http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دی ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۰ ص ص ۱-۱۳

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۲/۱/۳۱
تاریخ پذیرش ۹۲/۳/۲
ارائه در سایت ۹۲/۷/۳۰

جابجایی آزاد در محفظه‌های نیم‌بیضی با نسبت شعاعی متغیر به روش بولتزمن شبکه‌ای

محسن نظری[۱*]، حسنی شکری[۲]

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱، mnazari@shahroodut.ac.ir

چکیده- در این مقاله، انتقال حرارت جابجایی آزاد دوبعدی در محفظهٔ بسته به شکل نیم‌بیضی با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. عدد پرانتل برابر ۰/۷۱ و متناسب با سیال عامل هوا در نظر گرفته شده است. بررسی جریان و انتقال حرارت برای نسبت‌های مختلف ارتفاع به پهنای محفظه و برای اعداد رایلی 10^4 تا 10^6 انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش نسبت ارتفاع به پهنا، انتقال حرارت در اعداد رایلی پایین، کاهش و در اعداد رایلی بالا، افزایش خواهد یافت. نتایج به دست آمده از روش بولتزمن شبکه‌ای، با نتایج و داده‌های موجود، مقایسه و اعتبارسنجی شده است. نتایج نشان می‌دهند روش بولتزمن شبکه‌ای به خوبی قادر به شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت در محفظه‌های پیچیده از این دست است. بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه نیم‌بیضی و به ویژه با استفاده از شرط مرزی مرتبه دوم روی سطوح منحنی با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای از نوآوری‌های این مقاله است.

کلیدواژگان: انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد، محفظه به شکل نیم‌بیضی، روش بولتزمن شبکه‌ای.

Natural Convection in Semi-Ellipse Cavities with Variable Aspect Ratios using Lattice Boltzmann Method

M. Nazari[1*], H. Shokri[2]

1- Assist. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
2- MSc. Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran. mnazari@shahroodut.ac.ir

Abstract- In this paper, two-dimensional natural convection heat transfer in semi ellipse cavities is investigated using lattice Boltzmann method. The Prandtl number is taken as 0.71 that corresponds to that of air. Heat transfer and flow pattern are predicted at various Rayleigh numbers ranging from 10^4 to 10^6 for different aspect ratios. By increasing of the aspect ratio, the heat transfer rate in the cavity is increased for low Rayleigh numbers, but it is decreased for high Rayleigh numbers. The obtained results of the lattice Boltzmann method are validated with those presented in the literature and show that the lattice Boltzmann method can simulate heat transfer and flow pattern in complex cavities. Analysis of heat transfer in a semi-ellipse cavity using second order boundary condition on curved surfaces is among the novelties of the present work.

Keywords: Natural Convection, Semi Ellipse Cavity, Lattice Boltzmann Method.

۱- مقدمه

پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد از دیرباز توجه زیادی را به خود جلب کرده است. بیشترین حجم مطالعات در این زمینه مربوط به محفظه‌های به شکل مربع و یا مستطیل می‌باشد. به عنوان نمونه، رفای و ووانویچ [۱] به بررسی اثر منبع حرارتی بر روی پدیده انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه مربعی با

سیال عامل هوا پرداختند و یا باساک و روی [۲] اثر شرایط مرزی را بر روی این پدیده، به روش المان محدود در یک محفظه مربعی مطالعه نمودند. این نوع محفظه‌ها از هندسه‌ای به مراتب ساده‌تر از آنچه عملاً در طبیعت و صنعت به چشم می‌خورد، برخوردارند. در واقع کاربرد انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در هندسه‌های پیچیده‌تری است. از جمله می‌توان به کاربرد در مهندسی خورشیدی، ساختمان‌سازی و سیستم‌های عایق حرارتی، خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی، سیستم خشک کردن، مطالعات ژئوفیزیک و غیره پرداخت. بنابراین در دهه‌های اخیر مطالعه پدیده جابجایی آزاد در هندسه‌های غیر مربعی مورد توجه قرار گرفت. آسان و ناملی [۳] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در سقف یک خانه که در حالت دوبعدی به صورت مثلث متساوی‌الساقین است، در شرایط یک روز تابستانی پرداختند.

از سوی دیگر، کوکا و ازتوپ [۴] انتقال حرارت جابجایی آزاد در سقف یک خانه را در شرایط اقلیمی سرد به روش تفاضل محدود و به صورت دو بعدی مورد بررسی قرار دادند. از جمله مطالعات دیگر انجام شده در زمینه انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه مثلثی، می‌توان به مطالعه انجام شده توسط باساک و روی [۵] اشاره کرد. باساک و روی به بررسی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه با نسبت ارتفاع به پهنای یک، به روش المان محدود پرداختند. نتایج آنها نشان دادکه تاثیر عدد رایلی بر روی روند انتقال حرارت در محفظه بسیار بیشتر از عدد پرانتل است. همچنین، کنت [۶] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در رژیم جریان آرام در محفظه به شکل مثلث متساوی‌الساقین به روش حجم محدود پرداخت. ناتاراجان و باساک [۷] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل ذوزنقه به روش المان محدود پرداختند. علاوه بر این، باساک و روی [۸] محفظه ذوزنقه‌ای قبل را برای زوایای φ برابر صفر، ۳۰و ۴۵ درجه با روش المان محدود و براساس مفهوم خطوط گرما شبیه‌سازی کردند. همچنین در بسیاری از مطالعات، به بررسی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های با دیوارهای دایروی پرداخته شده است. چن و چنگ [۹] به بررسی جریان در محفظه‌ای به شکل کمانی از دایره به روش حجم محدود پرداختند. در هندسه مورد بررسی آنها دیوار صاف در دمای ثابت T_L و دیوار کمانی شکل در دمای ثابت T_H و با این فرض که $T_H > T_L$ است، نگهداری می‌شود. اگر زاویه‌ای که خط عمود بر دیوار صاف و بردار شتاب گرانش تشکیل می‌دهند را با θ نمایش دهیم، آنها نتایج خود را که شامل خطوط جریان، خطوط هم‌دما و عدد ناسلت بود، برای سیال هوا با پرانتل ۰/۷ در $0 \le \theta \le \pi$ و عدد گراشهف 10^4 تا 10^7 ارائه دادند. آنها همچنین نتایج به دست آمده از روش عددی خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد با تغییر زاویه از صفر تا π از مقدار ناسلت متوسط کاسته می‌شود.

در کار دیگری چن وچنگ [۱۰] انتقال حرارت جابجایی آزاد را در محفظه بالا برای عدد پرانتل ۴ و $0 \le \theta \le 2\pi$ و عدد گراشهف 10^5 تا 4×10^6 به روش حجم محدود و در مختصات منحنی‌الخط شبیه‌سازی کردند. ریدوانه و کامپو [۱۱] به بررسی تاثیر انحنای دیوار بر روی انتقال حرارت جابجایی آزاد آرام و پایا به روش حجم محدود پرداختند. برای این منظور سه محفظه متفاوت در نظر گرفته شد: محفظه مربعی با طول دیواره برابر H، محفظه به شکل دایره با قطر H و محفظه سوم که ترکیبی از دو محفظه قبلی است. آنها مشاهده نمودند که در تمام این محدوده‌ی عدد رایلی، ناسلت متوسط در محفظه دایروی بیشتر از محفظه کمان-مربعی و درمحفظه کمان-مربعی بیشتر از محفظه مربعی است که این تفاوت با زیاد شدن عدد رایلی کم می‌شود. در تمام مطالعاتی که تاکنون بیان شد از روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی مانند روش حجم محدود، تفاضل محدود و المان محدود برای حل معادلات ناویراستوکس و شبیه‌سازی جریان در این محفظه‌ها استفاده شده است.

در سال‌های اخیر روش بولتزمن شبکه‌ای در تحلیل جریان سیال به عنوان راه کارآمد جایگزین برای روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، رشد چشم‌گیری داشته است. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، محاسبات ساده‌تر وقابلیت موازی شدن است که برای حل مسائلی با هندسه پیچیده، دارای کاربرد فراوانی است. با وجود مزایای روش بولتزمن شبکه‌ای و کاربرد فراوان آن، تاکنون کمتر در شبیه‌سازی جریان و خصوصاً انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های غیر مربعی استفاده شده است. منیر و سیدیک [۱۲] به شبیه‌سازی جریان پایا و تراکم-

ناپذیر در محفظهٔ به شکل مثلث با درب متحرک به کمک روش بولتزمن شبکه‌ای پرداختند. هر چند در کار آنها اشاره‌ای به چگونگی مواجه با مرز مایل در روش بولتزمن شبکه‌ای نشد، اما نتایج آنها برای اعداد رینولدز ۱۰۰تا ۲۵۰۰ در محفظه‌های به شکل مثلث قائم‌الزاویه، تطابق مناسب نتایج روش بولتزمن شبکه‌ای برای این نوع محفظه با نتایج حاصل از سایر روش‌های مرسوم را نشان می‌دهد. همچنین ژانگ و شی [۱۳] جریان در داخل محفظه‌ای به شکل ذوزنقه که دیواره‌ی بالایی آن با سرعت ثابت حرکت می‌کرد را به روش بولتزمن شبکه‌ای شبیه‌سازی کردند. مهم‌ترین قسمت شبیه‌سازی جریان در محفظه‌های غیرمربعی اعمال شرایط مرزی سرعت و دما بر روی مرزهای مایل و منحنی است. فیلیپوا و هانل [۱۴] با استفاده از برونیابی خطی مدلی را برای اعمال شرایط مرزی سرعت ارائه کردند. می و همکارانش [۱۵-۱۷] این مدل را بهبود بخشیده و محدودیت‌های آن را نیز برطرف کردند. برای اعمال شرط مرزی دما بر روی مرزهای منحنی، یان و زو [۱۸] برای اولین بار مدلی ارائه کردند که دارای دقت مرتبه دوم است و تطابق خوبی با نتایج عددی و آزمایشگاهی موجود دارد.

در این مطالعه، با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای و با کمک مدل بهبود یافته می و همکارانش [۱۶] برای اعمال شرط مرزی سرعت و مدل یان و زو [۱۸] برای اعمال شرط مرزی دما، انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه به شکل نیم‌بیضی شبیه‌سازی شده است. این هندسه به مراتب پیچیده‌تر از هندسه‌های مثل مثلث و ذوزنقه است و موفقیت روش بولتزمن شبکه‌ای در شبیه‌سازی آن می‌تواند به معنای اثبات توانایی این روش در محفظه‌های از این دست باشد. بخش‌های این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، معادلات حاکم بر مسأله، به روش بولتزمن شبکه‌ای، به تفضیل گزارش شده و توابع توزیع احتمال برای حل جریان و انتقال حرارت بیان شده است. در بخش ۳، ابتدا نتایج به دست آمده از روش بولتزمن شبکه‌ای، با نتایج منتشرشده در این زمینه، مقایسه شده و سپس به طور کامل به تحلیل جریان و انتقال حرارت و بررسی اثر ابعاد محفظه پرداخته شده است. هر چند که مطالعات فراوانی در مورد انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه بسته انجام شده است، اما بررسی این پدیده در محفظه‌های به شکل نیم‌بیضی و به ویژه به روش بولتزمن شبکه‌ای برای اولین بار در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- مدل بولتزمن شبکه‌ای

مدل بولتزمن شبکه‌ای از روش گاز شبکه‌ای منشا گرفته است. روش گاز شبکه‌ای ارائه دهنده مدلی از برخورد ذرات مجازی بر روی یک شبکه منظم است. معادله بولتزمن شبکه‌ای اولیه در سال ۱۹۸۸ توسط مک نامارا و زانتی [۱۹] برای پاسخ‌گویی به یکی از مشکلات اصلی روش گاز شبکه‌ای ایجاد شد و آن مشکل اغتشاشات آماری بود. اندکی بعد آشکار شد که بولتزمن شبکه‌ای می‌تواند اغلب مشکلات دیگر روش گاز شبکه‌ای را نیز به طور طبیعی برطرف کند. بنابراین روش بولتزمن شبکه‌ای به سرعت به یک موضوع مستقل تحقیقاتی تبدیل شد و معایب باقی‌مانده روش گاز شبکه‌ای یک به یک برطرف گردید. در این روش همانند روش‌های گاز شبکه‌ای، ذرات مجازی در روی یک شبکه منظم برخورد داده می‌شوند. ولی این بار به جای مشخص نمودن آرایش ذرات مجازی، احتمال حضور این ذرات در مسیرهای مختلف معرفی و استفاده می‌شود، یعنی این سوال مطرح می‌شود که احتمال حضور یک ذره اطراف موقعیت x در زمان t چقدر است. $f_\alpha(\vec{x},t)$ چگالی احتمال و یا به طور ساده‌تر تابع توزیع نامیده می‌شود.

مدل‌های بولتزمن شبکه‌ای برای تحلیل جریان و انتقال حرارت را می‌توان به دو دسته جداگانه تقسم نمود، در دسته اول که به مدل چند سرعته معروف است، تابع توزیع تعادلی چگالی با یک ترم اضافی سرعت برای به دست آوردن معادله انرژی و توزیع تعادلی دما استفاده می‌شود [۲۱،۲۰]. دسته دوم شامل مدل‌های چندگانه توزیع تعادلی می‌باشد که در آن علاوه بر تابع توزیع تعادلی چگالی، تابع توزیع دیگری برای دما نیز ارائه شده است [۲۳،۲۲]. در این مطالعه ما از مدل دوم استفاده خواهیم کرد، این مدل محدودیت‌های مدل اول را ندارد و پایداری حل را نیز بهبود می‌بخشد. اگر تابع توزیع دما را با g نشان دهیم، $g_\alpha(\vec{x},t)$ نشان دهندهٔ احتمال انرژی ذره در مکان $\vec{x}$ و زمان t در جهت α است.

۲-۱- معادله بولتزمن شبکه‌ای برای تحلیل جریان و انتقال حرارت

با استفاده از معادله بولتزمن، تغییرات تابع توزیع چگالی و انرژی به صورت معادلات (۱ و ۲) نمایش داده می‌شوند [۲۴،۱۸].

$$f_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t)-f_\alpha(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau_v}[f_\alpha(\vec{x},t)-f_\alpha^{\mathrm{eq}}(\vec{x},t)] \tag{1}$$

$$g_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t)-g_\alpha(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau_c}[g_\alpha(\vec{x},t)-g_\alpha^{\mathrm{eq}}(\vec{x},t)] \tag{2}$$

در روش بولتزمن شبکه‌ای این معادلات در دو مرحله اجرا می‌شوند: مرحله برخورد[1] و مرحله جاری شدن[2] .

مرحله برخورد: مرحله برخورد از یک زمان بی‌نهایت کوچک قبل از برخورد شروع شده و تا یک زمان بی‌نهایت کوچک پس از برخورد را در بر می‌گیرد و می‌توان آن را به صورت روابط (۳ و ۴) نمایش داد [۲۴،۱۸].

$$\tilde{f}_\alpha(\vec{x},t)-f_\alpha(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau_v}[f_\alpha(\vec{x},t)-f_\alpha^{\mathrm{eq}}(\vec{x},t)] \tag{3}$$

$$\tilde{g}_\alpha(\vec{x},t)-g_\alpha(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau_c}[g_\alpha(\vec{x},t)-g_\alpha^{\mathrm{eq}}(\vec{x},t)] \tag{4}$$

در این معادلات $\tilde{f}_\alpha$ و $\tilde{g}_\alpha$ به ترتیب نشان دهنده توابع توزیع چگالی و انرژی پس از برخورد هستند.

مرحله جاری شدن: این مرحله بلافاصله پس از مرحله برخورد شروع شده و توابع توزیع در جهت سرعت خود به سمت گره‌های مجاورحرکت می‌کنند.

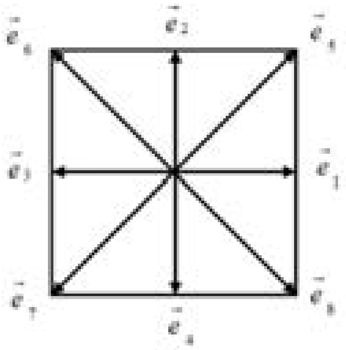
$$f_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t) = \tilde{f}_\alpha(\vec{x},t) \tag{5}$$

$$g_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t) = \tilde{g}_\alpha(\vec{x},t) \tag{6}$$

در این معادلات $\vec{e}_\alpha$ بردار سرعت ذرات در جهت α است که با استفاده از مدل D_2Q_9، شکل۱، به صورت رابطه (۷) قابل بیان است [۲۴].

$$\vec{e}_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 9 \\ ([\cos[(\alpha-1)\pi/2], (\sin[(\alpha-1)\pi/2])c & \alpha = 1,2,3,4 \\ \sqrt{2}([\cos[(\alpha-5)\pi/2+\pi/4], (\sin[(\alpha-5)\pi/2+\pi/4])c & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \tag{7}$$

$c=\delta_x/\delta t$ سرعت جاری‌شدن در بولتزمن شبکه‌ای است، δx معرف اندازه شبکه و δt گام زمانی می‌باشد. τ_v و τ_c به ترتیب معرف زمان آرامش بدون بعد معادله سرعت و انرژی است.



شکل ۱ مجموعه سرعت‌های مجزا در مدل ۹ سرعته دوبعدی D_2Q_9

$f_\alpha^{eq}(x,t)$ و $g_\alpha^{eq}(x,t)$ توابع تعادلی هستند و در مدل دوبعدی ۹ سرعته با کمک روابط (۸ و ۹) تعریف می‌شوند [۲۴،۱۸].

$$f_\alpha^{\mathrm{eq}}(\vec{x},t) = \omega_\alpha\rho[1+\frac{3}{c^2}(\vec{e}_\alpha\vec{u}) + \frac{9}{2c^2}(\vec{e}_\alpha\vec{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\vec{u}^2] \tag{8}$$

$$g_\alpha^{\mathrm{eq}}(\vec{x},t) = \omega_\alpha T[1+\frac{3}{c^2}(\vec{e}_\alpha\vec{u})] \tag{9}$$

ω_α تابع وزنی است که در مدل D_2Q_9 به صورت معادله (۱۰) تعریف می‌شود:

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 4/9 & \alpha = 9 \\ 1/9 & \alpha = 1,2,3,4 \\ 1/36 & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \tag{10}$$

معادلاتی که تاکنون اشاره شد بدون در نظر گرفتن نیروی خارجی وارد برسیال است، در صورت وجود، این ترم باید در معادلات منظور شود. در بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد درون سیال، نیروی شناوری تنها نیروی خارجی وارد بر سیال است که برای اعمال آن، رابطه (۱۱) به سمت راست معادله (۳) اضافه خواهد شد [۲۵]:

$$F_\alpha = \omega_\alpha \vec{F}.\frac{\vec{e_\alpha}}{c_s^2} \tag{11}$$

که با تقریب بوزینسک $\vec{F}$ به صورت رابطه (۱۲)تعریف می‌شود:

$$\vec{F} = \rho\,\vec{g_r}\,\beta\Delta T \tag{12}$$

و در نهایت مقادیر ماکروسکوپیک چگالی، سرعت و دما به صورت معادلات (۱۳ تا ۱۵) محاسبه خواهند شد:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{9} f_\alpha \tag{13}$$

1. Collision
2. Streaming

$$\rho\vec{u} = \sum_{\alpha=1}^{9} \vec{e}_{\alpha} f_{\alpha} \tag{۱۴}$$

$$T = \sum_{\alpha=1}^{9} g_{\alpha} \tag{۱۵}$$

با استفاده از آنالیز چاپمن-انسکوک می‌توان نشان داد که معادلات ناویر-استوکس از معادلات بولتزمن شبکه‌ای قابل استخراج هستند [۲۴،۲۲]. به این ترتیب ویسکوزیته و ضریب پخش شبکه به صورت معادلات (۱۶ و ۱۷) محاسبه خواهند شد:

$$\nu = (\tau_{\nu} - 0.5)c^2/3 \tag{۱۶}$$

$$\gamma = (\tau_{c} - 0.5)c^2/3 \tag{۱۷}$$

با توجه به اینکه ضریب پخش و ویسکوزیته منفی از نظر فیزیکی بی‌معناست، بنابراین همواره زمان آرامش سرعت و انرژی ، باید از ۰/۵ بیشتر باشد.

۳- اعمال شرایط مرزی

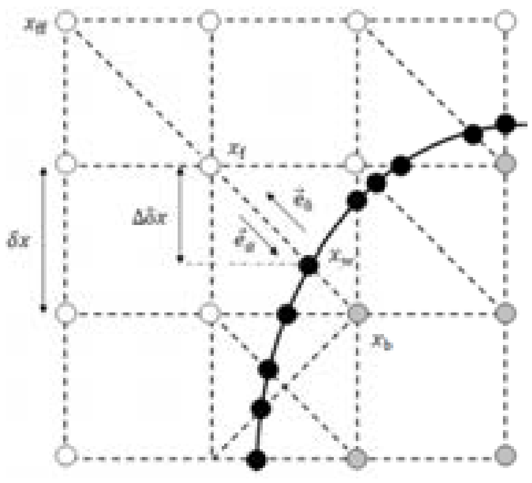
شکل ۲ نشان دهندهٔ دیوار مایلی است که ناحیه جامد و سیال را از هم جدا می‌کند. دایره‌های سیاه نشان دهندهٔ محل برخورد مرز با شبکه‌بندی (x_w)، دایره‌های توخالی گره‌های سیال (x_f) و دایره‌های خاکستری نشان دهنده گره‌های جامد (x_b) می‌باشند. همان طور که از شکل مشاهده می‌شود، برای اعمال مرحله جاری شدن روی گره x_f، به $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_b,t)$ و $\tilde{g}_{\bar{\alpha}}(x_b,t)$ نیاز است. اگر Δ کسری از طول بین گره‌های سیال و جامد باشد که در داخل سیال واقع شده است، این پارامتر به کمک رابطه (۱۸) تعریف خواهد شد.

$$\Delta = \frac{\left|\vec{x}_{\mathrm{f}} - \vec{x}_{\mathrm{w}}\right|}{\left|\vec{x}_{\mathrm{f}} - \vec{x}_{\mathrm{b}}\right|} \tag{۱۸}$$

برای تعیین تابع پس از برخورد $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_b,t)$ از ($\tilde{f}$) می‌توان از اطلاعات گره‌های سیال مجاور مرز استفاده کرد و معادله (۲) به صورت معادله (۱۹) تبدیل می‌شود [۱۶]:

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_{\mathrm{b}},t) = \tilde{f}_{\alpha}(\vec{x}_{\mathrm{f}},t) - \chi[\tilde{f}_{\alpha}(\vec{x}_{\mathrm{f}},t) - f_{\alpha}^{(\mathrm{eq})}(\vec{x}_{\mathrm{f}},t)] + \omega_{\alpha}\rho(\vec{x}_{\mathrm{f}},t)\frac{3}{c^2}\vec{e}_{\alpha}\cdot[\chi(\vec{u}_{\mathrm{bf}} - \vec{u}_{\mathrm{f}}) - 2\vec{u}_{\mathrm{w}}] \tag{۱۹}$$

که در آن χ فاکتور وزنی است که به Δ بستگی دارد. $\vec{e}_{\bar{\alpha}} = -\vec{e}_{\alpha}$ و $\vec{u}_{\mathrm{f}} = \vec{u}(\vec{x}_{\mathrm{f}},t),\ \vec{x}_{\mathrm{ff}} = \vec{x}_{\mathrm{f}} + \vec{e}_{\bar{\alpha}}\delta t$ سرعت سیال مجاور مرز و $\vec{u}_{\mathrm{w}} = \vec{u}(\vec{x}_{\mathrm{w}},t)$ سرعت دیوار مرزی و $\vec{u}_{\mathrm{bf}}$ معرف یک سرعت مجازی است.



شکل ۲ نمایش دیوار مایل روی شبکه‌بندی

می و همکارانش [۱۶] برای اعمال شرایط مرزی سرعت با دقت مرتبه دوم، روابط (۲۰ و ۲۱) را برای محاسبه فاکتور وزنی و سرعت مجازی پیشنهاد کردند.

$$\vec{u}_{\mathrm{bf}} = \vec{u}_{\mathrm{ff}} = (\vec{x}_{\mathrm{ff}},t),\quad \chi = \frac{(2\Delta-1)}{(\tau-2)}, if\ 0 \le \Delta \le \frac{1}{2} \tag{۲۰}$$

$$\vec{u}_{\mathrm{bf}} = \frac{1}{2\Delta}(2\Delta-3)\vec{u}_{\mathrm{f}} + \frac{3}{2\Delta}\vec{u}_{\mathrm{w}},\quad \chi = \frac{(2\Delta-1)}{(\tau-1/2)}, if\ \frac{1}{2} \le \Delta \le 1 \tag{۲۱}$$

برای اعمال شرایط مرزی دما با دقت مرتبه دوم در روش بولتزمن شبکه‌ای، یان و زو [۱۸] روابطی را ارائه دادند که در ادامه شرح داده خواهد شد.

اگر $g_{\bar{\alpha}}(\overrightarrow{x_{\mathrm{b}}},t)$ را به دو بخش تعادلی و غیر تعادلی تقسیم کنیم، تابع پس از برخورد، به رابطه (۲۲) تبدیل خواهد شد.

$$\tilde{g}_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_{\mathrm{b}},t) = g_{\bar{\alpha}}^{(\mathrm{eq})}(\overrightarrow{x_{\mathrm{b}}},t) + (1-\frac{1}{\tau_c})\, g_{\alpha}^{(\mathrm{neq})}(\overrightarrow{x_{\mathrm{b}}},t) \tag{۲۲}$$

که در آن:

$$g_{\bar{\alpha}}^{(\mathrm{eq})}(\overrightarrow{x_{\mathrm{b}}},t) = \omega_{\bar{\alpha}}\, T_{\mathrm{b}}^{*}\,[1 + \frac{3}{c^2}\vec{e}_{\bar{\alpha}}\cdot\overrightarrow{u_{\mathrm{b}}^{*}}] \tag{۲۳}$$

در معادلات (۲۲ تا ۲۳) اگر $\Delta \ge 0.75$ باشد، پارامترهای مجهول به کمک رابطه (۲۴) جایگزین خواهند شد:

$$g_{\tilde{\alpha}}^{(\mathrm{neq})}(\overrightarrow{x_{\mathrm{b}}},t)=g_{\tilde{\alpha}}^{(\mathrm{neq})}(\overrightarrow{x_{\mathrm{f}}},t)$$
$$\overrightarrow{u^{*}_{\mathrm{b}}}=[\overrightarrow{u_{\mathrm{w}}}+(\Delta-1)\overrightarrow{u_{\mathrm{f}}}]/\Delta$$
$$T_{\mathrm{b}}^{*}=[T_{\mathrm{W}}+(\Delta-1)T_{\mathrm{f}}]/\Delta \qquad (۲۴)$$

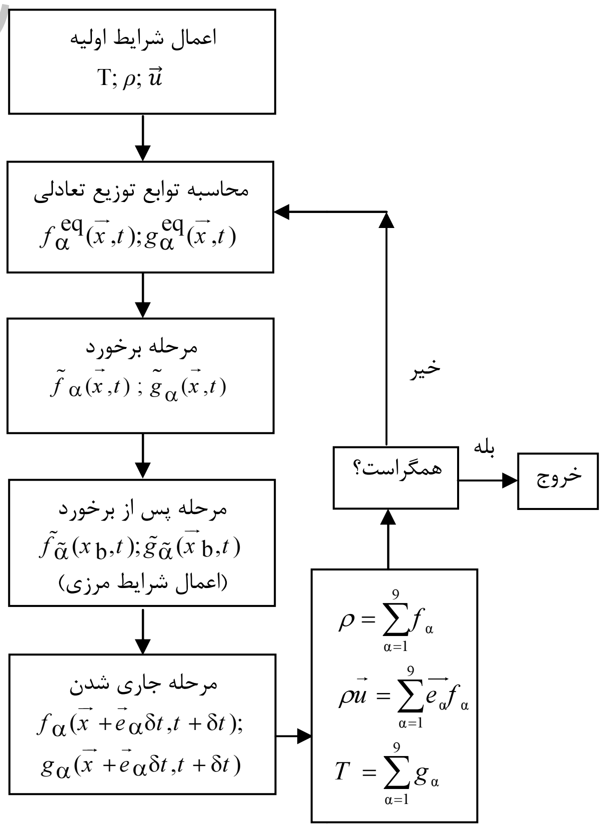
و برای $0.75 < \Delta$، از رابطه (۲۵) استفاده خواهد شد:

$$g_{\tilde{\alpha}}^{(\mathrm{neq})}(\overrightarrow{x_{\mathrm{b}}},t)=\Delta g_{\tilde{\alpha}}^{(\mathrm{neq})}(\overrightarrow{x_{\mathrm{f}}},t)+(1-\Delta)g_{\tilde{\alpha}}^{(\mathrm{neq})}(\overrightarrow{x_{\mathrm{ff}}},t)$$
$$\overrightarrow{u^{*}_{\mathrm{b}}}=[\overrightarrow{u_{\mathrm{w}}}+(\Delta-1)\overrightarrow{u_{\mathrm{f}}}]+(1-\Delta)[2\overrightarrow{u_{\mathrm{w}}}+(\Delta-1)\overrightarrow{u_{\mathrm{ff}}}]/(1+\Delta)$$
$$T_{\mathrm{b}}^{*}=[T_{\mathrm{w}}+(\Delta-1)T_{\mathrm{f}}]+(1-\Delta)[2T_{\mathrm{w}}+(\Delta-1)T_{\mathrm{ff}}]/(1+\Delta) \qquad (۲۵)$$

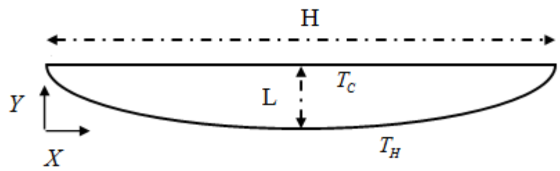
مراحل روش بولتزمن شبکه‌ای برای شبیه‌سازی انتقال حرارت در محفظه بسته با دیوار منحنی در شکل ۳ نمایش داده شده است.

۴- تحلیل عددی

در این مقاله جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه بسته دوبعدی به صورت نیم‌بیضی بررسی شده است. شکل ۴ نشان‌دهنده هندسه مورد بررسی است. دیوار منحنی در دمای ثابت گرم و دیوار صاف در دمای ثابت سرد قرار دارد.



شکل ۳ فلوچارت مراحل انجام الگوریتم روش بولتزمن شبکه‌ای



شکل ۴ هندسه مورد بررسی

سیال عامل، هوا با عدد پرانتل برابر ۰/۷۱ در نظر گرفته شده است. اگر نسبت L/H با استفاده از پارامتر A نشان داده شود، این مطالعه برای مقادیر مختلف A برابر ۰/۲۵، ۰/۳۷۵، ۰/۵و ۰/۷۵ و اعداد رایلی مختلف، از $۱۰^{۳}$ تا $۱۰^{۶}$ انجام شده است. هنگامی که A برابر ۰/۵ است، در واقع نیم‌بیضی به نیم‌دایره تبدیل می‌شود. پارامترهای بی‌بعد به صورت روابط (۲۶) تعریف شده‌اند.

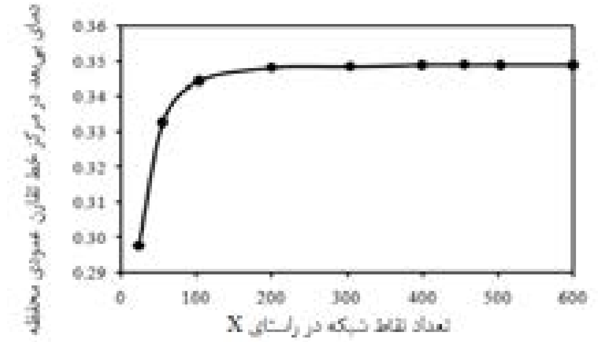
$$\mathrm{Ra}=g\beta\Delta TH^{3}/\alpha\nu \qquad \mathrm{pr}=\frac{\nu}{\alpha}$$
$$\theta=\frac{T-T_{C}}{T_{H}-T_{C}};\ x^{*}=\frac{x}{\mathrm{H}};\ \mathrm{y}^{*}=\frac{y}{\mathrm{H}} \qquad (۲۶)$$

که در آن Ra عدد رایلی، pr عدد پرانتل و θدمای بی‌بعد است. عدد ناسلت محلی در هر نقطه به صورت معادله (۲۷) تعریف می‌شود.

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{Local}}=\frac{\partial\theta}{\partial n} \qquad (۲۷)$$

که n نشان‌دهنده جهت عمود بر سطح مورد نظر است.

تعداد نقاط شبکه برای شبیه‌سازی مسأله حاضر، ۴۰۰ گره در راستای x در نظر گرفته شده است. تعداد نقاط شبکه در راستای y براساس مقدار اختیار شده برای پارامتر A تغییر می‌کند. برای اطمینان از استقلال نتایج از شبکه انتخاب شده، دما در مرکز خط تقارن عمودی محفظه به صورت تابعی از اندازه شبکه ثبت می‌شود و این کار تا جایی که تغییرات این پارامتر در برابر اندازه شبکه کوچک باشد، ادامه خواهد یافت. به عنوان نمونه، این فرایند برای محفظه‌ای با پارمتر A برابر ۰/۵ در عدد رایلی $۱۰^{۶}$ در شکل ۵ نمایش داده شده است. همچنین برای اطمینان از همگرایی حل عددی، برای هر هندسه و هر عدد رایلی، همین پارامتر، یعنی دما در مرکز خط تقارن عمودی محفظه، در برابر تعداد تکرار رسم خواهد شد و محاسبات تا رسیدن به یک عدد ثابت ادامه خواهد یافت. در مساله حاضر بزرگی سرعت در شبکه بولتزمن از مرتبه $(g\beta\Delta TM)^{0.5}$ است. که M تعداد نقاط شبکه می‌باشد.

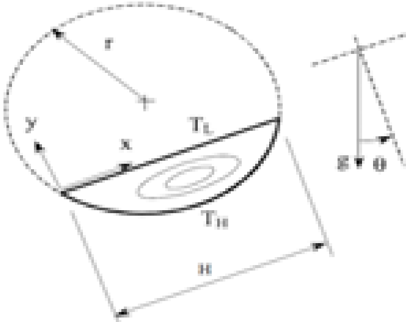


شکل ۵ مطالعه استقلال شبکه برای محفظه نیم‌بیضی با پارامتر A برابر ۰/۵ در عدد رایلی $۱۰^۶$

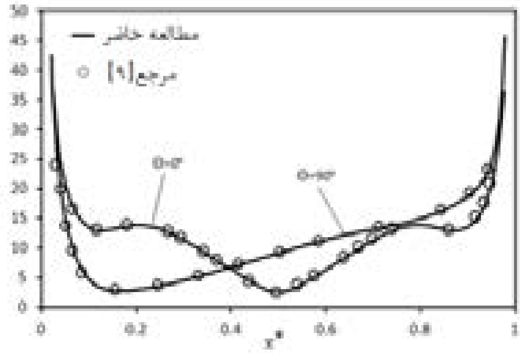
بنابراین پارامترهای ν و γ، به گونه‌ای انتخاب می‌شود که عدد ماخ تا حد امکان کوچک باشد، کوچک بودن عدد ماخ به معنای کم شدن خطای تراکم‌پذیری است. در این مطالعه عدد ماخ کمتر از ۰/۱در نظر گرفته شده که به این ترتیب زمان‌های آرامش نیز در محدوده مجاز قرار خواهند گرفت.

۵- نتایج

در این بخش ابتدا به مقایسه بین نتایج حاصل از این تحقیق و نتایج ارائه شده توسط چن و چنگ [۹] می‌پردازیم. هندسه مورد بررسی توسط آنها در شکل ۶ نشان داده شده است. همان گونه که از شکل ملاحظه می‌شود، چن و چنگ به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل کمانی از دایره پرداختند. ابعاد این کمان به گونه‌ای است که در آن $r/H=(1/3)^{0.5}$ خواهد بود. آنها از روش حجم محدود برای شبیه‌سازی مسأله استفاده نموده و علاوه بر آن به مقایسه نتایج خود با نتایج آزمایشگاهی پرداختند. هندسه مورد بررسی در این مقاله (شکل ۴) می‌تواند حالت تعمیم‌یافته شکل ۶ باشد. شکل ۷ نشان دهنده تغییرات عدد ناسلت مکانی بر روی دیوار صاف برای عدد گراشهف $۱۰^۶$ در دو زاویه θ برابر صفر و۹۰ درجه، حاصل از مطالعه حاضر و نتایج منتشر شده توسط چن و چنگ [۹] است. این شکل تطابق مناسب بین نتایج مطالعه حاضر و نتایج منتشر شده توسط چن و چنگ [۹] را نشان می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود هنگامی که زاویه برابر صفر درجه است، تغییرات ناسلت موضعی نسبت به خط تقارن عمودی گذرنده از مرکز محفظه، متقارن است که البته این نتیجه به دلیل تقارن هندسه و سایر شرایط نسبت به این خط دور از انتظار نبود. اما برای زاویه ۹۰° این تقارن وجود ندارد.



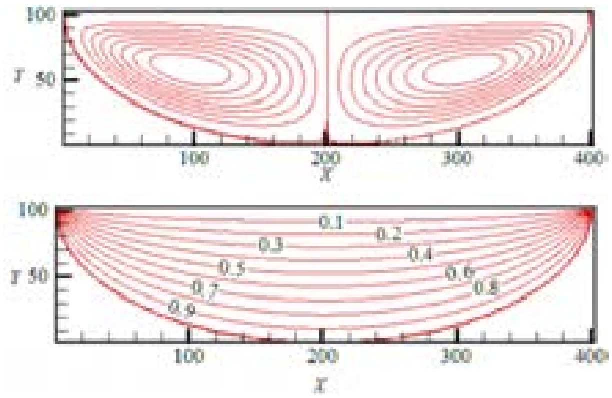
شکل ۶ هندسه مورد بررسی توسط چن و چنگ [۹] (با ویرایش از مرجع [۹])



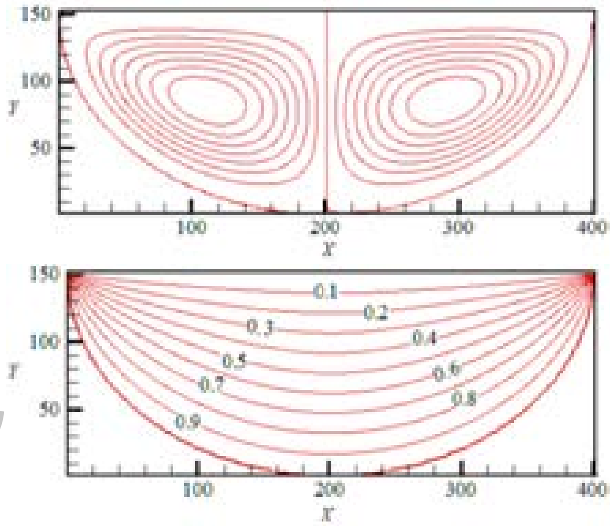
شکل ۷ مقایسه تغییرات ناسلت موضعی حاصل از مطالعه حاضر و نتایج ارائه شده توسط چن و چنگ [۹] در عددگراشهف $۱۰^۶$

لایه مرزی حرارتی که در مجاورت دیوار صاف شکل می‌گیرد موجب افزایش ناسلت موضعی در فاصله x بین ۰/۲ تا ۰/۹ خواهد شد. ضمنا در حالت θ=0 فیزیک مسأله مشابه سیستم‌های گرمایش از کف بوده و در قسمت‌های بعدی مقاله، سلول‌های چرخشی مشابه سلول‌های بنارد به نمایش گذاشته می‌شوند. اکنون پس از اطمینان از توانایی روش بولتزمن شبکه‌ای در شبیه‌سازی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ی با مرز منحنی، می‌توان با اطمینان به شبیه‌سازی مسأله مطرح شده در بخش ۴ پرداخت.

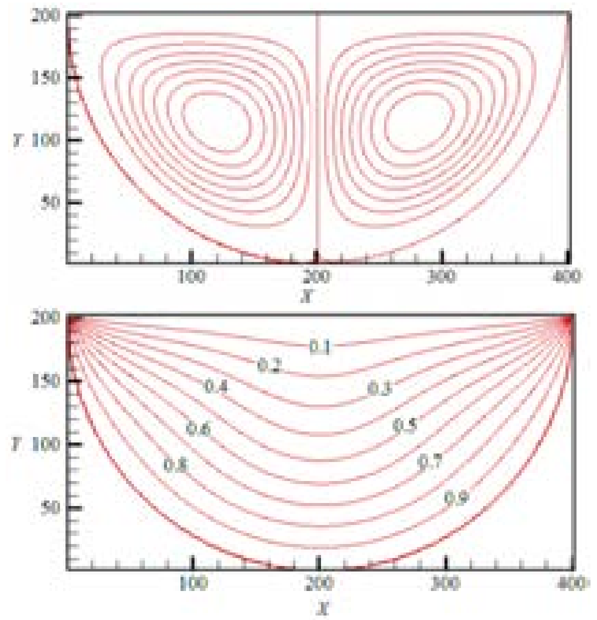
شکل ۸ نشان دهنده خطوط جریان و خطوط هم‌دما در عدد رایلی $۱۰^۴$ و در نسبت‌های مختلف ارتفاع به پهنای محفظه (A) است. در این عدد رایلی، در A برابر ۰/۲۵ و ۰/۳۷۵ خطوط هم‌دما به صورت یکنواخت و با فواصل تقریباً مساوی از هم- مشاهده می‌شوند. در واقع در این نسبت‌ها مکانیزم غالب انتقال حرارت، هدایت است. با افزایش پارامترA، نیروی شناوری افزایش یافته و کم‌کم بر نیروی ویسکوز غلبه می‌کند به طوری که در نسبت ۰/۵، خطوط هم‌دما دیگر یکنواخت نیست.



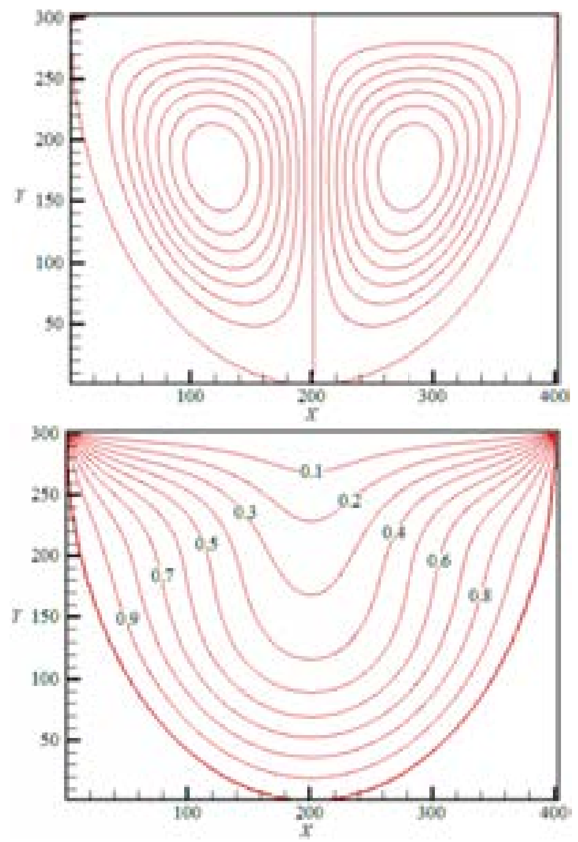
(الف)



(ب)



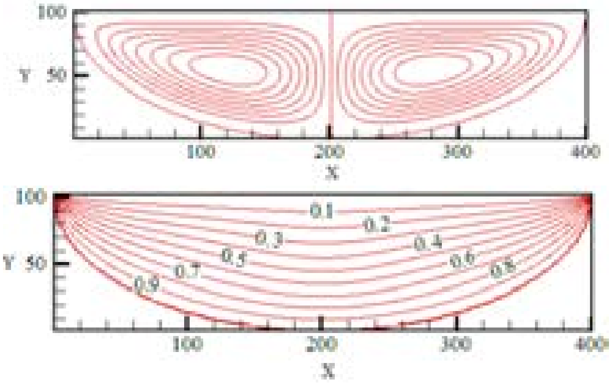
(ج)



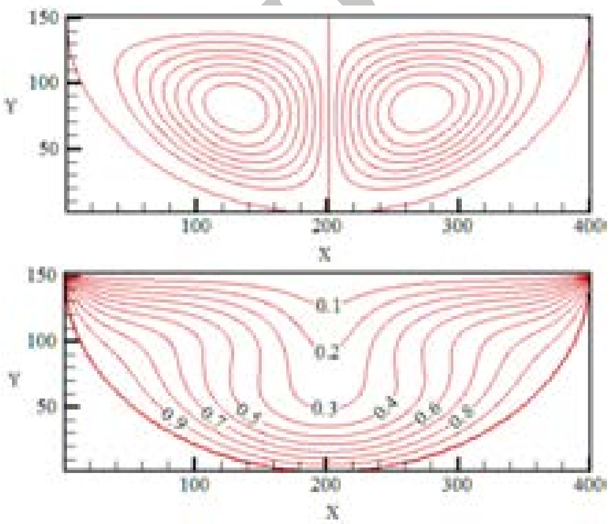
(د)

شکل ۸ خطوط جریان و خطوط هم‌دما در عدد رایلی $۱۰^۴$ و الف- A=۰/۲۵ ب- A=۰/۳۷۵ ج- A=۰/۵ د- A=۰/۷۵

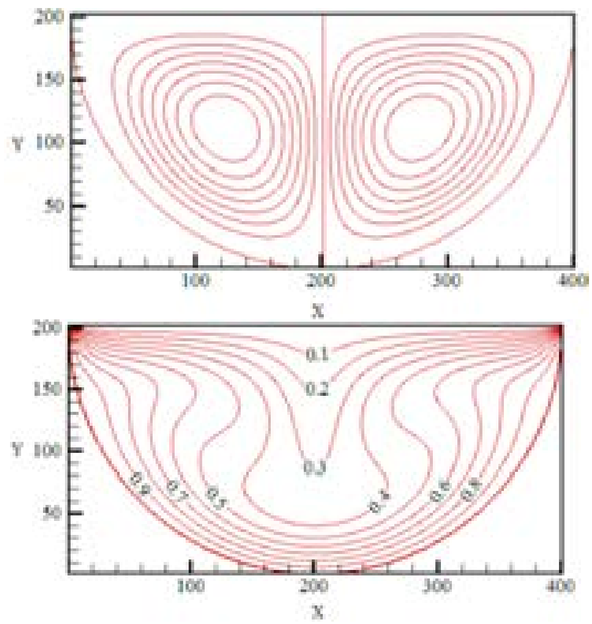
در پارامتر A برابر ۰/۷۵ نیروی شناوری کاملاً بر نیروی ویسکوز غلبه کرده و شیوه غالب انتقال حرارت، انتقال حرارت جابجایی است. همچنین خطوط جریان و خطوط هم‌دما در محفظه برای مقادیر مختلف A در اعداد رایلی $۱۰^۵$ و $۱۰^۶$ به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ نمایش داده شده است. با افزایش عدد رایلی از $۱۰^۴$ به $۱۰^۵$ در نسبت ۰/۲۵، همچنان شیوه غالب انتقال حرارت، شیوه هدایت است، اما در سه نسبت دیگر، انتقال حرارت به شیوه جابجایی، مکانیزم غالب انتقال حرارت بوده و خطوط هم‌دما در مرکز به سمت دیوار پایین و در بخش‌های انتهایی به سمت دیوار بالا فشرده می‌شوند. از مقایسه شیب دما در مجاورت دیوار افقی می‌توان نتیجه گرفت که در این عدد رایلی، انتقال حرارت در بخش مرکزی دیوار افقی در A برابر ۰/۲۵ بیشتر از سه نسبت دیگر و در ابتدا و انتهای این دیوار، با افزایش A شاهد افزایش عدد ناسلت خواهیم بود.



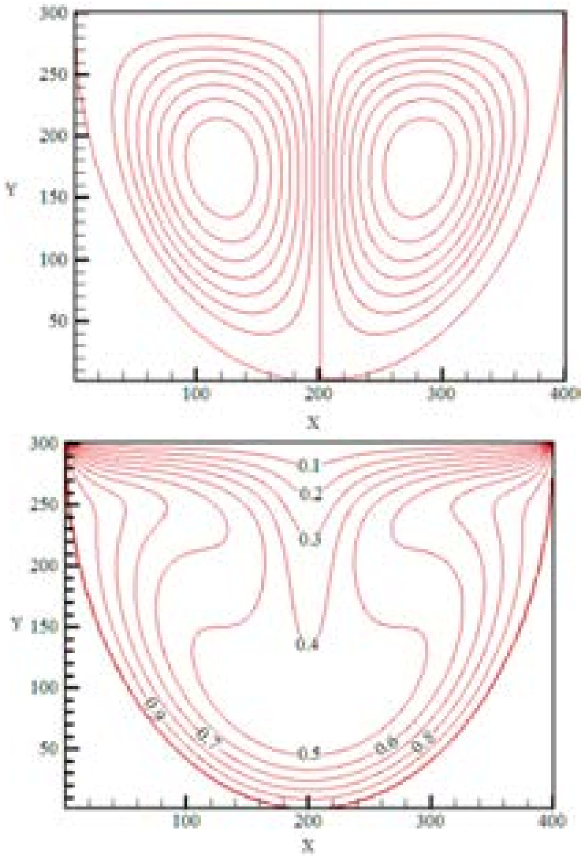
(الف)



(ب)



(ج)

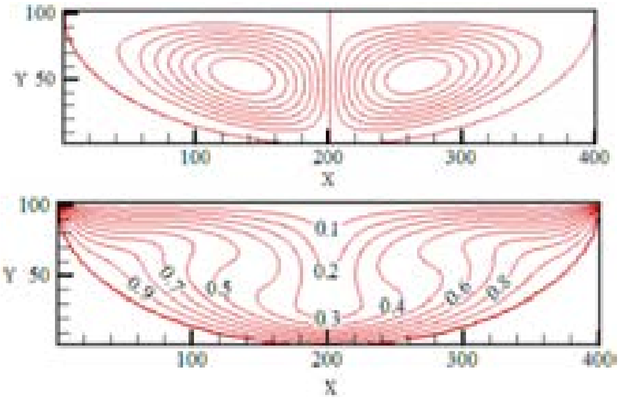


(د)

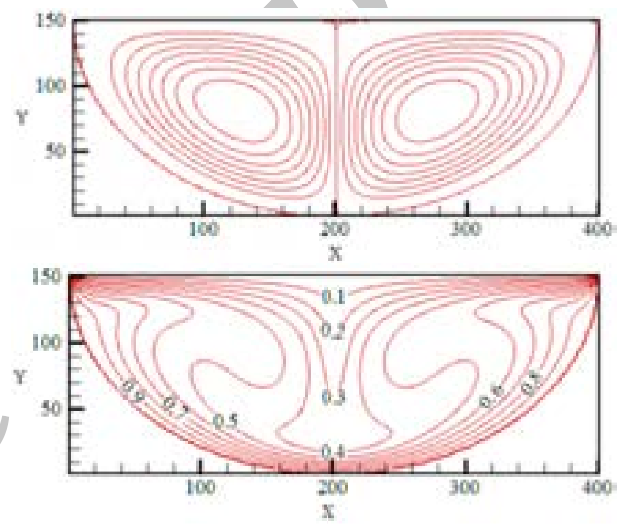
شکل ۹ خطوط جریان و خطوط هم‌دما در عدد رایلی 10^5و الف- A=۰/۲۵ ب- A=۰/۳۷۵ ج- A=۰/۵ د- A=۰/۷۵

با افزایش عدد رایلی به 10^6 در هر چهار نسبت، انتقال حرارت جابجایی، شیوه غالب انتقال حرارت خواهد بود و با توجه به شیب دما در مجاورت دیوار افقی، با افزایش پارامتر A، انتظار افزایش عدد ناسلت وجود دارد. همچنین، همان طور که از شکل‌ها می‌توان ملاحظه کرد، در تمام محفظه‌ها و در همه اعداد رایلی دو گردابه در محفظه ظاهر می‌شود. در واقع سیالی که در مجاورت دیوار صاف سرد با افزایش چگالی مواجه شده است، در وسط این دیوار به سمت پایین حرکت می‌کند و در مجاورت دیوار منحنی به دو بخش تقسیم شده و در راستای این دیوار گرم می‌شود و به سمت بالا حرکت می‌کند، بنابراین گردابه سمت راست پادساعتگرد و گردابه سمت چپ ساعتگرد خواهد بود.

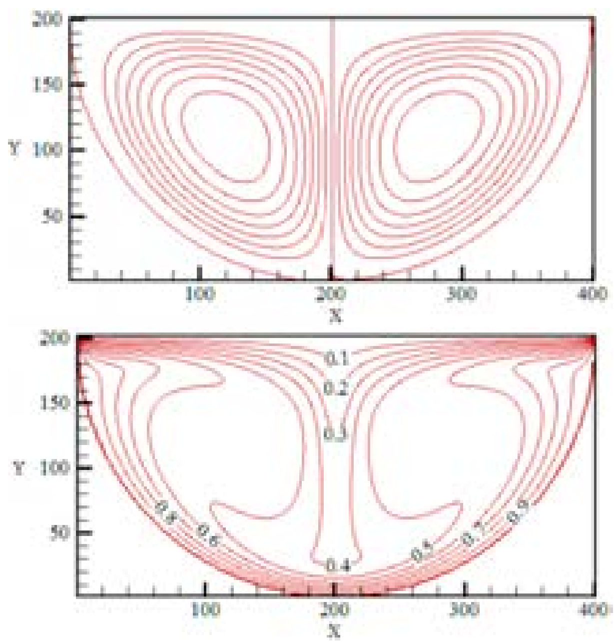
شکل ۱۱ تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار صاف را در اعداد رایلی و نسبت‌های مختلف نشان می‌دهد.



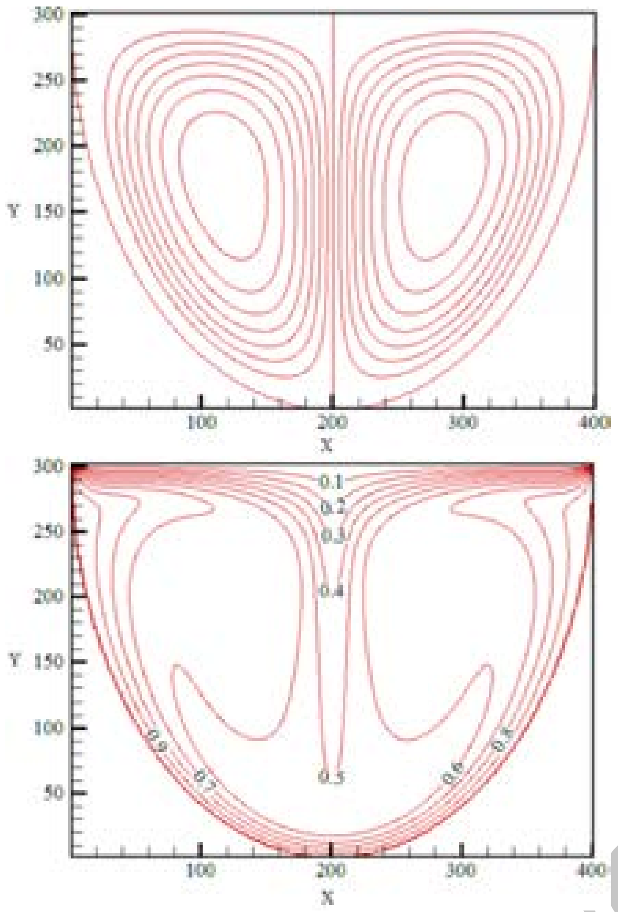
(الف)



(ب)



(ج)

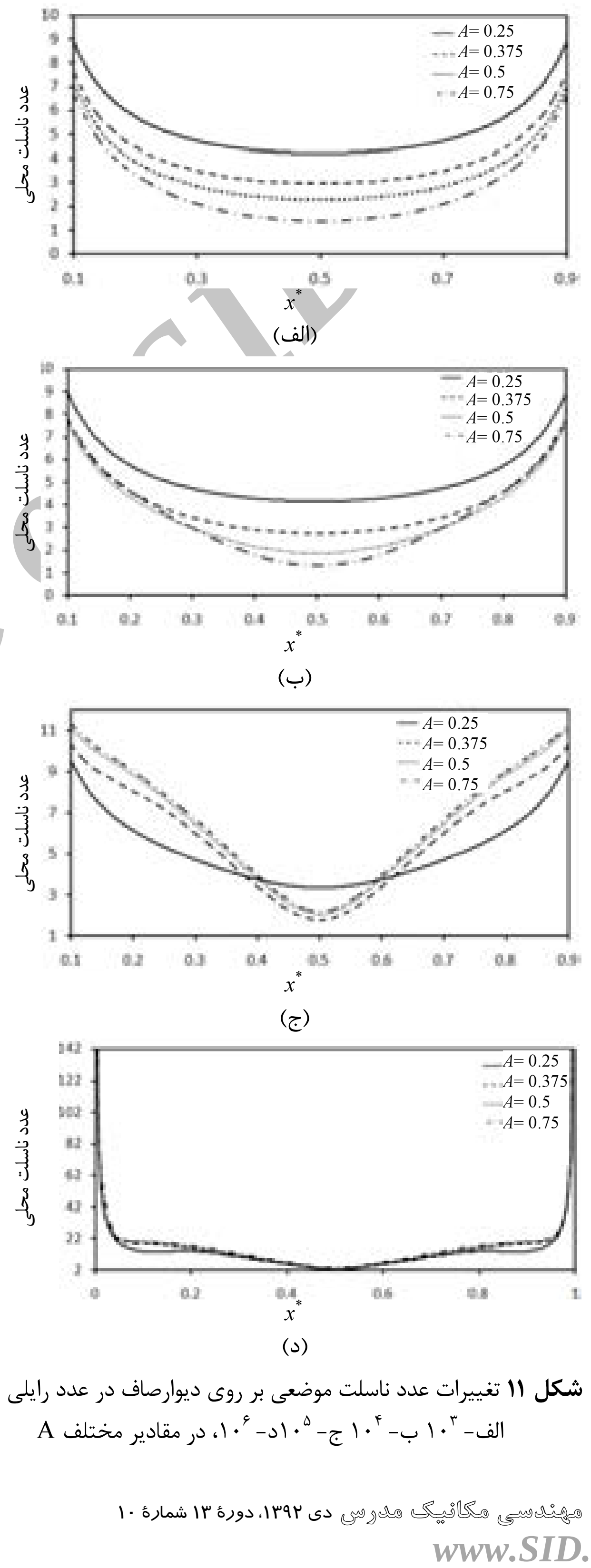


(د)

شکل ۱۰ خطوط جریان و خطوط هم‌دما در عدد رایلی $۱۰^۶$ و الف- A=۰/۲۵ ب- A=۰/۳۷۵ ج- A=۰/۵ د- A=۰/۷۵

به منظور وضوح بیشتر نتایج، در شکل‌های الف تا ج، محور افقی تنها فاصله بی‌بعد ۰/۱ تا ۰/۹ را شامل شده است. ملاحظه می‌شود افزایش عدد رایلی، افزایش ناسلت متوسط را به دنبال خواهد داشت که این نتیجه دور از انتظار نبود. در اعداد رایلی پایین ($Ra=۱۰^۳$) یعنی تا زمانی که انتقال حرارت غالب در محفظه به شیوه هدایت است، با کاهش نسبت ارتفاع به قاعده، ناسلت موضعی در هر نقطه افزایش خواهد یافت، چرا که با کاهش این نسبت، فاصله سطوح گرم و سرد در هر نقطه کاهش خواهد یافت. به تدریج با افزایش عدد رایلی، تغییر این روند مشاهده می‌شود. این تغییر روند به وضوح در شکل ۱۱ قابل مشاهده است. هنگامی که شیوه غالب انتقال حرارت در محفظه بسته به مکانیزم جابجایی تغییر می‌کند (مثلاً در اعداد رایلی بالا)، افزایش پارامتر A، منجر به افزایش عدد ناسلت بخصوص در گوشه‌های محفظه (دور از خط مرکزی) خواهد

شد. در چنین حالتی، در وسط دیواره افقی محفظه روند دیگری برای ناسلت مشاهده می‌شود (شکل ۱۱- ج) که می‌تواند به دلیل وجود دو سلول چرخشی متقارن (حول خط مرکزی) در محفظه باشد.



شکل ۱۱ تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوارصاف در عدد رایلی الف- $۱۰^۳$ ب- $۱۰^۴$ ج- $۱۰^۵$ د- $۱۰^۶$، در مقادیر مختلف A

نتایج عددی نشان می‌دهد که در اعداد رایلی بالا، تغییرات عمده عدد ناسلت محلی (با تغییرات پارامتر A) در نقاط دور از خط مرکزی محفظه (نقاط نزدیک به گوشه) اتفاق می‌افتد.

۶- نتیجه‌گیری

جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه بسته به صورت نیم بیضی با نسبت ارتفاع به پهنای ۰/۲۵، ۰/۳۷۵، ۰/۵ و ۰/۷۵ در اعداد رایلی مختلف و برای سیال عامل هوا به کمک روش بولتزمن شبکه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان دهنده الگوی جریان دو سلولی درون محفظه در تمام حالت‌ها است. در اعداد رایلی پایین، توزیع خطوط هم‌دما به صورت یکنواخت بوده که به دلیل شیوه غالب انتقال حرارت هدایتی در محفظه است. با افزایش عدد رایلی، مکانیزم غالب در محفظه به انتقال حرارت جابجایی تغییر کرده و خطوط هم‌دما از حالت یکنواختی خارج می‌شوند. هر اندازه که مقدار پارامتر A یعنی نسبت ارتفاع به پهنا کمتر باشد، تغییر مکانیزم انتقال حرارت (از هدایت به جابجائی) در اعداد رایلی بالاتری اتفاق خواهد افتاد. در اعداد رایلی پایین یعنی در حالت انتقال حرارت هدایتی غالب، افزایش پارامتر A کاهش نرخ انتقال حرارت را در پی خواهد داشت. اما در اعداد رایلی بالا، افزایش پارامتر A موجب افزایش نرخ انتقال حرارت خواهد شد. روش بولتزمن شبکه‌ای به خوبی قادر به شبیه‌سازی الگوی جریان و انتقال حرارت در محفظه با دیوارهای منحنی است. بنابراین می‌توان با اطمینان برای شبیه‌سازی هر نوع محفظه بسته به کار رود. مدل‌سازی هندسه‌های از این دست شامل محیط متخلخل توسط مؤلفان در حال بررسی است.

۵- فهرست علایم

A	نسبت ارتفاع به طول دیوار صاف، در محفظه
e_α	سرعت گسسته‌شده شبکه بولتزمن
f^{eq}	تابع توزیع تعادلی چگالی
f	تابع توزیع چگالی
g^{eq}	تابع توزیع تعادلی انرژی
g	تابع توزیع انرژی
H	اندازه قطر بزرگ در بیضی (m)
L	ارتفاع محفظه (نصف قطر کوچک در بیضی) (m)

Nu_{Local}	عدد ناسلت محلی
Pr	عدد پرانتل
Ra	عدد رایلی
T	دما (K)
T_h	دمای سطح گرم (K)
T_c	دمای سطح سرد (K)
u	سرعت سیال (ms^{-1})
β	ضریب انبساط گرمایی(K^{-1})
γ	ضریب نفوذپذیری شبکه بولتزمن
θ	دمای بی‌بعد
υ	لزجت سینماتیکی شبکه (m^2s^{-1})
ρ	چگالی (kgm^{-3})
τ_c	زمان آرامش حرارتی
τ_v	زمان آرامش هیدرودینامیکی
ω	فاکتور وزنی

۸- مراجع

[1] Refai A.G., Yovanovich M.M., “Influence of discrete heat source location on natural convection heat transfer in a vertical square enclosure”, *Journal of Electronic Packaging*, Vol. 113, No. 3, 1991, pp. 268-274.

[2] Basak T., Roy S., “Effect of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, 2003, pp. 4525-4535.

[3] Asan H., Namli L., “Laminar natural convection in a pitched roof of triangle cross-section: summer day boundary conditions”, *Energy and Buildings*, Vol. 33, 2000, pp. 69-73.

[4] Koca A., Oztop H.F., “Numerical analysis of natural convection in shed roofs with eave of buildings for cold climates”, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 56, 2008, pp. 3165-3174.

[5] Basak T., Roy S., “Finite element analysis of natural convection in a triangular enclosure: Effects of various thermal boundary conditions”, *Chemical Engineering Science*,Vol. 62, 2007, pp. 2623-2640.

[6] Kent E.F., “Numerical analysis of laminar natural convection in isosceles triangular enclosures for cold base and hot inclined walls”, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, 2009, pp. 497-508.

[7] Natarajan E., Basak T., “Natural convection flows in a trapezoidal enclosure with uniform and non-uniform heating of bottom wall”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, 2008, pp. 747-756.

[8] Basak T., Roy S., “Heat flow analysis for natural convection within trapezoidal enclosures based on heatline concept”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, 2009, pp. 2471-2483.

[9] Chen Ch.L., Cheng Ch.H., “Buoyancy- induced flow and convective heat transfer in an inclined arc-shape enclosure”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, 2002, pp. 823-830.

[10] Chen Ch.L., Cheng Ch.H., “Numerical prediction of natural convection with liquid fluids contained in an inclined arc-shaped enclosure”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, 2012, pp. 209-215.

[11] Ridouane E.H., Campo A., “Free convection performance of circular cavities having two active curved vertical sides and two inactive curved horizontal sides”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 26, 2006, pp. 2409-2416.

[12] Munir F.A., Sidik Ch.A.N., “Application of lattice Boltzmann method in predicting flow of shear driven cavities”, *Journal of Mechanical Engineering and Technology*, Vol. 3, No. 2, 2011, pp. 55-70.

[13] Zhang T., Shi B., “Lattice Boltzmann simulation of lid-driven flow in trapezoidal cavities”, *Computers & Fluids*, Vol. 39, 2010, pp. 1977-1989.

[14] Filippova O., Hanel D., “Grid refinement for lattice-BGK models”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 47, 1998, pp. 219-228.

[15] Mei R., Luo L.Sh., “An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, 2000, pp. 307-330.

[16] Mei R., Yu D., “Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry”, *Physical Review E*, Vol. 65, 2002, pp. 1/041203–14/041203.

[17] Mei R., Shyy W., “Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved boundary”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 161, 2002, pp. 680-699.

[18] Yan Y.Y., Zu Y.Q., “Numerical simulation of heat transfer and fluid flow past a rotating isothermal cylinder-A LBM approach”, , *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, 2008, pp. 2519-2536.

[19] McNamara G., Zanetti G., “Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata”, *Physical review letters*, Vol. 61, 1988, pp. 2332-2335.

[20] Alexander F.J., Chen S., "Lattice Boltzmann thermo hydrodynamics", *Physical Review E*, Vol. 47, 1993, pp. 2249-2252.

[21] Teixeira C., Chen H., "Multi-speed thermal lattice Boltzmann method stabilization via equilibrium under-relaxation",, *Computer Physics Communications*, Vol. 129, 2000, pp. 207-226.

[22] Guo Z., Shi B., "A coupled lattice BGK model for the Boussinesq equation", *International Journal for Numerical Methods in Fluids* ,Vol. 39, 2002, pp. 325-342.

[23] Barrios G., Rechtman R., "The lattice Boltzmann equation for natural convection in a two-dimensional cavity with a partially heated wall", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 522, 2005, pp. 91-100.

[24] Yu D., Mei R., "Flow computations with the method of lattice Boltzmann equation", *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 39, 2003, pp. 329-367.

[25] Barania H., Soleimani S., "Lattice Boltzmann simulation of natural convection around a horizontal elliptic cylinder a square enclosure", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, No. 2, 2011, pp. 1436-1442.