



کنترل نوسانات فشار در روش SPH برای شبیه‌سازی جریان اطراف استوانه

علی طیبی^۱، بهزاد قدیری دهکردی^{۲*}، مهرداد تقی‌زاده منظری^۳

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۳- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

* صندوق پستی ۱۴۱۱۵، ghadirib@modares.ac.ir

چکیده- روش SPH یک روش ذره‌ای و کاملاً لاگرانژی بوده که بدون استفاده از شبکه به حل میدان محاسباتی می‌پردازد. از مشکلات عمده روش SPH تراکم‌پذیر ضعیف، تولید نوسانات فشار در میدان محاسباتی می‌باشد. در این تحقیق با اضافه کردن جمله‌ای تحت عنوان دیفیوژن چگالی به معادله پیوستگی، نوسان‌های چگالی و در نتیجه فشار تا حد زیادی کنترل می‌شوند. برخلاف روش‌های مبتنی بر شبکه، جدایی جریان از روی سطح و شرط مرزی جریان ورودی/خروجی، از موارد چالشی روش SPH می‌باشند. برای غلبه بر این مشکلات، الگوریتمی مناسب برای اعمال شرط مرزی جریان ورودی/خروجی و نیز طرح جابجایی ذرات در شبیه‌سازی جریان اطراف استوانه استفاده می‌شود. مقایسه نتایج این تحقیق با مراجع مختلف، عملکرد خوب روش پیشنهادی در کاهش نوسانات فشار و همچنین حل مسائل حاوی مرز باز و جدایی جریان از سطح را نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌گان: SPH، پخش چگالی، جریان ورودی/خروجی، جابجایی ذرات، استوانه.

Control of pressure fluctuations in SPH method for simulation of flow past a cylinder

A. Tayebi¹, B. Ghadiri Dehkordi^{2*}, M.T. Manzari³

1- PhD. Candidate, Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran

2- Assist. Prof., Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran

3- Prof., Mech. Eng., Sharif Univ., Tehran, Iran

* P.O.B. 14115 Tehran, Iran. ghadirib@modares.ac.ir

Abstract- Smoothed particle hydrodynamics (SPH) is a fully Lagrangian particle method which solves a problem without using any mesh or grid. Pressure fluctuation is one of the main drawbacks of the weakly compressible SPH (WCSPH) method that leads to an inaccurate pressure distribution. In the present work, a diffusive term is added to the continuity equation to suppress the density and consequently pressure fluctuations. In contrast to the mesh-based methods, flow separation and inflow/outflow boundary conditions are two challenging issues in the SPH method. To overcome these problems, a new algorithm for inflow/outflow boundary condition as well as a particle shifting method is utilized for simulation of flow past a cylinder. Comparing the results with those of literature, it is shown that the method is capable to decrease the pressure fluctuations and solve problems including open boundaries as well as flow separation.

Keywords: SPH, Density Diffusion, Inflow/Outflow, Particle Shifting, Cylinder.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، نسل جدیدی از روش‌های دینامیک محاسباتی تحت عنوان "روش‌های بدون شبکه" به طور وسیعی مورد مطالعه و تحقیق قرار گرفته‌اند. یکی از روش‌های بدون شبکه‌ای که برای هر دو بخش مکانیک سیالات و جامدات مورد استفاده قرار گرفته، روش SPH می‌باشد. مبنای این روش به دست آوردن حل عددی معادلات دینامیک سیال به کمک جایگزینی سیال با یک دستگاه از ذرات است. ذرات SPH از نظر ریاضیاتی، نقاطی برای محاسبه خواص سیال و از نظر فیزیکی، ذراتی مادی هستند که همانند هر دسته ذره طبیعی رفتار می‌کنند [۱]. این روش برای نخستین بار در سال ۱۹۷۷ [۲، ۳] برای مسائل کیهان‌شناسی ارائه و پس از دو دهه به حوزه مکانیک وارد گردید. به دلیل امتیازات ویژه‌ای که این روش در مدل‌سازی سطوح آزاد، تغییر شکل‌های بزرگ، جریان‌های با همرفتی غالب^۱ و غیره دارد، حوزه کاربرد آن به سرعت در حال گسترش است.

شکستن پیوند بین سرعت و فشار در معادله ناویر-استوکس و اعمال تراکم‌ناپذیری در این روش با دو دیدگاه متفاوت انجام می‌شود و در واقع نقطه تمایز روش‌های زیرمجموعه SPH است. در روش اول سیال تراکم‌ناپذیر به صورت یک سیال با تراکم‌پذیری ضعیف در نظر گرفته شده و در نتیجه معادله پیوستگی برای حالت سیال تراکم‌پذیر به همراه یک معادله حالت استفاده می‌شود؛ به این روش WSPH گفته می‌شود [۴]. در دیدگاه دیگر، با ادغام معادله مومنتم و پیوستگی، یک معادله پواسون برای فشار به دست آورده و فشار را از طریق این معادله محاسبه می‌کنند؛ به این روش ISPH^۲ گفته می‌شود. جزئیات بیشتری از این روش را به عنوان نمونه می‌توان در مرجع [۵] مشاهده نمود. هر کدام از این روش‌ها امتیازات و معایب مخصوص به خود را دارند. در تحقیق حاضر از روش WSPH استفاده می‌شود.

متأسفانه، روش WSPH با وجود مزایایی که دارد یک ضعف اساسی نیز دارد؛ تولید میدان فشار نوسانی از مشکلات اساسی این روش است [۶] که در مسائل اندرکنش سازه و سیال که مقدار نیرو مهم می‌باشد، بسیار مشهود می‌شود.

راه‌حل‌های مختلفی برای غلبه بر این نقطه ضعف در طی سالیان گذشته پیشنهاد شده است؛ فیلتر کردن چگالی با استفاده از ریشه متوسط مربعات^۳ که توسط مرجع [۷] پیشنهاد شده نتایج را بهبود می‌دهد ولی در شبیه‌سازی‌های با زمان طولانی باعث انبساط حجم کل سیستم می‌شود [۸]. استفاده از حل‌کننده ریمن^۴ نیز توسط مرجع [۹] پیشنهاد شده که از نظر کیفی جواب‌های خوبی به دست داده ولی از نظر کمی نتایج قابل اعتمادی تولید نمی‌کند. با بهره‌گیری از تئوری حل‌کننده ریمن، فراری و همکاران [۱۰] جمله پخشی^۵ عددی تعریف کرده و در معادله پیوستگی اعمال کردند؛ این جمله نوسان‌های فشار را کاهش می‌دهد ولی از طرفی برای حل مسائل هیدرواستاتیک سازگار نبوده و باعث حرکت‌های غیرفیزیکی ذرات سیال می‌شود. با استفاده از ایده هم‌مکانی در روش‌های مبتنی بر شبکه، فاتحی و منظری [۱۱] جمله‌ای تولید کرده و به معادله پیوستگی اضافه کردند. جمله افزوده شده که نقش یک فیلتر را برای چگالی بازی می‌کند، باعث کاهش نوسانات فشار می‌شود ولی اعمال آن کمی پیچیده است. با ایده گرفتن از تعریف جمله لزجت مصنوعی موناهان، مولنتی و کولاگروسی [۱۲] جمله‌ای تحت عنوان پخش چگالی تعریف کردند که در تحقیقی دیگر توسط آنتونو و همکاران [۱۳] اصلاحاتی بر روی آن انجام شده است. با ایده گرفتن از جمله ارائه شده در مراجع [۱۲، ۱۳]، در تحقیق حاضر، جمله پخش چگالی در سیستم معادلات اصلی ناویر-استوکس اعمال می‌شود. لازم به ذکر است که در هر دو مرجع ذکر شده، جمله لزجت واقعی در معادله مومنتم با جمله لزجت مصنوعی موناهان جایگزین و جمله پخش چگالی در معادله پیوستگی بکار گرفته شده است؛ در حالی که در تحقیق حاضر، جمله پخش چگالی در حضور لزجت واقعی و بدون لزجت مصنوعی در سیستم معادلات اعمال می‌شود.

یکی از مشکلات عمومی روش‌های بدون شبکه، نحوه اعمال شرایط مرزی مختلف است. روش SPH نیز مستثنی نبوده و همچنان تحقیقاتی در جهت بهبود روش‌های اعمال شرایط مرزی در این روش در حال انجام است. یکی از شرایط مرزی چالش‌برانگیز در روش SPH، شرط مرزی جریان

3. Mean Least Squares (MLS)

4. Riemann solver

5. Diffusion

1. Convective Dominated Flows

2. Incompressible SPH

یک سیلندر دایروی، با شرط مرزی ورودی/خروجی واقعی و نیز بدون استفاده از نیروی حجمی، بررسی شد. در تحقیقی دیگر، با استفاده از روش تفاضل محدود برای تعریف شرط مرزی ورودی/خروجی، جریان اطراف استوانه برای رینولدزهای ۶ تا ۵۵ توسط تکدا و همکاران [۱۹] بررسی شده است. همان گونه که مشخص است در هر کدام از تحقیقات انجام شده با اعمال فرضیاتی ساده‌کننده، شرایط شبیه‌سازی مسأله از حالت واقعی دور شده است. در تحقیق حاضر سعی شده که شرایط مدل سازی مسأله مذکور مشابه شرایط استفاده شده برای شبیه‌سازی در روش‌های مبتنی بر شبکه، تنظیم شود.

در ادامه، پس از مرور مختصری بر معادلات حاکم و روش SPH، جزئیات روش پیشنهادی توضیح داده می‌شود. پس از آن، نتایج حاصل از شبیه‌سازی جریان در اطراف یک سیلندر دایروی بررسی می‌شود. در انتها نیز جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲- معادلات حاکم

برای حل مسائل جریان سیال با استفاده از روش SPH، معادلات پیوستگی و مومنتم باید در دستگاه لاگرانژی نوشته شوند:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} \quad (2)$$

که بردار سرعت، ρ ، P ، μ و \vec{g} به ترتیب چگالی، فشار، لزجت دینامیکی و شتاب گرانش می‌باشند. برای بسته شدن سیستم معادلات، به یک معادله حالت نیز نیاز می‌باشد:

$$P - P_0 = c_0^2 (\rho - \rho_0) \quad (3)$$

که c_0 و ρ_0 به ترتیب سرعت صوت و چگالی اولیه سیال و P_0 فشار پس‌زمینه است. موقعیت ذرات نیز در هر گام زمانی از معادله مکان به دست می‌آید:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u} \quad (4)$$

که \vec{r} بردار موقعیت مکانی ذره است.

۳- روش SPH

مبنای روش SPH بر پایه نوشتن متغیر A بر حسب کانوولوشن

ورودی/خروجی می‌باشد. این شرط مرزی با وجود سادگی در روش‌های مبتنی بر شبکه، در روش‌های بدون شبکه مثل SPH به ندرت استفاده شده است. مشکلات مربوط به تزریق و حذف ذرات از ناحیه محاسباتی با نرخی سازگار، باعث شده که روش SPH به مسائل مرز بسته^۱ و مرز پرئودیک^۲ محدود شود. در اواخر سال ۲۰۱۰ میلادی الگوریتمی توسط فدریکو [۱۴] ارائه شده که روش SPH را روشی قابل کاربرد برای مسائل مرز باز می‌کند. در این الگوریتم که جزئیات آن در بخش‌های بعدی توضیح داده می‌شود، با تعریف دو ناحیه اضافی در خارج از میدان محاسباتی، شرط مرزی جریان ورودی/خروجی به درستی اعمال می‌شود. در همین راستا در تحقیق حاضر، با بکارگیری این شرط مرزی جریان اطراف یک استوانه در رینولدزهای مختلف بررسی می‌شود.

بررسی جریان اطراف یک استوانه دایره‌ای مبنای بسیاری از تحقیقات ۱۰۰ ساله اخیر بوده است [۱۵]. رژیم اطراف استوانه اولین بار توسط روشکو در سال ۱۹۵۵ با ارائه رابطه‌ای بین عدد رینولدز و استروهمال بررسی و در سال ۱۹۸۸ و ۱۹۹۶ بوسیله ویلیامسون برای حالت گذار از جریان دو بعدی به سه بعدی تکمیل تر شد [۱۵]. در همان زمان نیز ویکری و واتکینز با انجام مجموعه‌ای از آزمایشات، نحوه تغییرات ضریب نیروی برا را بر حسب دامنه نوسانات استوانه به دست آوردند [۱۶]. در کنار تحقیقات تجربی، از روش‌های عددی، بخصوص روش‌های مبتنی بر شبکه نیز برای بررسی مسأله مذکور بهره گرفته شده است. به هر حال، شبیه‌سازی جریان اطراف استوانه با شرایط مرزی واقعی با روش SPH بصورت بسیار محدودی انجام شده است. هر کدام از کارهای انجام شده در زمینه SPH نیز بر اساس فرضیاتی ساده‌کننده انجام شده‌اند. به عنوان مثال، جریان اطراف یک سیلندر مربعی با شرایط پرئودیک برای ورودی و خروجی به وسیله لی و همکاران [۱۷] در رینولدزهای ۲۰ و ۱۰۰ بررسی شد. مطالعه مشابهی نیز توسط شادلو و همکاران [۱۸] برای رینولدزهای ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ انجام شده است. هر دو تحقیق از یک نیروی حجمی برای غلبه بر درگ استفاده کرده‌اند. همچنین، به جای شرط مرزی ورودی/خروجی واقعی، با اعمال شرط مرزی پرئودیک به حل این مسأله پرداختند. این در حالی است که در تحقیق حاضر جریان اطراف

1. Wall Bounded
2. Periodic Boundary

مقالات مختلف پیشنهاد شده است [۲۰]. این عملگر مستقیماً از طریق دیورژانس گرادیان به دست نیامده است، بلکه با اختلاطی از دیدگاههای اختلاف محدود و SPH به دست می‌آید. در این مقاله از رابطه (۱۰) برای گسسته‌سازی عملگر لاپلاسیان استفاده می‌شود [۲۱]:

$$\nabla^2 A_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{2A_{ij} \vec{r}_{ij} \cdot \nabla_i \tilde{w}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2 + \eta^2} \quad (10)$$

که $A_{ij} = A_i - A_j$ ، $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ و $\eta^2 = 0.01h^2$ پارامتری برای جلوگیری از صفر شدن مخرج کسر است.

۳-۱- دیفیوژن چگالی مصنوعی

یکی از مشکلات عمده روش SPH تولید نوسانات عددی در محاسبه میدان فشار است. با آنالوژی از جمله ویسکوزیته مصنوعی ارائه شده توسط موناهان [۲۲]، جمله‌ای تحت عنوان پخش چگالی مصنوعی توسط مراجع [۱۳، ۱۲] پیشنهاد شده است:

$$D_i = \delta h c_0 \sum_j 2(\rho_j - \rho_i) \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \nabla_i w_{ij} m_j}{|\vec{r}_{ij}|^2 + \eta^2 \rho_j} \quad (11)$$

که δ ضریبی است که از طریق آنالیز پایداری برای سیستم معادلاتی که شامل ویسکوزیته مصنوعی موناهان بوده، مقدار آن 0.7 پیشنهاد شده است. لذا، این جمله در حضور ویسکوزیته مصنوعی بکار گرفته و نوسانات میدان فشار تا حد زیادی کم شده است. در کار حاضر، جمله مذکور به همراه جمله ویسکوزیته واقعی (به جای ویسکوزیته مصنوعی) بکار برده و نشان داده می‌شود که عملکرد آن برای کاهش نوسانات فشار به همراه ویسکوزیته واقعی نیز قابل توجه است. به صورت کلی، هر روش ابتکاری^۱ که برای پایدار کردن عددی سیستم معادلات استفاده می‌شود، دارای ضریبی متناسب با دقت گسسته‌سازی^۲ معادلات است. بنابراین با افزایش دقت گسسته‌سازی (در اینجا کاهش h)، جمله مورد نظر به سمت صفر میل می‌کند. جمله پخش چگالی ارائه شده نیز از این قاعده مستثنی نیست.

۳-۲- معیار گام زمانی

برای پایداری روش عددی، مقدار گام زمانی باید از معیارهای مشخصی تبعیت کند؛ شرط دیفیوژن لزجت، که بر حسب جمله

حاصل ضرب متغیر در تابع دلتا می‌باشد. با تقریب زدن تابع دلتا با تابع کرنل همواری و انتگرال با عملگر مجموع، می‌توان متغیر را به صورت زیر نوشت:

$$A_i \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A_j w_{ij} \quad (5)$$

که m_j و ρ_j به ترتیب جرم و چگالی ذره و w_{ij} تابع کرنل است که مقدار آن بر حسب مختصات مکانی دو ذره i و j محاسبه می‌شود. کرنل مورد استفاده در این تحقیق کرنل وندلند بوده (رابطه (۶)) که w_0 برای حالت دو بعدی $7/(4\pi h^2)$ است.

$$w(r, h) = w_0 \begin{cases} \left(1 - \frac{r}{2h}\right)^4 \left(2\frac{r}{h} + 1\right) & 0 \leq \frac{r}{h} < 2 \\ 0 & 2 \leq \frac{r}{h} \end{cases} \quad (6)$$

مقدار h در این تحقیق $9/25$ در نظر گرفته شده است. عملگرهای مشتقی نیز در روش SPH با استفاده از اصول تابع کرنل و بسط تیلور به سادگی محاسبه می‌شوند. برای پایستاری مومنتم خطی، رابطه (۷) برای گسسته‌سازی گرادیان استفاده می‌شود [۱۷]:

$$\nabla A_i = \rho_i \sum_j m_j \left(\frac{A_j}{\rho_j^2} + \frac{A_i}{\rho_i^2} \right) \nabla_i w_{ij} \quad (7)$$

که $\nabla_i w_{ij}$ گرادیان تابع کرنل است و با توجه به مختصات ذره i ام گرفته می‌شود. برای بهبود دقت گسسته‌سازی عملگر گرادیان، از طرح نرمال‌سازی استفاده می‌شود. جزئیات بیشتری از این طرح را می‌توان در مرجع [۶] مشاهده کرد:

$$\nabla_i \tilde{w}_{ij} = L(\vec{r}_i) \nabla_i w_{ij} \quad (8)$$

که $\nabla_i \tilde{w}_{ij}$ گرادیان کرنل نرمال شده است و در معادله (۷) به جای $\nabla_i w_{ij}$ جایگذاری می‌شود. همچنین:

$$L(\vec{r}_i) = \left[\begin{array}{cc} \sum_j V_j (x_j - x_i) \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} & \sum_j V_j (x_j - x_i) \frac{\partial w_{ij}}{\partial y} \\ \sum_j V_j (y_j - y_i) \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} & \sum_j V_j (y_j - y_i) \frac{\partial w_{ij}}{\partial y} \end{array} \right]^{-1} \quad (9)$$

که V_j حجم ذره j ام است. برای عملگر دیورژانس نیز از طرح اختلافی (بجای طرح مجموع) به همراه طرح نرمال‌سازی تابع کرنل استفاده می‌شود [۶].

طرح‌های مختلفی برای گسسته‌سازی عملگر لاپلاسیان در

1. Ad hoc
2. Resolution

شده و به صورت صریح با یک الگوریتم پیشگو-تصحیح کننده حل می‌شوند. برای سادگی توضیح این الگوریتم سیستم معادلات به صورت رابطه (۱۶) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{d\rho_i}{dt} = D_i(\vec{r}, \rho, \vec{u}); & \frac{d\vec{u}_i}{dt} = F_i(\vec{r}, \rho, \vec{u}) \\ P_i = f(\rho) & ; \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{u}_i \end{cases} \quad (16)$$

در مرحله پیشگویی، مقادیر هر پارامتر در نیمه گام زمانی $(n+1/2)$ و به صورت صریح با رابطه (۱۷) محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} \vec{u}_a^{n+1/2} = \vec{u}_a^n + \frac{\Delta t}{2} F_a^n \\ \rho_a^{n+1/2} = \rho_a^n + \frac{\Delta t}{2} D_a^n \\ \vec{r}_a^{n+1/2} = \vec{r}_a^n + \frac{\Delta t}{2} \vec{u}_a^n \\ P_a^{n+1/2} = f(\rho_a^n) \end{cases} \quad (17)$$

سپس مقادیر مورد نظر در گام زمانی جدید با استفاده از مقادیر موجود در مرحله میانی اصلاح می‌شوند (رابطه ۱۸).

$$\begin{cases} \vec{u}_a^{n+1} = \vec{u}_a^{n+1/2} + \Delta t F_a^{n+1/2} \\ \rho_a^{n+1} = \rho_a^{n+1/2} + \Delta t D_a^{n+1/2} \\ \vec{r}_a^{n+1} = \vec{r}_a^{n+1/2} + \Delta t \vec{u}_a^{n+1/2} \\ P_a^{n+1} = f(\rho_a^{n+1/2}) \end{cases} \quad (18)$$

۴- جابجایی ذرات

حرکت ذرات بر طبق سرعت سیال ممکن است باعث تولید چینشی نامنظم از ذرات بشود؛ این به آن معنی است که بعضی از ذرات تعداد ذره کافی برای انجام یک فرایند هموارسازی مناسب، در همسایگی خود ندارند. از طریق تشابه با روش‌های مبتنی بر شبکه، یکی از روش‌های حل این مشکل چینش دوباره ذرات است. این روش که قبلاً به وسیله فانگ و پاتریوکس [۲۴] مورد استفاده قرار گرفته، به اسم مدل "نقطه محدود لاگرانژی منظم" معروف است. روش دیگر برخورد با این مشکل، روش جابجایی^۳ ذرات است [۲۵،۶]. در کار حاضر

دیفیوژن معادله ناویر-استوکس تعریف شده و به صورت رابطه (۱۲) می‌باشد [۲۱]:

$$\Delta t \leq 0.125 \frac{h^2}{\nu} \quad (12)$$

که h طول همواری و ν لزجت سینماتیک است. شرط دیگری که مقدار گام زمانی می‌بایست از آن تبعیت کند شرط CFL^۱ است [۲۳]:

$$\Delta t \leq 0.25 \frac{h}{c} \quad (13)$$

و به این معنی است که فاصله مجاز برای حرکت ذرات حداکثر به اندازه بخشی از طول همواری در هر گام زمانی است. در صورت وجود نیروی حجمی، شرط دیگری نیز باید تأمین شود [۲۴]:

$$\Delta t \leq 0.25 \min \left[\frac{h}{\sqrt{|f_i|}} \right] \quad (14)$$

که \vec{f}_i نیروی وارد شده به ذره نام بر واحد جرم است. کمترین مقدار به دست آمده از معادلات (۱۲) تا (۱۴) به عنوان گام زمانی اصلی انتخاب می‌شود.

۳-۳- الگوریتم حل معادلات

با احتساب جمله پخش چگالی در معادله پیوستگی و اعمال اصول ذکر شده برای گسسته‌سازی جملات، دستگاه معادله حاصل جهت تجزیه و تحلیل میدان به صورت رابطه (۱۵) می‌باشد.

$$\begin{cases} \frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{u}_{ij} \cdot \nabla \tilde{w}_{ij} \\ \quad + \delta h c_0 \sum_j 2(\rho_j - \rho_i) \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \nabla \tilde{w}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2 + \eta^2} \frac{m_j}{\rho_j} \\ \frac{d\vec{u}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla \tilde{w}_{ij} \\ \quad + \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{2\nu \vec{u}_{ij} \cdot \nabla \tilde{w}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2 + \eta^2} + \vec{g} \\ P_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0) \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{u}_i \end{cases} \quad (15)$$

این دستگاه معادله برای کلیه ذرات درون میدان اعمال

1. Courant-Friedrichs-Lewy

2. Lagrangian Finite Point Method (RLFPM)

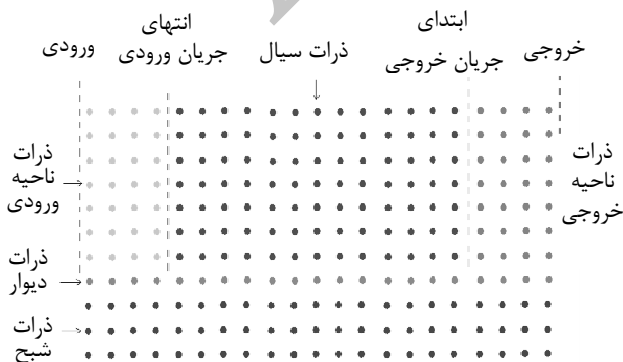
3. Shifting method

شرکت نمی‌کنند. مشخصات ذرات ناحیه ورودی با توجه به شرط مرزی ورودی تعریف می‌شوند؛ در حالی که مشخصات ذرات ناحیه خروجی با حل معادلات سیال داخلی به دست می‌آیند. به عبارت دیگر، ذرات ناحیه داخلی به محض ورود به ناحیه خارجی از روند حل معادلات خارج شده و با همان مشخصات قبلی خود بقیه مسیر را می‌پیمایند؛ این ذرات به محض خارج شدن از میدان حل در انبار ذخیره ذرات نگهداری می‌شوند. ذرات ناحیه ورودی نیز به محض وارد شدن به ناحیه داخلی، وارد گردونه حل معادلات شده و ذره‌ای از ذرات ذخیره شده در انبار برای جبران این پدیده، به درون ناحیه ورودی تزریق می‌شود. خواص ذرات ناحیه ورودی با توجه به شرط مرزی ورودی به صورت مقداری ثابت تخصیص داده شده و مادامی که در این ناحیه قرار دارند خواص آنها ثابت است، زیرا تنها معادله‌ای که برای آنها حل می‌شود معادله مکان (معادله ۴) است. شماتیکی از توضیحات داده شده در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

برای آزمایش روش‌های ارائه شده در بهبود نتایج عددی، جریان اطراف یک استوانه ساکن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در تمام موارد طول همواری ثابت، تابع کرنل وندلند، شرط عدم لغزش در هنگام وجود دیوار و شرط ورودی/خروجی برای مرزهای دیگر بکار گرفته می‌شود.

۶- جریان اطراف استوانه

امروزه مشخص شده است که نوع جریان اطراف استوانه به عدد بدون بعد رینولدز ($Re = Ud/v$) بستگی دارد که d قطر استوانه، U سرعت بالادست جریان و ν لزجت سینماتیک است



شکل ۱ شماتیک اولیه میدان حل برای اعمال شرط ورودی/خروجی

روش ارائه شده توسط فاتحی و منظری [۲۵] با اعمال اندکی تغییر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش در انتهای هر گام زمانی، مکان ذرات به مقداری جزئی جابجا می‌شوند تا توزیع یکنواختی از ذرات به دست بیاید. ابتدا، مکان نسبی ذرات همسایه، \bar{r}_i ، محاسبه می‌شود:

$$\bar{r}_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \bar{r}_{ij} W_{ij} \quad (19)$$

اگر ذرات به صورت یکنواخت توزیع شده باشند، $\bar{r}_i = 0$ ؛ در غیر این صورت، مقدار \bar{r}_i دلالت بر وجود حفره‌ای در اطراف ذره مورد نظر دارد. در این حالت می‌بایست ذره مورد نظر به سمت حفره مذکور جابجا شود:

$$\Delta \bar{r}_i = \varepsilon \bar{r}_i \quad (20)$$

مقدار جابجایی می‌بایست به دقت تنظیم شود، به نحوی که به اندازه کافی بزرگ باشد تا هم حفره ایجاد شده در اطراف ذره را پر کند و هم از ناپایداری جلوگیری کند. از طرف دیگر، اندازه آن باید آنقدر بزرگ نباشد که باعث تولید خطای ناشی از بکارگیری سری تیلور در اصلاح خواص بشود [۶]. در معادله (۲۰)، ε ، بسته به نوع مسأله، عدد ثابتی بین ۰ تا ۰/۱ بوده که در کار حاضر ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است. در انتها، برای نگه داشتن دقت روش، همه خواص ذره باید در مکان جدید از طریق میان‌یابی به دست بیایند:

$$\Delta \bar{u}_i = \Delta \bar{r}_i \cdot (\nabla \bar{u})_i \quad (21)$$

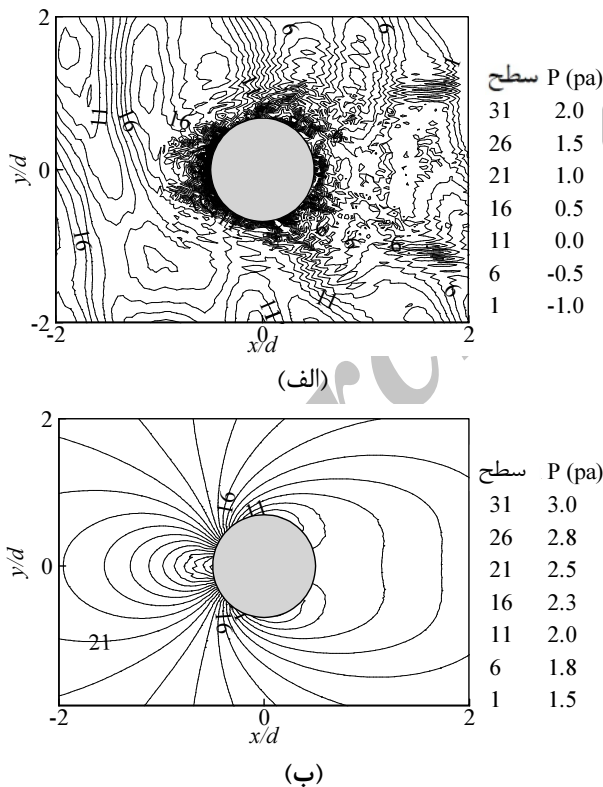
$$\Delta p_i = \Delta \bar{r}_i \cdot (\nabla p)_i \quad (22)$$

۵- اعمال شرط مرزی ورودی/خروجی

با وجود سادگی و توسعه شرط مرزی ورودی/خروجی در روش‌های مبتنی بر شبکه، این شرط مرزی در روش‌های بدون شبکه مثل SPH به طور بسیار محدودی استفاده شده است. مشکلات مربوط به تزریق و حذف ذرات از ناحیه محاسباتی با نرخی سازگار باعث شده که روش SPH به مسائل مرز بسته و مرز پریرودیک محدود شود. در الگوریتم حاضر که برگرفته از مرجع [۱۴] می‌باشد، سه ناحیه مجزا برای مسأله مورد نظر تعریف می‌شود: ورودی، داخلی و خروجی. طول نواحی ورودی و خروجی حداقل به اندازه طول شعاع همواری کرنل می‌باشد. هیچ کدام از این دو دسته ذرات در روند حل معادلات حاکم

1. In/Out-Flow Boundary Condition

به دلیل در دسترس بودن داده‌های میدان جریان اطراف یک استوانه در رینولدز ۴۰ در تحقیقات دیگران، تأثیر بکارگیری جمله پخش چگالی برای این عدد رینولدز بررسی می‌شود. در ابتدا بدون استفاده از این جمله، مسأله مذکور شبیه‌سازی شد. پس از آن با بکارگیری جمله پخش چگالی مجدداً شبیه‌سازی مسأله انجام و نتایج هر دو حالت مقایسه شدند. نتایج و مخصوصاً میدان فشار محاسبه شده در حالت دوم در سطح بسیار قابل توجهی بهبود یافته‌اند. این مطلب را می‌توان از توزیع فشار اطراف استوانه بخوبی مشاهده کرد (شکل ۴). همان گونه که مشخص است نوسان‌های فشار در سطح بسیار بالایی کنترل و توزیع فشار، یکنواخت شده است. از آنجا که یکی از مشکلات اساسی روش WCSPH تولید نوسانات زیاد فشار در میدان است [۶]، لذا لازم به تاکید است که این نتیجه با ارزش (شکل ۴) تحولی قابل توجه در به‌دست آوردن توزیع فشار یکنواخت در روش WCSPH می‌باشد.

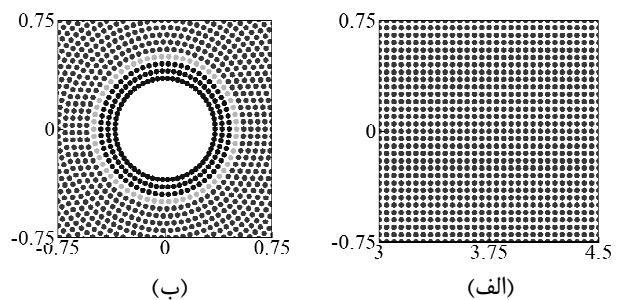
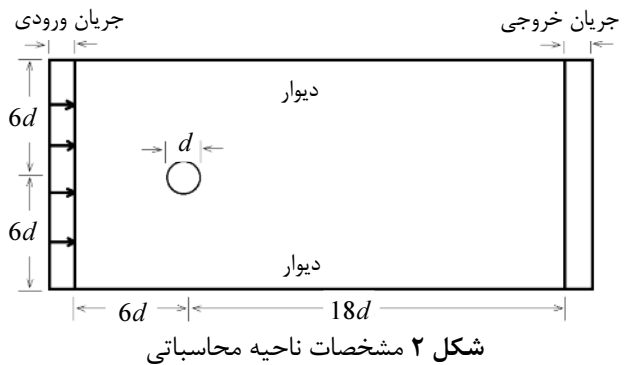


لازم به ذکر است که توزیع فشار در میدان، یک توزیع

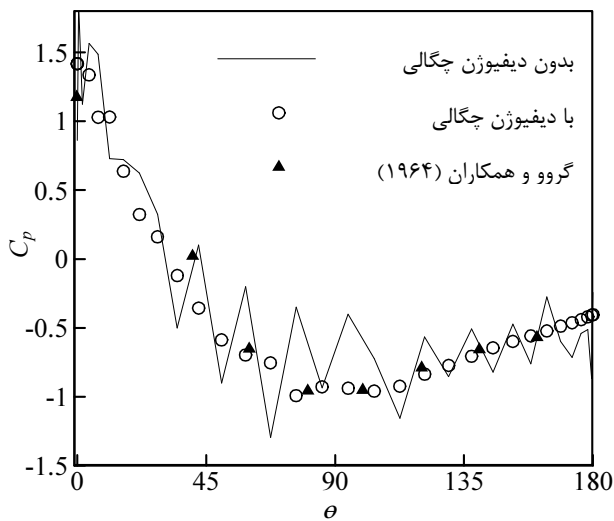
در تحقیق حاضر جریان اطراف یک استوانه برای رینولدزهای مختلف شبیه‌سازی شده است. مشخصات استوانه و ناحیه حل، مشابه کار ارائه شده در مرجع [۲۶] انتخاب شده و مطابق شکل ۲ می‌باشد.

همان گونه که از شکل ۲ مشخص است، استوانه‌ای به قطر d در فاصله $6d$ از ورودی کانالی به عرض $12d$ و طول $24d$ قرار داده می‌شود. تعداد 124468 ذره برای شبیه‌سازی مسأله استفاده می‌شود که از بین آنها 3066 ذره شیخ، 1022 ذره دیوار، 114380 ذره سیال و 6000 ذره ذخیره در انبار برای انجام الگوریتم ورودی/خروجی هستند. این ذرات در ابتدا به صورت دایره‌های هم‌مرکز در اطراف استوانه و به صورت شبکه کارتزین در فضاهای دورتر و با فاصله 0.5 از هم چیده شده‌اند (شکل ۳).

با استفاده از مطالب توضیح داده شده در بخش‌های قبل، جریان اطراف استوانه برای رینولدزهای مختلف (عدد رینولدز بر حسب مقدار سرعت جریان ورودی و قطر استوانه) شبیه‌سازی شده است. نکته قابل توجه در تمامی مسائل مورد بررسی در این تحقیق این است که مقادیر سرعت جریان و قطر استوانه، مقداری واحد در نظر گرفته شده و عدد رینولدز از طریق مقدار لزجت تنظیم می‌شود.

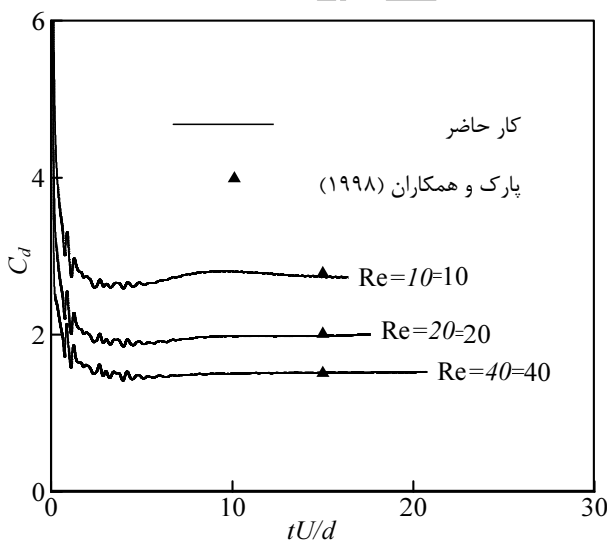


شکل ۳ چینش ابتدایی ذرات الف- دور از استوانه و ب- در نزدیکی آن



شکل ۶ تأثیر بکارگیری جملهٔ پخش چگالی بر توزیع ضریب فشار در رینولدز ۴۰ و مقایسه با مرجع [۲۷]

به عنوان موردی دیگر جهت اعتبارسنجی روش ارائه شده، ضریب درگ $(C_d = F_d / (0.5 \rho U^2 d))$ در رینولدزهای مختلف محاسبه و با نتایج مرجع [۲۸] مقایسه شد (شکل ۷). همان گونه که مشاهده می‌شود انطباق خیلی خوبی بین نتایج کار حاضر و نتایج پارک و همکاران [۲۸] برقرار است. توجه شود که میدان جریان اطراف استوانه در رینولدزهای مذکور یک میدان جریان دائمی است ولی چون روش SPH یک روش لاگرانژی و ذاتاً غیردائمی است، لذا تمامی مسائل مکانیک سیالات (دائم و غیردائم) را باید به صورت زمان‌مند (غیردائم) حل کرد.



شکل ۷ مقایسه ضریب درگ نتایج کار حاضر با مرجع [۲۸]

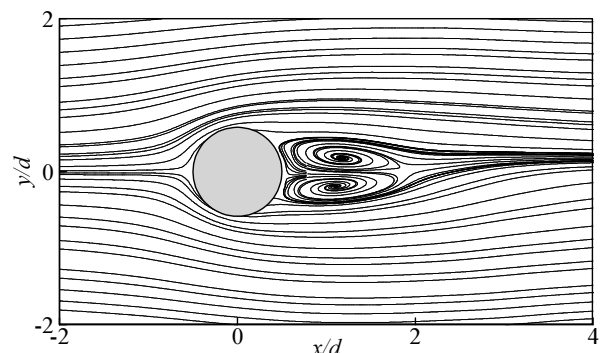
نسبی بوده و به مقدار فشار مرجع بکار گرفته شده در میدان بستگی دارد. یکی از روش‌هایی که سبب پایداری روش SPH می‌شود استفاده از فشار پس‌زمینه در محاسبات است.

از آنجا که در روش WCSPH، مقدار فشار از طریق چگالی به‌دست می‌آید، لذا، تنظیم فشار دلخواه از طریق تنظیم چگالی ذرات حاصل می‌شود. چگالی مرجع بکار گرفته شده در این تحقیق ۱/۰۱ برابر چگالی اولیه بوده که فشار مرجعی برابر ۲/۲۴ تولید می‌کند.

نکته قابل توجهی که در الگوی توزیع فشار اطراف استوانه بدون پخش چگالی (شکل ۴-الف) بود، این است که با وجود نوسانات ذاتی فشار در روش WCSPH اصلی (بدون پخش چگالی)، میدان سرعت به خوبی محاسبه می‌شود (شکل ۵). دلیل این امر، وجود گرادیان فشار (و نه خود فشار) در معادلهٔ ناویر-استوکس است. به عبارتی دیگر، روش WCSPH علی‌رغم محاسبه میدان فشار به صورت ناهمگن و نوسانی، گرادیان فشار را به درستی حساب می‌کند و لذا میدان سرعت نیز به خوبی محاسبه می‌شود.

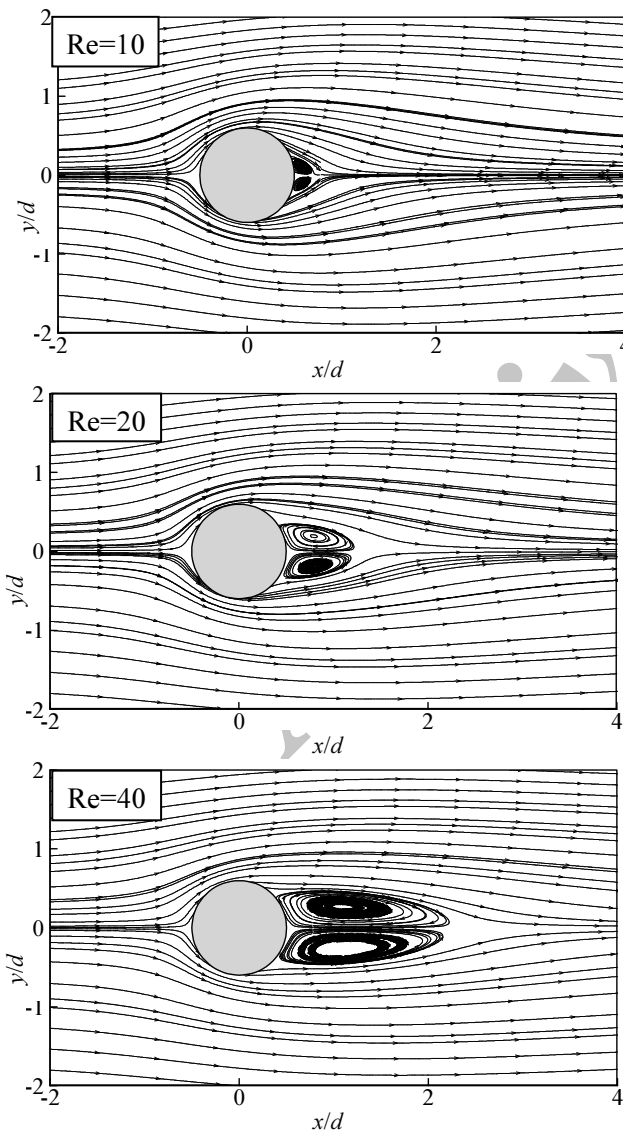
ضریب فشار $(C_p = (P - P_\infty) / (0.5 \rho U^2))$ روی استوانه در رینولدز ۴۰ از داده‌های موجود در مراجع مختلف بوده که در کار حاضر به عنوان پارامتری برای صحت‌سنجی نتایج و همچنین تأثیر بکارگیری پخش چگالی بر نتایج حاصل استفاده شده است. با مشاهدهٔ توزیع ضریب فشار محاسبه شده با روش WCSPH معمولی، متوجه نوسانات و پاسخ شطرنجی فشار در میدان خواهیم شد (شکل ۶). تأثیر قابل توجه جملهٔ پخش چگالی بر کاهش نوسانات و بهبود نتایج در مقایسه با مرجع [۲۷] نیز در این شکل به خوبی مشخص است.

از این قسمت به بعد، تمام نتایج ارائه شده مربوط به WCSPH تصحیح شده (با جملهٔ پخش چگالی) می‌باشند.



شکل ۵ میدان جریان اطراف استوانه در رینولدز ۴۰ بدون پخش چگالی

محاسباتی یکنواخت شود. خصوصیات جدید ذرات نیز با استفاده از سری تیلور محاسبه می‌شوند. با یکنواخت شدن توزیع ذرات، از واگرایی کد محاسباتی جلوگیری و دقت روش عددی نیز بالاتر می‌رود. برای روشن شدن این قضیه یک بار بدون این الگوریتم و یک بار با استفاده از آن، مسأله فوق شبیه‌سازی شد. در حالتی که این الگوریتم استفاده نشود، کد محاسباتی واگرا می‌شود. توزیع ذرات در لحظه قبل از واگرایی نتایج در شکل ۹- ب مشاهده می‌شود. در حالت استفاده از الگوریتم جابجایی نیز توزیع ذرات در شکل ۹- الف ترسیم شده است. عملکرد مثبت این الگوریتم از مقایسه این دو شکل به خوبی دیده می‌شود (شکل ۹).



شکل ۸ میدان جریان در اطراف استوانه در رینولدزهای مختلف

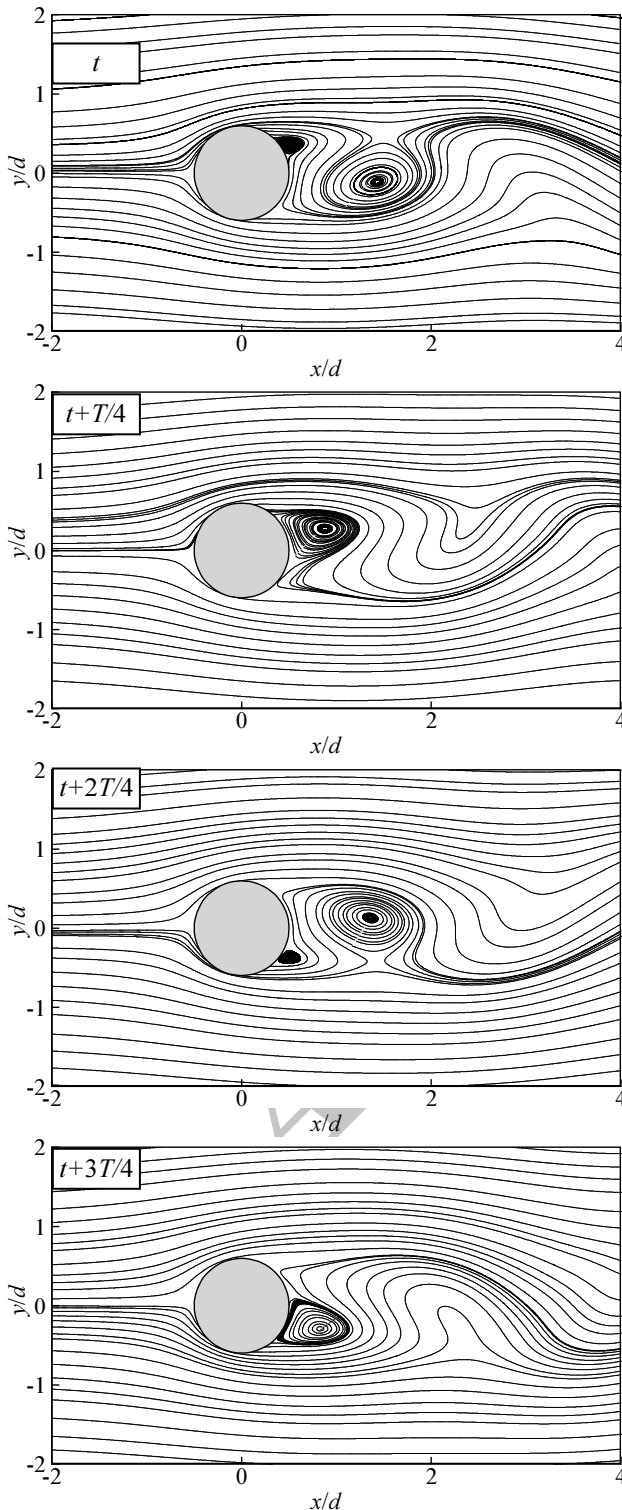
بنا بر این توضیحات، ضریب درگ استوانه در ابتدا متغیر بوده و پس از مدت زمان کوتاهی به سمت مقدار دائمی خود میل می‌کند (شکل ۷). قابل ذکر است که به علت متقارن بودن جریان در اطراف استوانه در رینولدزهای مذکور (که در ادامه نشان داده خواهد شد)، ضریب برا $(C_1 = F_1 / (0.5 \rho U^2 d))$ صفر بوده و لذا از نمایش آن خودداری شده است.

بر اساس پژوهش‌های به عمل آمده توسط محققان مختلف، در رینولدزهای پایین، تا $Re=5$ ، خطوط جریان سیال سطح استوانه را دنبال می‌کنند. در محدوده رینولدزهای $5 < Re < 45$ ، جریان از روی استوانه جدا شده و منجر به تشکیل یک جفت گردابه متقارن خلاف گردش^۱ می‌شود. طول گردابه‌ها در جهت جریان به صورت خطی متناسب با مقدار رینولدز افزایش می‌یابد [۲۹]. همین رفتار به خوبی در نتایج حاصل از شبیه‌سازی با روش SPH در شکل ۸ مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است که در هر سه مورد (رینولدزهای ۱۰، ۲۰ و ۴۰)، توزیع فشار در میدان، یک توزیع متقارن بوده که به دلیل شباهت با شکل ۴ از نشان دادن آن خودداری شد. توزیع متقارن فشار در میدان باعث تولید جریان کاملاً متقارنی در اطراف استوانه می‌شود. در واقع میدان جریان متقارن نشان داده شده در شکل ۸ به دلیل توزیع متقارن فشار در میدان است.

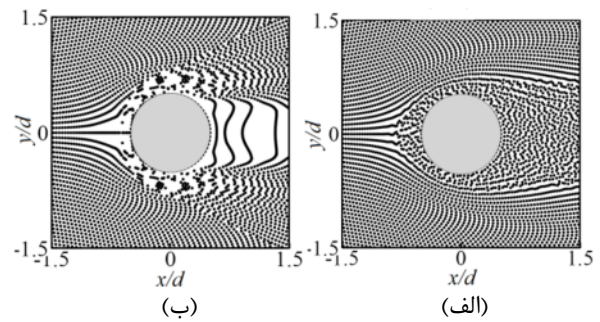
نکته‌ای که درباره تمامی شبیه‌سازی‌های ارائه شده در این تحقیق صادق است، تأثیر بکارگیری الگوریتم جابجایی بر نتایج است. همان گونه که قبلاً هم اشاره شد، روش SPH در مسائلی که جدایی جریان از سطح جسم وجود دارد، با مشکلی جدی تحت عنوان خالی شدن فضا از ذره روبرو است؛ به بیانی دیگر، در چنین مواردی به احتمال بسیار بالایی در میدان محاسباتی، به خصوص در ناحیه جدایی، حفره‌هایی خالی از ذره تولید می‌شوند. این اتفاق سبب تولید نتایجی بسیار نامناسب و در بسیاری از موارد (به طور مثال جریان اطراف استوانه) منجر به واگرایی کد محاسباتی خواهد شد. این پدیده در روش SPH پدیده‌ای بسیار مشکل‌ساز بوده که منجر به تولید روش‌هایی ابتکاری برای مقابله با آن شده است. روشی که در این تحقیق بکار گرفته شده، همان گونه که در بخش‌های پیشین نیز توضیح داده شد، روش جابجایی ذرات [۲۵] است. در این روش در انتهای هر گام زمانی، مرکز جرم هر منطقه از ذرات پیدا شده و ذرات به نحوی جابجا می‌شوند که توزیع آنها در میدان

1. Symmetric Counter-Rotating Vortices

(لحظه $t+T/4$) و پایین (لحظه $t+3T/4$) است در شکل ۱۲ مشاهده می‌شوند.



شکل ۱۰ میدان جریان اطراف استوانه در رینولدز ۱۰۰ در چهار مقطع زمانی از یک سیکل با دوره تناوب T



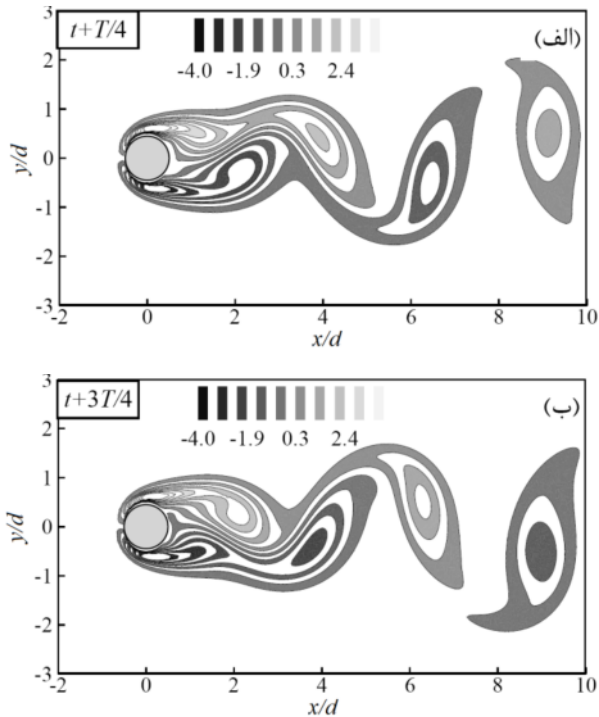
شکل ۹ توزیع ذرات اطراف استوانه الف- با و ب- بدون استفاده از الگوریتم جایجایی ذرات

در این قسمت، جریان اطراف استوانه برای رینولدز ۱۰۰ بررسی می‌شود. فیزیک حاکم بر این جریان متفاوت با موارد قبلی است [۲۹]. در شکل ۱۰ تصاویر لحظه‌ای از تشکیل خیابان گردابه فن-کارمن مشاهده می‌شود. چهار لحظه اصلی از فرایند شکل‌گیری گردابه‌ها در یک سیکل با دوره تناوب T انتخاب شده و میدان جریان آنها رسم شده است. همان گونه که در شکل نیز دیده می‌شود، ابتدا گردابه‌ای کوچک در پشت استوانه گوشه بالا تشکیل می‌شود (لحظه t)؛ این گردابه با چرخش و حرکت به سمت پایین بزرگتر شده و سپس از سطح استوانه جدا می‌شود (لحظه $t+T/4$). در این هنگام، گردابه‌ای دیگر در گوشه پایین تولید شده و روندی خلاف گردابه قبلی را طی می‌کند (لحظه $t+2T/4$)؛ به عبارتی دیگر، گردابه کوچک شکل گرفته در پایین با چرخش به سمت بالا اندازه آن بزرگتر شده و سپس از سطح استوانه کنده می‌شود (لحظه $t+3T/4$). این فرایند تولید گردابه و کنده شدن از سطح استوانه به صورت کاملاً متناوبی تکرار می‌شود.

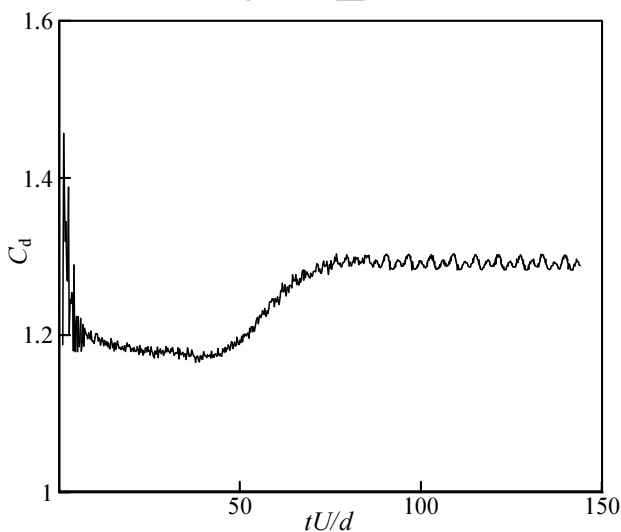
فرایند مذکور را می‌توان از زاویه‌ای دیگر نیز بررسی کرد. اگر در هر لحظه از زمان کانتورهای سرعت افقی میدان ترسیم شود، فرایند مذکور مشابه دم گردابه‌ای^۱ است که به انتهای استوانه وصل شده و بصورت نوسانی بالا و پایین می‌رود (شکل ۱۱). هر چهار لحظه زمانی بالا معادل یکی از وضعیت‌های حرکت دم گردابه‌ای است. در لحظه اول که گردابه کوچک بالای شروع به شکل‌گیری می‌کند، دم گردابه‌ای به صورت افقی است (لحظه t). با بزرگتر شدن و کنده شدن آن از سطح، دم گردابه‌ای به سمت بالا می‌رود (لحظه $t+T/4$). حرکت معکوس آن نیز (افقی شدن در لحظه $t+2T/4$ و پایین رفتن در لحظه $t+3T/4$) در ادامه سیکل مورد نظر به خوبی مشهود است. میدان چرخش^۲ برای دو لحظه‌ای که دم گردابه‌ای بالا

1. Vortex Tail
2. Vorticity

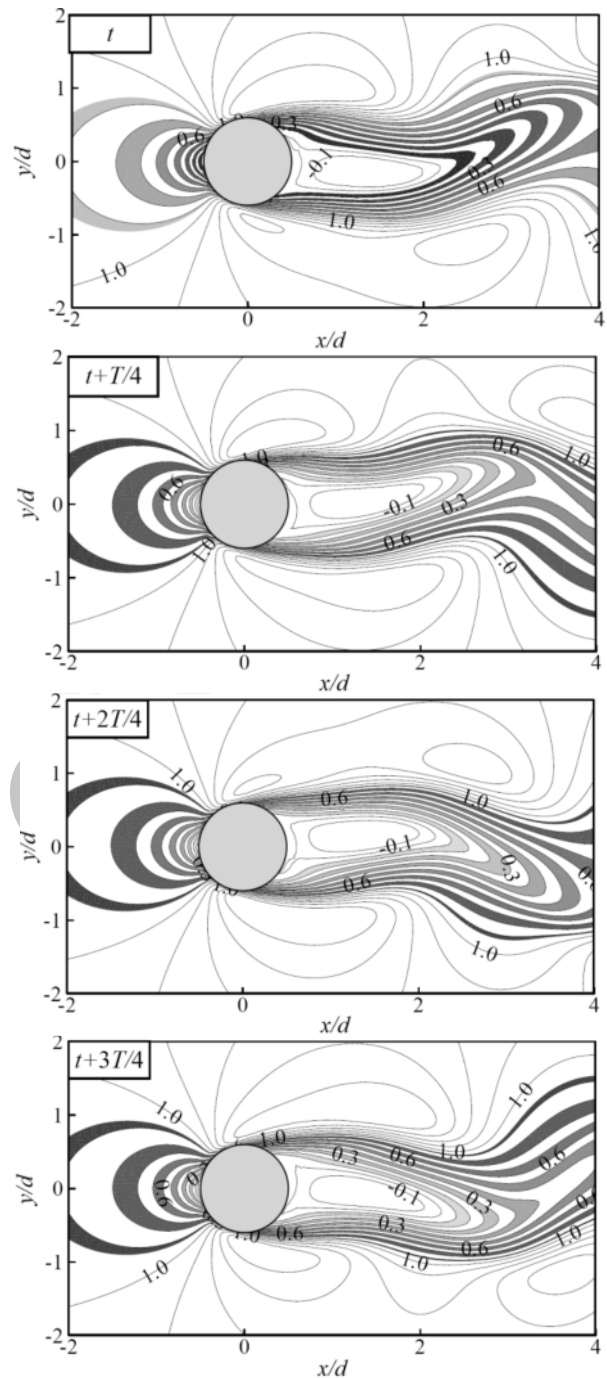
کاملاً تناوبی تکرار می‌شود؛ لذا، نیروهای برا و درگ بصورت نوسانی بر استوانه وارد می‌شوند (شکل‌های ۱۳ و ۱۴). حداکثر دامنه نیروی برا ۰/۲۸ و متوسط نیروی درگ پس از رسیدن به مرحله تناوبی به مقدار ۱/۲۹ است که با مقادیر ارائه شده در مرجع [۲۸] (به ترتیب ۰/۲۹ و ۱/۳۱) هماهنگی خوبی دارد.



شکل ۱۲ میدان چرخش اطراف استوانه در رینولدز ۱۰۰ در لحظه دم‌گردابه‌ای الف- بالا و ب- پایین



شکل ۱۳ نیروی درگ وارد بر استوانه در رینولدز ۱۰۰

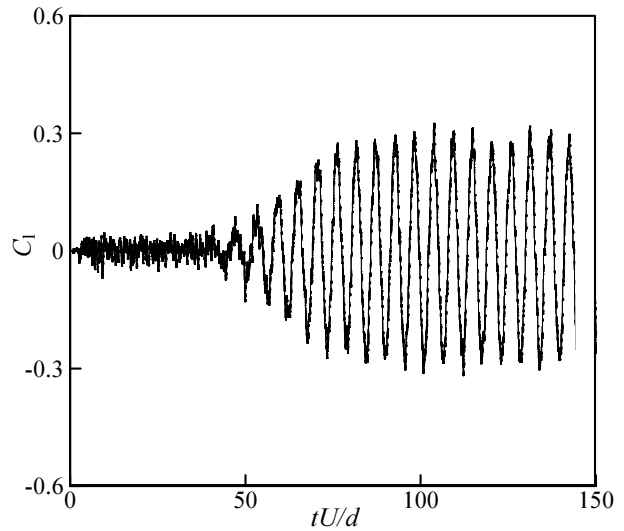


شکل ۱۱ کانتور سرعت افقی میدان جریان اطراف استوانه در رینولدز ۱۰۰ در چهار مقطع زمانی از یک سیکل با دوره تناوب T

همان گونه که مشخص است قدرت گردابه‌ها در نزدیکی استوانه بیشترین مقدار و با دور شدن از استوانه انرژی آنها مستهلک شده و قدرتش کمتر می‌شود.

همان گونه که توضیح داده شد، پس از گذشتن مقدار زمانی از شروع حل، جریان حول استوانه در رینولدز ۱۰۰ به صورت

- [1] Monaghan, J. J., "Smoothed Particle Hydrodynamics", *Rep. Prog. Phys.*, Vol. 68, 2005, pp. 1703-1759.
- [2] Gingold, R. A., and Monaghan, J. J., "Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, 1977, pp. 375-389.
- [3] Lucy, L. B., "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *The astronomical journal*, Vol. 82, 1977, pp. 1013-1024.
- [4] Monaghan, J. J., "Simulating Free Surface Flows with SPH", *Journal of Computational Physics*, Vol. 110, No. 2, 1994, pp. 399-406.
- [5] Shao, S., and Lo, E. Y. M., "Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface", *Advances in Water Resources*, Vol. 26, No. 7, 2003, pp. 787-800.
- [6] Xu, R., Stansby, P., and Laurence, D., "Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach", *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 18, 2009, pp. 6703-6725.
- [7] Colagrossi, A., and Landrini, M., "Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 191, No. 2, 2003, pp. 448-475.
- [8] Antuono, M., Colagrossi, A., and Marrone, S., "Numerical diffusive terms in weakly-compressible SPH schemes", *Computer Physics Communications*, Vol. 183, No. 12, 2012, pp. 2570-2580.
- [9] Vila, J., "On particle weighted methods and smooth particle hydrodynamics", *Mathematical models and methods in applied sciences*, Vol. 9, No. 02, 1999, pp. 161-209.
- [10] Ferrari, A., Dumbser, M., Toro, E. F. *et al.*, "A new 3D parallel SPH scheme for free surface flows", *Computers & Fluids*, Vol. 38, No. 6, 2009, pp. 1203-1217.
- [11] Fatehi, R., and Manzari, M. T., "A remedy for numerical oscillations in weakly compressible smoothed particle hydrodynamics", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 67, No. 9, 2011, pp. 1100-1114.
- [12] Molteni, D., and Colagrossi, A., "A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH", *Computer Physics Communications*, Vol. 180, No. 6, 2009, pp. 861-872.
- [13] Antuono, M., Colagrossi, A., Marrone, S. *et al.*, "Free-surface flows solved by means of SPH schemes with numerical diffusive terms", *Computer Physics Communications*, Vol. 181, No. 3, 2010, pp. 532-549.



شکل ۱۴ نیروی برا وارد بر استوانه در رینولدز ۱۰۰

۷- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در تحقیق حاضر روشی برای کاهش نوسانات فشار در روش WCSPH ارائه شد. با اضافه نمودن جمله پخش چگالی به معادله پیوستگی، نوسانات فشار تا حد زیادی کنترل شدند. این جمله که توسط محققان دیگر در حضور جمله لزجت مصنوعی موناهان استفاده می‌شود، در این تحقیق با حضور جمله لزجت واقعی بکار گرفته و نتایج خوبی حاصل شده است. شرط مرزی جریان ورودی/خروجی و جدایی جریان از روی سطح که در روش‌های مبتنی بر شبکه به راحتی مدل‌سازی می‌شوند، در روش بدون شبکه SPH با مشکلاتی جدی مواجه هستند. مشکلات مربوط به تزریق و حذف ذره از میدان محاسباتی با نرخ سازگار، باعث محدود شدن روش SPH به مسائل مرز بسته و مرزهای پرودیک شده است. همچنین به دلیل جدایی جریان از روی سطح، مناطقی از میدان با ایجاد حفره‌های خالی از ذره مواجه شده که همگرایی نتایج عددی را با مشکلات جدی مواجه می‌کند. در این تحقیق با اعمال الگوریتمی مناسب برای اعمال شرط مرزی جریان ورودی/خروجی و همچنین الگوی ثابت نگه‌داشتن توزیع یکنواخت ذرات با استفاده از جابجایی آنها در هر گام زمانی، جریان اطراف یک استوانه در رینولدزهای مختلف شبیه‌سازی شد. مقایسه نتایج کار حاضر با کار محققان دیگر و مشاهده انطباق نتایج، نشان‌دهنده دقت روش ارائه شده می‌باشد.

۸- مراجع

- [21] Cummins, S. J., and Rudman, M., "An SPH projection method", *J. Comput. Phys.*, Vol. 152, 1999, pp. 584-607.
- [22] Monaghan, J. J., "Smoothed particle hydrodynamics", *Annual review of astronomy and astrophysics*, Vol. 30, 1992, pp. 543-574.
- [23] Ellero, M., Serrano, M., and Espaol, P., "Incompressible smoothed particle hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 226, No. 2, 2007, pp. 1731-1752.
- [24] Fang, J., and Parriaux, A., "A regularized Lagrangian finite point method for the simulation of incompressible viscous flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 20, 2008, pp. 8894-8908.
- [25] Fatehi, R., and Manzari, M. T., "A consistent and fast weakly compressible smoothed particle hydrodynamics with a new wall boundary condition", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 68, No. 7, 2012, pp. 905-921.
- [26] Takashi, N., and Hughes, T. J. R., "An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 95, No. 1, 1992, pp. 115-138.
- [27] Grove, A., Shair, F., and Petersen, E., "An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 19, No. 01, 1964, pp. 60-80.
- [28] Park, J., Kwon, K., and Choi, H., "Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160", *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 6, 1998/11/01, 1998, pp. 1200-1205.
- [29] Blevins, R. D., "Flow-induced vibration", *New York, Van Nostrand Reinhold Co.*, 1977. 377 p., Vol. 1, 1977.
- [14] Federico, I., *Simulating Open-Channel Flows and Advective Diffusion Phenomena through SPH Model*, [PhD thesis], Universit'a della Calabria., 2010.
- [15] Labbé, D. F. L., and Wilson, P. A., "A numerical investigation of the effects of the spanwise length on the 3-D wake of a circular cylinder", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 23, No. 8, 2007, pp. 1168-1188.
- [16] Lam, K., Jiang, G. D., Liu, Y. *et al.*, "Simulation of cross-flow-induced vibration of cylinder arrays by surface vorticity method", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 22, No. 8, 2006, pp. 1113-1131.
- [17] Lee, E. S., Moulinec, C., Xu, R. *et al.*, "Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 18, 2008, pp. 8417-8436.
- [18] Shadloo, M. S., Zainali, A., Sadek, S. H. *et al.*, "Improved Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics method for simulating flow around bluff bodies", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, No. 9-12, 2011, pp. 1008-1020.
- [19] Takeda, H., Miyama, S. M., and Sekiya, M., "Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics", *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 92, No. 5, 1994, pp. 939-960.
- [20] Rafiee, A., and Thiagarajan, K. P., "An SPH projection method for simulating fluid-hypoelastic structure interaction", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 33-36, 2009, pp. 2785-2795.