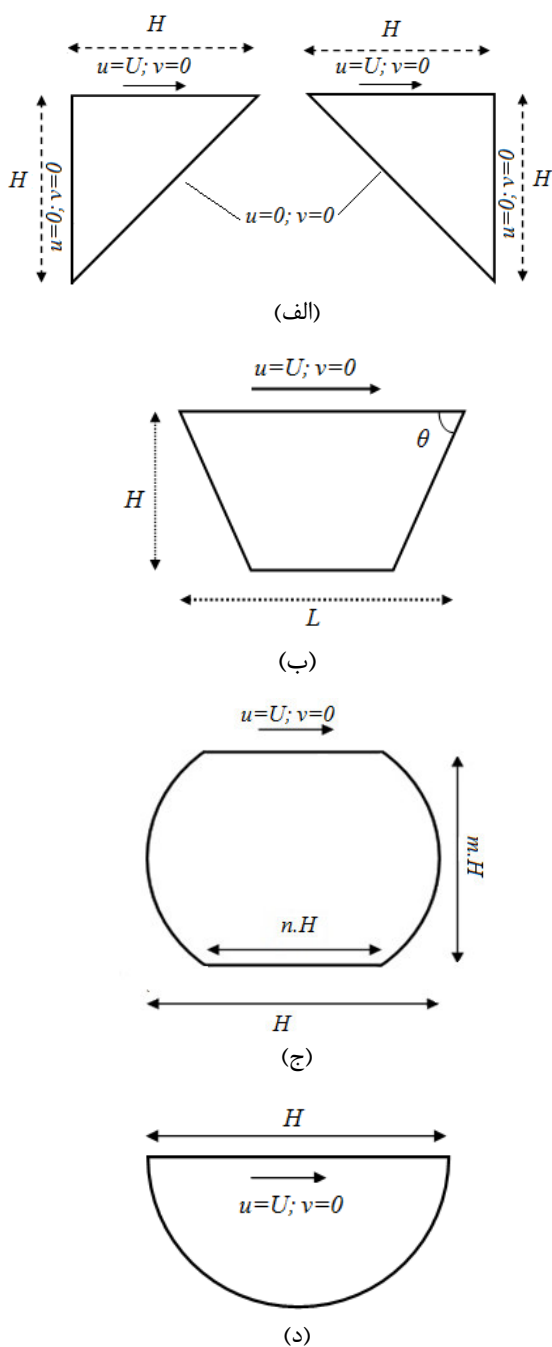
اگر Δ کسری از طول بین گره‌های سیال و جامد باشد که در داخل سیال واقع شده است، در این صورت داریم:

$$\Delta = \frac{|\bar{x}_f - \bar{x}_w|}{|\bar{x}_f - \bar{x}_b|} \quad (13)$$

هنگامی که گره‌های سیال روی مرز واقع شود $\Delta = 0$ است. برای تولید تابع توزیع پس از برخورد (\tilde{f}_{α}) ، می‌توان از اطلاعات گره‌های سیال مجاور مرز استفاده کرد و با استفاده از بسط چاپمن برای این تابع، سمت راست معادله (۲)، به‌شکل رابطه (۱۴) درمی‌آید (برای جزئیات بیشتر به مرجع ۲۷ مراجعه شود):



شکل ۱ نمایش دیوار مایل روی شبکه بندی



شکل ۲ (الف) هندسه محفظه مثلثی، (ب) هندسه محفظه دوزنقه‌ای، (ج) هندسه محفظه با دیواره دایروی، (د) هندسه محفظه نیم‌دایره‌ای

در مسئله حاضر بزرگی سرعت (u) در شبکه بولتزمن از مرتبه vRe/H است. بنابراین، انتخاب پارامترهای شبکه بولتزمن باید به‌گونه‌ای باشد که عدد ماخ w/c_s تا حد امکان کوچک شود. کوچک بودن عدد ماخ به معنی کوچک بودن خطای تراکم‌پذیری

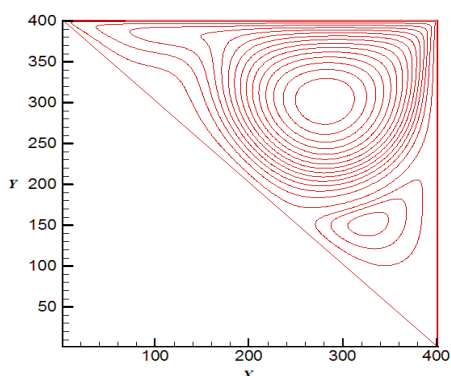
نمی‌دهد. محفظه دوزنقه‌ای در شکل ۲-ب با ابعاد $L=1$ و همچنین، $H = 0.57735$ انتخاب شده است. برای عدد رینولدز ۱۰۰۰، الگوی جریان در داخل محفظه برای زوایای مختلف اضلاع دوزنقه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. تعداد نقاط شبکه برابر 445×257 در نظر گرفته شده است و دیوار بالایی و پایینی در وسط گره‌های دو ردیف اول و آخر قرار داده شده است. محاسبات تا رسیدن به یک سرعت ثابت برای سیال، در مرکز محفظه تکرار می‌شوند. با در نظر گرفتن شبکه به تعداد 889×513 تغییر قابل ملاحظه‌ای در نتایج (شکل خطوط جریان و سرعت در خطوط مرکزی محفظه) مشاهده نخواهد شد و بنابراین نتایج از تعداد شبکه مستقل است. شکل ۲-ج نشان‌دهنده هندسه محفظه با دیواره دایروی است. شکل کلی محفظه نشان‌دهنده دایره‌ای است که کمان‌هایی از آن جدا شده است. در شبیه‌سازی جریان H برابر واحد در نظر گرفته شده است.

n بیانگر نسبت قاعده کمان‌های جدا شده به قطر دایره و m نسبت ارتفاع محفظه به قطر دایره است. الگوی جریان و سرعت در خطوط مرکزی گذرنده از مرکز محفظه برای اعداد رینولدز ۴۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ برای n مساوی ۰/۶ و ۰/۸ مورد بررسی قرار گرفته است.

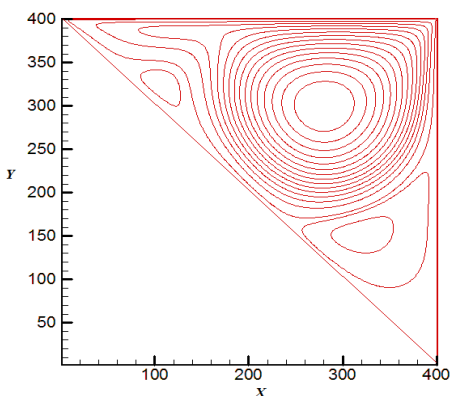
پارامتر m متناسب با این اعداد n به ترتیب برابر ۰/۸ و ۰/۶ خواهد بود. برای تحلیل این جریان شبکه مستطیلی با شبکه‌بندی 400×400 در نظر گرفته شده که مرکز محفظه در مرکز این شبکه‌بندی واقع می‌شود. بنابراین، برای این محفظه تعداد نقاط شبکه در راستای افق برابر ۴۰۰ و در راستای عمود، براساس کمان جدا شده تغییر می‌کند. برای این محفظه نیز ثابت شدن سرعت سیال در مرکز محفظه شرط هم‌گرایی قرار داده شده است. عدم تغییر در نتایج، با دوبرابر کردن تعداد نقاط شبکه، استقلال نتایج از شبکه‌بندی را نشان می‌دهد. شکل ۲-د نشان‌دهنده محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره است. H برای این محفظه برابر ۱ در نظر گرفته شده است. خطوط جریان برای اعداد رینولدز ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ رسم شده است. برای تحلیل این جریان از شبکه‌بندی 400×200 استفاده شده است. محاسبات تا رسیدن به یک سرعت ثابت ادامه می‌یابد. ملاحظه شد که با دوبرابر کردن تعداد گره‌ها نتایج تغییر نمی‌کند، بنابراین نتایج از شبکه‌بندی مستقل است. در تمامی هندسه‌های مورد بررسی U برابر ۰/۱ فرض شده است و عدد رینولدز به صورت $Re=UH/v$ تعریف می‌شود.

۳-۱- جریان در محفظه مثلثی

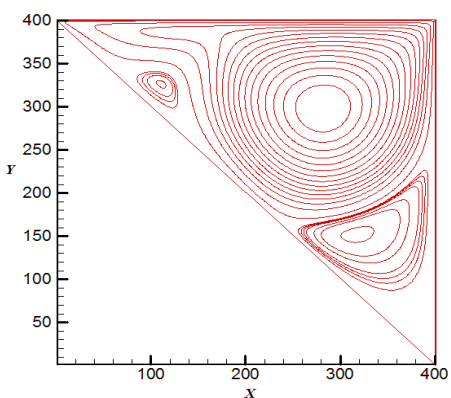
شکل ۴ نشان‌دهنده خطوط جریان برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۱۵۰۰ و ۲۰۰۰ در داخل یک محفظه مثلثی با زاویه قائمه در سمت راست است. همان‌گونه که مشخص است، با افزایش عدد رینولدز از ۱۰۰۰ به ۱۵۰۰، تعداد گردابه‌ها در داخل محفظه از ۲ به ۳ می‌رسد و مرکز گردابه اصلی به سمت راست جابه‌جا می‌شود.



(الف)



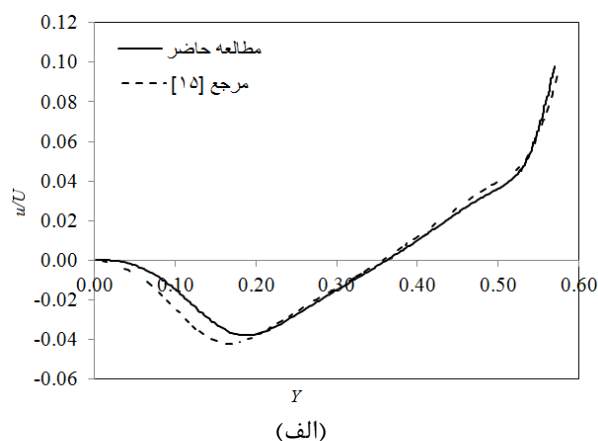
(ب)



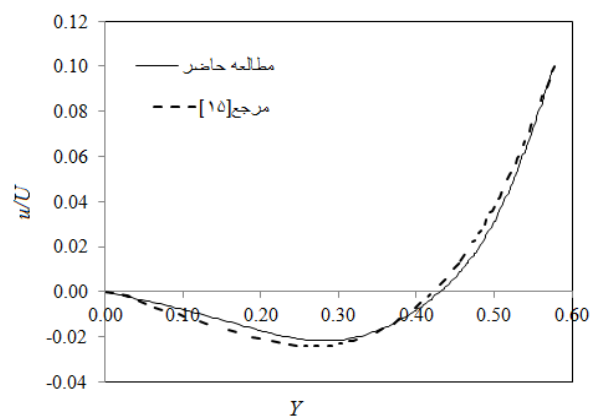
(ج)

شکل ۴ (الف) خطوط جریان در $Re=1000$ ، (ب) خطوط جریان در $Re=1500$ ، (ج) خطوط جریان در $Re=2000$

است. در این مسئله، عدد ماخ کوچک‌تر از ۰/۱ در نظر گرفته شده است. با این انتخاب مشکلی برای پایداری حل عددی نخواهیم داشت. مقایسه بین نتایج حاصل از این تحقیق و کار انجام‌شده توسط ژانگ و همکارانش [۱۵] در شکل ۳ نمایش داده شده است. در این شکل، زاویه θ برابر ۶۰ در نظر گرفته شده است. سرعت u/U در خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه برای عدد رینولدز ۱۰۰ و ۱۰۰۰ رسم شده است. در مطالعه ژانگ و همکارانش برای شبیه‌سازی جریان در محفظه دوزنقه‌ای از معادله بولتزمان شبکه‌ای به‌گونه‌ای استفاده شده که تابع توزیع تعادلی به‌جای چگالی براساس فشار تعریف می‌شود. در تحقیق حاضر، از روابط شامل چگالی استفاده شده است. همچنین، برخلاف این مرجع، دیواره‌های بالایی و پایینی محفظه در بین گره‌ها قرار داده شده تا صحت روابط در حالت کلی سنجیده شود، شکل ۳ انطباق مناسب بین نتایج این مطالعه و مرجع [۱۵] را نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

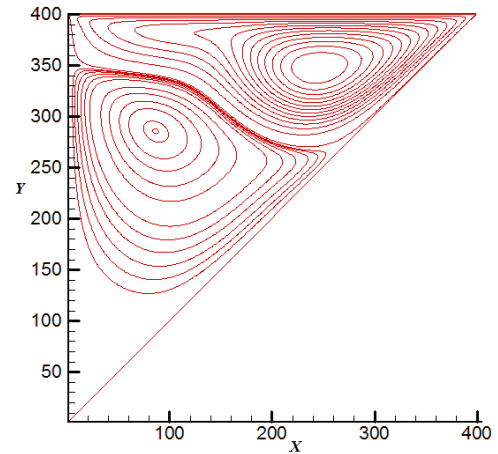
شکل ۳ سرعت در خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه دوزنقه‌ای شکل، (الف) $Re=1000$ ، (ب) $Re=1500$

در این محفظه نیز همانند محفظه شکل ۴، با افزایش عدد رینولدز، تعداد گردابه‌ها افزایش یافته و مرکز گردابه اولیه به سمت راست حرکت می‌کند که به دلیل وجود نیروهای اینرسی (ناشی از حرکت صفحه) در مقابل لزجی، انتظار همین جهت حرکت منطقی است. می‌توان مشاهده کرد که در این محفظه، با افزایش عدد رینولدز اندازه گردابه بالایی کوچک‌تر شده و گردابه سوم در پایین محفظه تشکیل می‌گردد، در حالی که در شکل ۴ گردابه سوم در کنار دیوار مایل و تقریباً بالای محفظه شکل گرفته است. البته، از نظر فیزیکی، تشکیل گردابه در مجاورت دیواره سمت راست و دور از گوشه نوک تیز محفظه (وقتی زاویه قائمه در سمت راست واقع است)، منتهی است، زیرا در مجاورت این دیواره، عامل موثری برای کاهش مومنتوم سیال در حین حرکت وجود ندارد. در مقابل، در سمت چپ، در حین حرکت سیال روی دیواره مایل (سمت چپ، شکل ۴)، با گرادیان فشار مخالف روبه‌رو هستیم. علت تشکیل گردابه سوم روی دیواره مایل می‌تواند به همین دلیل باشد. در حالتی که زاویه قائمه مثلث در سمت چپ واقع است، یک گردابه نامتقارن در بالای محفظه مشاهده می‌شود. به وضوح می‌توان دید که ساختار گردابه‌ها در شکل‌های ۴ و ۵ کاملاً با هم متفاوت است و شکل خطوط جریان در داخل محفظه به هندسه آن وابسته است.

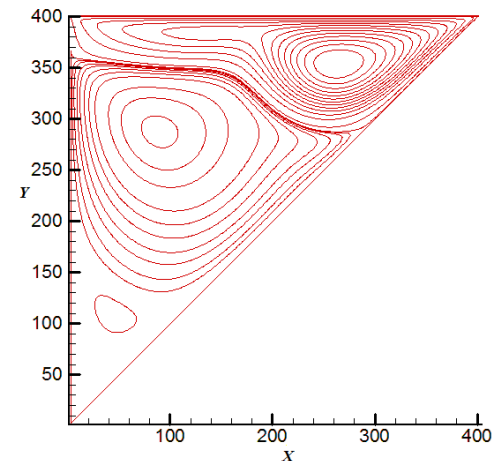
۲-۳- جریان در محفظه دوزنقه‌ای

به منظور مشاهده اثر زاویه θ بر روی ساختار گردابه‌ها در یک محفظه دوزنقه‌ای، خطوط جریان در عدد رینولدز ثابت ۱۰۰۰ در زوایای مختلف θ در شکل ۶ نشان داده شده است. هنگامی که زاویه θ برابر ۵۰ درجه است، کوچک بودن دیوار پایینی، این محفظه را به یک محفظه مثلثی شبیه می‌کند. برای این مورد دو گردابه اولیه در محفظه مشاهده می‌شود که مشابه ساختار گردابه‌ها در یک محفظه مثلثی است. با افزایش θ ، طول ضلع پایینی محفظه بزرگ‌تر شده و در نتیجه توزیع فشار در بخش بالایی محفظه (گردابه‌ی اولیه)، گردابه پایینی (گردابه ثانویه) پهن‌تر می‌شود. زمانی که این زاویه به حدود ۶۰ می‌رسد، دو گردابه مجزا با اندازه‌های متفاوت قابل تشخیص است.

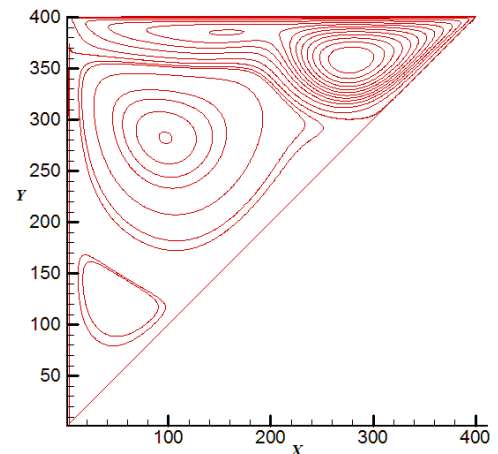
در شکل ۵ خطوط جریان برای محفظه مثلثی با زاویه قائمه در سمت چپ نشان داده شده است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۵ (الف) خطوط جریان در $Re=1000$. (ب) خطوط جریان در $Re=1500$. (ج) خطوط جریان در $Re=2000$

مشاهده نمود که اندازه گردابه گوشه راست، کوچک‌تر و گردابه گوشه چپ، بزرگ‌تر خواهد شد. در زاویه ۷۵ درجه، گردابه سمت چپ به اندازه بزرگتر از گردابه سمت راست خواهد رسید. علاوه بر این مرکز گردابه سمت چپ به طرف خط افقی گذرنده از مرکز محفظه جابه‌جا می‌شود.

۳-۳- جریان در محفظه با دیواره‌های دایروی

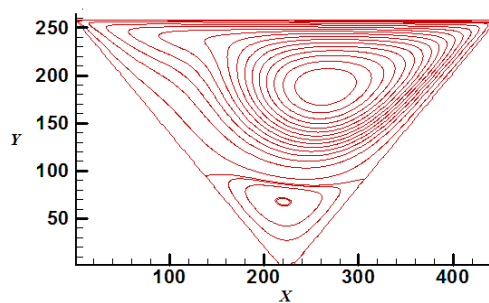
بررسی جریان در محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی و دیوار بالایی متحرک، شکل ۲-ج، از جمله مسائلی است که تاکنون کمتر به آن پرداخته شده است.

۳-۳-۱- حالت اول: n برابر ۰/۶

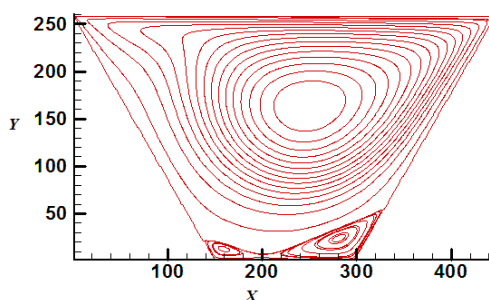
شکل ۷ نشان‌دهنده خطوط جریان در محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی برای عدد n برابر ۰/۶ است. شکل ۷-الف خطوط جریان را برای این محفظه، در عدد رینولدز ۴۰۰ نمایش می‌دهد. در این عدد رینولدز تنها یک گردابه در محفظه مشاهده می‌شود. با افزایش عدد رینولدز، گردابه دیگری در پایین محفظه، گوشه چپ شکل می‌گیرد.

شکل‌های ۷-ب و ج نشان می‌دهند که با افزایش عدد رینولدز، این گردابه بزرگ می‌شود و مرکز آن به سمت دیوار بالا و سمت چپ محفظه حرکت می‌کند. در واقع با افزایش عدد رینولدز در محفظه بسته، انتقال مومنوم از مرز بالایی به سیال افزایش می‌یابد. سیال طی مسیر منحنی با کاهش مومنوم روبه‌رو می‌شود. این عامل، به همراه گرادیان فشار معکوس سبب جدایش سیال شده و در ادامه، موجب برگشت جریان و ایجاد گردابه‌ای در خلاف جهت گردابه اول می‌گردد. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، گردابه ثانویه نیز رشد خواهد کرد. همچنین، سرعت در خطوط افقی و عمودی گذرنده از مرکز این محفظه در شکل ۸ ارائه شده است.

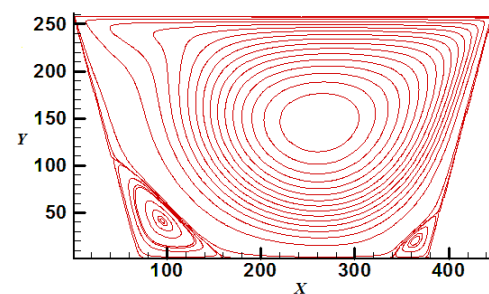
می‌توان مشاهده نمود که با افزایش عدد رینولدز، اندازه سرعت بیشینه در محفظه افزایش یافته است. در مقایسه با محفظه ذوزنقه‌ای شکل، در گوشه سمت راست، شاهد ایجاد گردابه نیستیم که به دلیل خط جریانی شدن محفظه (با دیواره دایروی) در این نقاط می‌باشد.



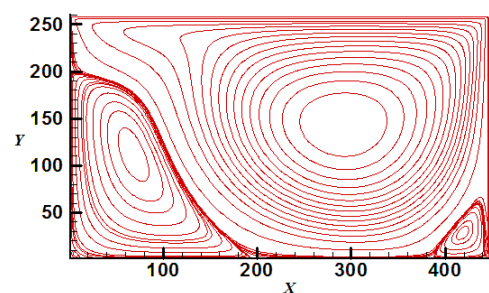
(الف)



(ب)



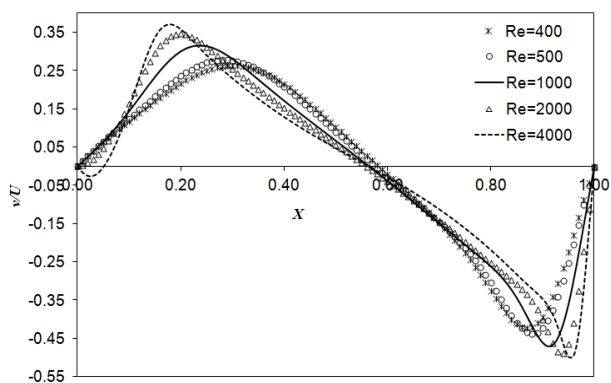
(ج)



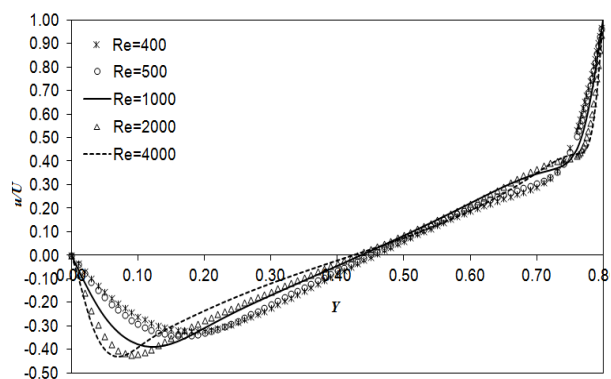
(د)

شکل ۶ (الف) خطوط جریان در $\theta = 50$ ، (ب) خطوط جریان در $\theta = 60$ ، (ج) خطوط جریان در $\theta = 75$ ، (د) خطوط جریان در $\theta = 90$

در آغاز، اندازه گردابه سمت راست از گردابه سمت چپ بزرگ‌تر است، ولی با افزایش بیشتر زاویه، می‌توان



(الف)

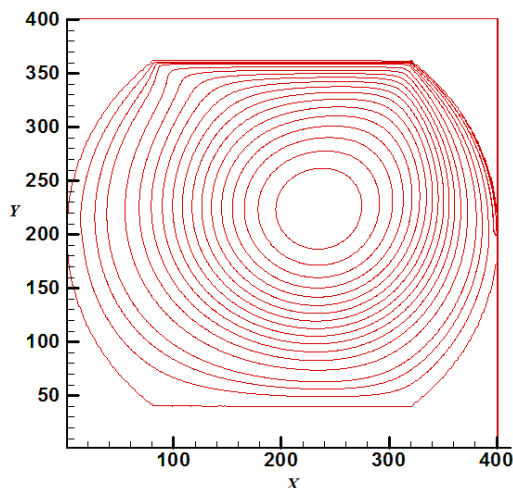


(ب)

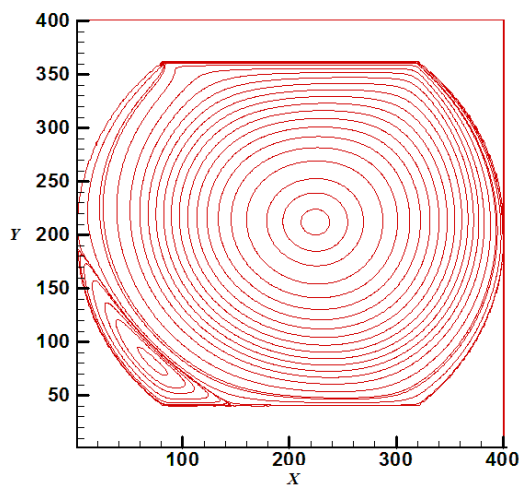
شکل ۸ (الف) تغییرات اندازه سرعت (v/U) در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه، (ب) تغییرات اندازه سرعت (u/U) در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه $n=0/6$

۳-۲-۳- حالت دوم: n برابر $0/8$

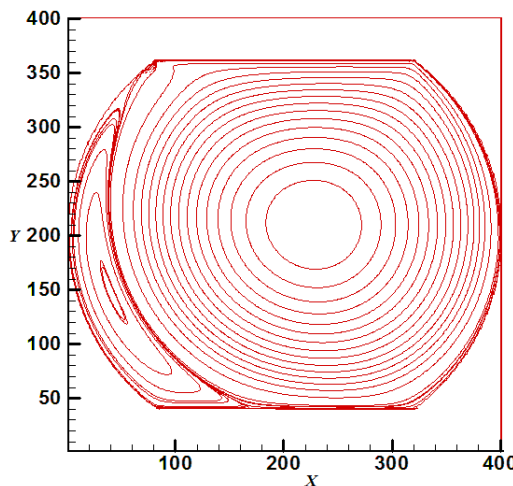
خطوط جریان در محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی با عدد n برابر $0/8$ در اعداد رینولدز ۴۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ در شکل ۹ نمایش داده شد است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، در این محفظه، در عدد رینولدز ۴۰۰، برخلاف حالت قبل، دو گردابه شکل گرفته است. با افزایش عدد رینولدز، گردابه گوشه سمت چپ محفظه بزرگ‌تر و پهن‌تر می‌شود. وقتی عدد رینولدز به ۱۰۰۰ می‌رسد، گردابه دیگری در پایین محفظه و در گوشه سمت راست شروع به شکل‌گیری می‌کند، همچنین در این حالت گردابه گوشه سمت چپ، بزرگ‌تر از حالت قبل است. با افزایش عدد رینولدز به ۲۰۰۰، روند رشد گردابه‌های موجود در گوشه‌های محفظه ادامه می‌یابد و مراکز این گردابه‌ها به سمت بالای محفظه جابه‌جا می‌شود. با در نظر گرفتن عدد رینولدز برابر ۴۰۰۰، ضمن رشد گردابه‌های ثانویه، گردابه



(الف)

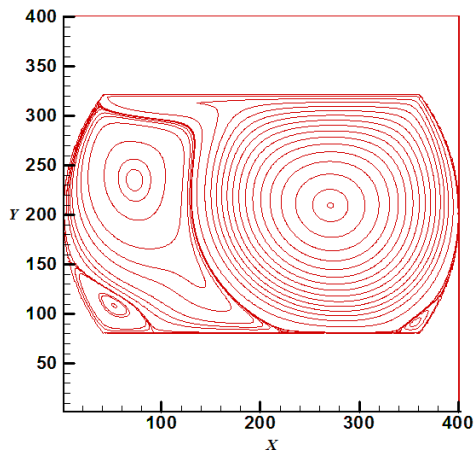


(ب)



(ج)

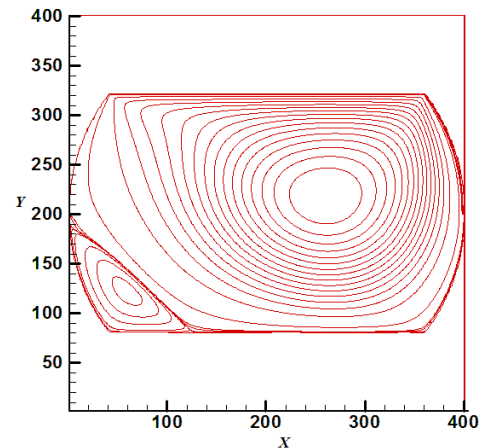
شکل ۷ (الف) خطوط جریان در $Re=400$ ، (ب) خطوط جریان در $Re=2000$ ، (ج) خطوط جریان در $Re=4000$



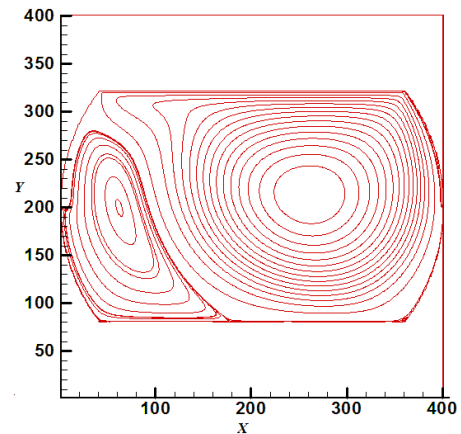
(د)

شکل ۹ (الف) خطوط جریان در $Re=400$ ، (ب) خطوط جریان در $Re=1000$ ، (ج) خطوط جریان در $Re=2000$ ، (د) خطوط جریان در $Re=4000$

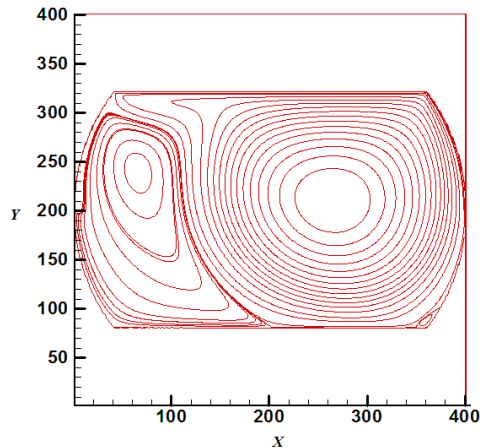
دیگری در گوشه سمت چپ نزدیک دیوار پایینی محفظه شکل می‌گیرد و تعداد گردابه‌ها به ۴ عدد می‌رسد. از مقایسه شکل‌های ۷ و ۹ می‌توان مشاهده نمود که در اعداد رینولدز مشابه، با تغییر عدد n و در نتیجه آن تغییر اندازه محفظه، الگوی جریان کاملاً متفاوتی در محفظه به‌وجود می‌آید.



(الف)



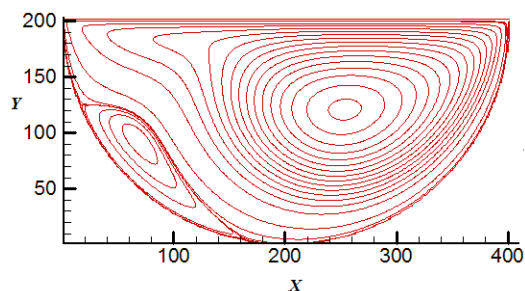
(ب)



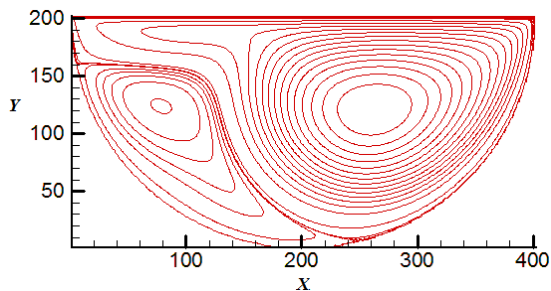
(ج)

با توجه به بزرگ‌تر بودن دیوار متحرک بالایی در حالت n برابر $0/8$ ، پیچیده‌تر بودن الگوی جریان نسبت به حالتی که n برابر $0/6$ است کاملاً طبیعی است. در این حالت، محفظه کوچک‌تر از حالت قبل است و در عدد رینولدز مشابه، با انتقال بالاتر مومنوم به سیال عامل مواجه هستیم. گردابه ثانویه نیز در عدد رینولدز کمتری شکل می‌گیرد. با ادامه روند افزایش عدد رینولدز، در ابتدا جدایش دیگری در گوشه پایین سمت راست رخ می‌دهد و سپس اتفاقی که برای جریان در گردابه اولیه رخ داد، برای جریان در گردابه ثانویه تکرار شده و گردابه سوم شکل می‌گیرد. شکل ۱۰ سرعت در خطوط افقی و عمودی گذرنده از مرکز این محفظه را نشان می‌دهد. از مقایسه این شکل و شکل ۸ می‌توان افزایش سرعت در اثر کوچک‌تر شدن محفظه و بزرگ‌تر شدن دیواره متحرک بالایی را ملاحظه نمود.

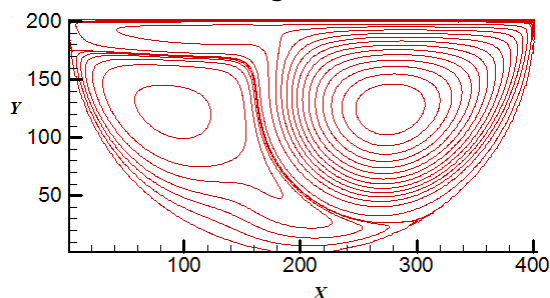
نکته جالب در این تحلیل، مقایسه کیفی شکل (۶-د) و شکل (۹-د) می‌باشد. ساختار گردابه‌ها در این دو شکل به یکدیگر شبیه هستند. سه گردابه اصلی در هر دو شکل (با اندازه‌های مختلف) دیده می‌شود. گردابه سمت راست در محفظه دایروی کوچک‌تر است و این اساساً به دلیل خط جریانی شدن محفظه و تغییر شکل دیواره سمت راست است. گردابه سمت چپ (در مجاورت دیواره سمت چپ) نیز در هر دو شکل یک الگو دارد و دلیل فیزیکی



(ب)



(ج)



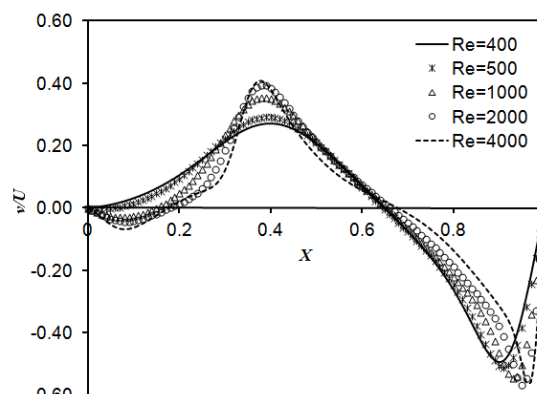
(د)

شکل ۱۱ (الف) خطوط جریان در $Re=500$ ، (ب) خطوط جریان در $Re=1000$ ، (ج) خطوط جریان در $Re=2000$ ، (د) خطوط جریان در $Re=4000$

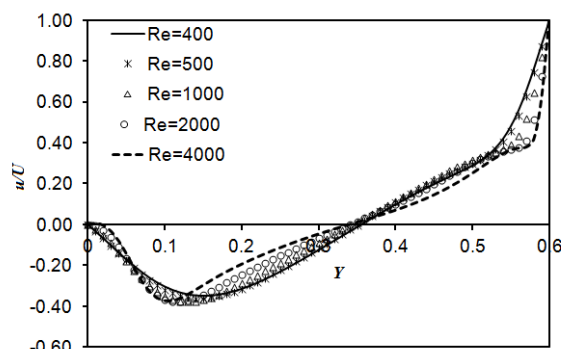
۳-۴- جریان در محفظه به شکل نیم‌دایره

خطوط جریان در اعداد رینولدز ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ برای محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره در شکل ۱۱ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، هنگامی که عدد رینولدز کوچک است، تنها یک گردابه در محفظه شکل می‌گیرد (شکل ۱۱-الف). با افزایش عدد رینولدز، ابتدا گردابه ثانویه در محفظه شکل گرفته و سپس شروع به رشد می‌کند و به سمت دیوار متحرک کشیده می‌شود. در نهایت افزایش عدد رینولدز می‌تواند موجب تشکیل گردابه سوم در محفظه گردد. تغییر مکان مرکز گردابه اولیه با عدد رینولدز در شکل ۱۲ نشان داده شده است.

مشترکی نیز در هر دو شکل برای تشکیل این گردابه وجود دارد، که همان گردابیان فشار مخالف در مقابل سیال متحرک روی این دیواره است. پیش‌بینی می‌شود که اگر سطح پایینی و دیواره‌های محفظه به‌طور کامل به شکل نیم‌دایره درآیند (مشابه شکل ۱۱-د)، رفتار مشابهی برای تشکیل گردابه‌ها داشته باشیم و دو گردابه اصلی در محفظه تشکیل شود.

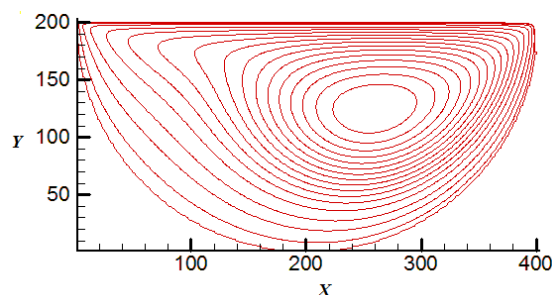


(الف)



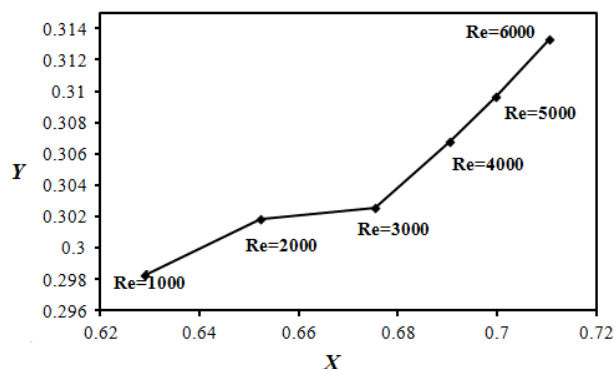
(ب)

شکل ۱۰ (الف) تغییرات اندازه سرعت (v/U) در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه، (ب) تغییرات اندازه سرعت (u/U) در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه در حالت $n=0.18$



(الف)

تشکیل گردابه ثانویه و سپس موجب رشد این گردابه می‌شود و برای $n=0/8$ افزایش عدد رینولدز در ابتدا سبب رشد گردابه ثانویه موجود و سپس سبب پیدایش گردابه‌های جدید و رشد آن‌ها می‌شود. مشاهده شد که در عدد رینولدز ثابت، با تغییر اندازه دیواره‌های بالا و پایین، که به معنی تغییر در اندازه کمان‌های جدا شده از دایره است، الگوی جریان کاملاً متفاوتی شکل می‌گیرد. روش بولتزمن شبکه‌ای به خوبی الگوی جریان را مدلسازی کرده است.



شکل ۱۲ تغییرات مکان گردابه اصلی در نیم‌دایره

۵- علایم و نشانه‌ها

f^q تابع توزیع تعادلی چگالی

f_i تابع توزیع چگالی

H ارتفاع محفظه دوزنقه‌ای، قاعده و ارتفاع محفظه مثلثی، قطر

دایره در محفظه با دیواره دایروی (m)

L پهنای محفظه دوزنقه‌ای (m)

n نسبت اندازه دیواره پایینی به قطر در محفظه با دیواره دایروی

m نسبت اندازه ارتفاع به قطر در محفظه با دیواره دایروی

u سرعت سیال (ms^{-1})

θ زاویه دیواره‌های چپ و راست دوزنقه نسبت به دیوار بالا

v لزجت سینماتیکی شبکه بولتزمن (m^2s^{-1})

ρ چگالی (kgm^{-3})

τ_v زمان آرامش هیدرودینامیکی

w فاکتور وزنی

۶- مراجع

- [1] Ghia U., Ghia K. N., "High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *Journal of computational physics*, Vol. 48, 1982, pp. 387-411.
- [2] Chia Z. H., Shi B. C., "Simulating High Reynolds Number Flow in Two-Dimensional Lid-Driven Cavity by Multi-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Method", *Chinese Physics*, Vol. 15, No. 8, 2006, pp. 1855-1863.
- [3] Peng Y. F., Shiau Y. H., "Transition in a 2-D Lid-Driven Cavity Flow", *Computer & Fluids*, Vol. 32, 2003, pp337-352.
- [4] Huang K., *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, 2nd Ed., New York, John Wiley, 1987.
- [5] Shan X. W., Chen H. D., "Lattice Boltzmann Model for Simulating Flows with Multiple Phases

برای اعداد رینولدز بزرگ‌تر از ۱۰۰۰، با افزایش عدد رینولدز، مرکز گردابه اصلی بالاتر می‌رود و در واقع به طرف دیواره متحرک و همچنین در جهت حرکت دیواره جابه‌جا می‌شود که به دلیل وجود نیروهای اینرسی (در مقابل اثرات لزجی)، انتظار نیز حرکت در همین جهت است. ضمناً، به دلیل خط جریانی شدن محفظه، شاهد تشکیل گردابه در سمت راست محفظه نیستیم. در این محفظه نیز مشابه شکل‌های (۵-۹) و (۵-۶) شاهد تشکیل یک گردابه ثانویه بزرگ در مجاورت دیواره سمت چپ هستیم که گرادیان فشار معکوس روی این دیواره (در تمام شکل‌ها) نقش مهمی را برعهده دارد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوی جریان در یک محفظه دوبعدی به شکل مثلث قائم‌الزاویه، دوزنقه و محفظه با دیواره دایروی و محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره با دیواره بالایی متحرک، با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای و با اعمال دقت مرتبه دو در مرزهای مایل، مورد بررسی قرار گرفت. در مورد محفظه مثلثی و محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره، تاثیر عدد رینولدز روی ساختار گردابه‌ها بررسی شد و مشاهده گردید افزایش عدد رینولدز سبب افزایش گردابه‌ها می‌شود. در محفظه دوزنقه‌ای، در عدد رینولدز ثابت، تاثیر زاویه داخلی بر روی الگوی جریان بررسی شد و مشاهده گردید که با افزایش این زاویه تا مقدار بحرانی، گردابه نزدیک انتهای محفظه، پهن‌تر شده و سرانجام به دو گردابه مجزا در گوشه‌های محفظه تقسیم می‌شود. افزایش عدد رینولدز از ۴۰۰ به ۴۰۰۰ در محفظه با دیواره دایروی برای $n=0/6$ ابتدا سبب

- [16] Shankar P. N., Deshpande M. D., "Fluid Mechanics in the Driven Cavity", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 136, 2000, pp. 93-136.
- [17] Sharif M. A. R., "Laminar Mixed Convection in Shallow Inclined Driven Cavities with Hot Moving Lid on Top and Cooled From Bottom", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 27, 2007, pp. 1036-1042.
- [18] Oztop H. F., Dagtekin I., "Mixed Convection in two-Sided Lid-Driven Differentially Heated Square Cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, 2004, pp. 1761-1769.
- [19] Mansutti D., Graziani G., Piva R., "A Discrete Vector Potential Model for Unsteady Incompressible Viscous Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 92, 1991, pp. 161-184.
- [20] Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T., "High-Resolution Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, 1982, pp. 387-411.
- [21] Bruneau C. H., Saad M., "The 2D Lid-Driven Cavity Problem Revisited", *Computer & Fluids*, Vol. 35, 2006, pp. 326-348.
- [22] Hardy J., de Pazzis O., "Molecular Dynamics of a Classical Lattice Gas: Transport Properties and Time Correlation Functions", *Physical Review A*, Vol. 13, 1976, pp. 1949-1961.
- [23] Frisch U., Hasslacher B., "Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equations", *Physical Review Letters*, Vol. 56, 1986, pp. 1505-1508.
- [24] McNamara G., Zanetti G., "Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata", *Physical Review Letters*, Vol. 61, 1988, pp. 2332-2335.
- [25] Higuerá F. J., Jimenez J., "Boltzmann Approach to Lattice Gas Simulations", *Europhys Letters*, Vol. 9, No. 7, 1989, pp. 663-668.
- [26] He X., Luo L. S., "Theory of the Lattice Boltzmann Equation", *Physical Review E*, Vol. 56, 1997, pp. 6811-6817.
- [27] Dazhi Y., Renwei M., "Viscous Flow Computations with the Method of Lattice Boltzmann Equation", *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 39, 2003, pp. 329-367.
- and Components", *Physical Review E*, Vol. 47, 1993, pp. 1815-1819.
- [6] Gue Z. L., Zhao T. S., "Discrete Velocity and Lattice Boltzmann Models for Binary Mixtures of Non Ideal Fluids", *Physical Review E*, Vol. 68, 2003, pp. 035302:1-4.
- [7] Hou S., Zou Q., "Simulation of Cavity Flow by the Lattice Boltzmann Method", *Journal of computational physics*, Vol. 118, 1995, pp. 329-347.
- [8] Patil D. V., Lakshmisha K. N., "Lattice Boltzmann Simulation of Lid-Driven Flow in Deep Cavities", *Computer & Fluids*, Vol. 35, 2006, pp. 1116-1125.
- [9] Lin L. S., Chen Y. C., "Multi Relaxation Time Lattice Boltzmann Simulations of Deep Lid Driven Cavity Flows at Different Aspect Ratios", *Computer & Fluids*, Vol. 45, 2011, pp. 233-240.
- [10] Li M., Tang T., "Steady Viscous Flow in a Triangular Cavity by Efficient Numerical Techniques", *Computers math Applic*, Vol. 31, No. 10, 1996, pp. 55-65.
- [11] Gaskell P. H., Thompson H. M., "A Finite Element Analysis of Steady Viscous Flow in Triangular Cavities", *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers, part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 213, No. 3, 1999, pp. 263-276.
- [12] McQuain W. D., Ribbens C., "Steady Viscous Flow in a Trapezoidal Cavity", *Computer & Fluids*, Vol. 213, 1994, pp. 613-626.
- [13] Paramane S. B., Sharma A., "Consistent Implementation and Comparison of FOU, CD, SOU and QUICK Convection Schemes in Square, Skew, Trapezoidal and Triangular Lid-Driven Cavity Flow", *Numerical Heat Transfer B-Fundamentals*, Vol. 54, No. 1, 2008, pp. 84-102.
- [14] Fudhail A. M., Sidik N. A. C., "Numerical Simulations of Shear Driven Square and Triangular Cavity by using Lattice Boltzmann Scheme", *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 69, 2010, pp. 190-196.
- [15] Zhang T., Shi B., "Lattice Boltzmann Simulation of Lid-Driven Flow in Trapezoidal Cavities", *Computer & Fluids*, Vol. 39, No. 19, 2010, pp. 1977-1989.