http://mjmec.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
مهر ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۷ ص ص ۱۲۷-۱۴۱

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۶/۲۴
تاریخ پذیرش ۹۱/۱۱/۸
ارائه در سایت ۹۲/٤/۳۰

کنترل سینماتیکی وضعیت آرایش سه جرم صفحه‌ای متصل به هم به وسیله تغییر طول اتصالات

هادی مکارم[۱]، حسن سالاریه[۲*]، غلامرضا وثوقی[۳]، آریا الستی[۳]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
۳- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
* تهران، صندوق پستی ۹۵۶۷-۱۱۱۵۵، salarieh@sharif.ir

چکیده- در این مقاله، کنترل حرکت یک سیستم صفحه‌ای غیرهولونومیک با چهار درجه آزادی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در سیستم مورد بررسی، سه عملگر کنترلی وظیفه کنترل شکل سیستم را بر عهده دارند. همچنین فرض عدم گشتاور خارجی و صفر بودن تکانه زاویه‌ای، یک قید غیرهولونومیک به مسأله می‌افزاید. ابتدا نشان داده می‌شود که معادلات سادهٔ شدهٔ حرکت این سیستم اگرچه قابل تبدیل به معادلات سیستم هایزنبرگ و فرم زنجیره‌ای است، روش‌های متعارف کنترل آنها، در مورد این سیستم پاسخگو نیست. آنگاه برای این سیستم، به دو روش مود لغزشی و طراحی لحظه‌ای مسیر، قوانین کنترلی مدار بسته طراحی می‌شود که آن را از هر شرط اولیه به هر وضعیت تعادل دلخواه رساننده سیستم را حول آن پایدار نماید. نتایج شبیه‌سازی، کارآمدی روش‌های پیشنهادی را نشان می‌دهد.

کلیدواژگان: ماهواره‌های متصل با کمند، غیرهولونومیک، کنترل، تغییر شکل.

Kinematic attitude control of three pairwise connected in-plane masses by varying the lengths of the links

H. Makarem[1], H. Salarieh[2], G.R. Vossoughi[3], A. Alasty[3]

1- MSc. Student, Mech. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran
2- Asso. Prof., Mech. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran
3- Prof., Mech. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran
* P.O.B. 11155-9567 Tehran, Iran. salarieh@sharif.ir

Abstract- Motion control of a planar nonholonomic system with four DOM is addressed in this paper. Three actuators (are responsible for) shape control for this system. Furthermore, assuming no external forces and zero angular momentum imposes a nonholonomic constraint to the problem. First it is shown that although the simplified equations of motion for this system could be converted to Heisenberg and chained-form systems, the conventional control methods for these systems may not be applied to the considered problem. Then, using *sliding modes* and *online path planning*, two different closed-loop control laws are designed, bringing the system to and stabilizing around any desired equilibrium state started from any initial condition. Simulation results show the efficiency of the proposed methods.

Keywords: Tethered Satellites, Nonholonomic, Control, Shape Change.

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، پایدارسازی سیستم‌های زیرفعال، مورد توجه زیادی قرار گرفته است. تعداد ورودی‌های کنترلی در سیستم‌های زیرفعال، از تعداد درجات آزادی آنها کمتر بوده و این موضوع، مسأله کنترل آنها را پیچیده‌تر از سیستم‌های کاملاً فعال می‌نماید. یک نمونه سیستم زیرفعال در ماهواره‌هایی است که تعدادی از چرخ‌های عکس‌العملی خود را از دست داده باشد [۱]. پاندول معکوس بر روی یک لغزنده نیز نمونه دیگری از سیستم‌های زیرفعال است [۲]. گربه در حال سقوط نمونه مشهور دیگری از این گونه سیستم‌هاست که پایستگی تکانه زاویه‌ای، یک قید انتگرال‌ناپذیر سرعت به آن ضمیمه کرده و آن را به یک سیستم غیرهولونومیک تبدیل می‌کند [۳]. ربات‌های چرخ‌دار نیز نمونه‌هایی از سیستم‌های غیرهولونومیک هستند. در این سیستم‌ها تغییر شکل‌های داخلی به عنوان یکی از عوامل کنترلی مورد توجه قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، در حضور پایستگی تکانه زاویه‌ای، تغییر جهت‌گیری سیستم جز از طریق تغییر شکل‌های داخلی امکان پذیر نیست [۱]. از سوی دیگر بر اساس قضیه براکت[1] [۴]، یک قانون کنترلی هموار و مستقل از زمان، نمی‌تواند چنین سیستم‌هایی را به صورت مجانبی پایدار کند. این قضیه توجه محققان را به سمت قوانین کنترلی با تابعیت صریح از زمان، قوانین مشتق‌ناپذیر و یا ناپیوسته هدایت کرده است [۵-۷]. به علاوه دیدگاه هندسی نیز، ابزارهای قدرتمندی برای مدل‌سازی، تحلیل، طراحی مسیر و کنترل این سیستم‌ها در اختیار قرار داده است [۹،۸،۵].

در این مقاله، یک سیستم ۴ درجه آزادی با سه عملگر مورد بررسی قرار می‌گیرد. این سیستم از سه جرم صفحه‌ای تشکیل شده که با سه میله به یکدیگر متصل شده و یک آرایش مثلثی ایجاد کرده‌اند. این سیستم فاقد هر گونه نیروی محرکه است، اما طول میله‌ها قابل تنظیم بوده و حرکت دورانی و شکل آرایش از این طریق قابل کنترل است. پایستگی تکانه زاویه‌ای، این آرایش را به یک سیستم غیرهولونومیک تبدیل کرده است. کاربرد این سیستم به ویژه در مطالعه آرایش ماهواره‌های متصل با کمند[2] است. آرایش ماهواره‌ها شامل تعدادی ماهواره است که شکل خاصی را در فضا ایجاد کرده‌اند و اتصال کمند میان آنها، شکل آرایش را بدون نیاز به نیروی پیشران، ثابت نگه می‌دارد [۱۰،۱۱]. از کاربردهای اصلی این سیستم‌ها، تصویربرداری، تولید انرژی و ایجاد جاذبه مصنوعی در فضا را می‌توان نام برد [۱۲-۱۴]. ساده‌ترین و یکی از مهم‌ترین آرایش‌های متصل با کمند، آرایش مثلثی ماهواره‌ها است که از سه ماهواره متصل به یکدیگر تشکیل شده و دینامیک و کنترل آن در مقالات متعدد مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۱،۱۵-۱۷]. مدل و روش کنترلی ارائه‌شده در مقاله حاضر، می‌تواند در مطالعه این سیستم و سیستم‌های مشابه مورد استفاده قرار گیرد.

هدف این مقاله، کنترل هم‌زمان شکل و جهت‌گیری این آرایش و هدایت آن از هر وضعیت اولیه به هر وضعیت مطلوب است. بدین منظور برای این سیستم ابتدا یک مدل سینماتیکی ارائه شده و معادله پایستگی تکانه زاویه‌ای بر مبنای آن استخراج می‌شود. آنگاه با مقایسه این سیستم با موارد مشابه دیگر، مشاهده می‌شود که با توجه به محدودیت بازه تعریف متغیرهای حالت، اکثر روش‌های کنترلی پیشنهاد شده، برای این سیستم قابل استفاده است. پس از آن به دو روش مختلف برای این سیستم قانون کنترلی طراحی و نتایج شبیه‌سازی آن ارائه می‌شود و با مقایسه آنها، نقاط قوت هر کدام مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- مدل‌سازی

سیستم مورد مطالعه متشکل از سه جرم نقطه‌ای در نظر گرفته شده که با میله‌های بدون جرم به یکدیگر متصل شده‌اند. فرض بر این است که میله‌ها دارای طول متغیر و قابل کنترل هستند و طول آنها تنها عوامل کنترلی سیستم است. با این ترکیب از ورودی‌ها، تکانه‌های خطی و زاویه‌ای کنترل‌پذیر نیستند. بنابراین اولاً حرکت انتقالی مرکز جرم از سایر حرکت‌های آن تفکیک شده و بر حرکت در دستگاه مرکز جرم تمرکز می‌شود. همچنین فرض بر این است که هیچ گونه گشتاور خارجی بر سیستم اعمال نشده و تکانه زاویه‌ای کل سیستم همواره برابر صفر باقی می‌ماند. به علاوه از آنجا که صفحه قرارگیری این آرایش مثلثی، با کنترل طول اتصالات تغییر نمی‌کند، حرکت به طور کلی درون صفحه مطالعه می‌شود. همچنین ابتدا معادلات حرکت برای ترکیب دلخواه جرم اجسام استخراج شده و سپس برای حالت خاص جرم‌های یکسان مورد بررسی قرار می‌گیرد.

1. Brockett
2. Tethered Satellite Formation

نمای شماتیک سیستم در شکل ۱ نشان داده شده است. این سیستم در حرکت صفحه‌ای در دستگاه مرکز جرم، دارای چهار درجه آزادی است؛ در حالی که تنها سه ورودی به سیستم وارد می‌شود. علاوه بر این صفر بودن تکانه زاویه‌ای، معادله‌ای میان سرعت‌ها برقرار می‌کند که به عنوان یک قید غیر هولونومیک برای سیستم به شمار می‌رود.

در این قسمت هدف انتخاب دستگاه مختصاتی است که معادلات حرکت در آن بیان ساده‌ای پیدا نماید.

چنانچه X_1، X_2، X_3 بردار مکان جرم‌های نقطه‌ای در دستگاه اینرسی مرکز جرم باشد، می‌توان نوشت:

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 = 0 \qquad (۱)$$

با تعریف یک مثلث پایه با بردارهای رئوس ثابت X_1، X_2، X_3 به طوری که:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \qquad (۲)$$

بردار مکان جرم‌ها می‌تواند به صورت رابطه (۳) نوشته شود:

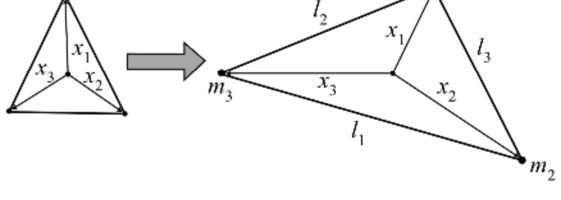
$$X_i = A(t)\, x_i, \quad i = 1,2,3 \qquad (۳)$$

که در آن A یک ماتریس مربعی دو در دو بوده و درایه‌های آن می‌تواند به عنوان مختصات تعمیم یافته در نظر گرفته شود. ماتریس A را می‌توان به صورت قطبی تجزیه نمود:

$$A = QS \qquad (۴)$$

که در آن S متقارن و Q متعامد ویژه است. نشان داده می‌شود که ماتریس S تنها تابع طول میله‌هاست. در این صورت می‌توان S را ماتریس تغییر شکل و Q را ماتریس دوران دانست و به این ترتیب حرکت حول مرکز جرم را به دو بخش تغییر شکل و دوران تجزیه نمود. برای این منظور از تعریف طول میله‌های l_1، l_2 و l_3 استفاده می‌شود.

با توجه به خواص ماتریس Q تساوی $Q^T Q = I$ همواره برقرار است و بنابراین برای هر جایگشت (i, j, k) از $(1,2,3)$ می‌توان رابطه (۵) را نوشت.



شکل ۱ نمای شماتیک سیستم مورد مطالعه

$$\left.\begin{aligned} X_i &= QSx_i \\ l_K^2 &= \|X_i - X_j\|^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow l_k^2$$
$$= (x_i - x_j)^T S^2 (x_i - x_j) \qquad (۵)$$

رابطه (۵) شامل سه معادله مستقل است که از آنها ماتریس S به عنوان تابعی از l_1، l_2 و l_3 به دست می‌آید. بنابراین فعلاً مختصات تعمیم یافته را به صورت l_1، l_2 و l_3 و زاویه دوران θ نظیر ماتریس دوران Q در نظر گرفته می‌شود. زاویه θ نماینده جهت‌گیری کلی آرایش در صفحه بوده و در صورت ثابت ماندن طول میله‌ها، تغییرات آن بیانگر میزان دوران صلب سیستم است. به این ترتیب با تعریف u_1، u_2 و u_3 به عنوان ورودی‌های سیستم، معادلات کنترلی آن از سه رابطه:

$$\frac{d}{dt} l_3 = u_3 \qquad \frac{d}{dt} l_2 = u_2 \qquad \frac{d}{dt} l_1 = u_1 \qquad (۶)$$

و معادله پایستگی تکانه زاویه‌ای، تشکیل می‌شود. تکانه زاویه‌ای از رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$H = \sum_{i=1}^{3} m_i X_i \times \dot{X}_i \qquad (۷)$$

با مشتق گیری از رابطه (۳)۰ بردار $\dot{X}_i$ محاسبه می‌شود:

$$X_i = QSx_i \Rightarrow \dot{X}_i = Q(\dot{\theta} JS + \dot{S}) x_i,$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۸)$$

ضرب برداری در رابطه (۷) به شکل رابطه (۹) بازنویسی می‌شود:

$$X_i \times \dot{X}_i = (Sx_i) \times ((\dot{\theta} JS + \dot{S}) x_i) \qquad (۹)$$

ضرب خارجی دو بردار صفحه‌ای a و b برداری عمود بر صفحه است که مؤلفه سوم آن از رابطه $(a \times b)_3 = -a^T Jb$ به دست می‌آید. بنابراین بردار تکانه زاویه‌ای برداری عمود بر صفحه حرکت است که تنها مؤلفه آن به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{3} -m_i \left(x_i^T S\right) J \left((\dot{\theta} JS + \dot{S}) x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} m_i x_i^T \left(\dot{\theta} S^2 - SJ\dot{S}\right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{3} tr\left((\dot{\theta} S^2 - SJ\dot{S})(m_i x_i x_i^T)\right) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

اگر شکل پایه چنان انتخاب شود که داشته باشیم $\sum_{i=1}^{3} m_i x_i x_i^T = \frac{\bar{m}}{2} I$ که در آن I ماتریس همانی و $\bar{m}$ جرم متوسط سه جسم است، رابطه (۱۰) را می‌توان به صورت

رابطه (۱۱) بازنویسی کرد:

$$\frac{H}{\overline{m}}=\bar{I}\dot{\theta}+t^{\dot{s}s}\qquad \bar{I}=\frac{1}{2}tr(\mathrm{S}^2)$$
$$t^{\dot{s}s}=\frac{1}{2}\;tr(\dot{\mathrm{S}}\mathrm{JS})\qquad(۱۱)$$

سپس با فرض H=0 می‌توان نوشت:

$$\bar{I}\dot{\theta}+t^{\dot{s}s}=0\qquad(۱۲)$$

این معادله رابطه $\dot{\theta}$ را با S و $\dot{S}$ مشخص می‌کند. اکنون باید ضریب $\bar{I}$ بر حسب طول میله‌ها محاسبه شود. از این پس جرم‌ها برابر فرض شده و تعریف شکل پایه به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{3}m_i\mathrm{x}_i^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\mathrm{I}\qquad(۱۳)$$

برای جایگشت زوج (i,j,k) از $(1,2,3)$ بردارهای d_k و D_k به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_k&=\mathrm{x}_j-\mathrm{x}_i\\ \mathrm{D}_k&=\mathrm{X}_j-\mathrm{X}_i\end{aligned}\qquad(۱۴)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&[\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3]\\ &\quad=[\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2\mathrm{d}_3]^{\mathrm{T}}\mathrm{S}^2[\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2\mathrm{d}_3]\end{aligned}\qquad(۱۵)$$

سمت چپ معادله فوق به کمک روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}_i^T\mathrm{D}_j=\frac{1}{2}\left(l_k^2-l_i^2-l_j^2\right),\{i,j,k\}=\{1,2,3\}\\ &\mathrm{D}_i^T\mathrm{D}_j=l_i^2\end{aligned}\qquad(۱۶)$$

با تعریف $\varphi_i=2\mathrm{d}_i\mathrm{d}_i^T-\mathrm{I}$، ماتریس S^2 از رابطه (۱۵) داریم:

$$\mathrm{S}^2=\frac{2}{3}(l_1^2\varphi_1+l_2^2\varphi_2+l_3^2\varphi_3)+\frac{1}{3}(l_1^2+l_2^2+l_3^2)\mathrm{I}\qquad(۱۷)$$

و بنابراین ضریب $\bar{I}$ در رابطه ۰(۱۱) محاسبه می‌شود:

$$\bar{I}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{S}^2)=\frac{1}{3}(l_1^2+l_2^2+l_3^2)\qquad(۱۸)$$

همچنین کمیت عددی $t^{\dot{s}s}$ در رابطه (۱۱) به صورت تابعی از طول میله‌ها و نرخ تغییر طول آنها قابل بیان است، هر چند این کار پیچیده‌تر از فرآیند محاسبه $\bar{I}$ بوده و مستلزم محاسبه ماتریس S بر حسب طول میله‌ها از رابطه (۱۷) و سپس محاسبه $\dot{S}$ با مشتق‌گیری از آن نسبت به زمان است.

با انجام این مراحل مشاهده می‌شود که اگرچه ضریب $\bar{I}$ به عنوان تابعی از l_1، l_2 و l_3 به صورت ساده‌ای بیان شده است، رابطه $t^{\dot{s}s}$ بر حسب طول میله‌ها و نرخ تغییر طول آنها شکل پیچیده‌ای به خود می‌گیرد و لذا معادله (۱۲) شکل ساده خود را از دست خواهد داد. بنابراین مناسب است که مختصات تعمیم یافته که پیش از این به صورت (l_1,l_2,l_3,θ) تعریف شده چنان باز تعریف شود که معادله (۱۲) بیان ساده خود را به دست آورد. فرآیند تغییر مختصات تعمیم یافته در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱ تغییر متغیرهای متوالی

نتایج تغییر متغیرها	تعریف متغیرها
$S=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3\varphi_3+dI$ $\bar{I}=\frac{1}{2}tr(\mathrm{S}^2)=\frac{\mu}{3}$	$d=\sqrt{\frac{\mu}{6}+\sqrt{\frac{\eta}{12}}}$ $c_i=\frac{l_i^2}{3d}$ $\mu=l_1^2+l_2^2+l_3^2$ $\eta=2(l_1^2l_2^2+l_2^2l_3^2+l_3^2l_1^2)-(l_1^4+l_2^4+l_3^4)\geq 0$
$t^{\dot{s}s}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(p_1\dot{p}_2-p_2\dot{p}_1)$ $\mu\dot{\theta}=\frac{3\sqrt{3}}{3}(p_1\dot{p}_2-p_2\dot{p}_1)$	$p_1=c_1-c_2,\qquad p_2=c_2-c_3,\qquad p_3=c_3-c_1$
$p_1=\frac{2}{3}\rho\sqrt{\mu}\sin(\phi)$ $p_2=\frac{2}{3}\rho\sqrt{\mu}\sin(\phi-\frac{2\pi}{3})$ $p_3=\frac{2}{3}\rho\sqrt{\mu}\sin(\phi+\frac{2\pi}{3})$ $d^2=\frac{\mu}{3}(1-\rho^2)\Rightarrow\rho^2\leq\frac{1}{2}$ $\dot{\theta}=\rho^2\dot{\phi}$	$\rho=\sqrt{\frac{3}{2\mu}+(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}$ $p_3\geq p_2\Rightarrow\phi=\sin^{-1}(\frac{3}{2}\frac{p_1}{\rho\sqrt{\mu}})$ $p_3<p_2\Rightarrow\phi=\pi-\sin^{-1}(\frac{3}{2}\frac{p_1}{\rho\sqrt{\mu}})$

بر این اساس به جای کمیت‌های l_1، l_2 و l_3 سه متغیر جدید ρ، ϕ و μ معرفی شده که هر کدام از آنها به شکل زیر به صورت تابعی از طول میله‌ها قابل بیان است:

$$\mu = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$$
$$\eta = 2(l_1^2 l_2^2 + l_2^2 l_3^2 + l_3^2 l_1^2) - (l_1^4 + l_2^4 + l_3^4)$$
$$\rho^2 = 1 - \frac{\sqrt{3\eta}}{\mu}$$
$$\tan\phi = \frac{\sqrt{3}(l_1^2 - l_2^2)}{2l_3^2 - l_1^2 - l_2^2} \qquad (۱۹)$$

طول اضلاع بر حسب ρ، ϕ و μ را از روابط زیر داریم:

$$l_i^2 = \frac{\mu}{3}\left(1 + 2\rho\sqrt{1-\rho^2}\cos(\phi + \Delta\phi_i)\right)$$
$$\Delta\phi_1 = -\frac{2\pi}{3},\ \Delta\phi_2 = \frac{2\pi}{3},\ \Delta\phi_3 = 0 \qquad (۲۰)$$

در این صورت با انتخاب $(\rho, \phi, \mu, \theta)$ به عنوان مختصات تعمیم یافته، رابطه (۱۲) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\dot{\theta} = \rho^2 \dot{\phi} \qquad (۲۱)$$

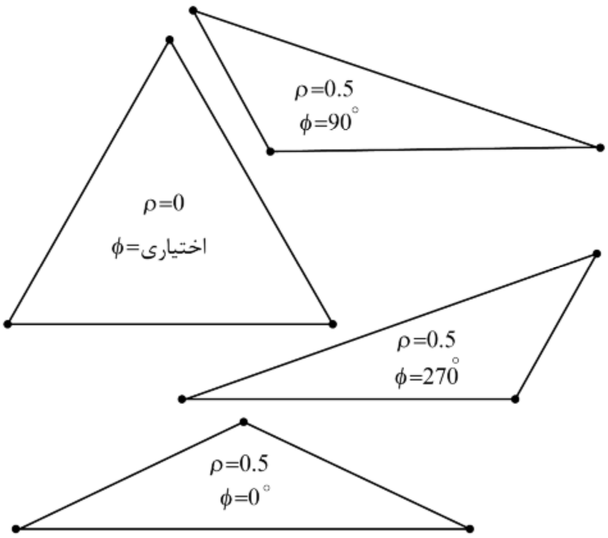
همچنین با مشتق‌گیری از روابط (۲۰) نسبت به زمان و تعریف $w_1 = \frac{d}{dt}\rho$، $w_2 = \frac{d}{dt}\phi$ و $w_3 = \frac{d}{dt}\mu$، ورودی‌های کنترلی u_1، u_2 و u_3 بر حسب w_1، w_2 و w_3 مثل رابطه (۲۲) می‌شود:

$$u_i = \frac{d}{dt} l_i = \frac{l_i}{2\mu} w_3 + \frac{\mu}{3l_i}\frac{1-2\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\cos(\phi + \Delta\phi_i)\, w_1 + \frac{\mu}{3l_i}\rho\sqrt{1-\rho^2}\sin(\phi + \Delta\phi_i)\, w_2 \qquad (۲۲)$$

سپس با معرفی w_1، w_2 و w_3 به عنوان ورودی‌های جایگزین به سیستم کنترلی، معادلات حرکت را می‌توان به صورت رابطه (۲۳) بازنویسی کرد:

$$\dot{\rho} = w_1 \quad \dot{\phi} = w_2 \quad \dot{\mu} = w_3 \quad \dot{\theta} = \rho^2 w_2 \qquad (۲۳)$$

بدین ترتیب، معادلات کنترلی که پیش از این در روابط (۶) و (۱۲) معرفی شده است، می‌تواند با توجه به معادلات (۱۹) و (۲۲)، با روابط (۲۳) جایگزین شود. با توجه به رابطه (۲۰)، μ دارای بعد مربع طول بوده و بزرگی و کوچکی آرایش مثلثی را نشان می‌دهد؛ همچنین ρ میزان انحراف از شکل متساوی الاضلاع را بیان می‌کند به طوری که $\rho = 0$ نشان دهنده آرایش متساوی الاضلاع و $\rho = \sqrt{2}/2$ بیانگر آرایش خطی است. این در حالی است که تعبیر هندسی ساده‌ای نداشته و می‌توان آن را به عنوان تعریف ریاضی پذیرفت (شکل ۲).



شکل ۲ نقش ρ و در شکل آرایش مثلثی

نکته جالب توجه در معادلات (۲۳) محدوده مجاز تغییر متغیرها است. با توجه به جدول ۱ محدوده مجاز تغییرات ρ بازه $[0,\sqrt{2}/2]$ است. در حالی که متغیرهای ϕ و θ می‌تواند هر مقدار دلخواه، و μ هر مقدار مثبتی به خود بگیرد.

۳- تشکیل قانون کنترلی

سیستم مورد مطالعه در این مقاله، که پایدار سازی آن حول یک نقطه تعادل مورد توجه است، یک سیستم زیرفعال است و بنابر قضیه براکت[1] [۴] یک قانون کنترلی پایدارساز مجانبی برای آن، نمی‌تواند همزمان تابعی هموار و مستقل از زمان باشد. معادله دوران این سیستم به شکلی که در ردیف دوم جدول ۱ نوشته شده، با تغییر متغیر ساده، به معادله کنترلی معروف به انتگرال‌گیر غیرهولونومیک[2] تبدیل می‌شود.

همچنین معادلات (۲۳) شباهت زیادی به فرم زنجیره‌ای[3] دارند و به سادگی به آن تبدیل می‌شوند. دو سیستم مذکور و فرم‌های تعمیم یافته آنها [۱۸]، بسیار مورد توجه محققان بوده و روش‌های کنترلی متنوعی برای آن پیشنهاد شده است. برای چنین سیستم‌هایی پایدارسازی و دنبال کردن مسیر دو مسأله کاملاً متفاوت است. طراحی قوانین کنترلی متغیر با زمان،

1. Brockett
2. Nonholonomic Integrator
3. Chained Form

طراحی یک مسیر مطلوب و دنبال کردن آن و نیز استفاده از قوانین کنترلی ناپیوسته (مانند مود لغزشی)، از روش‌های مورد توجه در کنترل این سیستم‌ها به شمار می‌رود [۶،۱۹،۲۰].

انتگرال‌گیر غیرهولونومیک و فرم زنجیره‌ای مرتبه پایین به طور عمده در مدل‌سازی متحرک‌های صفحه‌ای (مانند حرکت چرخ بر روی صفحه) دیده می‌شود و چنانچه درجات آزادی این گونه سیستم‌ها به تغییر در ناحیه خاصی محدود شده باشد، قیدهای حرکتی آنها با آنچه در این سیستم دیده می‌شود متفاوت است. از این رو اکثر روش‌های متعارف در کنترل آن سیستم‌ها، بر این مسأله قابل اعمال نبوده و لازم است قانون کنترلی مناسبی برای آن طراحی شود.

در این مقاله به دو روش برای این سیستم قانون کنترلی طراحی می‌شود. روش اول با استفاده از کنترل مود لغزشی، متغیرهای حالت را از هر مقدار اولیه دلخواه به مقدار نهایی دلخواه هدایت کرده و در روش دوم برای این هدف یک قانون کنترلی پیوسته ارائه می‌شود.

قانون کنترلی در هر دو روش بر مبنای معادلات (۲۳) طراحی می‌شود به طوری که نامساوی $\rho^2<1/2$ را در طول مسیر حرکت، تضمین نماید.

نکته دیگر این که معادله کنترلی مربوط به μ در رابطه (۲۳) مستقل از معادلات دیگر بوده و لذا، مسأله طراحی کنترلر بر سه معادله باقی مانده متمرکز می‌شود.

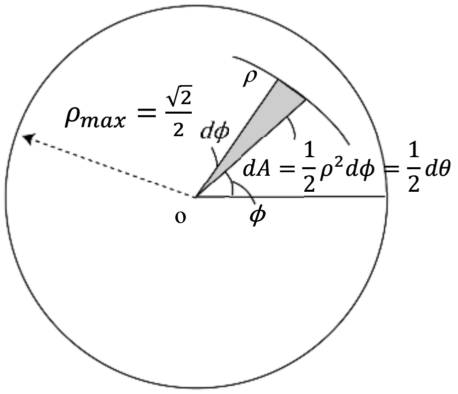
نکته دیگر این که معادله کنترلی مربوط به μ در رابطه (۲۳) مستقل از معادلات دیگر بوده و لذا، مسأله طراحی کنترلر بر سه معادله باقی مانده متمرکز می‌شود.

۳-۱- طراحی اول : مود لغزشی

سیستم کنترلی به صورت زیر مفروض است:

$$\dot\rho = w_1 \quad \dot\phi = w_2$$
$$\dot\theta = \rho^2 w_2 \quad \rho^2 < \frac{1}{2} \qquad (۲۴)$$

هدف، طراحی یک قانون کنترلی برای آن است به نحوی که سیستم را از هر شرط اولی $(\rho_0, \phi_0, \theta_0)$ به وضعیت نهایی $(\rho_f, \phi_f, \theta_f)$ برساند. تصویر هندسی از معادلات فوق، می‌تواند در طراحی قانون مناسب، مورد استفاده قرار گیرد. دستگاه مختصات قطبی $\rho-\phi$ در شکل ۳ به خوبی به تصویر کشیده شده است.



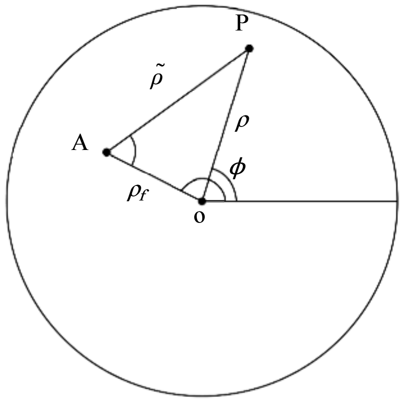
شکل ۳ مختصات قطبی $\rho-\phi$

با توجه به شکل، معادله سوم از رابطه (۲۴) به این صورت بیان می‌شود تغییر زاویه θ دو برابر مساحتی است که در حین حرکت درون صفحه حول مبدأ جاروب می‌شود. نامساوی پایانی نیز مرز مجاز حرکت را دایره $\rho=\sqrt{2}/2$ معرفی می‌کند.

چنانچه مبدأ دستگاه مختصات تعمیم یافته (ρ, ϕ, θ) به نقطه هدف $(\rho_f, \phi_f, \theta_f)$ منتقل شود طراحی قانون کنترلی ساده‌تر خواهد بود.

با انتقال مبدأ مختصات قطبی $\rho-\phi$ به (ρ_f, ϕ) بر اساس شکل ۴، موقعیت هر نقطه در دستگاه جدید که با $(\tilde\rho-\tilde\phi)$ نمایش داده می‌شود با موقعیت آن در دستگاه $\rho-\phi$ در ارتباط است:

$$-\tilde\rho\cos(\tilde\phi+\phi_f) = \rho\cos\phi - \rho_f\cos\phi_f$$
$$-\tilde\rho\sin(\tilde\phi+\phi_f) = \rho\sin\phi - \rho_f\sin\phi_f \qquad (۲۵)$$



شکل ۴ تصویر هندسی متغییرهای حالت

با تعریف $a=\rho_f$ معادلات کنترلی در دستگاه جدید به شکل زیر بیان می‌شود:

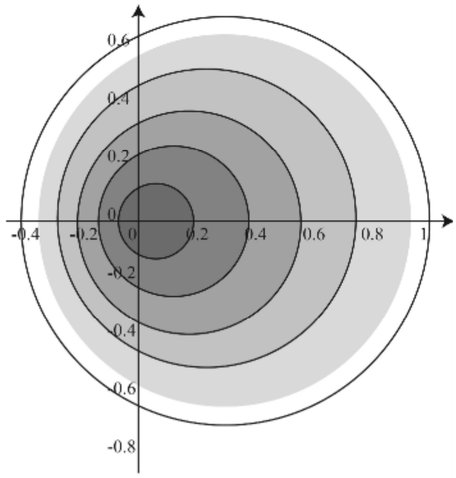
$$\dot{\tilde{\rho}}=v_1 \qquad \dot{\tilde{\phi}}=v_2 \qquad \dot{\tilde{\theta}}=\tilde{\rho}^2 v_2$$
$$\tilde{\rho}^2-2a\tilde{\rho}\cos\tilde{\phi}+a^2<\frac{1}{2} \tag{۲۶}$$

همچنین شرط اولیه $\tilde{\theta}_0$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

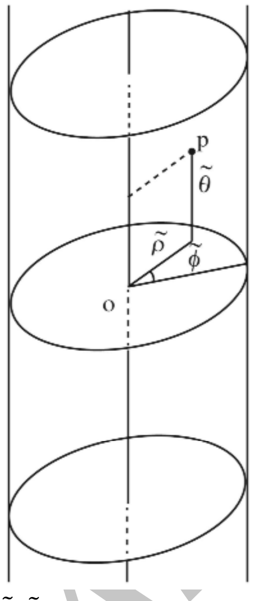
$$\tilde{\theta}_0=\theta_0-\theta_f+\frac{a\tilde{\rho}_0\sin\tilde{\phi}_0}{2} \tag{۲۷}$$

و ارتباط v_i و w_i با مشتق‌گیری از روابط (۲۵) به دست می‌آید. بدین ترتیب در مختصات جدید، هدف به صفر رساندن $\tilde{\rho}$ و $\tilde{\theta}$ است. در مقایسه با دستگاه مختصات اولی ρ-ϕ، دستگاه جدید تقارن خود را از دست داده است و این موضوع در نامساوی سطر آخر معلوم است. در واقع مبدأ دستگاه که قبلاً در مرکز دایره $\rho=\sqrt{2}/2$ قرار داشته اکنون به نقطه هدف منتقل شده که می‌تواند هر نقطه‌ای درون دایره باشد. در مقابل، این تغییر مختصات مزیت بزرگی نیز دارد که در مسأله کنترل آن نهفته است. در دستگاه ρ - ϕ وضعیت مطلوب هنگامی است که هر سه متغیرρ، ϕ و θ به مقادیر مشخصی همگرا شوند؛ در حالی که در دستگاه $\tilde{\rho}$–$\tilde{\phi}$ هدف رسیدن به وضعیت $\tilde{\rho}=0$ و $\tilde{\theta}=0$ است و مقدار نهایی $\tilde{\phi}$ اهمیتی ندارد. هدف، مبدأ دستگاه است و زاویه $\tilde{\phi}$ صرفاً زاویه همگرایی به سمت مبدأ را نشان می‌دهد. براین اساس، ساده‌تر آن است که قوانین کنترلی مدار بسته در دستگاه $\tilde{\rho}$–$\tilde{\phi}$ طراحی شود. البته دقت در حفظ محدوده مجاز تغییرات $\tilde{\rho}$ بسیار حائز اهمیت است (شکل ۵).

مهم‌ترین بخش طراحی کنترل مود لغزشی برای این سیستم انتخاب سطح لغزش برای آن است. دستگاه مختصات استوانه‌ای $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})$ در شکل ۶ نشان داده شده است. هدف این است که با شروع از هر نقطه درون استوانه $\rho=\sqrt{2}/2$ و حرکت بر اساس معادلات حالت (۲۶) متغیرهای سیستم به مبدأ مختصات همگرا شود. برای این منظور سطح لغزش چند ویژگی باید داشته باشد. علاوه بر اینکه از مبدأ مختصات عبور می‌کند، باید چنان درون استوانه قرار بگیرد که تضمین کند هیچ مسیر کنترلی از استوانه خارج نشود. لذا، انتظار می‌رود تصویر سطح لغزش بر روی صفحه $\tilde{\rho}$ - $\tilde{\phi}$ طرحی شبیه شکل ۵ ایجاد کند. در $\tilde{\theta}=0$ تصویر آن مبدأ مختصات است و با افزایش $\tilde{\theta}$ منحنی تصویر بزرگ تر شده تا در بزرگترین مقادیر $\tilde{\theta}$، یعنی $\tilde{\theta}\approx\pi$ به مرز محدوده مجاز $\tilde{\rho}$ نزدیک شود.



شکل ۵ تصویر سطح لغزش بر روی صفحه $\tilde{\rho}-\tilde{\phi}$



شکل ۶ مختصات استوانه‌ای $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})$

اگر مرز قابل قبول ρ دایره $\rho=R\sqrt{2}/2$ فرض شود، این دایره در مختصات $\tilde{\rho}$–$\tilde{\phi}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{\rho}=a\cos\tilde{\phi}+\sqrt{R^2-a^2\sin^2\tilde{\phi}} \tag{۲۸}$$

بنابراین سطح لغزش چنان در نظر گرفته می‌شود که تصویر آن به ازای بزرگترین مقدار $|\tilde{\theta}|$ بر دایره $\rho=R$ منطبق شده و با کاهش $|\tilde{\theta}|$، تصویر آن کوچک‌تر شده در مبدأ متمرکز شود:

$$\tilde{\theta}=0:\ s=\tilde{\rho}=0$$
$$\tilde{\theta}=\pm\theta^*:\ s =\tilde{\rho}-\left(a\cos\tilde{\varnothing}+\sqrt{R^2-a^2\ \sin^2\tilde{\phi}}\right)=0 \tag{۲۹}$$

در رابطه فوق θ^* بزرگترین مقدار محتمل برای $|\tilde{\theta}|$ است. بنابراین با تعریف تابع صعودی $f(|\tilde{\theta}|)$ با دو شرط $f(0)=0$ و $f(\theta^*)=1$ سطح لغزش را می‌توان به صورت زیر تشکیل داد:

$$\begin{aligned} s &= \tilde{\rho} - \left(a\cos\tilde{\phi} + \sqrt{R^2 + a^2\sin^2\tilde{\phi}}\right) \\ & f(|\tilde{\theta}|) = 0 \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

برای این منظور تابع $f(|\tilde{\theta}|)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\tilde{\theta}) = \left|\frac{\tilde{\theta}}{\theta^*}\right|^{1/m}, \quad m \ge 2 \qquad (۳۱)$$

اگر شرط اولیه $\tilde{\theta}$ به فاصله $[-\pi,\pi]$ محدود شود، می‌توان مطمئن بود که در حالت ایده‌آل مقدار آن در طی حرکت از این فاصله خارج نمی‌شود؛ با این حال ممکن است اختلالات یا نواقص مدل‌سازی، موجب شود که $\tilde{\theta}$ از مرزهای این فاصله عبور کرده و در قانون کنترلی ناپیوستگی ایجاد نماید. برای اطمینان از این مسائل، θ^* بزرگتر از π و مثلاً برابر ۴ در نظر گرفته می‌شود. به علاوه توان $1/m$ گرچه می‌تواند هر مقدار حقیقی مثبتی به خود بگیرد، دلیل محدود کردن آن به $m \ge 2$ در ادامه مشخص می‌شود.

با این تعریف برای سطح لغزش می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} s &= \tilde{\rho} - fh \\ \dot{s} &= \dot{\tilde{\rho}} + fh\left(g - \frac{\tilde{\rho}^2}{m\tilde{\theta}}\right)\dot{\tilde{\phi}} \\ h &= \left(a\cos\tilde{\phi} + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\tilde{\phi}}\right) \\ h &= \left(a\sin\tilde{\phi} \,/ \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\tilde{\phi}}\right) \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

بر این اساس روی سطح لغزش رابطه زیر میان ورودی‌های کنترلی برقرار است:

$$\dot{\tilde{\rho}} = -fh\left(g - \frac{\tilde{\rho}^2}{m\tilde{\theta}}\right)\dot{\tilde{\phi}} \qquad (۳۳)$$

بنابراین قانون کنترلی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{\phi}} = \dot{\tilde{\phi}}_{eq} \quad \dot{\tilde{\rho}} = \dot{\tilde{\rho}}_{eq} - \eta_\rho \mathrm{sgn}(s) \\ &\dot{\tilde{\rho}}_{eq} = -fh\left(g - \frac{\tilde{\rho}^2}{m\tilde{\theta}}\right)\dot{\tilde{\phi}}_{eq} \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

طراحی $\dot{\tilde{\phi}}_{eq}$ نیازمند ملاحظاتی است که در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد. تعریف فوق برای $\dot{\tilde{\rho}}$ شرط رسیدن به سطح لغزش در زمان متناهی را تضمین می‌کند:

$$\dot{s} = +fh\left(g - \frac{\tilde{\rho}^2}{m\tilde{\theta}}\right)\dot{\tilde{\phi}} = -\eta_\rho \mathrm{sgn}(s) \qquad (۳۵)$$

از طرفی برای پایداری مبدأ روی سطح لغزش لازم است که $\tilde{\theta}$ (یا به طور معادل، $\tilde{\rho}$) به سمت صفر همگرا شود. اما با توجه به تساوی $\dot{\tilde{\theta}} = \tilde{\rho}^2\dot{\tilde{\phi}}$ کافیست که $\dot{\tilde{\phi}}\mathrm{sgn}(\tilde{\theta})$ جز در مبدأ همواره منفی باشد. همچنین برای کران‌داری ورودی‌های فیزیکی، لازم است که $\dot{\tilde{\rho}}$ و $\tilde{\rho}\dot{\tilde{\phi}}$ همواره کران‌دار باقی بماند. این موضوع به ویژه در شرایط $\tilde{\theta} \approx 0$ اهمیت پیدا می‌کند. برای اینکه $\dot{\tilde{\rho}}$ همواره کران‌دار بماند، با توجه به رابطه $|\tilde{\theta}/\theta^*| = f^m$ فرض می‌شود که $\dot{\tilde{\phi}}$ رابطه مستقیم با f^{m-1} داشته باشد:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\phi}} &= \dot{\tilde{\phi}}_{eq} = -\sigma f^{m-1}\mathrm{sgn}(\tilde{\theta}) \\ \dot{\tilde{\rho}} &= \dot{\tilde{\rho}}_{eq} = \sigma h \left|\frac{\tilde{\theta}}{\theta^*}\right| \mathrm{sgn}(\tilde{\theta})\left(g - \frac{\tilde{\rho}^2}{m\tilde{\theta}}\right) \\ &= \frac{\sigma h}{\theta^*}\left(g\tilde{\theta} - \frac{\tilde{\rho}^2}{m}\right) \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

بنابراین اگر σ چنان تعریف شود که $f^m\sigma$ و $\rho^2\sigma$ کران‌دار باشد، $\dot{\tilde{\rho}}$ نیز کران‌دار باقی می‌ماند و اگر $\tilde{\rho} f^{m-1}\sigma$ کران‌دار باشد، این حکم در مورد $\tilde{\rho}\dot{\tilde{\phi}}$ نیز صادق خواهد بود.

یکی دیگر از موضوعات حائز اهمیت، رفتار سیستم روی سطح لغزش در نزدیکی مبدأ است. با توجه به رابطه $\dot{\tilde{\theta}} = \tilde{\rho}^2\dot{\tilde{\phi}}$ اگر سرعت همگرایی $\tilde{\rho}$ به سمت صفر بالا باشد، ممکن است سرعت همگرایی $\tilde{\theta}$ به شدت افت کند. بنابراین $\dot{\tilde{\phi}}$ طوری طراحی می‌شود که روی سطح لغزش، نرخ تغییر $\tilde{\rho}$ از مرتبه پایین و به صورت خاص از مرتبه $\sqrt{\tilde{\rho}}$ باشد. این موضوع در کنار مسأله کرانداری که پیش از این مطرح شد، گزینه‌های طراحی قانون کنترلی را محدود می‌کند. دقت کنید که روی سطح لغزش داریم $f = \tilde{\rho}/h$ و با نزدیک شدن به مبدأ مقادیر f و $\tilde{\rho}$ به صفر میل کرده و مرتبه بزرگی یکسانی خواهند داشت. اکنون اگر σ به صورت:

$$\sigma = k_\phi \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{h}} \Bigg/ \left(f^m + \left(\frac{\tilde{\rho}}{h}\right)^2\right) \qquad (۳۷)$$

تعریف شود، می‌توان بررسی کرد که به ازای $m \ge 2$، شرط‌های کران‌داری و شرط مرتبه $\dot{\tilde{\rho}}$ همزمان برقرار می‌شود.

آخرین مرحله از طراحی، محدود نگه داشتن $\tilde{\rho}$ در ناحیه مجاز است. می‌توان η_ρ را چنان انتخاب نمود که $\tilde{\rho}$ هیچگاه از h بزرگتر نشود. برای این منظور حرکت روی منحنی $\tilde{\rho} - h = 0$ همواره باید به سمت داخل باشد؛ به عبارت دیگر: $\dot{\tilde{\rho}} - \dot{h} < 0$.

چون روی این منحنی $s > 0$ و $\sigma = k_\phi/(1+f^m)$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde\rho} - \dot h &= -fh\left(g - \frac{\tilde\rho^2}{m\tilde\theta}\right)\dot{\tilde\phi}_{eq} - \eta_\rho \mathrm{sgn}(s) + gh\dot{\tilde\phi}\\
&= h\left((1-f)g + \frac{fh^2}{mf^m\theta^*\mathrm{sgn}(\tilde\theta)}\right)\\
&\times \left(-\sigma f^{m-1}\mathrm{sgn}(\tilde\theta)\right) - \eta_\rho\\
&= \frac{-\sigma h}{m}\left(mf^{m-1}(1-f)g\,\mathrm{sgn}(\theta) + \frac{h^2}{\theta^*}\right) - \eta_\rho\\
&= \frac{k_\phi}{m}\left(-\frac{mf^{m-1}(1-f)}{1+f^m}gh\,\mathrm{sgn}(\tilde\theta)\right.\\
&\left.-\frac{h^3}{\theta^*(1+f^m)}\right) - \eta_\rho\end{aligned} \quad (۳۸)$$

عبارت $mf^{m-1}(1-f)/(1+f^m)$ به ازای مقادیر مختلف m و f از $1/2$ فراتر نمی‌رود و کمترین مقدار h و بیشترین مقدار $|g|h$ برای مقادیر مختلف $\tilde\theta$ و α به ترتیب برابر صفر و $2R$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde\rho} - \dot h &\le \frac{k_\phi}{m}\left(\frac{mf^{m-1}(1-f)}{1+f^m}|g|h - \frac{h^3}{\theta^*(1+f^m)}\right) - \eta_\rho <\\
&\frac{k_\phi}{m}\left(\frac{1}{2}\times 2R - 0\right) - \eta_\rho = \frac{k_\phi R}{m} - \eta_\rho\end{aligned} \quad (۳۹)$$

لذا انتخاب $\eta_\rho \ge k_\phi R/m$ باقی ماندن $\tilde\rho$ در محدوده مجاز را ضمانت می‌کند.

با تغییر پارامترهای m، k_ϕ و η_ρ رفتار این سیستم کنترلی تغییر می‌کند. با دو برابر شدن همزمان k_ϕ و η_ρ سرعت پاسخ نیز دو برابر شده و دامنه ورودی‌ها (با صرف نظر از نقش معادله μ در رابطه (۲۳) دو برابر می‌شود.

با کاهش m و نزدیک شدن آن به عدد ۲، نوسانات ورودی افزایش یافته و سرعت همگرایی تا حدودی افزایش می‌یابد. نتیجه شبیه‌سازی‌ها در بخش ۴، نمایش داده می‌شود.

۳-۲- طراحی دوم : طراحی لحظه‌ای مسیر

یکی از روش‌های کنترل سیستم‌های غیرهولونومیک، طراحی مسیر لحظه‌ای و حرکت در امتداد آن است. کنترلر برای سیستم مورد نظر چنان در نظر گرفته می‌شود که در هر لحظه، مسیری به شکل کمانی از دایره میان موقعیت کنونی و نقطه هدف در صفحه $\tilde\rho$–$\tilde\phi$ ایجاد کند؛ به طوری که تغییر زاویه $\tilde\theta$ مورد نیاز را نیز تأمین کند. معادله عمومی این مسیر به شکل $\tilde\rho = A\cos(\tilde\phi - \phi^*)$ است که دو مقدار ثابت A و ϕ^* بر اساس شرایط اولیه و نهایی تعیین می‌شود.

برای شروع از موقعیت لحظه‌ای $(\tilde\rho_1, \tilde\phi_1, \tilde\theta_1)$ و رسیدن به شرایط نهایی $\tilde\rho_f = 0$ و $\tilde\theta_f = 0$ باید رابطه (۴۰) برقرار باشد.

$$\begin{aligned}&\tilde\rho_1 = A\cos\left(\tilde\phi_1 - \phi^*\right) \quad 0 = A\cos\left(\tilde\phi_f - \phi^*\right)\\
&0 - \tilde\theta_1 = \int_{\tilde\phi_1}^{\tilde\phi_f} \tilde\rho^2 d\tilde\phi\end{aligned} \quad (۴۰)$$

با تعریف $\alpha = \mathrm{sgn}(\tilde\theta_1)$ و $\xi = 2\alpha(\phi^* - \tilde\phi_1)$ سومین رابطه به صورت رابطه (۴۱) بازنویسی می‌شود:

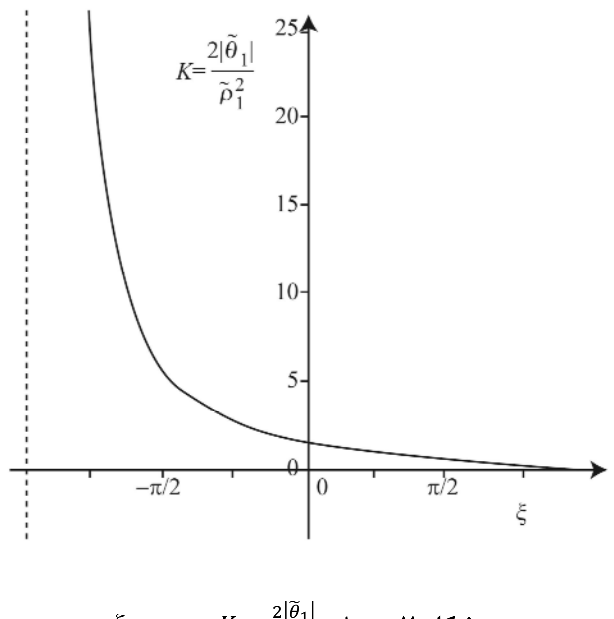
$$\begin{aligned}-\tilde\theta_1 &= \frac{A^2}{4}\left(2\left(\tilde\phi_f - \phi^*\right) + a\xi + a\sin\xi\right)\\
&= \frac{\tilde\rho_1^2}{2(1+\cos\xi)}\left(2\left(\tilde\phi_f - \phi^*\right) + a\xi + a\sin\xi\right)\end{aligned} \quad (۴۱)$$

همچنین $\tilde\phi_f - \phi^*$ بنا بر دومین رابطه از (۴۰)، باید مضرب فردی از $\pi/2$ باشد.

با فرض $\tilde\phi_f - \phi^* = -\alpha\pi/2$ معادل (۴۱) برای ξ همواره دارای جواب است. بنابراین:

$$\frac{\pi - \xi - \sin\xi}{1+\cos\xi} = \frac{2|\tilde\theta_1|}{\tilde\rho_1^2} \quad (۴۲)$$

در شکل ۷ رابطه و تغییرات ξ بر حسب $K = \frac{2|\tilde\theta_1|}{\tilde\rho_1^2}$ نمایش داده شده است.



شکل ۷ تغییرات $K = \frac{2|\tilde\theta_1|}{\tilde\rho_1^2}$ بر حسب ξ

از حل رابطه ۴۲، $-\pi<\xi\le\pi$ به عنوان تابعی از K به دست آمده و مقادیر A و ϕ^* به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A=\frac{\tilde{\rho}_1}{\cos\frac{\xi}{2}}$$

$$\phi^*=\tilde{\phi}_1+\frac{1}{2}\alpha\xi \qquad (۴۳)$$

بدین ترتیب در هر لحظه برای رسیدن از موقعیت $(\tilde{\rho}_1,\tilde{\phi}_1,\tilde{\theta}_1)$ به مبدأ مسیر مطلوب به دست می‌آید.

اکنون برای حرکت روی این مسیر قانون کنترلی طراحی می‌شود. با مشتق گیری از معادله مسیر در نقطه $(\tilde{\rho}_1,\tilde{\phi}_1)$، ارتباط میان ورودی‌های کنترلی $\dot{\tilde{\rho}}=v_1$ و $\dot{\tilde{\phi}}=v_2$ به دست خواهد آمد:

$$v_1=-A\alpha\sin(\alpha(\tilde{\phi}_1-\phi^*))v_2=\tilde{\rho}_1\alpha\tan\tfrac{\xi}{2}v_2 \qquad (۴۴)$$

با پیشنهاد یک قانون ساده برای $\dot{\tilde{\phi}}=v_2$ به صورت:

$$v_2=-k_\phi\alpha\cos\frac{\xi}{2} \qquad (۴۵)$$

طراحی کنترلر تکمیل می‌شود:

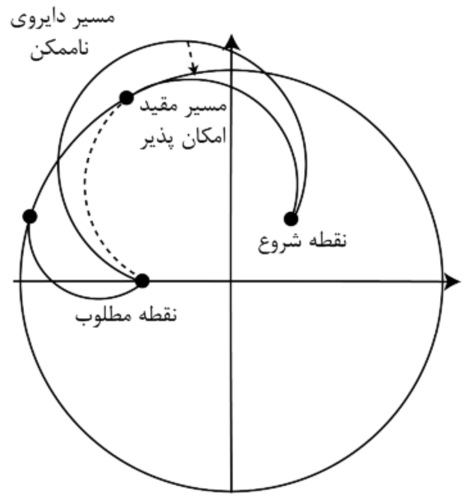
$$\dot{\tilde{\phi}}=v_2=-k_\phi\alpha\cos\frac{\xi}{2}$$

$$\dot{\tilde{\rho}}=v_1=-k_\phi\tilde{\rho}_1\sin\frac{\xi}{2} \qquad (۴۶)$$

ضریب $\cos(\xi/2)$ در رابطه (۴۵) برای تضمین کران‌داری $\dot{\tilde{\rho}}$ افزوده شده است. با این حال نکته قابل توجه‌این است که در روش فوق تضمینی برای باقی ماندن $\tilde{\rho}$ در محدوده مجاز $\rho=R<\sqrt{2}/2$ دیده نمی‌شود. در واقع ممکن است اندازه $\tilde{\theta}$ آنقدر بزرگ باشد که هیچ مسیر دایروی درون محدوده مجاز، نتواند آن را به صفر برساند.

برای این منظور، کمیت جدیدی به نام $\tilde{\theta}_{max}$ تعریف می‌شود که نشان دهنده بزرگترین اندازه $\Delta\tilde{\theta}$ است که می‌تواند با حرکت درون محدوده مجاز، ایجاد شود و لذا مسیر دایروی نظیر آن بر دایره $\rho=R$ مماس خواهد بود. آنگاه اگر $|\tilde{\theta}|$ از $\tilde{\theta}_{max}$ بیشتر باشد، $\tilde{\theta}_{max}$ مبنای محاسبه ورودی‌های کنترلی قرار می‌گیرد. این روند ادامه می‌یابد تا اندازه $\tilde{\theta}$ به تدریج کوچکتر شده و از $\tilde{\theta}_{max}$ پایین‌تر بیاید و مجدداً مبنای محاسبات قرار گیرد (شکل ۸).

بنابراین برای محاسبه ξ در رابطه (۴۲)، مقدار $\tilde{\theta}_1$ با $\tilde{\theta}_a$ به صورت رابطه (۴۷) جایگزین می‌شود.



شکل ۸ مسیر حرکت به ازای $\tilde{\boldsymbol{\theta}}>\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{max}}$

$$\tilde{\theta}_a=\min\{|\tilde{\theta}_1|,\tilde{\theta}_{max}\}$$

$$\frac{\pi-\xi-\sin\xi}{1+\cos\xi}=\frac{2\tilde{\theta}_a}{\tilde{\rho}_1^2} \qquad (۴۷)$$

برای اثبات پایداری این روش ابتدا تابع $V=\frac{1}{2}\tilde{\theta}^2$ به عنوان تابع کاندیدای لیاپانوف در نظر گرفته می‌شود. آنگاه:

$$\dot{V}=\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}=\tilde{\rho}^2\dot{\tilde{\phi}}\tilde{\theta}=-k_\phi\tilde{\rho}^2\alpha\tilde{\theta}=-k_\phi\tilde{\rho}^2|\tilde{\theta}|\le 0 \qquad (۴۸)$$

بنابراین صفرهای $\dot{V}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{V}=0\Rightarrow\tilde{\rho}=0\ or\ \tilde{\theta}=0 \qquad (۴۹)$$

از طرفی این سیستم با شروع از هر وضعیت دلخواه $\tilde{\rho}>0$، به وضعیت $\tilde{\rho}=0$ نخواهد رسید، مگر هنگامی که $\tilde{\theta}$ نیز برابر صفر شود. زیرا:

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}\to0,\tilde{\theta}\neq0\\&\Rightarrow K\to\infty\Rightarrow\xi\to-\pi\\&\Rightarrow\dot{\tilde{\rho}}=-k_\phi\tilde{\rho}\sin\tfrac{\xi}{2}>0\end{aligned} \qquad (۵۰)$$

و چنانچه در شرط اولیه سیستم، $\tilde{\rho}$ برابر صفر باشد، لازم است قبل از اعمال قوانین فوق، ابتدا به روشی از مبدأ فاصله بگیرد. بنابراین قانون کنترلی فوق، حتماً $\tilde{\theta}$ را پایدار می‌کند که در نتیجه آن، $\tilde{\rho}$ نیز به صفر همگرا می‌شود.

در واقع چنانچه $\tilde{\theta}$ به صفر همگرا شود ولی $\tilde{\rho}$ مقدار متناهی غیر صفر داشته باشد، طبق رابطه (۴۲) و (۴۶) داریم:

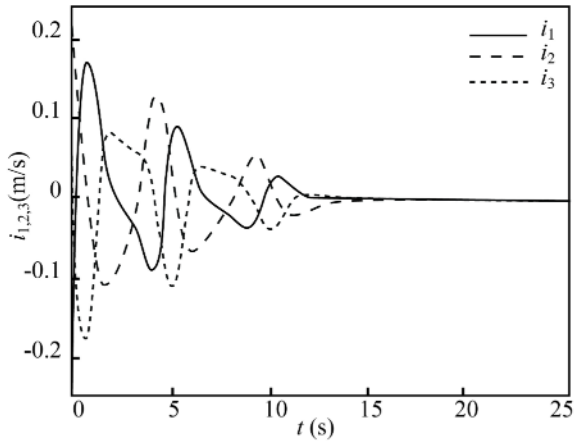
$$\begin{aligned}&K\to0\quad\Rightarrow\xi\to\pi\qquad\Rightarrow\sin\frac{\xi}{2}\to1\\&\qquad\Rightarrow\dot{\tilde{\rho}}\approx-k_\phi\tilde{\rho}\quad\Rightarrow\tilde{\rho}\to0\end{aligned} \qquad (۵۱)$$

و بنابراین $\tilde{\rho}$ حتماً به مبدأ همگرا می‌شود. نتایج شبیه‌سازی این روش در بخش ۴ جمع آوری شده است.

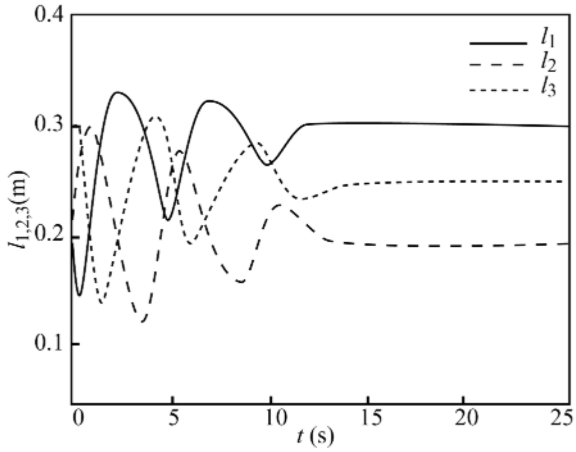
۴- شبیه‌سازی

در شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ نتایج شبیه‌سازی سیستم کنترلی مورد بررسی، با دو روش پیشنهادی، نمایش داده شده است: روش مود لغزشی و روش طراحی لحظه‌ای.

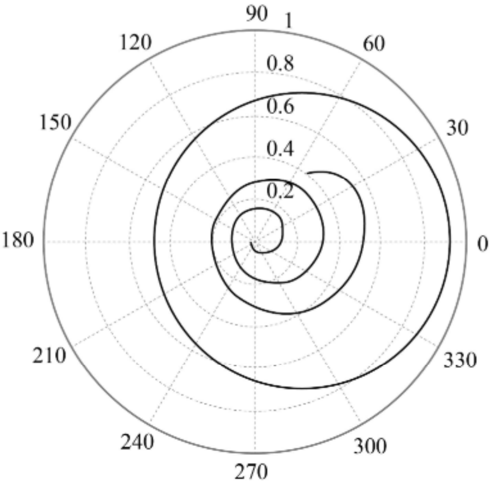
شرایط اولیه و نهایی l_1 ، l_2 و l_3 برای هر دو روش مشابه و به ترتیب در ابتدا برابر ۰/۲، ۰/۲ و ۰/۳ متر و در انتها برابر ۰/۳، ۰/۲ و ۰/۲۵ متر در نظر گرفته شده است. به علاوه تغییر مطلوب زاویه θ ، یک رادیان ساعتگرد است؛ به عبارت دیگر جهت‌گیری اولیه معادل زاویه$\tilde{\theta}(0) = +1\text{rad}$ قرار داده شده و هدف، به صفر رساندن آن است.



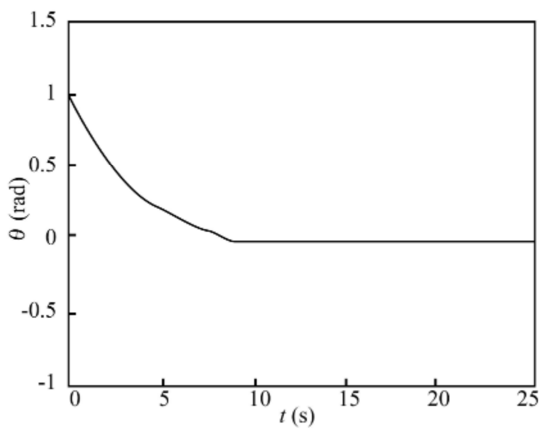
الف- نرخ تغییر طول میله‌ها بر حسب زمان



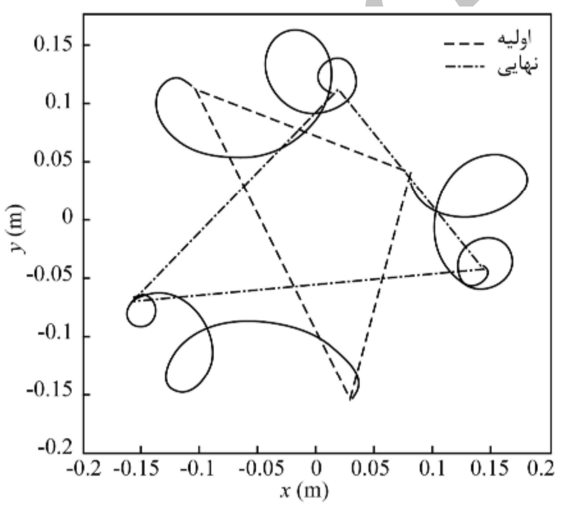
ب- طول میله‌ها بر حسب زمان



ج- نمودار قطبی $\tilde{\varphi} - \tilde{\rho}$

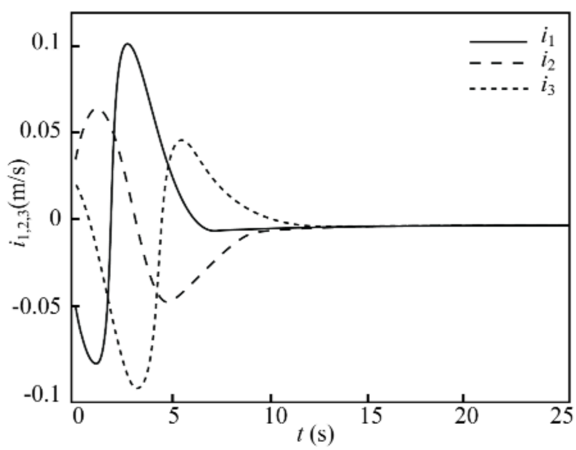


د- زاویه θ بر حسب زمان

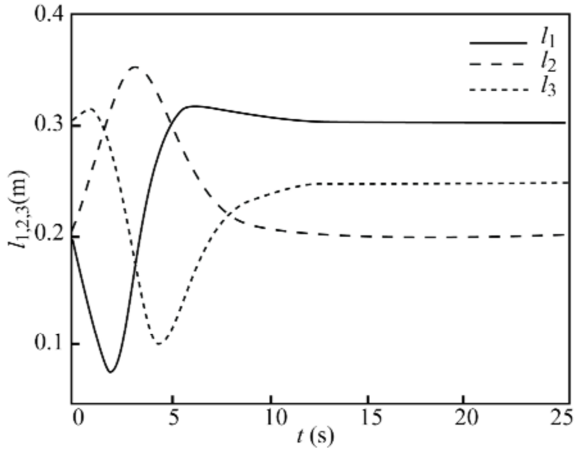


ه- مسیر حرکت اجرام در صفحه

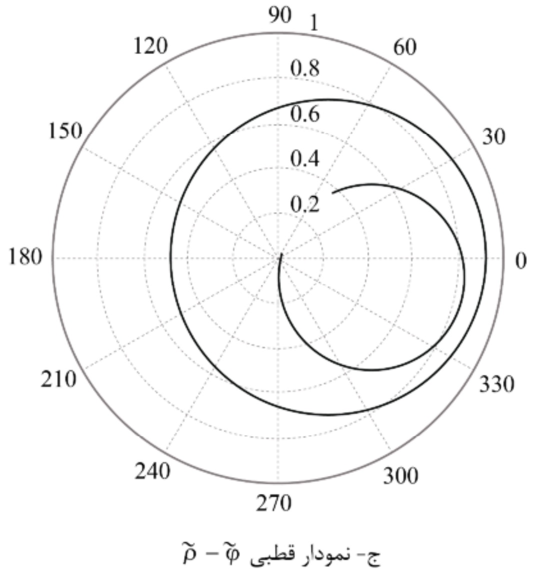
شکل ۹ نتایج شبیه‌سازی روش مود لغزشی، بدون اغتشاش



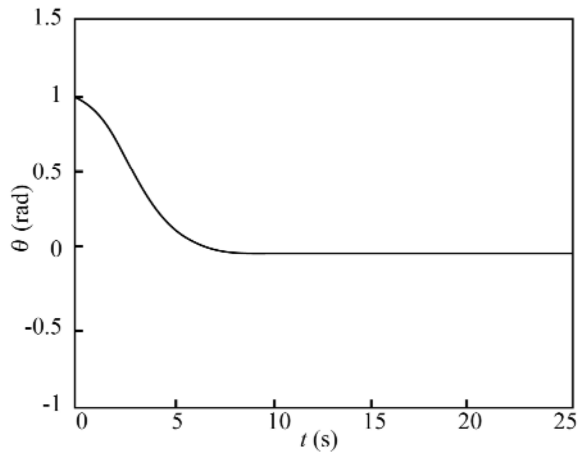
الف- نرخ تغییر طول میله‌ها بر حسب زمان



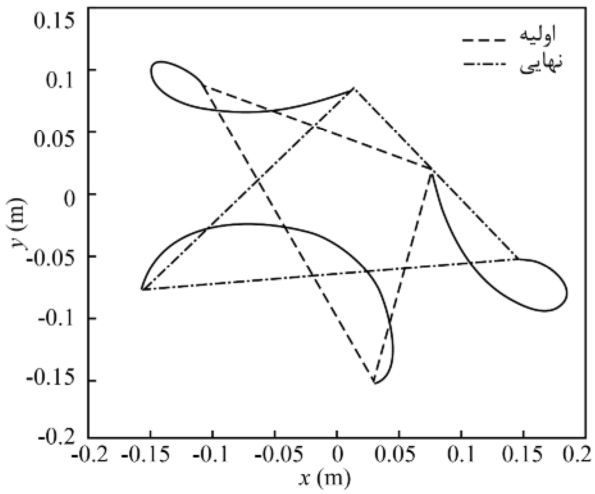
ب- طول میله‌ها بر حسب زمان



ج- نمودار قطبی $\tilde{\rho} - \tilde{\varphi}$



د- زاویه θ بر حسب زمان



ه- مسیر حرکت اجرام در صفحه

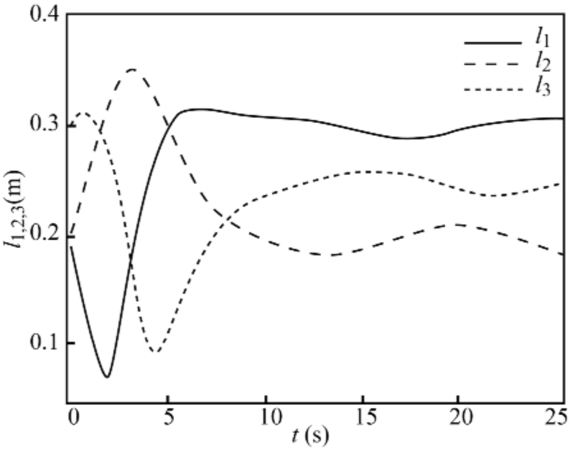
شکل ۱۰ نتایج شبیه‌سازی روش طراحی لحظه‌ای مسیر، بدون اغتشاش

مقدار R در هر دو روش برابر ۰/۶۵ و ضریب k_ϕ در روش مود لغزشی برابر ۳ و در روش طراحی لحظه‌ای مسیر برابر ۰/۵ انتخاب شده است (علت تفاوت ضرایب k_ϕ ایجاد هماهنگی در زمان همگرایی دو روش و امکان مقایسه آنها است). همچنین در شبیه‌سازی روش مود لغزشی، $m = 3$ ، $\theta^* = 4$ و $\eta_\rho = k_\phi R / m$ در نظر گرفته شده است. رابطه کنترلی μ در هر دو روش به صورت رابطه (۵۲) انتخاب شده است.

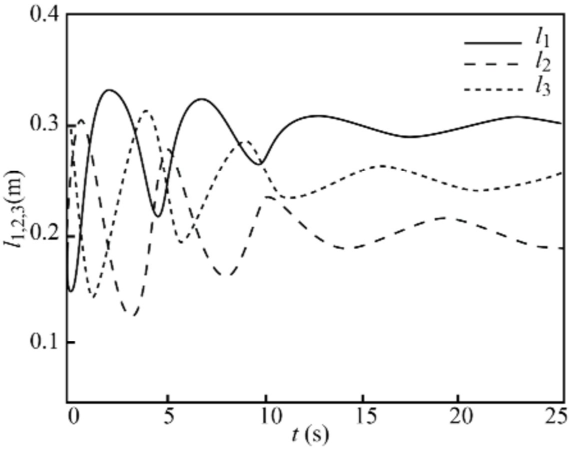
$$\dot{\mu}_d = 0.5(\mu_f - \mu)$$
$$\dot{\mu}_{max} = 0.05$$
$$\mu \doteq w_3 = \min\{|\dot{\mu}_d|, \dot{\mu}_{max}\}\mathrm{sgn}(\dot{\mu}_d) \quad (۵۲)$$

به علاوه در روش مود لغزشی، برای جلوگیری از نوسانات

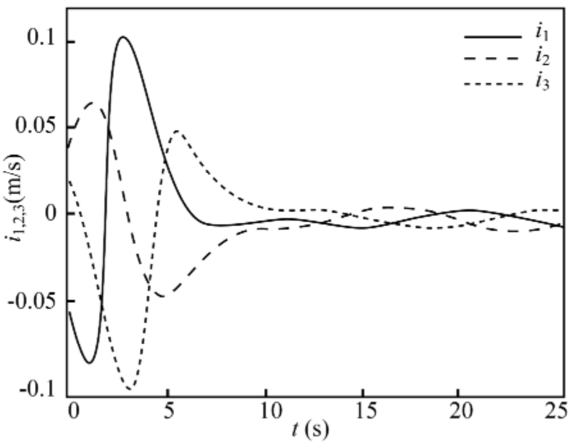
شدید ورودی، عبارت‌ها ی $\operatorname{sgn}\tilde{\theta}$ و $\operatorname{sgn}s$ با عبارات $\operatorname{sat}(\tilde{\theta}/\tilde{\theta}_{min})$ و $\operatorname{sat}(s/s_{min})$ جایگزین شده است، که در آن $\tilde{\theta}_{min}=0.001$ و $s_{min}=0.02$ است.



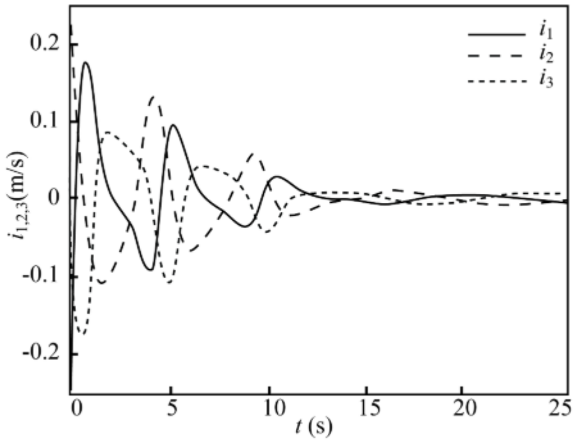
الف- طول میله‌ها بر حسب زمان (روش طراحی لحظه ای مسیر)



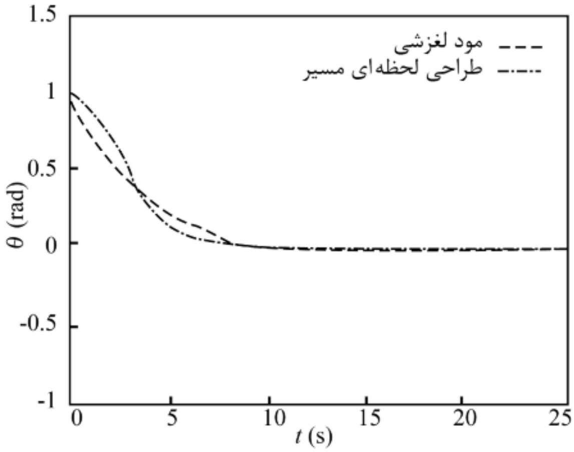
ب- طول میله‌ها بر حسب زمان (روش مد لغزشی)



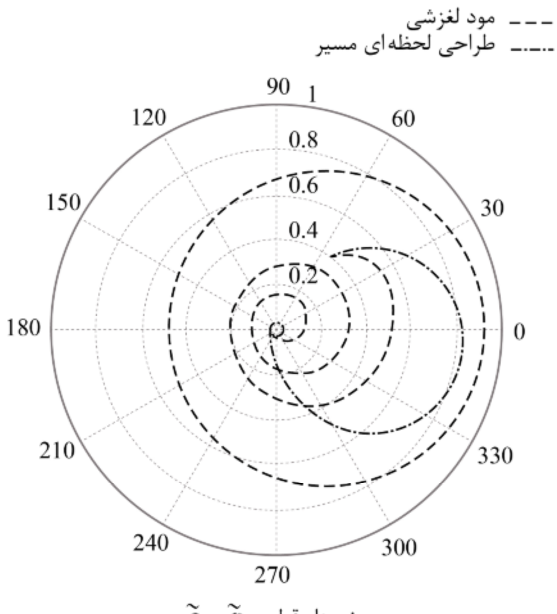
ج- نرخ تغییر طول میله‌ها بر حسب زمان (روش طراحی لحظه‌ای مسیر)



د- نرخ تغییر طول میله ها بر حسب زمان (روش مود لغزشی)



ه- زاویه θ بر حسب زمان



و- نمودار قطبی $\tilde{\rho}-\tilde{\varphi}$

شکل ۱۱ نتایج شبیه‌سازی در حضور اغتشاش

شکل‌های ۹ و ۱۰ نتایج شبیه‌سازی سیستم کنترلی بدون اغتشاش را نشان می‌دهد. به علاوه برای بررسی مقاومت در برابر اغتشاش، مقدار ثابت $d = 0.001 \,{}^{rad}\!/_{s}$ به معادله (۱۲) به صورت زیر افزوده شده است:

$$\dot{\theta} = -\frac{t^{\dot{S}S}}{\bar{I}} + d \qquad (۵۳)$$

که به معنای وجود تکانه زاویه‌ای در امتداد عمود بر صفحه است. نتایج شبیه‌سازی در حضور اغتشاش، در شکل ۱۱ آمده است.

۵- نتیجه‌گیری

یک سیستم کنترلی ۴ درجه آزادی با سه ورودی کنترلی و یک قید غیرهولونومیک مورد بررسی قرار گرفت. این سیستم متشکل از سه جرم نقطه‌ای صفحه‌ای بوده که در یک آرایش مثلثی به وسیله سه میله با طول قابل تنظیم به یکدیگر متصل شده‌اند. با انتخاب مختصات تعمیم یافته برای این سیستم، یکی از معادلات حاکمه آن تفکیک شده و سه معادله دیگر به فرم‌های شناخته شده سیستم‌های کنترلی غیرهولونومیک تبدیل شدند. سپس برای سیستم به دو روش مود لغزشی و طراحی لحظه‌ای مسیر، قانون کنترلی طراحی و شبیه‌سازی شد. آنچنان که از نتایج شبیه‌سازی برداشت می‌شود، هر دو روش توانسته‌اند سیستم را به وضعیت هدف هدایت کنند، هرچند روش طراحی لحظه‌ای مسیر از لحاظ دامنه ورودی‌های کنترلی و نوسانات آن عملکرد بهتری نشان می‌دهد و با توجه به پیوستگی ذاتی الگوریتم کنترلی آن، در مجموع نسبت به طراحی مود لغزشی الگوریتم کنترلی مناسب‌تری است. به علاوه برای بررسی اثر اغتشاش، رفتار سیستم کنترلی در حضور یک نمونه از اثرات اغتشاشی، شبیه‌سازی شده است که مقاوم بودن نسبی سیستم را در برابر آن نشان می‌دهد.

در این مقاله از مدل سینماتیکی سیستم برای کنترل استفاده شده و از اثر هر گونه گشتاور خارجی و به ویژه گشتاور گرادیان جاذبه صرف نظر شده است. همچنین قانون کنترلی بر اساس تکانه زاویه‌ای صفر طراحی شده و وجود تکانه زاویه‌ای صرفاً به صورت اغتشاش مدل‌سازی شده است. ملاحظه گرادیان جاذبه، استفاده از پیشرانش در کنار کنترل طول اتصالات و جایگذاری کمند به جای میله در اتصالات موضوعات پیشنهادی برای ادامه کار است که البته در تمامی آنها استفاده از مدل دینامیکی سیستم به جای مدل سینماتیکی ضروری خواهد بود.

۶- مراجع

[1] Ashrafiuon H., Erwin R.S., “Shape Change Maneuvers for Attitude Control of Underactuated Satellites”, *Proceedings of the American Control Conference*, Vol. 2, 2005, pp. 895-900.

[2] Pathak K., Franch J., Agrawal S.K., “Velocity and Position Control of a Wheeled Inverted Pendulum by Partial Feedback Linearization”, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 21, No. 3, 2005, pp. 505-513.

[3] Batterman R., “Falling Cats, Parallel Parking, and Polarized Light”, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics,* Vol. 34B, No. 4, 2003, pp. 527-557.

[4] Brockett R.W., “Asymptotic Stability and Feedback Stabilization”, In: MillmanR.S., Brockett R.W. and Sussmann H.J. (eds). *Differential Geometric Control Theory* Boston: Birkhauser, 1983, pp. 181-191.

[5] Bloch A.M., *Nonholonomic Mechanics and Control*, New York, Springer, 2003, pp. 119-174.

[6] Bloch A., Drakunov S., “Stabilization of a Nonholonomic System via Sliding Modes”, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, 1994, pp. 2961-2966.

[7] Dong W., Guo Y., “Global Time-Varying Stabilization of Underactuated Surface Vessel”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 6, 2005, pp. 859-864.

[8] Bullo F., Lewis A.D., *Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems*, New York, Springer Verlag, 2004, pp. 141-229.

[9] Agrachev A., Sachkov Y., *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Germany, Springer, 2004, pp. 12-20.

[10] Pizarro-Chong A., Misra A.K., “Dynamics of Multi-Tethered Satellite Formations Containing a Parent Body”, *Acta Astronautica*, Vol. 63, No. 11-12, 2008, pp. 1188-1202.

[11] Williams P., “Optimal Control of a Spinning Double-Pyramid Earth-Pointing Tethered Formation”, *Acta Astronautica*, Vol. 64, No. 11-12, 2009, pp. 1191-1223.

[12] Cho H. and Yu A., “New Approach to Satellite Formation-Keeping: Exact Solution to the Full Nonlinear Problem” *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 22, No. 4, 2009, pp. 445-455.

[13] Krupa M., Kuhn A., Poth W., Schagerl M., Steindl A., Steiner W., Troger H., “Modelling, Dynamics and Control of Tethered Satellite Systems”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 43, No. 1-2, 2006, pp. 73-96.

[14] He Y., Liang B., Xu W., “Study on the Stability of Tethered Satellite System”, *Acta Astronautica*, Vol. 68, 2011, pp. 1964-1972.

[15] Kim M., Hall C.D., "Control of a Rotating Variable-Length Tethered System", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 27, No. 5, 2004, pp. 849-858.
[16] Kumar K.D., Yasaka T., "Rotating Formation Flying of Three Satellites Using Tethers", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, 2004, pp. 973-985.
[17] Vogel K.A., *Dynamics and Control of Tethered Satellite Formations for the Purpose of Space-Based Remote Sensing*, PhD Dissertation, Air Force Institute of Technology, Ohio, 2006.
[18] Bloch A., Drakunov S., "Stabilization and Tracking in the Nonholonomic Integrator via Sliding Modes", *Systems and Control Letters*, Vol. 29, No. 2, 1996, pp. 91-99.
[19] Ur-Rehman F., Rafiq M., and Q. Raza, "Time-Varying Stabilizing Feedback Control for a Sub-Class of Nonholonomic Systems", *European Journal of Scientific Research*, Vol. 53, No. 3, 2011, pp. 346-358.
[20] Marchand N., "Discontinuous Exponential Stabilization of Dynamic Chained form Systems", *IFAC Proceedings Umes (IFAC-PapersOnline)*, Vol. 16, 2005, pp. 388-393.