



بررسی عددی پارامترهای شکست در مسأله تماس لغزشی پانچ صلب تخت و جسم نیمه بی نهایت هدفمند در حضور ترک سطحی

علی طالع زاده لاری^۱، مجتبی صدیقی^{۲*}

۱- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۲- دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

* تهران، صندوق پستی ۴۴۱۳-۱۵۸۷۵، mojtaba@aut.ac.ir

چکیده- تغییرات تدریجی خواص مواد هدفمند باعث شده تمرکز تنش، جوانه زنی، رشد ترک و جدایش لایه ها کاهش یابد. بیشتر کاربردهای مواد هدفمند شامل بارگذاری تماسی می باشد. در اثر این بارگذاری ترک های سطحی در قطعه بوجود آمده و سپس رشد می کنند. در نتیجه رشد ترک های سطحی از عمده مکانیزم های خرابی ساختارهای تشکیل شده از مواد هدفمند می باشد. در این مقاله تماس لغزشی دوبعدی یک پانچ صلب تخت بر روی یک زمینه همگن الاستیک با پوشش هدفمند الاستیک در حضور ترک سطحی بررسی شده است. مدول الاستیسیته در لایه هدفمند طبق مدل تی-تی-او محاسبه شده است. این مدل با تعریف پارامتر q ، تاثیر برهم کنش های ریزساختارها را نیز در نظر می گیرد. برای حل معادلات حاکم از کدنویسی روش تفاضلات محدود در نرم افزار متلب استفاده شده است. اثر ناهمگنی، q ، ابعاد پانچ، ضخامت لایه هدفمند و ضریب اصطکاک بر ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است.

کلیدواژگان: تماس پانچ صلب تخت، ترک، ضرایب شدت تنش، مواد هدفمند، تفاضلات محدود.

Numerical analysis of the fracture parameters in the sliding contact problem between a rigid flat punch and a FG semi-infinite medium in the presence of a surface crack

A. Talezadeh Lari¹, M. Sadighi^{2*}

1- MSc Graduate, Mech. Eng., Tehran Univ., Tehran, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Amir Kabir Univ., Tehran, Iran

* P.O.B. 15875-4413 Tehran, Iran. mojtaba@aut.ac.ir

Abstract- Gradual changes of mechanical properties in FGMs decrease stress concentration, crack initiation and propagation and delamination. Many of the present and potential applications of FGM contain contact loading. This kind of loading causes surface crack initiation which is followed by subcritical crack propagation. Thus, propagation of surface cracks is one of the most important failure mechanisms in FG structures. In this article two dimensional sliding contact of a rigid flat punch on an elastic homogeneous substrate with an elastic FGM coating is studied. The modulus of elasticity in the graded layer is calculated based on TTO model approximation. This model defines a parameter q which considers the micro structural interactions. The governing equations are solved by Finite Difference method by means of MATLAB software. The influence of different parameters such nonhomogeneity, q , the dimensions of the punch, the thickness of the graded layer and the coefficient of friction on the mode I and II stress intensity factors are investigated.

Keywords: Contact, Rigid Flat Punch, Stress Intensity Factors, Functionally Graded Material (FGM), Finite Difference.

۱- مقدمه

مواد هدفمند، مواد مرکبی هستند که در مقیاس ماکروسکوپی غیرهمگن بوده و در آنها خصوصیات حرارتی و مکانیکی به صورت محسوس از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌یابد. این امر با تغییر ترکیب ماده هدفمند صورت می‌گیرد که خود ناشی از تغییر پیوسته در کسر حجمی فازهای تشکیل دهنده ساختار می‌باشد. این مواد عموماً از ترکیب یک سرامیک (با قابلیت‌های خاص در دماهای بالا) و یک فلز (با خواص مکانیکی مطلوب مانند استحکام و چقرمگی بالا) ساخته می‌شوند. مواد هدفمند در دماهای بالا نیز خواص ساختاری خود را حفظ می‌نمایند. علت آن است که مواد سرامیکی موجود در ساختار این مواد، مقاومت حرارتی بالایی را ایجاد می‌کنند. از طرف دیگر مواد نرم موجود در ساختار این مواد از شکست ترد تحت تنش‌های حرارتی بالا جلوگیری می‌کنند. بنابراین در یک ماده هدفمند می‌توان مقاومت حرارتی بالا و خواص ضد اکسید شدن سرامیک‌ها را در کنار استحکام و چقرمگی بالای فلزات بدست آورد.

یکی از مزایای مواد هدفمند، از بین رفتن ناپیوستگی خواص درون ساختار است. این امر باعث شده تمرکز تنش، جوانه‌زنی، رشد ترک و جدایش لایه‌ها کاهش یابد. با این وجود، رشد ترک‌های سطحی همچنان از جمله مکانیزم‌های خرابی ساختارهای تشکیل شده از مواد هدفمند می‌باشد [۱]. در دو دهه اخیر تحقیقات گسترده‌ای در زمینه مکانیک شکست مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی صورت گرفته است. هدف اصلی تحقیقات صورت گرفته در این زمینه، بررسی اثر ناهمگنی و اثر چگونگی تغییرات خواص در ساختار بر روی پارامترهای شکست می‌باشد؛ به گونه‌ای که پارامتر متغیر در همگی این تحقیقات، تغییر خواص می‌باشد. اردوگان توزیع تنش در اطراف نوک یک ترک را که در یک ساختار هدفمند قرار گرفته محاسبه نموده است. تحقیق وی از اولین پژوهش‌های صورت گرفته در مورد مکانیک شکست در مواد هدفمند است [۲]. جین و باترا، در مقاله‌ای به مرور مفاهیم مکانیک شکست در مواد هدفمند پرداخته‌اند [۳]. از دیگر تحقیقات صورت گرفته در این زمینه می‌توان به کارهای اردوگان و وو [۴، ۵]، چوی [۶]، والترز و همکارانش [۷]، داگ [۸] و همکارانش [۹، ۱۰] اشاره کرد.

یکی از انواع بارگذاری‌هایی که در مواد هدفمند مورد توجه

قرار گرفته است رفتار این مواد در برابر بارهای تماسی است. مسأله تماس اولین بار توسط هرتز برای دو لنز شیشه‌ای مطرح شد [۱۱]. پس از هرتز پژوهشگران زیادی به بررسی رفتار تماسی مواد مختلف پرداختند. در دو دهه اخیر نیز مقالات فراوانی در زمینه تماس مواد هدفمند منتشر شده است. از جمله می‌توان به کارهای جیاناکوپولوسو پالوت [۱۲]، آیزیکوویچ و همکارانش [۱۳]، که و وانگ [۱۴، ۱۵]، گولر و اردوگان [۱۶] و داگ و همکارانش [۱۷] اشاره کرد.

در زمینه بررسی همزمان مسأله تماس و ترک نیز در دهه اخیر کارهایی انجام شده است. داگ در رساله دکترای خود، به بررسی مسأله تماس و ترک در یک نیم‌صفحه ساخته شده از مواد هدفمند پرداخته است [۱۸]. چوی نیز مسأله تماس و ترک را مورد مطالعه قرار داده است. وی سیستم را به صورت یک پوشش و زمینه همگن و یک زیر لایه مدرج بین این دو و یا یک پوشش مدرج بر روی یک زمینه هدفمند در نظر گرفته است [۱۹]. داگ و همکارانش مسأله تماس پانچ صلب و یک لایه با ساختار هدفمند که بر روی یک زمینه نیمه بی‌نهایت همگن قرار دارد را در حضور ترک سطحی حل کرده‌اند. ایشان در این تحقیق توزیع خواص را به صورت نمایی در نظر گرفته و تاثیر ضریب اصطکاک و ضریب ناهمگنی را بر تنش‌های ناشی از تماس و ضرایب شدت تنش در موده‌های اول و دوم بررسی کرده‌اند [۲۰].

در اکثر کارهای تحلیلی ذکر شده، تغییر خواص به صورت نمایی در نظر گرفته شده است. این امر سبب می‌شود معادلات حاکم نهایتاً به یک معادله دیفرانسیل با ضریب ثابت تبدیل شوند که امکان ارائه حل تحلیلی برای آنها وجود دارد. اما این توابع فقط حالت خاصی از توزیع تغییرات را نشان می‌دهند و همچنین اثر برهم‌کنش ریزساختارهای جسم را نیز در نظر نمی‌گیرند. در نظر گرفتن تغییر خواص مطابق قانون مخلوطها و یا مدل تی-تی-او^۱ امکان حل مسأله در حالت کلی‌تر را ایجاد می‌کند؛ اما تعریف خواص مواد به این صورت، معادلات را پیچیده‌تر کرده و ارائه حل‌های تحلیلی را بسیار سخت و بعضاً غیرممکن می‌سازد. برای حل چنین مسائلی ناچار باید از روش‌های عددی استفاده کرد. روش‌های المان محدود یکی از معروف‌ترین روش‌ها برای حل این گونه مسائل است. در دهه

(۲) این روش برای مواد غیرایزوتروپ به راحتی قابل استفاده است و نیازی به دانستن روابط پیچیده الاستیسیته در نوک ترک ندارد.

(۳) این روش برای مودهای ترکیبی شکست نیز مناسب است. در راستای تحقیقاتی که پیش از این توسط سایر محققان در زمینه بررسی همزمان ترک و تماس در مواد هدفمند انجام شده است، در مقاله حاضر مسأله تماس لغزشی دوبعدی یک پانچ تخت صلب بر روی یک زمینه همگن با یک پوشش هدفمند در حضور ترک سطحی بررسی شده است. مسأله به صورت کرنش صفحه‌ای، و خواص زمینه و لایه هدفمند به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. با توجه به توضیحاتی که در زمینه نحوه تغییرات خواص مواد داده شد؛ ضریب پواسون ثابت فرض شده و تغییرات مدول الاستیسیته در راستای عمق جسم و در کلی‌ترین حالت و طبق مدل تی-تی-او در نظر گرفته شده است. این مدل که برای اولین بار توسط تامورا، توموتا و اوزاوا مطرح شد، با تعریف پارامتر q تاثیر برهم-کنش‌های ریزساختارها را نیز در نظر می‌گیرد [۲۹]. دقت این مدل در محدوده الاستیک به خصوص در مواد هدفمند سرامیک-فلزی توسط نیکبخت و همکارانش نشان داده شده است [۳۰]. برای حل، از کدنویسی روش تفاضلات محدود در نرم‌افزار متلب^۶ استفاده شده است و با به کار بردن تکنیک نگاشت مش‌بندی مناسب در ناحیه تماس و نیز ناحیه نوک ترک ایجاد شده است.

در ادامه ابتدا خواص مواد تشریح شده است. سپس هندسه حاکم بر مسأله و معادلات در حالت کلی شرح داده شده و نحوه استفاده از تکنیک نگاشت و اعمال روش تفاضلات محدود برای مدل کردن مسأله تماس آورده شده است. همچنین برای نشان دادن دقت و صحت این روش در مسأله تماس، مسأله‌ای خاص حل شده و جواب‌ها با جواب‌های تحلیلی موجود مقایسه شده است. برای محاسبه ضرایب شدت تنش، از روش نیرو استفاده شده است. در این روش، ابتدا در حضور ترک مسأله تماس حل شده است و توزیع تنش در جسم بدست می‌آید، سپس با داشتن این توزیع تنش در نوک ترک ضرایب شدت تنش محاسبه شده است. در این مرحله نیز با حل یک مسأله خاص و مقایسه نتایج آن با نتایج ارائه شده توسط داگ، روش محاسبه ضرایب شدت تنش صحت‌سنجی شده است در پایان اثر تغییر

اخیر روش المان مرزی^۱ نیز برای حل این گونه مسائل به کار گرفته شده است در این میان روش تفاضلات محدود چندان مورد توجه قرار نگرفته است. علت اصلی این مطلب این است که با استفاده از این روش نمی‌توان شکل‌های نامنظم را مش‌بندی کرد [۲۱]. اما می‌توان با استفاده از تکنیک نگاشت، مش‌بندی مناسبی ایجاد کرد به گونه‌ای که در اطراف ناحیه تماس و ترک مش‌بندی ریز باشد و با دور شدن از این ناحیه المان‌ها درشت‌تر شوند (مش درجه‌ای^۲). این تکنیک در کارهای آلتوس و همکارانش و نیز تحقیقات دوروگوی و بانکس سیلس به کار گرفته شده است [۲۲-۲۴].

روش‌های عددی محاسبه پارامترهای شکست به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

(۱) روش‌هایی که بر اساس میزان انرژی آزاد شده در اثر گسترش ترک عمل می‌کنند، مانند روش انتگرال J و تکنیک بسته شدن مجازی ترک^۳.

(۲) روش‌هایی که اساس آنها بر برون‌یابی در اطراف نوک ترک است.

روش‌هایی که بر پایه انرژی بنا نهاده شده‌اند دقت بالایی دارند و نیاز به مش‌بندی ریز نیز ندارند و حتی با مش درشت نیز دقت این روش‌ها مناسب است اما در این روش‌ها جدا کردن مودهای اول و دوم بسیار سخت و بعضاً غیرممکن است [۲۵]. همین عامل باعث شده است، روش‌های دسته دوم با وجود محدودیت‌هایی که دارند، مورد توجه قرار گیرند. یکی از روش‌هایی که بر اساس برون‌یابی بنا نهاده شده است، روش نیرو^۴ است. این روش نخستین بار توسط راجو و نیومن در سال ۱۹۷۷ مطرح شد [۲۶]. اسمیت و راجو در مقاله خود بار دیگر به این روش اشاره کردند [۲۷]. دومورایس نشان داد که این روش در تعیین ضرایب شدت تنش برای ترک مرکزی در ورق ایزوتروپ و تیر ارتوتروپ از دقت خوبی برخوردار است. وی سه مزیت مهم برای این روش بیان کرد [۲۸]:

(۱) این روش نیازی به المان‌های منفرد خاص^۵ در نوک ترک ندارد و جواب المان‌های معمول نیز از دقت خوبی برخوردار خواهند بود.

1. Boundary Element (BE)
2. Graded mesh
3. Virtual Crack Closure Technique (VCCT)
4. Force Method
5. Special singular quadratic element

6. MATLAB

۳- هندسه و معادلات حاکم و شرایط مرزی

در مقاله حاضر مسأله تماس لغزشی دوبعدی پانچ تخت صلب با یک جسم نیمه بی‌نهایت بررسی شده است. شکل ۱ هندسه مسأله و نحوه بارگذاری را در کلی‌ترین حالت نشان می‌دهد. جسم به صورت سه لایه در نظر گرفته شده است به گونه‌ای که یک لایه همگن سرامیکی در تماس با پانچ قرار دارد، و لایه‌ای از جنس مواد هدفمند این لایه را به زمینه همگن فلزی متصل می‌سازد. اصطکاک به صورت کولمب لحاظ شده است.

در حالت دو بعدی روابط کرنش-جابجایی، تنش-کرنش و تعادل تنش‌ها به ترتیب از روابط (۵) تا (۷) بدست می‌آید:

$$\varepsilon_{jx} = \frac{\partial u_j}{\partial x} \quad (۵-الف)$$

$$\varepsilon_{jy} = \frac{\partial v_j}{\partial y} \quad (۵-ب)$$

$$2\varepsilon_{jxy} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \quad (۵-ج)$$

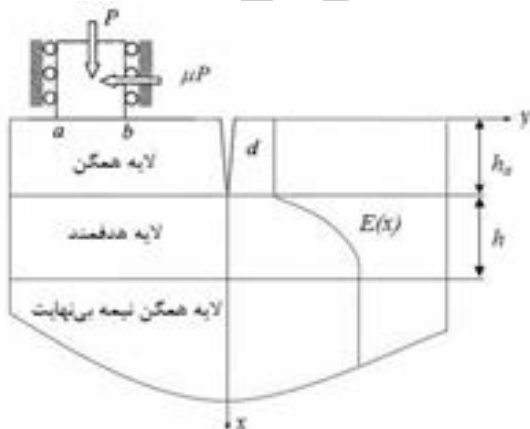
$$\sigma_{jxx} = \frac{G_j}{\kappa - 1} [(1 + \kappa)\varepsilon_{jx} + (3 - \kappa)\varepsilon_{jy}] \quad (۶-الف)$$

$$\sigma_{jyy} = \frac{G_j}{\kappa - 1} [(1 + \kappa)\varepsilon_{jy} + (3 - \kappa)\varepsilon_{jx}] \quad (۶-ب)$$

$$\tau_{jxy} = G_j (2\varepsilon_{jxy}) \quad (۶-ج)$$

$$\frac{\partial \sigma_{jxx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{jxy}}{\partial y} = 0 \quad (۷-الف)$$

$$\frac{\partial \tau_{jxy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jyy}}{\partial y} = 0 \quad (۷-ب)$$



شکل ۱ هندسه و بارگذاری مسأله

ضریب اصطکاک و نیز پارامترهای r (توان ناهمگنی)، q ، ابعاد پانچ و ضخامت لایه هدفمند برضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است.

۲- خواص مواد

در مقاله حاضر خواص مواد به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون ثابت فرض شده و تغییرات مدول الاستیسیته در راستای عمق جسم و طبق مدل تی-تی-او در نظر گرفته شده است. این مدل تنش تک محوری، σ ، و کرنش تک محوری، ε ، را در یک ماده کامپوزیت دو فاز از لحاظ بر حسب تنش و کرنش میانگین در هر کدام از فازها به صورت رابطه (۱) بیان می‌نماید [۲۹]:

$$\sigma = \sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2 \quad (۱-الف)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2 \quad (۱-ب)$$

که در آن σ_i و ε_i مشخص‌کننده تنش‌ها و کرنش‌ها در هر کدام از فازها و V_i ($i=1,2$) کسر حجمی فازها می‌باشد. $i=1$ برای فاز سرامیکی و $i=2$ برای فاز فلزی انتخاب شده است. در این مقاله تغییرات کسر حجمی به صورت توانی در نظر گرفته شده است.

$$V_2(z) = \left(\frac{1-z}{2} - \frac{z}{h} \right)^r, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (۲)$$

که r توان ناهمگنی و h ضخامت لایه هدفمند است. z نیز از وسط لایه هدفمند اندازه‌گیری می‌شود. مدل تی-تی-او پارامتر دیگری به نام q را نیز شامل می‌شود که در رابطه (۳) تعریف شده است:

$$q = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right|, \quad 0 \leq q < \infty \quad (۳)$$

مقدار این پارامتر با استفاده از داده‌های تجربی و بر اساس خواص فازهای تشکیل‌دهنده ساختار و برهم‌کنش آن‌ها در ماده کامپوزیت تعیین می‌شود. با فرض خطی بودن رابطه تنش-کرنش و با استفاده از این دو رابطه، در کاربردهای الاستیک، مدول الاستیسیته، برای ماده کامپوزیت دوفازی طبق رابطه (۴) بدست می‌آید [۲۹]:

$$E = \frac{\frac{V_2 E_2 (q + E_1)}{q + E_2} + (1 - V_2) E_1}{\frac{V_2 (q + E_1)}{q + E_2} + (1 - V_2)} \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_3(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} v_3(x, y) = 0 \quad (12)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u_j(x, y)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial v_j(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (13-الف)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial v_j(x, y)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial v_j(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (13-ب)$$

۴- اعمال روش تفاضلات محدود

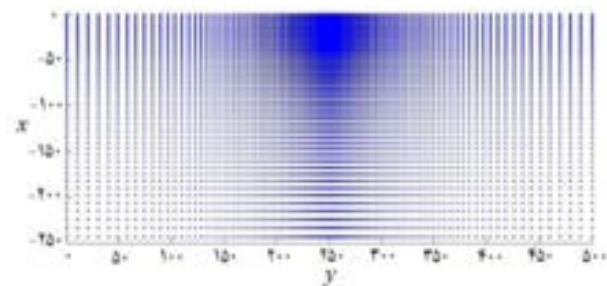
در روش تفاضلات محدود معمول اندازه‌های مان‌ها در جهت x و y ثابت است. در نتیجه برای ایجاد مش‌بندی ریز در ناحیه تماس یا ناحیه نوک ترک باید کل جسم را به صورت ریز مش زد؛ که این امر حجم محاسبات را به شدت بالا برده و عملاً روش تفاضلات محدود را به روشی نامناسب برای بررسی مسائل تماس تبدیل کرده است. برای رفع این مشکل از تکنیک نگاشت استفاده شده است. با استفاده از این تکنیک، ابتدا معادلات از فضای فیزیکی $x - y$ به فضای عددی $\xi - \eta$ برده شده‌اند، که در این فضا مقادیر ξ و η از ۱ تا ۲ تغییر می‌کنند، سپس معادلات در مختصات جدید حل شده و دوباره به مختصات $x - y$ بازگردانده شده‌اند [۲۳]. با استفاده از این تکنیک می‌توان هر نوع مش‌بندی دلخواه را ایجاد کرد.

شکل ۲ نمونه‌ای از مش‌بندی ایجاد شده توسط این تکنیک را نشان می‌دهد. برای تغییر مختصات ذکر شده از رابطه (۱۴) استفاده می‌شود:

$$x = \sum_{i=1}^M a_i \xi^i \quad (14-الف)$$

$$y = \sum_{j=1}^N b_j \eta^j \quad (14-ب)$$

در این رابطه مقادیر a_i و b_j مقادیر دلخواهی هستند که باید به گونه‌ای انتخاب شوند که نهایتاً مش‌بندی مناسب را ایجاد کنند.



شکل ۲ نمونه‌ای از مش‌بندی ایجاد شده

در این روابط، u_j و v_j مولفه‌های جابجایی در راستای x و y هستند و اندیس j که مقادیر ۱ تا ۳ را می‌تواند اختیار کند، به ترتیب نشان‌دهنده لایه سرامیکی، لایه هدفمند و زمینه فلزی است. G مدول برشی و تابعی از x است، همچنین κ برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای به ترتیب از رابطه (۸) بدست می‌آید.

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (8-الف)$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (8-ب)$$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) و (۷) می‌توان معادلات تعادل را بر حسب مولفه‌های تغییر مکان به صورت رابطه (۹) نوشت:

$$\frac{1}{G_j(\kappa - 1)} \frac{dG_j}{dx} \left[(1 + \kappa) \frac{\partial u_j}{\partial x} + (3 - \kappa) \frac{\partial v_j}{\partial y} \right] + \nabla^2 u_j + \frac{2}{\kappa - 1} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (9-الف)$$

$$\nabla^2 v_j + \frac{2}{\kappa - 1} \left[\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{G_j} \frac{dG_j}{dx} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) = 0 \quad (9-ب)$$

شرایط مرزی برای نقاطی که روی ترک قرار می‌گیرند در رابطه (۱۰) آورده شده است:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{1xy}(0, y) &= 0 \\ \sigma_{1yy}(0, y) &= 0 \end{aligned} \right\}, 0 < x < d \quad (10)$$

شرایط مرزی در سطح بالایی از دو قسمت تشکیل شده است. قسمتی که در تماس با پانچ قرار دارد و قسمتی که در تماس با پانچ نیست و اصطلاحاً سطح آزاد نامیده می‌شود. شرایط مرزی در این سطوح طبق رابطه (۱۱) بیان می‌شود:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{1xy}(0, y) &= \mu \sigma_{1xx}(0, y) \\ \sigma_{1xx}(0, y) &= g(y) \end{aligned} \right\}, a < y < b \quad (11-الف)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{1xy}(0, y) &= 0 \\ \sigma_{1xx}(0, y) &= 0 \end{aligned} \right\}, -\infty < y < a, b < y < \infty \quad (11-ب)$$

که $g(y)$ در رابطه فوق با پروفیل پانچ در ارتباط است. سایر شرایط مرزی (شرایط مرزی بی‌نهایت) نیز مطابق رابطه (۱۲) خواهد بود:

با تغییر متغیر فوق مشتقات نسبت به x, y ، بر حسب مشتقات بر حسب ξ و η نوشته می‌شود.

(۱۵-الف) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} = \frac{f_{,\xi}}{x_{,\xi}}$

(۱۵-ب) $\frac{\partial f}{\partial y} = f_{,y} = \frac{f_{,\eta}}{y_{,\eta}}$

(۱۵-ج) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{,xx} = a_{xx} f_{,\xi\xi} + c_{xx} f_{,\xi\xi}$

(۱۵-د) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{,yy} = b_{yy} f_{,\eta\eta} + d_{yy} f_{,\eta\eta}$

(۱۵-ه) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{,xy} = e_{xy} f_{,\xi\eta}$

که در این عبارات:

(۱۶-الف) $a_{xx} = \frac{-x_{,\xi\xi}}{x_{,\xi}^3}$

(۱۶-ب) $b_{yy} = \frac{-y_{,\eta\eta}}{y_{,\eta}^3}$

(۱۶-ج) $c_{xx} = \frac{1}{x_{,\xi}^2}$

(۱۶-د) $d_{yy} = \frac{1}{y_{,\eta}^2}$

(۱۶-ه) $e_{xy} = \frac{1}{x_{,\xi} y_{,\eta}}$

حال با استفاده از روابط (۱۵)، معادله (۹) بازنویسی شده و

به صورت (۱۷) نوشته می‌شود:

(۱۷-الف) $u_{,\xi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[a_{xx} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{x_{,\xi}} \right] + u_{,\xi\xi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c_{xx} + u_{,\eta} b_{yy} + u_{,\eta\eta} d_{yy} + v_{,\xi\eta} \frac{2}{\kappa-1} e_{xy} + v_{,\eta} \frac{3-\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{y_{,\eta}} = 0$

(۱۷-ب) $v_{,\xi} \left[a_{xx} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{x_{,\xi}} \right] + c_{xx} v_{,\xi\xi} + b_{yy} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} v_{,\eta} + d_{yy} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} v_{,\eta\eta} + u_{,\xi\eta} \frac{2}{\kappa-1} e_{xy} + u_{,\eta} \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{y_{,\eta}} = 0$

که این دو معادله برای هر کدام از نقاط جسم (به جز مرزها و

سطوح ترک) نوشته شده و نهایتاً یک دستگاه معادلات ایجاد می‌شود که برای حل آن از روش تفاضلات محدود استفاده شده است. به طریق مشابه معادلات مربوط به شرایط مرزی نیز از فضای $x - y$ به فضای $\xi - \eta$ برده شده است.

روش حل مسأله بر پایه جابجایی پانچ قرار داده شده است. بدین ترتیب که جابجایی پانچ به عنوان شرایط مرزی به لایه بالایی جسم اعمال می‌شود و سطحی که در تماس قرار دارد شکل پروفیل پانچ را می‌گیرد. پس از حل مسأله با انتگرال‌گیری از تنش عمودی در سطح پایینی جسم نیروی اعمالی مورد نیاز برای ایجاد این جابجایی بدست می‌آید.

برای نشان دادن دقت و صحت روش فوق، مسأله‌ای خاص حل شده و نتایج با نتایج تحلیلی ارائه شده توسط که و وانگ [۱۵] مقایسه شده است. برای این منظور جسم نیمه بی‌نهایت به صورت یک لایه از مواد هدفمند بر روی یک زمینه نیمه بی‌نهایت همگن مدل شده و تحت بارگذاری توسط یک پانچ تخت با پهنای $2a$ قرار گرفته است. ضریب اصطکاک و ضریب پواسون به ترتیب برابر $0/5$ و $0/3$ در نظر گرفته شده است و تغییرات مدول برشی در لایه هدفمند از رابطه (۱۸) پیروی می‌کند.

(۱۸) $G(x) = G^* e^{\frac{(h-x)\ln(k)}{h}}$

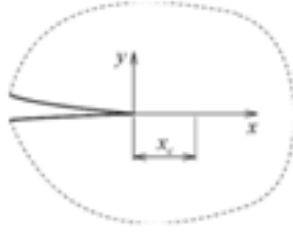
که k از رابطه (۱۹) تبعیت می‌کند.

(۱۹) $k = \frac{G_0}{G^*}$

که در این رابطه G_0 و G^* به ترتیب مدول برشی جسم نیمه بی‌نهایت همگن و مدول برشی در سطح بالایی لایه هدفمند است. نسبت a/h برابر $0/1$ در نظر گرفته شده و ابعاد کلی جسم 10 برابر پهنای پانچ فرض شده است. در این حالت اثرات پانچ در لبه‌های جسم ناچیز و فرض نیمه بی‌نهایت بودن صحیح است. در هر کدام از راستاهای x و y ، 100 گره استفاده شده و با استفاده از تکنیک ذکر شده، مش‌بندی به صورت مش درجه‌ای انجام شده است. نتایج توزیع تنش در شکل ۳ نشان داده شده است. تنش‌ها نسبت به پارامتر σ_0 بی‌بعد شده است (رابطه (۲۰)).

(۲۰) $\sigma_0 = \frac{P}{2a}$

که P نیروی پانچ است. ملاحظه می‌شود که نتایج حاصل از روش تفاضلات محدود تطابق قابل قبولی با نتایج تحلیلی



شکل ۴ محورهای انتخاب شده برای محاسبه ضرایب شدت تنش

$$K_I = F_y \sqrt{\frac{\pi}{2x_c}} \quad (23)$$

$$K_{II} = F_x \sqrt{\frac{\pi}{2x_c}} \quad (24)$$

با محاسبه F_x و F_y در فواصل x_c مختلف و میل دادن x_c به سمت صفر، مقادیر K_I و K_{II} در نوک ترک بدست می‌آید [۲۸].

برای اعتبارسنجی این روش، مسأله‌ای خاص حل شده است و نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده توسط داگ مقایسه شده است [۲۰]. در این مسأله پنچ صلب تخت در تماس با جسمی متشکل از یک لایه هدفمند بر روی زمینه نیمه بی‌نهایت همگن قرار دارد. خواص مواد در لایه هدفمند به صورت نمایی تغییر می‌کند و نسبت مدول الاستیسیته فلز به سرامیک برابر ۸ است. ضریب پواسون ثابت و برابر ۰/۲۵ فرض شده است. ابعاد جسم نیمه بی‌نهایت $70 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$ در نظر گرفته شده است. پهناى پنچ، ضخامت لایه هدفمند و عمق ترک مساوی و برابر ۳ میلی‌متر در نظر گرفته شده است ($d=h=b-a=3 \text{ mm}$). شکل ۵ نتایج بدست آمده را در مقایسه با نتایج داگ نشان می‌دهد. همان گونه که پیداست تطابق خوبی میان نتایج بدست آمده با نتایج داگ وجود دارد.

۶- نتایج و بحث

در این قسمت تماس لغزشی دوبعدی پنچ صلب تخت بر روی یک جسم نیمه بی‌نهایت، در حضور ترک سطحی حل شده و اثر پارامترهای مختلف بر ضرایب شدت تنش مودهای اول و دوم بررسی شده است. جسم نیمه بی‌نهایت مطابق شکل ۱ با ابعاد $70 \times 8 \text{ mm}$ در نظر گرفته شده است. عمق ترک سطحی و ضخامت لایه سرامیکی برابر ۳ میلی‌متر فرض شده است. فولاد و شیشه با مدول الاستیسیته ۱۸۰ گیگاپاسکال و

ارائه شده توسط که و وانگ دارد. هرچند اختلاف نتایج در لبه‌های پنچ بیشتر است. البته با توجه به وجود تمرکز تنش در این نقاط، نمی‌توان روی تنش‌های بدست آمده در این نقاط بحث کرد؛ چنانچه در کارهای انجام شده توسط سایر محققان نیز در مورد تنش در این نقاط بحثی نشده است.

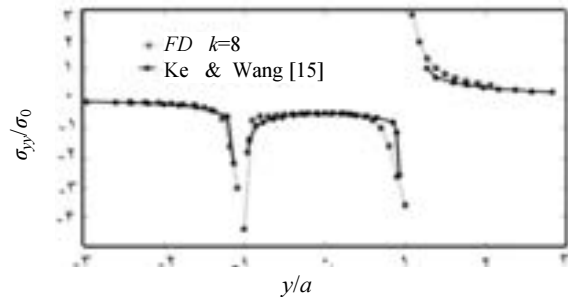
۵- محاسبه ضرایب شدت تنش

پس از حل دستگاه معادلات و اعمال شرایط مرزی، نهایتاً توزیع تنش در کل جسم بدست خواهد آمد. با استفاده از توزیع تنش در حوزه نوک ترک می‌توان ضرایب شدت تنش را محاسبه کرد. برای محاسبه ضرایب شدت تنش از روش نیرو استفاده شده است. اگر ترکی مطابق شکل ۴ در جسم وجود داشته باشد با صرف نظر کردن از ترم‌های بالاتر، تنش‌های σ_y و τ_{xy} به از رابطه (۲۱) و (۲۲) بدست می‌آیند [۲۸]:

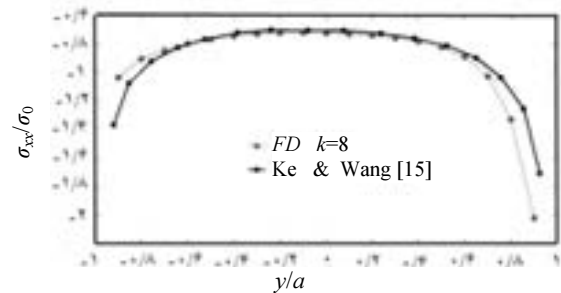
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (21)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}} \quad (22)$$

با انتگرال‌گیری از تنش‌ها در فاصله صفر تا x_c روابط (۲۳) و (۲۴) برای ضرایب شدت تنش بدست می‌آید.



الف- توزیع تنش در راستای y



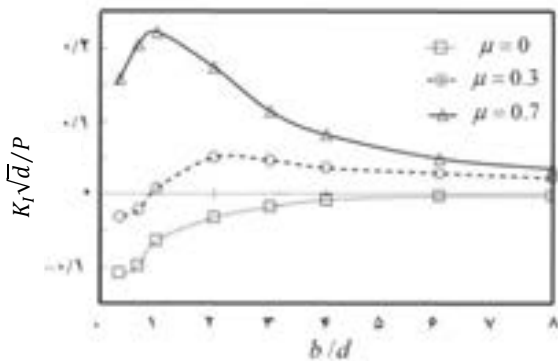
ب- توزیع تنش در راستای x

شکل ۳ توزیع تنش زیر پنچ تخت

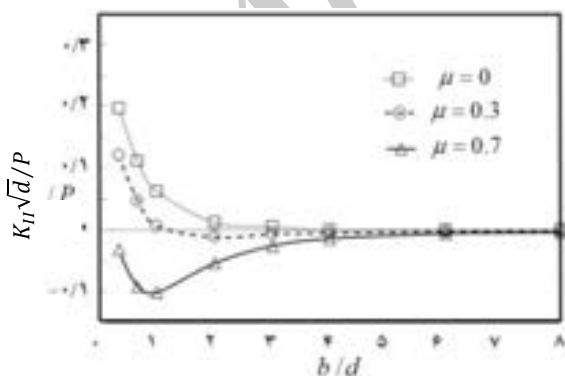
علاوه بر این با دور شدن پانچ از ترک ضرایب شدت تنش ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابند و نهایتاً به مقدار ثابتی همگرا می‌شوند. علت آن است که با دور شدن پانچ از ترک تنش‌های فشاری و کششی در نوک ترک کاهش می‌یابد؛ اما نرخ کاهش تنش‌های فشاری بیشتر است. با افزایش فاصله پانچ از ترک رفته رفته اثر پانچ بر روی ترک کاهش می‌یابد تا نهایتاً ضریب شدت تنش به یک مقدار همگرا شود. مقادیر ضریب شدت تنش مود دوم، در حالت بدون اصطکاک از یک مقدار مثبت شروع شده و با دور شدن پانچ از ترک کاهش می‌یابد تا در نهایت به صفر همگرا شود. در حضور اصطکاک رفتار کلی نمودار عوض می‌شود. در این حالت با افزایش ضریب اصطکاک، مقادیر ماکزیمم ضرایب شدت تنش کاهش می‌یابد؛ ضمن این که با دور شدن پانچ از ترک ضرایب شدت تنش ابتدا کاهش می‌یابند و به مقادیر منفی می‌رسند و سپس افزایش یافته و به صفر همگرا می‌شوند.

۷۰ گیگاپاسکال به ترتیب به عنوان فاز فلزی و سرامیکی انتخاب شده است. ضریب پواسون برای کل جسم ثابت و برابر ۰/۳ در نظر گرفته شده است.

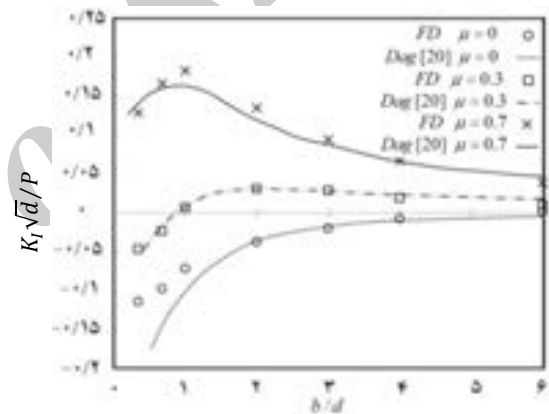
شکل ۶ اثر ضریب اصطکاک را بر تغییرات ضرایب شدت تنش نشان می‌دهد. با توجه به شکل پیداست که در حالت بدون اصطکاک ضریب شدت تنش مود اول همواره منفی است. این مسأله به معنای باز نشدن نوک ترک است و به علت وجود تنش‌های فشاری در زیر پانچ است. اما در حضور اصطکاک، در زیر پانچ تنش‌های کششی نیز ایجاد می‌شود، بنابراین ضریب شدت تنش مود اول می‌تواند مثبت باشد. در این حالت با افزایش ضریب اصطکاک، ضریب شدت تنش مود اول افزایش می‌یابد.



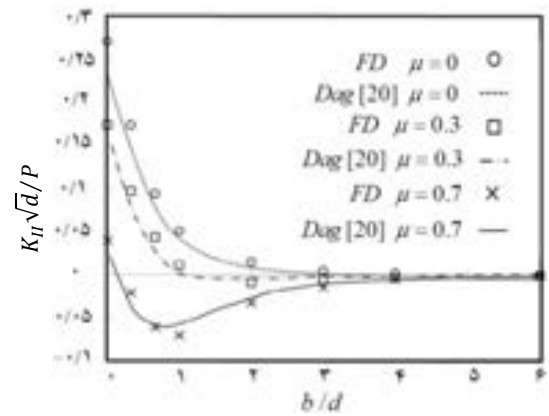
الف- مود اول



ب- مود دوم



الف- مود اول

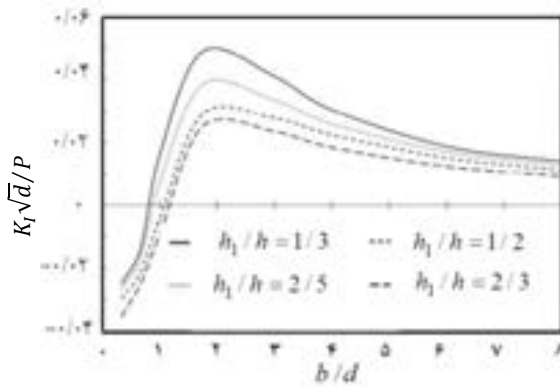


ب- مود دوم

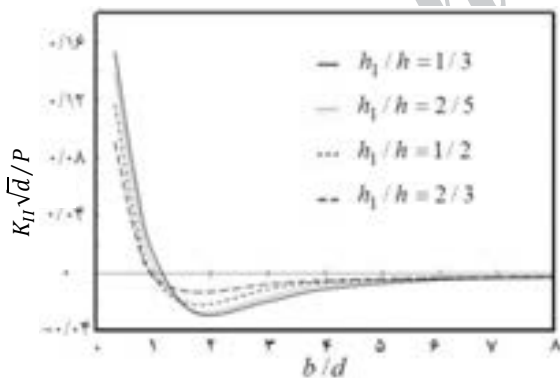
شکل ۶ ضرایب شدت تنش برای پانچ تختبر حسب مقادیر مختلف ضریب اصطکاک
($r=4$, $q=20$ GPa, $b-a=3$ mm, $d=3$ mm, $h=3$ mm)

شکل ۵ ضرایب شدت تنش جسم نیمه بی‌نهایت همگن با لایه‌ای از مواد هدفمند تحت بارگذاری تماسی پانچ صلب تخت

مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت این لایه در مقابل لایه همگن سرامیکی، ضمن حفظ رفتار کلی نمودارها، مقادیر ضریب شدت تنش مود اول افزایش می‌یابد. علت این است که از آنجا که مدول الاستیسیته لایه هدفمند بیشتر از لایه سرامیکی است؛ با افزایش ضخامت لایه هدفمند، مدول الاستیسیته معادل افزایش یافته و در نتیجه تنش‌ها و ضرایب شدت تنش افزایش می‌یابد. در مورد ضریب شدت تنش مود دوم، برای نسبت‌های $b/d < 2$ افزایش ضخامت لایه هدفمند باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش می‌شود اما برای نسبت‌های $b/d > 2$ افزایش ضخامت لایه هدفمند مقادیر ضریب شدت تنش را کاهش می‌دهد.



الف- مود اول



ب- مود دوم

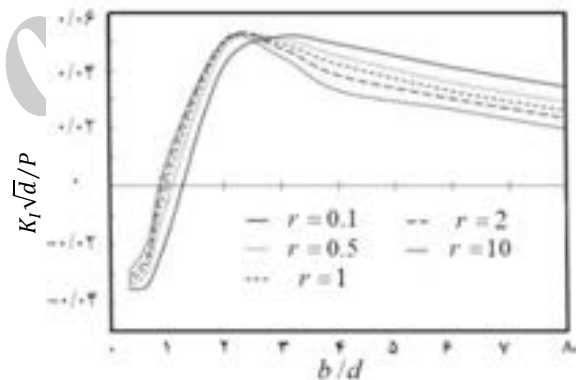
شکل ۸ ضرایب شدت تنش برای پانچ تخت بر حسب مقادیر مختلف ضخامت لایه هدفمند
($h_1=3\text{mm}$, $h_1/(b-a)=1$, $r=4$, $q=20\text{ GPa}$, $\mu=0.3$)

بررسی تغییرات ضرایب شدت تنش برای مقادیر مختلف ابعاد پانچ نشان می‌دهد که ماکزیمم مقدار ضریب شدت تنش

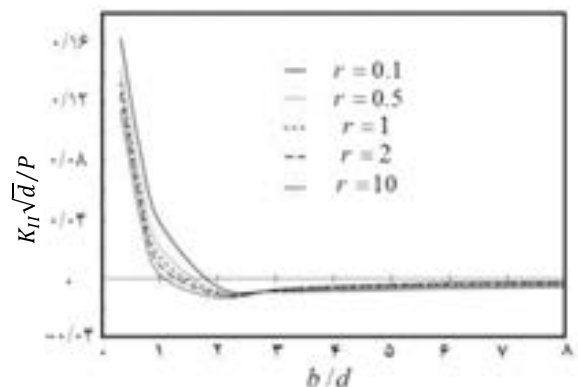
شکل ۷ ضرایب شدت تنش را برای مقادیر مختلف r و مقادیر ثابت q و μ ، بر حسب موقعیت پانچ نسبت به ترک نشان می‌دهد. همان گونه که مشخص است تغییرات r رفتار کلی نمودار و مقادیر ماکزیمم ضریب شدت تنش مود اول را تغییر نمی‌دهد. برای نسبت‌های $b/d < 2$ افزایش r باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش می‌شود اما برای نسبت‌های $b/d > 2$ افزایش r مقادیر ضریب شدت تنش را کاهش می‌دهد. از طرفی افزایش r باعث کاهش مقدار ضرایب شدت تنش مربوط به مود دوم شکست می‌گردد.

نتایج نشان داد که تاثیر تغییرات q بر نمودار ضرایب شدت تنش بسیار جزئی است. علت این امر را می‌توان تاثیر جزئی q بر توزیع خواص جسم دانست.

روند تغییرات ضرایب شدت تنش برای مقادیر مختلف ضخامت لایه هدفمند در شکل ۸ نشان داده شده است.



الف- مود اول



ب- مود دوم

شکل ۷ ضرایب شدت تنش برای پانچ تخت به ازای مقادیر مختلف r
($h_1=3\text{mm}$, $h_1/(b-a)=h_1/h=1$, $q=20\text{ GPa}$, $\mu=0.3$)

- University, Pennsylvania, USA. , 2002.
- [2] Erdogan F., "Fracture mechanics of functionally graded materials", *Composites Engineering*, Vol. 5, pp. 753-770, 1995.
- [3] Jin Z. H., Batra R., "Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 44, pp. 1221-1235, 1996.
- [4] Erdogan F., Wu B., "Crack problems in FGM layers under thermal stresses", *Journal of thermal stresses*, Vol. 19, pp. 237-265, 1996.
- [5] Erdogan F. and Wu B., "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, p. 449, 1997.
- [6] Choi H. J., "The problem for bonded half-planes containing a crack at an arbitrary angle to the graded interfacial zone", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 6559-6588, 2001.
- [7] Walters M. C., Paulino G. H., Dodds R. H., "Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 1081-1118, 2004.
- [8] Dag S., "Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 73, pp. 2802-2828, 2006.
- [9] Dag S., Yildirim B., and Sarikaya D., "Mixed-mode fracture analysis of orthotropic functionally graded materials under mechanical and thermal loads", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 7816-7840, 2007.
- [10] Dag S., Erhan Arman E., and Yildirim B., "Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using Jk-integral", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 3480-3488, 2010.
- [11] Hertz H., "Über die Berührung fester elastischer Körper", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 92, p. 22, 1882.
- [12] Giannakopoulos A., Pallot P., "Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, pp. 1597-1631, 2000.
- [13] Aizikovitch S., Alexandrov V., Kalker J., Krenev L., Trubchik I., "Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients

مود اول به ازای ابعاد مختلف پانچ ثابت است و فقط مکان آن تغییر می‌کند. هر چه ابعاد پانچ بزرگتر باشد نمودار ضریب شدت تنش مود اول در فاصله نزدیکتری از ترک به نقطه ماکزیمم خود می‌رسد. همچنین با توجه به نتایج بدست آمده، افزایش ابعاد پانچ ضریب شدت تنش مود دوم را کاهش می‌دهد. علت این امر این است که با کاهش ابعاد پانچ تمرکز نیرو بیشتر شده و ضریب شدت تنش مود دوم افزایش می‌یابد.

۷- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله پارامترهای شکست جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند در تماس لغزشی با پانچ صلب تخت بررسی شده است که نتایج حاصل به شرح زیر است:

(۱) با افزایش ضریب اصطکاک ضریب شدت تنش مود اول افزایش می‌یابد و ضریب شدت تنش مود دوم کاهش می‌یابد.

(۲) بر خلاف ضریب اصطکاک، تغییرات q ، r ، ابعاد پانچ و ضخامت لایه هدفمند شکل کلی نمودار ضرایب شدت تنش را تغییر نمی‌دهد.

(۳) برای نسبت‌های $b/d < 2$ افزایش r باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش مود اول می‌شود، اما برای نسبت‌های $b/d > 2$ افزایش r مقادیر ضریب شدت تنش را کاهش می‌دهد. از طرفی افزایش r باعث کاهش مقدار ضرایب شدت تنش مود دوم شکست می‌شود.

(۴) تاثیر تغییرات q بر نمودار ضرایب شدت تنش بسیار جزئی است.

(۵) با افزایش ضخامت لایه هدفمند، مقادیر ضریب شدت تنش مود اول افزایش می‌یابد. در مورد ضریب شدت تنش مود دوم، برای نسبت‌های $b/d < 2$ افزایش ضخامت لایه هدفمند باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش می‌شود، اما برای نسبت‌های $b/d > 2$ افزایش ضخامت لایه هدفمند مقادیر ضریب شدت تنش را کاهش می‌دهد.

(۶) ماکزیمم مقدار ضریب شدت تنش مود اول به ازای ابعاد مختلف پانچ ثابت است و فقط مکان آن تغییر می‌کند. افزایش ابعاد پانچ ضریب شدت تنش مود دوم را کاهش می‌دهد.

۸- مراجع

- [1] Sahin A., *An Interface Crack for a Graded Coating Bonded to Layered Medium*, PhD Thesis, Lehigh

- [23] Dorogoy A., Banks-Sills L., "Shear loaded interface crack under the influence of friction: a finite difference solution", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, pp. 1749-1780, 2004.
- [24] Dorogoy A., Banks-Sills L., "Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens—A finite difference solution", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 72, pp. 2758-2773, 2005.
- [25] Guinea G. V., Planas J., Elices M., "KI evaluation by the displacement extrapolation technique", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 66, pp. 243-255, 2000.
- [26] Raju I., Newman J., "Three dimensional finite-element analysis of finite-thickness fracture specimens", NASA TN D-8414, Technical report, Langley Research Center May 1977.
- [27] Smith S. A., Raju I. S., "Evaluation of stress-intensity factors using general finite-element models", *Fatigue and Fracture Mechanics (Twenty-Ninth Volume) ASTM STP*, Vol. 1332, pp. 176-200, 1998.
- [28] de Morais A. B., "Calculation of stress intensity factors by the force method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, pp. 739-750, 3// 2006.
- [29] Tamura I., Tomota I., Ozawa M., "Strength and ductility of Fe-Ni-C alloys composed of austenite and martensite with various strengths", *Microstruc. and Design Alloys, Proceedings of the Third International Conference on Strength Metal and Alloys, Cambridge (1973)*, Vol. 1, pp. 611-615.
- [30] Nikbakht A., Arezoodar A. F., Sadighi M., Zucchelli A., Talezadeh A., "Frictionless elastic contact analysis of a functionally graded vitreous enameled low carbon steel plate and a rigid spherical indenter", *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 484-501, 2// 2013.
- with the depth elastic properties", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2745-2772, 2002.
- [14] Ke L. L. and Wang Y. S., "Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 5779-5798, 2006.
- [15] Ke L. L., Wang Y. S., "Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 26, pp. 171-188, 2007.
- [16] Guler M., Erdogan F., "The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings", *International journal of mechanical sciences*, Vol. 49, pp. 161-182, 2007.
- [17] Dag S., Guler M. A., Yildirim B., Cihan Ozatag A., "Sliding frictional contact between a rigid punch and a laterally graded elastic medium", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 4038-4053, 2009.
- [18] Dag S., *Crack and Contact Problems in Graded Materials*, PhD Thesis, Dissertation, Department of Mechanical Engineering and Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, USA, 2001.
- [19] Choi H. J., "Effects of graded layering on the tip behavior of a vertical crack in a substrate under frictional Hertzian contact", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 68, pp. 1033-1059, 2001.
- [20] Dag S., Apatay T., Guler M. A., Gulgeç M., "A surface crack in a graded coating subjected to sliding frictional contact", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 80, pp. 72-91, 1// 2012.
- [21] Liebowitz H., Sandhu J., Lee J., Menandro F., "Computational fracture mechanics: research and application", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 50, pp. 653-670, 1995.
- [22] Altus E., Bar-Yoseph P., "A 3-D finite difference solution for orthotropic laminated composites using curvilinear coordinates", *Computers & Structures*, Vol. 17, pp. 573-577, 1983.