



تحلیل جریان گذرای غیرهمدمای گاز درون خطوط لوله با استفاده از روش عددی خطی شده تجزیه شار

مرتضی بهبهانی‌نژاد^{۱*}، عزیز عظیمی^۲، محسن شعبانی^۳

- ۱- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دفتر پژوهش گاز، دانشگاه شهید چمران، اهواز
 - ۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری، دانشگاه شهید چمران، اهواز
 - ۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز
- * اهواز، کد پستی ۶۱۳۵۷-۸۳۱۵۱، bnmorteza@scu.ac.ir

چکیده- روش تفاضل محدود ضمنی استیگر-وارمینگ، برای شبیه‌سازی عددی جریان گذرای غیرهمدمای گاز مورد استفاده قرار گرفته است. با توجه به غیرخطی بودن معادلات، در ابتدا خطی‌سازی حول هر گام زمانی انجام شده است که این امر ضمن کاهش تلاش محاسباتی جریان مورد نظر را نیز با سهولت بیشتری تحلیل می‌کند. برای اعتبارسنجی و ارزیابی دقت روش حل عددی، ابتدا جریان فانو و جریان درون یک لوله شوک بررسی شده و سپس جریان گذرا درون یک خط لوله گاز که فشار در ورودی آن به صورت تابعی از زمان تغییر می‌کند، شبیه‌سازی شده است. نتایج شبیه‌سازی عددی حاضر نشان می‌دهد که روش عددی تفاضل محدود خطی‌شده مورد استفاده در این مطالعه، تغییرات ناگهانی در شرایط جریان را به خوبی روش حل غیرخطی نمایان می‌سازد. همچنین روش عددی حاضر قادر است جریانهای گذرای گاز را با دقت مناسب در مقایسه روش حل غیرخطی با تلاش محاسباتی کمتر تحلیل نماید.

کلیدواژگان: جریان غیرهمدمای گاز، خطوط لوله گاز، روش‌های خطی‌شده، گاز حقیقی.

Non-isothermal transient flow analysis in gas pipelines using a linearized flux splitting numerical scheme

M. Behbahani-Nejad^{1*}, A. Azimi², M. Shabani³

- 1- Assoc. Prof, Mech. Eng. Dept., Gas Research Office, Shahid Chamran Univ., Ahvaz, Iran
 - 2- Assist. Prof., Mech. Eng. Dept., Drilling Research Center, Shahid Chamran Univ., Ahvaz, Iran
 - 3- MSc Student, Mech. Eng. Dept., Shahid Chamran Univ., Ahvaz, Iran
- * P.O.B. 61357-83151, Ahvaz, Iran. bnmorteza@scu.ac.ir

Abstract- Numerical simulation of non-isothermal transient gas flow is performed using implicit Steger-Warming finite difference method. Because of nonlinearity of the governing equations, they are linearized at each time step. The linearization either reduces computational effort or analyzes the flowfield more conveniently. In order to validate and evaluate the accuracy of current numerical method, Fanno and shock tube flows are investigated first. Then, transient flow in a gas pipeline that its inlet pressure changes with time is simulated. The results of present study show that Steger-Warming finite difference scheme can well captured the sudden changes in the flowfield. Moreover, the present method is able to analyze transient gas flows as nearly accurate as the nonlinear one with less computational effort.

Keywords: Non-Isothermal Flow, Transient Flow, Gas Pipeline, Linearized Schemes, Real Gas.

۱- مقدمه

گاز طبیعی یکی از منابع مهم انرژی است که استفاده از آن به سرعت در حال گسترش می‌باشد. با افزایش استفاده از منابع گاز طبیعی، سیستم‌های مورد نیاز در این زمینه روز به روز پیچیده‌تر می‌شوند، از این رو طراحی بهینه انتقال گاز شهری و بین شهری و نیز صرفه‌جویی در هزینه‌های گازرسانی نیازمند داشتن اطلاعاتی دقیق در مورد افت فشار، نرخ جریان و توزیع دما در خطوط لوله گاز می‌باشد. علاوه بر این، اطلاع از چگونگی رفتار جریان گاز درون خطوط لوله در کنترل بهینه توزیع اهمیت فراوانی دارد. بنابراین بررسی جریان گاز به‌منظور رسیدن به طراحی بهینه ضروری است.

در بررسی و مطالعه جریان گاز در خطوط لوله به دلیل تغییرات ناگهانی اعمال شده در شرایط جریان از جمله تغییرات در عرضه و تقاضا (دبی جریان)، تغییرات در فشار و اثرات محیطی، تحلیل جریان گاز به صورت گذرا و غیر هم‌دمای درون این خطوط ضرورت دارد.

جریان گذرای گاز را با توجه به سرعت جریان می‌توان به دو دسته جریان گذرای آرام و جریان گذرای سریع تقسیم کرد. در جریانهای گذرای آرام به دلیل وجود زمان کافی برای انتقال حرارت گاز با محیط پیرامون، می‌توان جریان را به صورت هم‌دمای فرض و تحلیل نمود. اما در صورتی که جریان گذرای گاز با سرعت بالا صورت گیرد، گاز به تعادل دمایی با محیط پیرامون نمی‌رسد و به همین دلیل نمی‌توان جریان را به صورت هم‌دمای شبیه‌سازی کرد. از این رو برای تحلیل جریانهای که در آنها تغییرات ناگهانی همانند باز و بسته شدن شیر، تغییرات در فشار ورودی به صورت تابعی از زمان و تغییرات در تقاضای مصرف رخ می‌دهد، جریان باید به صورت غیرهم‌دمای در نظر گرفته شود. جریانهای گذرای سریع را نیز می‌توان با توجه به شرایط موجود به صورت آدیباتیک و یا همراه انتقال حرارت با محیط پیرامون فرض کرد.

مدل‌سازی جریان گذرای گاز به‌همراه انتقال حرارت پایا و مدل گاز ایده‌ال از طریق روش مشخصه‌ها توسط عیسی و اسپالدینگ [۱] صورت گرفت. وینتربرن و پیرسون [۲]، مدل گاز ایده‌ال حل شده به روش مشخصه‌ها را با مدل شبه ایده‌ال (آنتالپی و انرژی درونی به صورت یک تابع چندجمله‌ای از دما و معادله حالت برای گاز ایده‌ال) با روش دوگامی لکس-وندروف حل و مقایسه نمودند. آنان نشان دادند که با در نظر گرفتن

ظرفیت گرمایی ویژه به صورت تابعی از دما، منحنی ظرفیت گرمایی ویژه و منحنی دما بسیار مشابه هستند. اسپاداس و چاکواسکی [۳]، مدل‌های جریان گاز هم‌دمای و غیرهم‌دمای را مورد بررسی قرار دادند. مدل غیر هم‌دمای، شامل شکل ساده شده معادله انرژی با ضریب تراکم‌پذیری ثابت و مدل انتقال حرارت پایا بود. آنان نشان دادند که یک تفاوت قابل ملاحظه در منحنی فشار بین حالت هم‌دمای و غیر هم‌دمای وجود دارد. شبیه‌سازی عددی جریان سریع سیال درون خطوط لوله گاز به صورت باز و بسته شدن ناگهانی شیر در پایین‌دست توسط گرایونستین [۴] انجام گرفت. وی حل مدل جریان آدیباتیک در ضریب تراکم‌پذیری ثابت را ارائه داد و برای حل معادلات از یک روش غیرصریح پیش‌بینی‌کننده-تصحیح‌کننده استفاده کرد. مسأله مشابه توسط گاتو و هنریکیوس [۵] حل شد. آنان جریان آدیباتیک گاز را با استفاده از مدل گاز ایده‌ال و استفاده از روش رانگ کوتا و گالرکین ناپیوسته شبیه‌سازی نمودند. تنتیس [۶]، جریان غیرهمدمای گاز با انتقال حرارت پایا و ضریب تراکم‌پذیری ثابت در معادله انرژی را با استفاده از روش خط‌ها، تحلیل کرد. عباس‌پور و چاپمن [۷] با استفاده از روش تفاضل محدود غیرصریح به حل معادلات پیوستگی و مومنتم و انرژی پرداختند و از فرضیات وجود جمله اینرسی در معادله مومنتوم، ضریب تراکم‌پذیری به صورت تابعی از فشار و دما، انتقال حرارت پایا با محیط پیرامون و همچنین فاکتور اصطکاک به صورت تابعی از عدد رینولدز و زبری لوله استفاده کردند. آنان نشان دادند که اثرات رفتار گاز در حالت غیرهم‌دمای به‌شدت در دقت محاسبات جریان، به خصوص جریان گذرای سریع مؤثر است. همچنین نشان دادند که جمله اینرسی نقش مهمی در تحلیل جریان گاز ایفا می‌کند و نمی‌توان از آن در محاسبات صرف‌نظر کرد. چاکواسکی [۸]، اثرات مدل‌های انتقال حرارت پایا و ناپایا را در خطوط انتقال گاز بررسی نمود. فرضیات چاکواسکی در تحقیق خود همانند عباس‌پور و چاپمن شامل متغیر بودن ضرایب اصطکاک و تراکم‌پذیری و وجود ترم اینرسی بود. او مشاهده کرد که مدل انتقال حرارت ناپایا، دامنه نوسانات دمایی کوچکی در گاز تولید می‌کند و تغییرات کم دمایی گاز به واسطه دمای زمین می‌باشد که از انباشت گرما در آن حاصل می‌شود.

به کارگیری یک معادله حالت مناسب به دست آورد. معادلات فوق برای یک لوله افقی با سطح مقطع متغیر با در نظر گرفتن انتقال حرارت با محیط پیرامون به صورت رابطه (۱) ارائه می شود [۶].

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E(Q)}{\partial x} - H(Q) = 0 \quad (1)$$

که در آن پارامترهای Q ، $E(Q)$ و $H(Q)$ به صورت رابطه (۲) تعریف می شوند.

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e_0 \end{pmatrix}, E(Q) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e_0 + p)u \end{pmatrix}$$

$$H(Q) = \begin{pmatrix} \rho u \beta \\ \rho(u^2 \beta + G) \\ (e_0 + p)u \beta - \rho(q + uG) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ترم ناهمگن $H(Q)$ در رابطه (۲) شامل عبارات زیر می باشد:

$$\beta = \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx}, \quad G = \frac{f}{2d} u|u|$$

$$q = \frac{\dot{Q}}{\rho A dx}, \quad A_c = \frac{\pi}{4} d^2 \quad (3)$$

معادله (۱) و (۲) بر اساس متغیرهای بقایی بیان شده است. معادله حالت گاز به صورت $p = Z\rho RT$ لحاظ می شود. برای محاسبه ضریب تراکم پذیری گاز همانند عباس پور [۹] از رابطه ارائه شده توسط درانکوک و همکاران [۱۰] استفاده شده است. این ضریب توسط رابطه (۴) محاسبه می شود.

$$Z = 1 + \left(W_1 + \frac{W_2}{T_r} + \frac{W_3}{T_r^3} \right) \rho_r$$

$$+ \left(W_4 + \frac{W_5}{T_r} \right) \rho_r^2 + \left(\frac{W_6}{T_r^3} \right) \rho_r^3 \quad (4)$$

در جدول ۱ مقادیر W_i استفاده شده برای محاسبه ضریب تراکم پذیری آورده شده است.

جدول ۱ مقادیر ضرایب بکار رفته در ضریب تراکم پذیری [۱۰]

W_6	W_5	W_4	W_3	W_2	W_1
۰/۶۸۹۵	-۰/۶۱۲۳	۰/۵۳۵۳	-۰/۵۷۸۳	-۱/۰۴۶۷	۰/۳۱۵۰۶

در رابطه (۲) و (۳)، ρ جرم مخصوص (دانسیته)، u متوسط سرعت جریان در مقطع عمود بر محور لوله، p فشار، d و A_c به ترتیب قطر و سطح مقطع لوله، e_0 انرژی کل سیال بر واحد حجم و \dot{Q} نرخ انتقال حرارت با محیط پیرامون است. همچنین

در تحقیقات پیشین برای تحلیل جریان گذرای غیر همدمای گاز، معادلات حاکم به صورت غیرخطی حل شده اند. حل غیرخطی معادلات باعث پیچیدگی در روابط و افزایش زمان محاسبات می شود. از این رو در تحقیق حاضر از مکانیزم خطی سازی معادلات برای کاهش پیچیدگی حل عددی و زمان محاسبات با حفظ دقت روش های غیرخطی، استفاده شده است. نتایجی که از این تحقیق حاصل شده است بیانگر این موضوع است که این روش ضمن کاهش زمان محاسبات قادر است به خوبی حل غیرخطی، تغییرات ناگهانی در جریان گذرا را نمایان سازد. در تحقیق حاضر عبارت اینرسی در معادلات حاکم برای مدل سازی جریان غیرهمدمای گاز درون خطوط لوله لحاظ شده است. تحلیل جریان گاز با فرضیات زیر صورت گرفته است:

۱- فاکتور اصطکاک تابعی از زبری لوله و عدد رینولدز معلوم فرض شده است.

۲- ضریب تراکم پذیری تابعی از فشار و دمای گاز است.

۳- انتقال حرارت با محیط پیرامون صورت نمی گیرد.

در این تحقیق به شبیه سازی عددی جریان گذرای غیرهمدمای گاز درون خطوط لوله انتقال با استفاده از روش تفاضل محدود ضمنی استیگر-وارمینگ (بر مبنای تجزیه بردار شار) به فرم دلتا پرداخته شده است. در ابتدا برای صحت روش حل عددی ارائه شده به مقایسه نتایج با حل فانو و جریان درون شوک تیوب پرداخته می شود و در نهایت مسأله ارائه شده توسط عباس پور [۹] مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده با نتایج این مرجع دارای اختلافاتی می باشد که ناشی از تفاوت در ضریب اصطکاک به کار گرفته شده توسط عباس پور [۹] است. شبیه سازی حاضر نشان می دهد که روش عددی تفاضل محدود مورد استفاده در این تحقیق به خوبی روش حل غیرخطی عباس پور [۹]، تغییرات ناگهانی در شرایط جریان را نشان می دهد. همچنین به دلیل خطی سازی معادلات، از نقطه نظر زمانی، محاسبات با هزینه کمتر و با همان میزان دقت در مقایسه با حل غیرخطی صورت گرفته است.

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر رفتار غیردائم جریان درون خطوط لوله معادلات اولر تک فاز و یک بعدی هستند که می توان آنها را با استفاده از اصول بقای جرم و انرژی و قانون دوم نیوتن و با

(۸) در نظر گرفته شده است و برای مشتق زمانی از تقریب تفاضل محدود مرتبه اول استفاده می‌شود.

$$\frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^{n+1} - H^{n+1} = 0 \quad (۸)$$

چون از فرمول بندی ضمنی استفاده شده است، جمله‌های دوم و سوم در گام زمانی $n + 1$ بیان شده‌اند. تغییر خواص جریان در هر گام زمانی به صورت رابطه (۹) محاسبه می‌شود:

$$\Delta Q = Q^{n+1} - Q^n \quad (۹)$$

با توجه به غیرخطی بودن معادله (۸) در ابتدا عبارات E^{n+1} و H^{n+1} از طریق نوشتن بسط سری تیلور حول گام زمانی n ، خطی‌سازی می‌شوند. با استفاده از معادله (۸) و جایگزین کردن روابط خطی‌سازی، رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(E^n + \frac{\partial E}{\partial Q} \Delta Q \right) - \left(H^n + \frac{\partial H}{\partial Q} \Delta Q \right) = 0 \quad (۱۰)$$

همچنین برای خلاصه‌نویسی از تعاریف زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial E}{\partial Q} = A, \quad \frac{\partial H}{\partial Q} = B \quad (۱۱)$$

که در دستگاه معادلات هذلولوی، ماتریس ژاکوبین A طبق رابطه (۱۲) دارای سه مقادیر ویژه حقیقی می‌باشد.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u \\ \lambda_2 &= u + \frac{a}{\gamma} \sqrt{\gamma[(\gamma - 1)Z + 1]} \\ \lambda_3 &= u + \frac{a}{\gamma} \sqrt{\gamma[(\gamma - 1)Z + 1]} \end{aligned} \quad (۱۲)$$

بردار شار E با توجه به رابطه (۱۱) مساوی AQ است که دارای خاصیت همگنی می‌باشد. بنابراین می‌توان آن را به زیربردارهایی تجزیه کرد، به گونه‌ای که هر زیربردار متناظر با مقدار ویژه مثبت و یا منفی ماتریس ژاکوبین شار باشد. در نتیجه ماتریس ژاکوبین شار A به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{aligned} A &= A^+ + A^- \\ A^+ &= XD^+X^{-1}, \quad A^- = XD^-X^{-1} \end{aligned} \quad (۱۳)$$

که در آن X ماتریس بردارهای ویژه راست ماتریس A ، D^+ ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه مثبت و D^- ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه منفی می‌باشد. حال بردار E را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$E^+ = A^-Q, \quad E^- = A^+Q \quad (۱۴)$$

در رابطه (۴)، ρ_r چگالی کاسته^۱، T_r دمای کاسته^۲ می‌باشد و e_0 طبق رابطه (۵) بیان می‌شود.

$$e_0 = \frac{p}{Z(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (۵)$$

برای محاسبه فاکتور اصطکاک f ، روابط هالند و چن با توجه به محدوده سرعت گاز به کار گرفته می‌شود [۱۱].

رابطه فاکتور اصطکاک چن و هالند به ترتیب در روابط (۶) و (۷) آورده شده‌اند.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left[0.2398 \frac{\epsilon}{d} - \frac{5.0452}{\text{Re}} \times \log \left(0.3539 \left(\frac{\epsilon}{d} \right)^{1.1098} + \frac{5.0452}{\text{Re}^{0.8981}} \right) \right] \quad (۶)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{\epsilon}{d} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right] \quad (۷)$$

۳- روش حل عددی معادلات حاکم

روش‌های پادبادسو^۳ به سه دسته روش‌های تجزیه بردار شار^۴، روش‌های تجزیه تفاضل شار^۵، روش‌های تغییرات کلی نزولی^۶ و روش نوسانات شار^۷ تقسیم می‌شوند. روش عددی به کار رفته در این مقاله روش ضمنی استیگر-وارمینگ^۸ است که بر مبنای تجزیه بردار شار است و برای اولین بار توسط استیگر و وارمینگ [۱۲] ارائه شد. این روش می‌تواند به طور صحیح موج‌های شوک را نشان دهد و معیارهایی را برای متمایز قراردادن اطلاعاتی که توسط شوک‌ها جابه‌جا می‌شوند، بیان کند [۱۳]. لیو و استفان [۱۴] نشان دادند که این روش دارای پخش عددی است، از این رو آن را با روش تجزیه تفاضل شار ترکیب کردند و روشی به نام AUSM^۹ ارائه نمودند. بهبهانی نژاد و شکاری [۱۵] در تحلیل جریان گذرای همدمای گاز طبیعی با فرض گاز ایده‌آل از روش ضمنی تجزیه بردار شار استیگر و وارمینگ استفاده نمودند و نتایج خوبی بدست آوردند. از این رو برای حل عددی معادله (۱) از این روش استفاده شده است. بر این مبنای برای معادله (۱)، الگوریتم تفاضل محدود ضمنی رابطه

1. Reduced Density
2. Reduced Temperature
3. Upwind
4. Flux Vector Splitting Schemes (FVS)
5. Flux Difference Splitting Schemes (FDS)
6. Total Variation Diminishing (TVD)
7. Fluctuation-Splitting Schemes
8. Steger-Warming Method
9. Advection Upstream Splitting Method

$$\Delta t = \frac{CFL \Delta x}{\lambda_{max}} \quad (18)$$

که در آن پارامتر λ_{max} بیشینه مقدار ویژه بردار ژاکوبین شارهای غیرلج است.

۴- نتایج عددی

در این قسمت برای نشان دادن قابلیت روش عددی تجزیه بردار شار استیگر-وارمینگ در تحلیل مسائل غیردائم جریان گاز و تایید برنامه کامپیوتری تدوین شده، ابتدا نتایج عددی حاصل از حل عددی دو مسأله تقریباً ساده با نتایج تحلیلی و عددی موجود مقایسه می‌شوند. سپس یک مسأله غیردائم جریان گاز که در عباس‌پور [۹] به صورت غیرخطی حل شده، مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج حاصل از حل عددی روش استیگر-وارمینگ، با نتایج عددی این مرجع مقایسه می‌شوند.

۴-۱- بررسی صحت نتایج عددی جریان تراکم‌پذیر

همراه با اصطکاک در خط لوله گاز (جریان فانو)

برای بررسی جریان پایا درون خطوط لوله با در نظر گرفتن اصطکاک و بدون انتقال حرارت با محیط پیرامون، صحت کد با حل تحلیلی جریان فانو بررسی می‌شود. مسأله به این شکل است که هوا در خط لوله‌ای با طول ۳۰ متر و قطر داخلی ۱۵ سانتی‌متر جریان می‌یابد. شرایط هوا در ورودی، فشار ۱ اتمسفر، ماخ ۰/۳ و دمای ۲۷۳ درجه کلوین است در حالی که فشار خروجی ۰/۶۲۴ اتمسفر است. در این شرایط فاکتور اصطکاک درون لوله ثابت و مقدار آن ۰/۰۲ است. نسبت گرمای ویژه $\gamma = 1/4$ و $R = 287 \text{ J. (kg. K)}^{-1}$ در نظر گرفته می‌شود. در ادامه نتایج حاصل از حل مسأله فوق با روش تفاضل محدود ضمنی استیگر-وارمینگ ارائه می‌شود.

نمودارهای سرعت، فشار، ماخ، دما و ضریب تراکم‌پذیری به ترتیب در شکل ۱ تا شکل ۵ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل‌های ۱ تا ۴ مشاهده می‌شود که نتایج به‌دست آمده از تحلیل‌های انجام شده با فرض گاز ایده‌ال و گاز واقعی بر همدیگر منطبق هستند. این وضعیت قابل انتظار است زیرا تغییرات ضریب تراکم‌پذیری نسبت به گاز ایده‌ال، مطابق با آنچه در شکل ۵ ارائه شده است بسیار ناچیز می‌باشد و اختلاف آن در رقم چهارم اعشار است.

رابطه (۱۰)، با استفاده از رابطه (۱۱) و (۱۳) و پس از فاکتورگیری ΔQ از آن مطابق رابطه (۱۵) نوشته می‌شود.

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (A^+ + A^-) - B \right\} \right] \Delta Q = -\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} (E^+ + E^-) - H \right) \quad (15)$$

که در آن I ماتریس واحد است و برای سادگی بالانویس n حذف شده است.

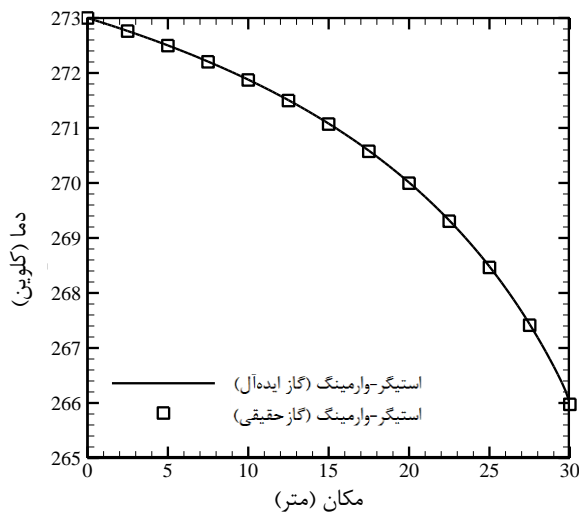
با نوشتن تقریب تفاضل پس‌رو مرتبه اول برای جمله‌های مثبت و تقریب تفاضل پیش‌رو مرتبه اول برای جمله‌های منفی، معادله تفاضل محدود (۱۶) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1}^+ \right) \Delta Q_{j-1} \\ & + \left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_j^+ - A_j^-) - \Delta t B_j \right] \\ & + \Delta Q_j \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1}^+ \right) \Delta Q_{j+1} \\ & = - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^+ - E_{j-1}^+ + E_{j+1}^- - E_j^-) \\ & + \Delta t H_j \end{aligned} \quad (16)$$

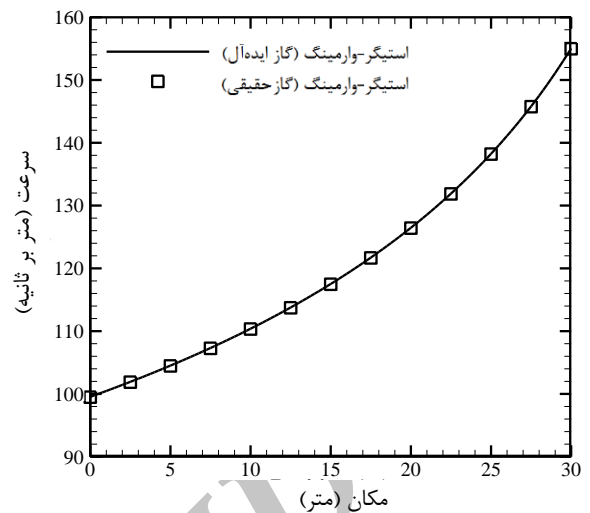
که در رابطه (۱۶) A^+ و A^- ، ماتریس‌های ژاکوبین شار تجزیه شده می‌باشند. ماتریس‌های A^\pm و E^\pm را می‌توان در ضمیمه و مرجع [۱۶] مشاهده کرد. معادله تفاضل محدود (۱۶) که برحسب ΔQ مرتب شده است، فرمول‌بندی دلتا نامیده می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۶) برای هر کدام از نقاط شبکه و اعمال شرایط مرزی، یک دستگاه سه قطری بلوکی حاصل می‌شود. با حل این دستگاه برای هر گام زمانی، متغیرهای جریان در آن گام محاسبه می‌شوند. برای حل معادلات فوق به شش شرط مرزی نیاز است. با توجه به مقادیر مشخصه در مرزها، بایستی سه شرط مرزی تحلیلی بر روی مرزها معلوم باشند و سه شرط مرزی دیگر از طریق برون‌یابی از درون میدان جریان محاسباتی تعیین شوند. سپس با محاسبه ΔQ در هر گام زمانی می‌توان متغیرهای مجهول آن گام را با استفاده از معادله (۱۷) محاسبه کرد.

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q \quad (17)$$

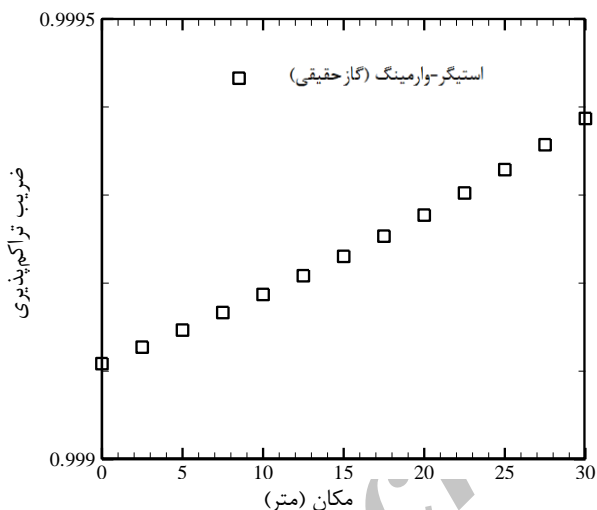
برای حل معادلات مربوطه، به گام زمانی مناسب برای همگرایی حل عددی نیاز است. این گام زمانی بر اساس عدد CFL (کورانت-فردریش-لوی) و با توجه به رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود.



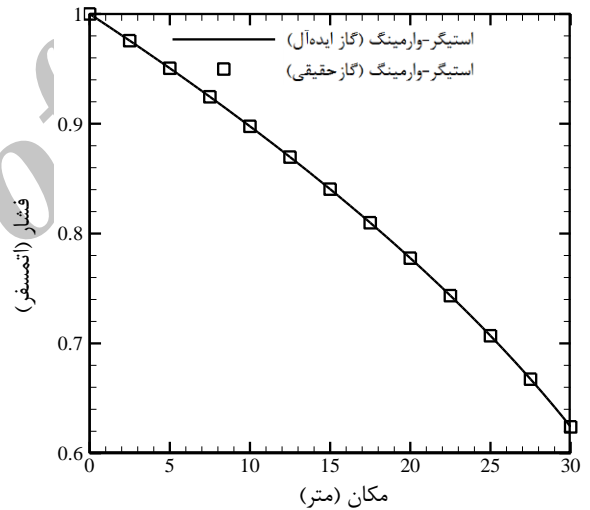
شکل ۴ تغییرات دما در طول لوله



شکل ۱ تغییرات سرعت در طول لوله



شکل ۵ تغییرات ضریب تراکم پذیری در طول لوله

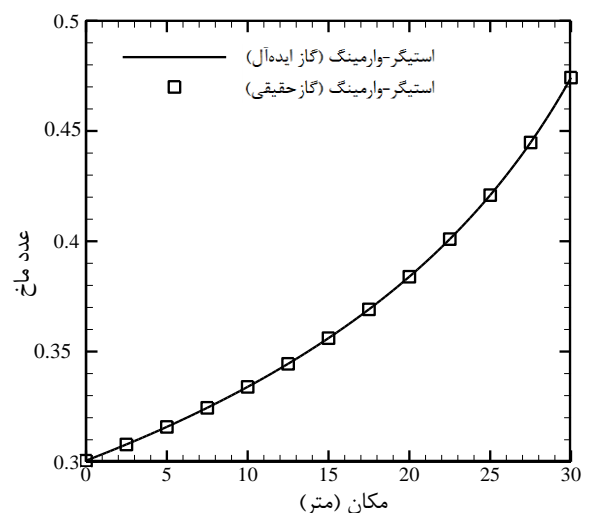


شکل ۲ تغییرات فشار در طول لوله

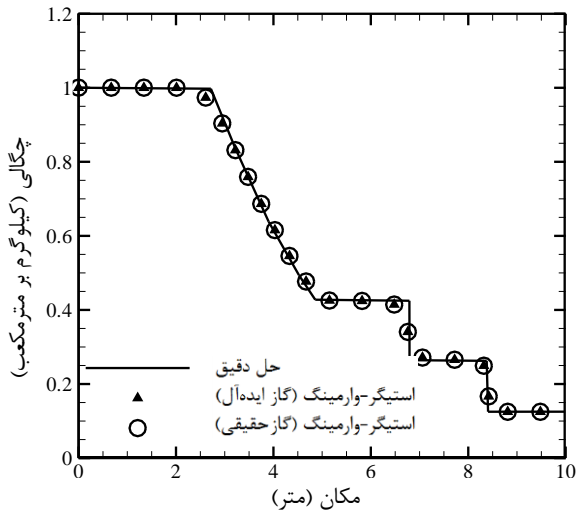
همان گونه که در جدول ۲ مشاهده می شود، نتایج با خطای ناچیزی در تطابق خوبی با حل تحلیلی قرار دارد.

۴-۲- بررسی صحت نتایج حل عددی ناپایای جریان (جریان درون لوله شوک)

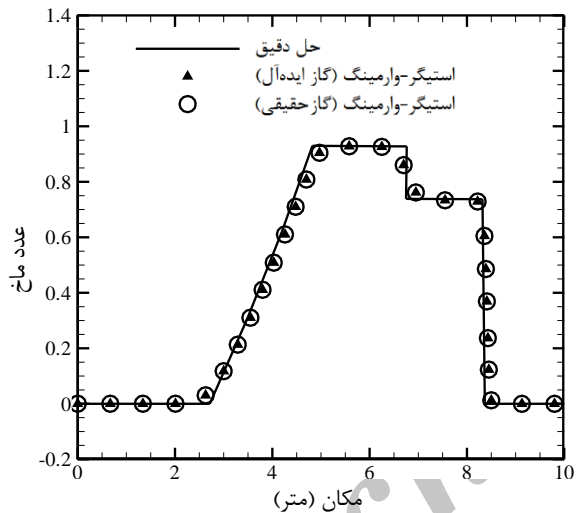
برای صحت سنجی پاسخ گذرای روش عددی ارایه شده، جریان درون لوله شوک مورد بررسی قرار گرفته است. لوله ای به طول ۱۰ متر موجود است که با قرار دادن یک غشا در وسط، لوله به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. هوا با شرایط اولیه موجود در جدول ۳ درون دو قسمت لوله قرار دارد.



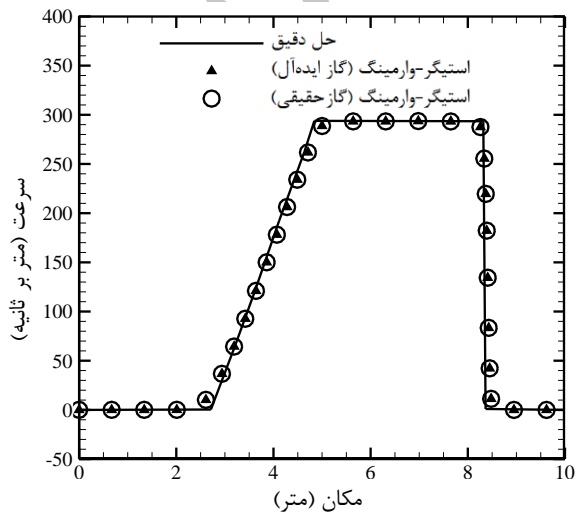
شکل ۳ تغییرات ماخ در طول لوله



شکل ۷ تغییرات چگالی در لوله شوک در زمان $t = 6/1 \text{ ms}$



شکل ۸ تغییرات ماخ در لوله شوک در زمان $t = 6/1 \text{ ms}$



شکل ۹ تغییرات سرعت در لوله شوک در زمان $t = 6/1 \text{ ms}$

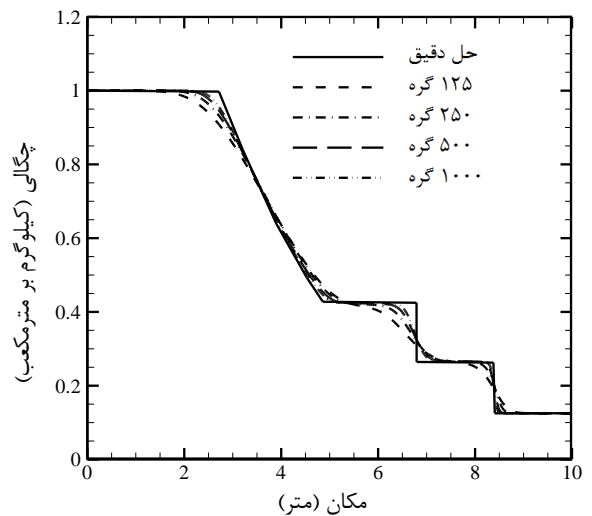
جدول ۲ خطای نسبی و مقادیر متغیرهای جریان در خروجی لوله

روش حل	U_{OUT} (m. s^{-1})	T_{OUT} (K)	M_{OUT} (بی‌بعد)
حل تحلیلی [۱۷]	۱۵۵/۲	۲۶۵/۸	۰/۴۷۵
استیگر-وارمینگ	۱۵۵/۰۳	۲۶۵/۹۹	۰/۴۷۴
مقدار خطا (%)	۰/۱	۰/۰۷	۰/۲

جدول ۳ مقادیر شرایط اولیه در لوله شوک

متغیرهای جریان	فشار (Pa)	چگالی (kg. m^{-3})
سمت راست	۱۰۰۰۰	۱/۰۰
سمت چپ	۱۰۰۰۰۰	۰/۱۲۵

در لحظه $t = 0^+$ ، این غشا پاره می‌شود و به دلیل اختلاف شرایط در دو قسمت لوله، جریان درون لوله برقرار می‌شود. پس از گذشت ۶/۱ میلی‌ثانیه، شرایط جدیدی برای خواص سیال از جمله چگالی، عدد ماخ، فشار و سرعت حاصل می‌شود. در این مسأله $R = 287 \text{ J. (kg. K)}^{-1}$ و نسبت گرمای ویژه هوا $\gamma = 1/4$ در نظر گرفته می‌شود. توجه شود که فاکتور اصطکاک در لوله صفر است یا به عبارت دیگر فاقد جمله اصطکاکی است. برای بررسی استقلال شبکه حل، تغییرات چگالی برای تعداد گره‌های مختلف در شکل ۶ ترسیم شد که نشان داد به ازای ۲۵۰ گره، حل عددی مستقل از شبکه انتخابی خواهد بود. نتایج حاصل از حل شامل تغییرات چگالی، عدد ماخ، سرعت، فشار و تغییرات ضریب تراکم‌پذیری در شکل ۷ تا شکل ۱۱ ارائه شده‌اند.



شکل ۱۰ بررسی استقلال شبکه برای چگالی در زمان $t = 6/1 \text{ ms}$

علاوه بر این به دلیل اینکه ماهیت حل مرتبه اول می باشد، روش عددی دارای خاصیت یکنوایی بوده و حول ناپیوستگی ها، حل استیگر-وارمینگ به صورت هموار تغییر می کند.

۴-۳- بررسی جریان درون یک خط لوله با فشار متغیر در ورودی نسبت به زمان

این مسأله توسط عباس پور [۹] بررسی شده است. یک لوله صاف به طول ۵۰ کیلومتر و قطر داخلی ۵۰۰ میلی متر، مطابق شکل ۱۲، برای مطالعه انتخاب شده است. در این سیستم یک رگلاتور در ورودی خط لوله (گره یک) فشار را در ورودی تنظیم می کند. شرایط مرزی و اولیه برای مسأله مورد نظر به صورت زیر است:

۱- فشار در ورودی به صورت تابعی از زمان مطابق با شکل ۱۳ تغییر می کند.

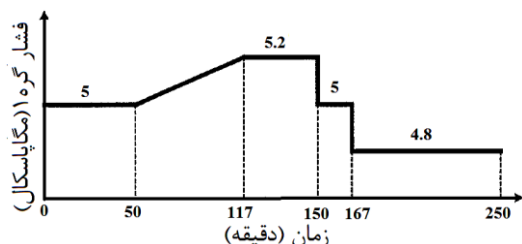
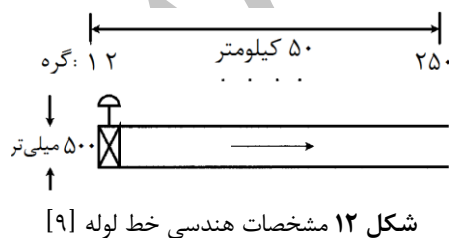
۲- فشار انتهایی خط لوله در مقدار ۴ مگاپاسکال ثابت نگه داشته می شود.

۳- دمای سیال ورودی ۶۰ سانتی گراد و ثابت می باشد.

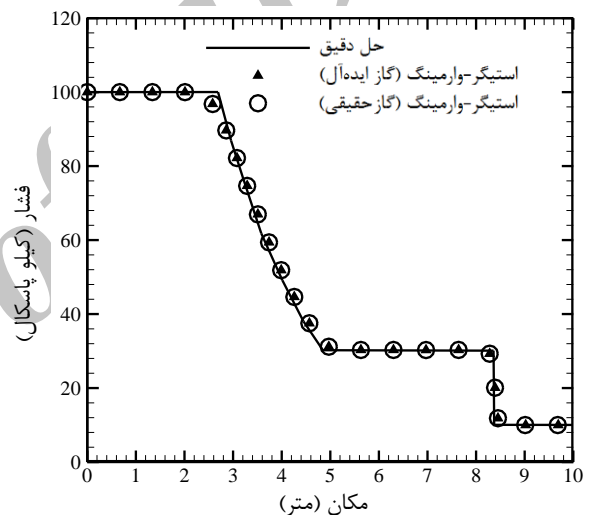
۴- در امتداد خط لوله جریان غیرهمدمای و آدیاباتیک است.

۵- شرایط اولیه متناظر با یک جریان پایای غیرهمدمای با فشار ورودی ۵ مگاپاسکال، دمای ورودی ۲۵ سانتی گراد و فشار خروجی ۴ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است.

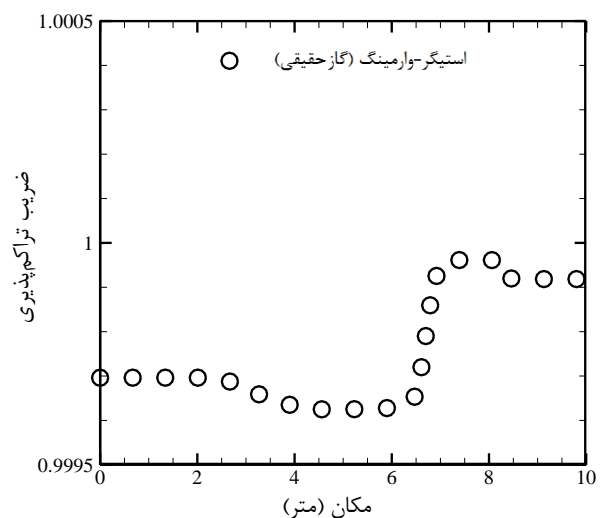
همچنین برای گاز درون لوله وزن ملکولی ۱۸، دمای بحرانی ۲۰۰ کیلوین، فشار بحرانی ۴/۵۷ مگاپاسکال و نسبت گرمای ویژه ۱/۲۵ فرض شده است.



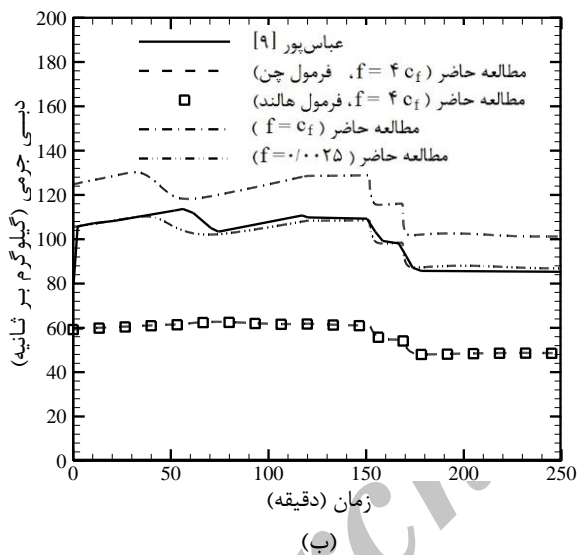
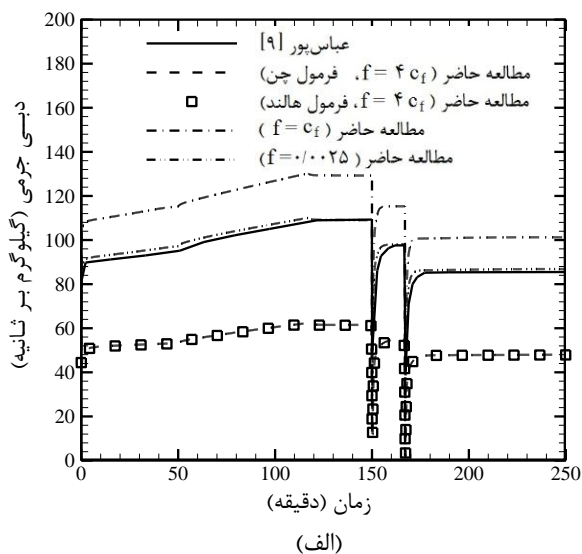
با توجه به شکل های ۷ تا ۱۰ مشاهده می شود که نتایج حاصل از شبیه سازی های انجام شده با فرض گاز ایده آل و گاز واقعی بر روی یکدیگر قرار دارند. این نتایج قابل پیش بینی هستند زیرا همانند مسأله قبل ضریب تراکم پذیری گاز حقیقی در این فشار و دما، مطابق با آنچه در شکل ۱۰ ارائه شده است به گاز ایده آل بسیار نزدیک می باشد و اختلاف آن با عدد یک در رقم چهارم اعشار است. همچنین با توجه به شکل های ۷ تا ۱۰ مشاهده می شود که نتایج به دست آمده از روش ضمنی استیگر-وارمینگ نتایج بسیار قابل قبولی در مقایسه با حل دقیق ریمان [۱۸] ارائه می دهد.



شکل ۱۰ تغییرات فشار در لوله شوک در زمان $t = 6/1 \text{ ms}$



شکل ۱۱ تغییرات ضریب تراکم پذیری در لوله شوک در زمان $t = 6/1 \text{ ms}$ برای گاز حقیقی



شکل ۱۵ دبی جرمی در الف- گره ورودی و ب- گره خروجی

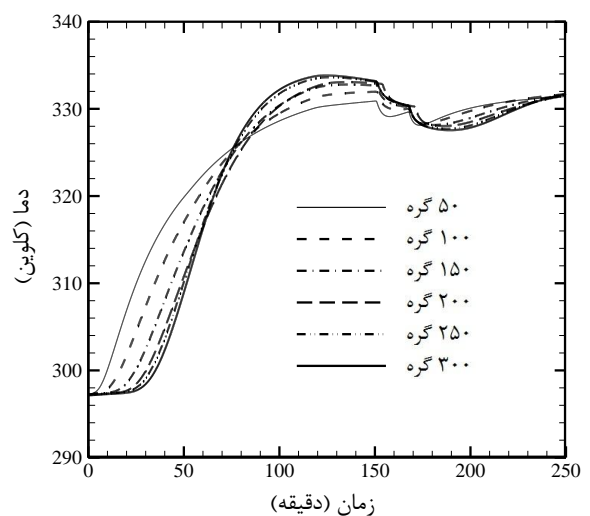
به ویژه در مورد دما که بسیار به روش عددی حساس است و به دلیل مرتبه اول بودن روش استیگر-وارمینگ و میرایی ذاتی موجود در آن تغییرات آن مقداری هموارتر به دست می آید. علت متفاوت بودن زمان افزایش ناگهانی دما در گره خروجی در شکل ۱۶، به دلیل فاکتورهای اصطکاک مختلف است که باعث تغییرات سرعت گاز شده و زمان رسیدن گاز به گره انتهایی را تحت تاثیر قرار می دهد.

همان گونه که در شکل ۱۷ نمایان است، فاکتور اصطکاک در وسط خط لوله توسط دو رابطه به دست آمده توسط چن و هالند مقدار نزدیکی به یکدیگر دارند.

به منظور گسسته سازی مکانی، به دلیل حساسیت دما، تغییرات زمانی دما در مکانی به فاصله ۳۰ کیلومتری از رگلاتور به ازای تعداد گره های مختلف بررسی شد و با توجه به شکل ۱۴ این نتیجه حاصل شد که برای تحلیل این جریان لازم است خط لوله به ۲۵۰ گره تقسیم شود. پس از تحلیل مسأله با روش عددی حاضر نتایج به دست آمده مورد بحث قرار گرفته است. نتایج تغییرات زمانی دبی جرمی عبوری از گره های ورودی و خروجی خط لوله به ترتیب در شکل ۱۵- الف و ب نمایش داده شده اند. برای محاسبه فاکتور اصطکاک از دو فرمول صریح چن و هالند [۱۱] استفاده شده است. همان گونه که مشاهده می شود با اینکه نتایج تحلیل حاضر روند تغییرات کاملاً یکسانی با عباس پور [۹] دارند، ولی تفاوت عمده ای مابین آنها مشاهده می شود.

مهمترین عاملی که منجر به این اختلاف می شود فاکتور اصطکاک است. به نظر می رسد فاکتور اصطکاک در نظر گرفته شده توسط عباس پور مقداری در حدود $f=0.0025$ بوده است چرا که در این حالت نتایج بدست آمده با نتایج ایشان به نحو نسبتاً مناسبی منطبق می شود.

شکل ۱۶ تغییرات زمانی دما را در گره خروجی در مقایسه با عباس پور [۹] ارایه می دهد. همان گونه که مشاهده می شود در اینجا نیز تفاوت های قبلی در ارتباط با دما نیز وجود دارد. با این حال این تفاوت ها تا حدودی اجتناب ناپذیر است.

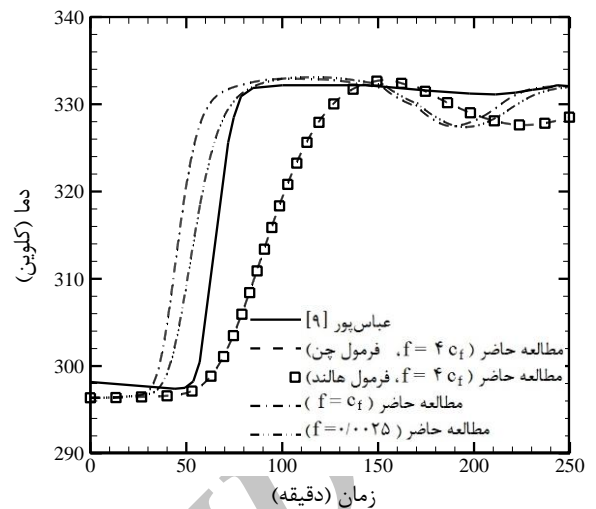


شکل ۱۶ بررسی استقلال شبکه محاسباتی در گره ای به فاصله ۳۰ کیلومتری از رگلاتور

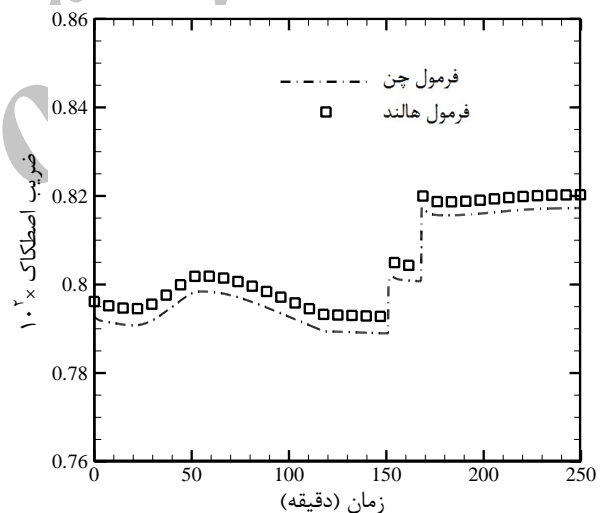
همخوانی با حل دقیق ریمان صحت رفتار گذرای روش حاضر را تأیید می‌کند. همچنین اگر چه از دمای و فشار بحرانی گاز به کار گرفته شده توسط عباس‌پور [۹] اطلاع کافی در اختیار نیست، اما استفاده از شرایط گاز طبیعی با جرم ملکولی ۱۸، اختلاف زیادی با دیگر ترکیبات گاز طبیعی ایجاد نمی‌کند و فاکتور اصطکاک باعث اختلاف عمده بین نتایج عددی حاضر و این مرجع شده است. با این حال روند تغییرات زمانی بدست آمده کاملاً با نتایج این مرجع تطابق دارد.

با توجه به موارد بالا، تغییرات فشار، دما، دبی جرمی، چگالی، سرعت و ضریب تراکم‌پذیری در مقاطع مختلف خط لوله نسبت به زمان بدست آمده و به ترتیب در شکل ۱۸ تا شکل ۲۳ نشان داده شده‌اند.

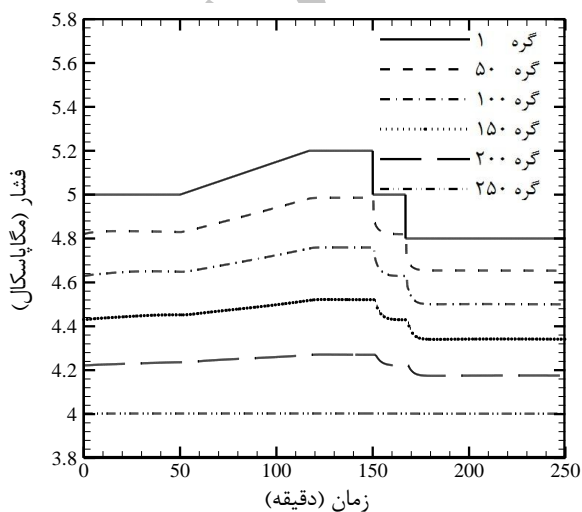
در ابتدا جریان گاز درون خط لوله در شرایط پایا با فشار ۵ مگاپاسکال و دمای ۲۵ درجه سانتی‌گراد در ورودی و فشار ۴ مگاپاسکال در خروجی قرار دارد. با اعمال شرایط مرزی، در لحظه $t = 0^+$ در ورودی دما ناگهان به ۶۰ درجه سانتی‌گراد افزایش یافته در حالی که کماکان فشار در ورودی و خروجی تا ۵۰ دقیقه اول ثابت باقی می‌ماند. با دقت در شکل ۱۸ می‌توان مشاهده کرد که در ۵۰ دقیقه اول فشار در امتداد خط لوله، تغییرات بسیار جزئی نسبت به حالت اولیه خود (حالت پایای خود) دارد که نشان می‌دهد تغییرات فشار بیشتر وابسته به شرایط مرزی فشار بوده و تغییرات دمای گاز چندان تاثیری بر آن نخواهد داشت.



شکل ۱۶ تغییرات دما جرمی در گره خروجی خط لوله با گذشت زمان



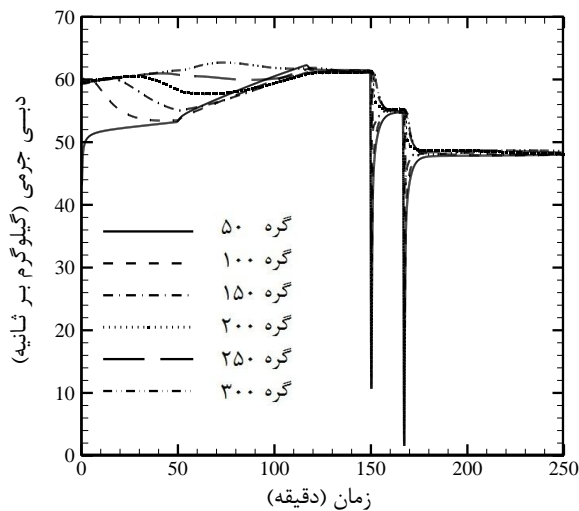
شکل ۱۷ تغییرات فاکتور اصطکاک نسبت به زمان در وسط خط لوله



شکل ۱۸ تغییرات فشار نسبت به زمان در گره‌های مختلف

از طرفی نتایج این تحلیل عددی عدد رینولدز جریان را از مرتبه 10^6 تا 10^7 نشان می‌دهد که به این ترتیب مرتبه فاکتورهای اصطکاک بدست‌آمده از فرمول‌های چن و هالند کاملاً با نمودار مودی همخوانی دارند. شایان ذکر است که تغییرات فاکتور اصطکاک نسبت به زمان، به دلیل تغییرات زمانی دبی جرمی عبوری می‌باشد.

به هر حال تطابق بسیار مناسب نتایج حاضر با جواب دقیق جریان فانو، صحت جمله اصطکاک در حل عددی حاضر و



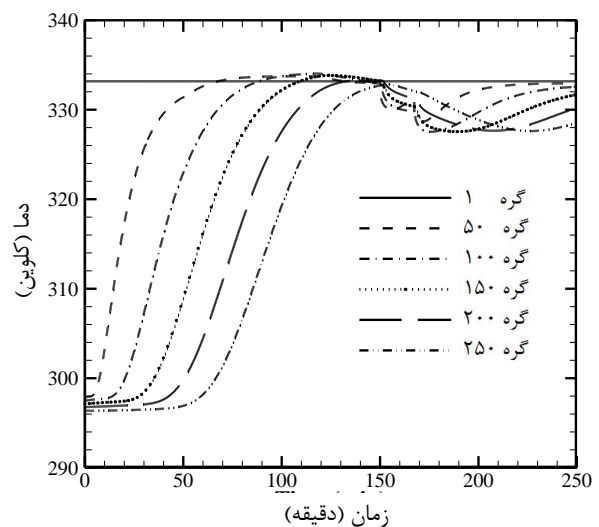
شکل ۲۰ تغییرات دبی جرمی نسبت به زمان در گرہ‌های مختلف خط لوله

با توجه به اینکه شرایط اولیه برای دبی از حل جریان پایا اعمال شده است؛ لذا در لحظه صفر، دبی جرمی کلیه نقاط (به استثنای گرہ ورودی) برابر با دبی جرمی اولیه حدود 60 کیلوگرم بر ثانیه می‌باشد. دبی گرہ ورودی نیز با توجه به افزایش آبی دما از 25 به 60 درجه سانتی‌گراد به طور ناگهانی کاهش می‌یابد. با گذشت زمان به دلیل افزایش دمای گرہ‌های بعدی دبی جرمی به تدریج در این گرہ‌ها نیز رو به کاهش می‌گذارد. پس از گذشت 50 دقیقه به واسطه شرایط مرزی، فشار در ورودی سیر افزایش به خود می‌گیرد که به دنبال آن دبی جرمی در گرہ ورودی و با مقداری تأخیر متناسب با رسیدن امواج تراکمی به گرہ‌های بعد، این افزایش دبی در سایر گرہ‌ها نیز مشاهده می‌شود. به همین ترتیب تغییرات فشار ناگهانی در ورودی در زمان‌های 150 و 167 دقیقه تغییرات دبی را در پی داشت. شایان ذکر است که نزدیک به صفر شدن دبی در دو نقطه شکل فوق به دلیل خطاهای عددی و محاسباتی است و جنبه فیزیکی ندارد.

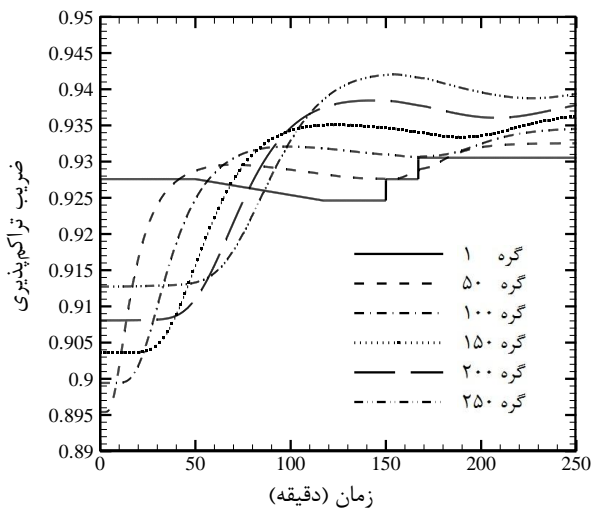
شکل ۲۱ و شکل ۲۲، به ترتیب تغییرات چگالی و سرعت گرہ‌های مختلف را با گذشت زمان نشان می‌دهند. همان‌گونه که در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود تغییرات چگالی کاملاً با تغییرات دما و فشار نقاط هم‌خوانی دارد.

با گذشت زمان به دلیل تغییرات فشار ورودی لوله، فشار در گرہ‌های دیگر تحت تأثیر قرار می‌گیرد که انتظار می‌رود اثرات اصطکاکی در طول خط لوله و همچنین شرط فشار ثابت در مرز خروجی، تغییرات فشار را با دور شدن از ورودی لوله و نزدیک شدن به خروجی آن به تدریج هموار و هموارتر سازد. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی عددی حاضر با توجه به شکل ۱۸ به خوبی این رفتار فیزیکی را نشان می‌دهد.

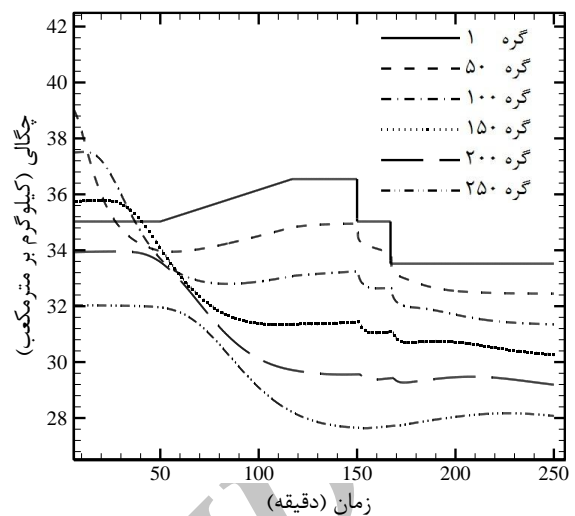
شکل ۱۹ تغییرات دما در مقاطع مختلف خط لوله را نشان می‌دهد. تغییرات دمای گاز درون لوله نسبت به زمان تحت تاثیر عواملی چون کاهش فشار به واسطه افت‌های اصطکاکی، تغییرات فشار به واسطه شرایط مرزی متغیر با زمان در ورودی و همچنین افزایش دمای گاز در ورودی از 25 به 60 درجه سانتی‌گراد می‌باشد. با شروع شبیه‌سازی جریان، به دلیل افزایش دما در ورودی، پس از گذشت زمان دما در این گرہ‌ها به تدریج شروع به افزایش می‌کند. تا قبل از زمان 50 دقیقه، به دلیل عدم تغییرات زیاد در فشار گاز درون خط لوله، دمای گرہ‌های مختلف در خط لوله فقط به واسطه رسیدن سیال با دمای بالاتر افزایش می‌یابد. به عنوان مثال در گرہ انتهایی پس از گذشت تقریباً 70 دقیقه سیال ورودی که دارای دمای بالایی می‌باشد به این گرہ می‌رسد و دما در این گرہ شروع به افزایش می‌کند. همچنین تغییرات ناگهانی دما در زمان‌های میانی به دلیل تغییرات فشار اعمالی در ورودی است. در شکل ۲۰ تغییرات زمانی دبی جرمی در موقعیت‌های مختلف آرایه شده است.



شکل ۱۹ تغییرات دما نسبت به زمان در گرہ‌های مختلف



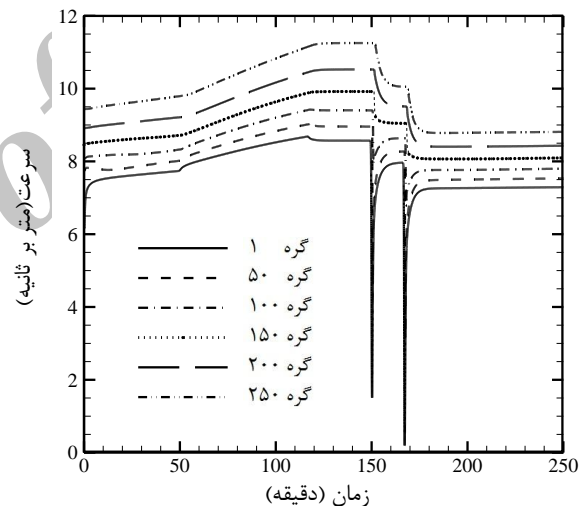
شکل ۲۳ تغییرات ضریب تراکم‌پذیری نسبت به زمان در گره‌های مختلف خط لوله



شکل ۲۱ تغییرات چگالی نسبت به زمان در گره‌های مختلف خط لوله

۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر جریان گذرای غیرهمدمای گاز حقیقی توسط حل عددی معادلات اویلر گذرا به فرم بقایی^۱ به همراه اثرات اصطکاک درون لوله مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. برای حل عددی این معادلات از روش تفاضل محدود ضمنی استیگر-وارمینگ (بر مبنای تجزیه بردار شار) به فرم دلتا، استفاده شده است. تطابق بسیار مناسب نتایج عددی حاضر با جواب دقیق جریان فانو، صحت جمله اصطکاکی در حل عددی حاضر و هم‌خوانی با حل دقیق ریمان در ارتباط با یک لوله شوک صحت رفتار گذرای روش حاضر را تأیید می‌کند. پس از اعتبارسنجی روش عددی حاضر با حل دقیق فانو و حل دقیق ریمان روش عددی حاضر به مسأله ارایه شده توسط عباس‌پور [۹] اعمال شد. نتایج به دست آمده از حل عددی حاضر، با وجود تطابق در رفتار، اختلافاتی با نتایج این مرجع دارد که ناشی تفاوت در فاکتور اصطکاک به کار رفته توسط عباس‌پور [۹] می‌باشد. به هر حال از آنجا که نتایج به دست آمده از تحلیل عددی حاضر در مورد این مسأله کاملاً با فیزیک جریان هم‌خوانی دارد می‌توان امیدوار بود که در صورت یکسان بودن شرایط در نظر گرفته شده با مرجع یک این اختلافات نیز کاهش یابد. در نهایت با توجه به نتایج بدست آمده در تحلیل عددی حاضر می‌توان نتیجه گرفت که روش عددی حاضر به دلیل استفاده از روش‌های خطی‌سازی، ضمن داشتن دقت مناسب از هزینه محاسباتی کمتری نسبت به روش‌های غیرخطی متداول برخوردار است.



شکل ۲۲ تغییرات سرعت نسبت به زمان در گره‌های مختلف خط لوله

با این حال میدان سرعت درون لوله بیشتر تحت تأثیر تغییرات فشار می‌باشد و همان‌گونه که در شکل ۲۰ نشان داده شده است، سرعت گاز درون لوله متناسب با فشار ورودی لوله در حال تغییر است. تغییرات ضریب تراکم‌پذیری در شکل ۲۳ ارایه شده است. مقدار این ضریب، تأثیر قابل توجهی بر نتایج تحلیل غیر همدمای جریان گاز دارد. به همین سبب با توجه به نتایج ارایه شده در شکل ۲۱، فرض گاز ایده‌ال می‌تواند منجر به ایجاد خطای نسبتاً زیادی برای تحلیل جریان گاز تحت شرایط یاد شده شود.

$$A^- = \begin{bmatrix} A_{11}^- & A_{12}^- & A_{13}^- \\ A_{21}^- & A_{22}^- & A_{23}^- \\ A_{31}^- & A_{32}^- & A_{33}^- \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۴})$$

در رابطه (الف-۳) و (الف-۴)، A_{ij}^+ و A_{ij}^- آرایه‌های ماتریس‌های A^+ و A^- هستند که A_{ij}^+ در رابطه (الف-۵) آرایه شده است.

$$A_{11}^+ = -\frac{1}{4} \frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2} u^3 + \frac{1}{4} \frac{(Z\gamma-Z-2)\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a} u^2 + \frac{1}{2} u$$

$$A_{12}^+ = +\frac{1}{2} \frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2} u^2 - \frac{1}{2} \frac{(Z\gamma-Z-1)\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a} u + \frac{1}{2}$$

$$A_{13}^+ = -\frac{1}{2} \frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2} u + \frac{1}{2} \frac{Z\gamma(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a}$$

$$A_{21}^+ = -\frac{1}{4} \frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2} u^4 + \frac{1}{2} \frac{(Z\gamma-Z-1)\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a} u^3 + \frac{1}{4} u^2(\gamma-1)Z - \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a}{\sqrt{\gamma}} u$$

$$A_{22}^+ = \frac{1}{2} \frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2} u^3 - \frac{1}{2} \frac{(2Z\gamma-2Z-1)\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a} u^2 - \frac{1}{2} u(Z\gamma-Z-2) + \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a}{\sqrt{\gamma}}$$

$$A_{23}^+ = -\frac{1}{2} \frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2} u^2 + \frac{(\gamma-1)Z\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a} u + \frac{1}{2}(\gamma-1)Z$$

$$A_{31}^+ = -\frac{1}{8} \frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2} u^5 + \frac{1}{8} \frac{(3Z\gamma-3Z-2)\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1-Z+Z\gamma})a} u^4$$

۶- تشکر و قدردانی

نگارندگان از شرکت گاز استان خوزستان، مرکز تحقیقات حفاری و دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل فراهم نمودن امکانات علمی و پژوهشی جهت به ثمر رسیدن این تحقیق تشکر و قدردانی می‌نمایند.

۷- پیوست

در این پیوست ماتریس ژاکوبین شار و ماتریس چشمه برای روش استیگر-وارمینگ بر مبنای تجزیه بردار شار آرایه شده‌اند. این ماتریس‌ها با استفاده از نرم‌افزار میپل^۱ محاسبه شده‌اند. ماتریس A که برابر $(\partial E/\partial x)$ است، که ماتریس ژاکوبین شار نامیده می‌شود. آرایه‌های این ماتریس طبق رابطه (الف-۱) با A_{ij} نمایش داده می‌شوند.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱})$$

آرایه‌های A_{ij} در رابطه (الف-۲) داده شده‌اند.

$$A_{11} = 0$$

$$A_{12} = 1$$

$$A_{13} = 0$$

$$A_{21} = -u^2 + \frac{1}{2} u^2 Z(\gamma-1)$$

$$A_{22} = -u^2 - \frac{1}{2} u^2 Z(\gamma-1)$$

$$A_{23} = Z(\gamma-1)$$

$$A_{31} = \frac{1}{2} u^3 Z(\gamma-1)$$

$$-\left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{a^2}{Z\gamma(\gamma-1)} + \frac{a^2}{\gamma}\right) u$$

$$A_{32} = -u^2 Z(\gamma-1) + \frac{1}{2} u^2$$

$$+ \frac{a^2}{Z\gamma(\gamma-1)} + \frac{a^2}{\gamma}$$

$$A_{33} = (1 + Z(\gamma-1))u \quad (\text{الف-۲})$$

اگر ماتریس ژاکوبین شار A بر مبنای مقادیر ویژه مثبت و منفی این ماتریس به دوماتریس A^+ و A^- تفکیک شود، ماتریس‌های حاصل طبق رابطه (الف-۳) و (الف-۴) بیان می‌شوند.

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_{11}^+ & A_{12}^+ & A_{13}^+ \\ A_{21}^+ & A_{22}^+ & A_{23}^+ \\ A_{31}^+ & A_{32}^+ & A_{33}^+ \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۳})$$

- [5] Gato, L.M.C., Henriques, J.C.C., "Dynamic Behavior of High-Pressure Natural-Gas Flow in Pipelines", *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 26, 2005, pp. 817-825.
- [6] Tenties, E., Margaris, D., Papanikas, D., "Transient Gas Flow Simulation Using Adaptive Method of Lines", *C.R. Mecanique*, Vol. 331, 2003, pp. 481-487.
- [7] Abbaspour, M., Chapman, K.S., "Non-isothermal Transient Flow in Natural Gas Pipeline" *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol. 75, No. 3, 2008, pp. 0310181-0310188.
- [8] Chaczykowski. M., "Transient Flow in Natural Gas Pipeline-The Effect of Pipeline Thermal Mode" *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, 2010, pp. 1051-1067.
- [9] Abbaspour. M., "Simulation and Optimization of Non-isothermal, One-dimensional Single/Two Phase Flow in Natural Gas Pipeline", Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree Doctor of Philosophy, Department of Mechanical and Nuclear Engineer, College of Engineering, Kansas State University, 2005.
- [10] Dranchuck, P. M., Purvis, R. A., Robinson, D. B., "Computer Calculations of Natural Gas Compressibility Factors using the Standing and Katz Correlation", Institute of Petroleum Technical Series, IP 74-008, 1974, pp. 1-13.
- [11] Ghanbari A., Farshad F., Fred and Rieke H. H., "Newly Developed Friction Factor Correlation for Pipe Flow and Flow Assurance", *Journal of Chemical Engineering and Materials Science*, Vol. 2, No. 6, 2011, pp. 83-86.
- [12] J. L. Steger and R. F. Warming. "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas dynamic Equations with Applications to Finite Difference Methods", *J. Comput. Phys.*, Vol. 40, 1981, pp. 263-293.
- [13] Hoffman A. K., Chiang, S. T., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Volume 2. Wichita, Kansas, August 2000.
- [14] Liou, M. S., Steffen, C. J., "A New Flux Splitting Scheme", *Journal of Computational Physics*, vol. 107, 1993, pp. 23-29.
- [15] Behbahani-Nejad, M., Shekari, Y., "The accuracy and Efficiency of a Reduced-Order Model for Transient Flow Analysis in Gas Pipelines", *J. Pet. Sci. Technol.*, 2010, Vol. 73, pp. 13-19.
- [16] M. Shaebani, *modeling of Rank reduced to one-dimensional unsteady flow in pipelines natural gas*, Thesis of M.Sc, Shahid Chamran University of Ahvaz, 2012. (In Persian)
- [17] Anderson, J. D., *Modern Compressible Flow*, USA, McGraw-Hill, 1990, 649.
- [18] Hirsch, Ch., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Volume 2, John Wiley & sons, August 1992, 690.

$$A_{32}^+ = \frac{1}{4} \frac{u^3(\gamma - 1)Z}{(Z\gamma - Z + 2)} - \frac{1}{4} \frac{Z(\gamma - 1)\sqrt{\gamma}}{Z(\gamma - 1)\sqrt{\gamma}} \times (\sqrt{1 - Z + Z\gamma}) a u^2 - \frac{1}{2} \frac{(Z\gamma - Z + 1)a}{Z(\gamma - 1)\sqrt{\gamma}} u$$

$$A_{33}^+ = -\frac{1}{4} \frac{Z\gamma(\gamma - 1)}{(1 - Z + Z\gamma)a^2} u^3 - \frac{1}{4} \frac{(3Z\gamma - 3Z - 1)\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1 - Z + Z\gamma})a} u^3 - \left(\frac{1}{2} Z\gamma - \frac{1}{2} Z - \frac{1}{4}\right) u^2 + \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{1 - Z + Z\gamma})a}{Z(\gamma - 1)\sqrt{\gamma}} u + \frac{1}{2} \frac{(Z\gamma - Z + 1)a^2}{Z(\gamma - 1)\sqrt{\gamma}}$$

$$A_{33}^+ = -\frac{1}{4} \frac{Z\gamma(\gamma - 1)}{(1 - Z + Z\gamma)a^2} u^3 + \frac{3}{4} \frac{(\gamma - 1)Z\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{1 - Z + Z\gamma})a} u^2 - \frac{1}{2} (1 - Z + Z\gamma)u + \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{1 - Z + Z\gamma})a}{\sqrt{\gamma}} \quad (5-f)$$

همچنین در رابطه (الف-۶) آرایه‌های A_{ij}^- آورده شده‌اند.

$$A^- = A - A^+ \quad (6-f)$$

با توجه به رابطه $A = (\partial E / \partial x)$ می‌توان E^+ را به صورت $A^+ Q$ نوشت و E^+ را از ضرب این ماتریس‌ها محاسبه کرد. به همین ترتیب می‌توان E^- را از $A^- Q$ به دست آورد.

۸- مراجع

- [1] Issa R. I, Spalding, D. B., "Unsteady One-Dimensional Compressible Frictional Flow with Heat Transfer", *J. Mech. Eng. Sci*, Vol. 14, No. 6, 1972, pp. 365-369.
- [2] Winterbone, D.E., Pearson, R.J., "A Solution of the Wave Equations Using Real Gases" *Int. J. Mech. Sci*, Vol. 34, No. 12, 1992, pp. 917-932.
- [3] Osiadacz, A.J., Chaczykowski, M., "Comparison of Isothermal and Non-isothermal Pipeline Gas Flow Models", *Chem. Eng. J.* Vol. 81, 2001, pp. 41-51.
- [4] Greyvenstein, G.P., "An Implicit Method For the Analysis of Transient Flows in Pipe Networks" *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 53, 2002, pp. 1127-1143.