

ی مکانیکی ملرسی فند ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۲ مرص ۱۲-۱۶

مقاله پژوهشی کامل تاریخ دریافت ۹۲/۳/۳ تاریخ پذیرش ۹۲/۶/۱۰ ارائه در سایت ۹۲/۹/۳۰

بررسی عددی پارامترهای شکست در مسأله تماس لغزشی پانچ صلب تخت و جسم نیمه بینهایت هدفمند در حضور تر ک سطحی

على طالع زاده لارى'، مجتبى صديقى'*

۱- فارغالتحصیل کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران ۲- دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران * تهران، صندوق پستی ۴۴۱۳ (۱۵۸۷۵، mojtaba@aut.ac.ir

محله علمے ، بژ وہشے

چکیده – تغییرات تدریجی خواص مواد هدفمند باعث شده تمرکز تنش، جوانهزنی، رشد ترک و جدایش لایهها کاهش یابد. بیشتر کاربردهای مواد هدفمند شامل بارگذاری تماسی میباشد. در اثر این بارگذاری ترکهای سطحی در قطعه بوجود آمده و سپس رشد میکنند. در نتیجه رشد ترکهای سطحی از عمده مکانیزمهای خرابی ساختارهای تشکیل شده از مواد هدفمند میباشد. در این مقاله تماس لغزشی دوبعدی یک پانچ صلب تخت بر روی یک زمینه همگن الاستیک با پوشش هدفمند الاستیک در حضور ترک سطحی بررسی شده است. مدول الاستیسیته در لایه هدفمند طبق مدل تی –تی او محاسبه شده است. این مدل با تعریف پارامتر *p*، تاثیر برهمکنشهای ریزساختارها را نیز در نظر می گیرد. برای حل معادلات حاکم از کدنویسی روش تفاضلات محدود در نرمافزار متاب استفاده شده است. اثر ناهمگنی، *p*، ابعاد پانچ، ضخامت لایه هدفمند و ضریب

کلیدواژگان: تماس پانچ صلب تخت، ترک، ضرایب شدت تنش، مواد هدفمند، تفاضلات محدود.

Numerical analysis of the fracture parameters in the sliding contact problem between a rigid flat punch and a FG semi-infinite medium in the presence of a surface crack

A. Talezadeh Lari¹, M. Sadighi^{2*}

1- MSc Graduate, Mech. Eng., Tehran Univ., Tehran, Iran 2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Amir Kabir Univ., Tehran, Iran * P.O.B. 15875-4413 Tehran, Iran. mojtaba@aut.ac.ir

Abstract- Gradual changes of mechanical properties in FGMs decrease stress concentration, crack initiation and propagation and delamination. Many of the present and potential applications of FGM contain contact loading. This kind of loading causes surface crack initiation which is followed by subcritical crack propagation. Thus, propagation of surface cracks is one of the most important failure mechanisms in FG structures. In this article two dimensional sliding contact of a rigid flat punch on an elastic homogeneous substrate with an elastic FGM coating is studied. The modulus of elasticity in the graded layer is calculated based on TTO model approximation. This model defines a parameter q which considers the micro structural interactions. The governing equations are solved by Finite Difference method by means of MATLAB software. The influence of different parameters such nonhomogeneity, q, the dimensions of the punch, the thickness of the graded layer and the coefficient of friction on the mode I and II stress intensify factors are investigated.

Keywords: Contact, Rigid Flat Punch, Stress Intensity Factors, Functionally Graded Material (FGM), Finite Difference.

۱- مقدمه

مواد هدفمند، مواد مرکبی هستند که در مقیاس ماکروسکوپی غیرهمگن بوده و در آنها خصوصیات حرارتی و مکانیکی به صورت محسوس از یک سطح به سطح دیگر تغییر مییابد. این امر با تغییر ترکیب ماده هدفمند صورت میگیرد که خود ناشی راز تغییر پیوسته در کسر حجمی فازهای تشکیل دهنده ساختار میباشد. این مواد عموماً از ترکیب یک سرامیک (با قابلیتهای خاص در دماهای بالا) و یک فلز (با خواص مکانیکی مطلوب مانند استحکام و چقرمگی بالا) ساخته میشوند. مواد هدفمند در دماهای بالا نیز خواص ساختاری خود را حفظ مینمایند. مقاومت حرارتی بالایی را ایجاد میکنند. از طرف دیگر مواد نرم موجود در ساختار این مواد از شکست ترد تحت تنشهای موجود در ساختار این مواد از شکست در یک ماده هدفمند میتوان مقاومت حرارتی بالا و خواص ضد اکسید شدن سرامیکها میتوان مقاومت حرارتی بالا و خواص ضد اکسید شدن سرامیکها

یکی از مزایای مواد هدفمند، از بین رفتن ناپیوستگی خواص درون ساختار است. این امر باعث شده تمرکز تنش، جوانهزنی، رشد ترک و جدایش لایهها کاهش یابد. با این وجود، رشد ترکهای سطحی همچنان از جمله مکانیزمهای خرابی ساختارهای تشکیل شده از مواد هدفمند می باشد [۱]. در دو دهه اخیر تحقیقات گستردهای در زمینه مکانیک شکست مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی صورت گرفته است. هدف اصلی تحقیقات صورت گرفته در این زمینه، بررسی اثر ناهمگنی و اثر چگونگی تغییرات خواص در ساختار بر روی یارامترهای شکست می باشد؛ به گونهای که یارامتر متغیر در همگی این تحقیقات، تغییر خواص میباشد. اردوگان توزیع تنش در اطراف نوک یک ترک را که در یک ساختار هدفمند قرار گرفته محاسبه نموده است. تحقیق وی از اولین پژوهشهای صورت گرفته در مورد مکانیک شکست در مواد هدفمند است [۲]. جین و باترا، در مقالهای به مرور مفاهیم مکانیک شکست در مواد هدفمند یرداختهاند [۳]. از دیگر تحقیقات صورت گرفته در این زمینه میتوان به کارهای اردوگان و وو [۵،۴]، چوی [۶]، والترز و همکارانش [۷]، داگ [۸] و داگ و همکارانش [۱۰،۹] اشاره کرد.

یکی از انواع بارگذاریهایی که در مواد هدفمند مورد توجه

مهندسی مکانیک مدرس اسفند ۱۳۹۲.دورهٔ ۱۳ شمارهٔ ۱۲ www.SID.ir

قرار گرفته است رفتار این مواد در برابر بارهای تماسی است. مسأله تماس اولین بار توسط هرتز برای دو لنز شیشهای مطرح شد [11]. پس از هرتز پژوهشگران زیادی به بررسی رفتار تماسی مواد مختلف پرداختند. در دو دههٔ اخیر نیز مقالات فراوانی در زمینه تماس مواد هدفمند منتشر شده است. از جمله میتوان به کارهای جیاناکوپولوسو پالوت [17]، آیزیکوویچ و همکارانش [17]، که و وانگ [۱۵،۱۴]، گولر و اردوگان [18] و داگ و همکارانش [17] اشاره کرد.

در زمینه بررسی همزمان مسأله تماس و ترک نیز در دهه اخیر کارهایی انجام شده است. داگ در رساله دکترای خود، به بررسی مسأله تماس و ترک در یک نیم صفحه ساخته شده از مواد هدفمند پرداخته است [۱۸]. چوی نیز مسأله تماس و ترک را مورد مطالعه قرار داده است. وی سیستم را به صورت یک پوشش و زمینه همگن و یک زیر لایه مدرج بین این دو و یا یک پوشش مدرج بر روی یک زمینه هدفمند در نظر گرفته است [۱۹]. داگ و همکارانش مسأله تماس پانچ صلب و یک لایه با ساختار هدفمند که بر روی یک زمینه نیمه بینهایت همگن قرار دارد را در حضور ترک سطحی حل کردهاند. ایشان در این تحقیق توزیع خواص را به صورت نمایی در نظر گرفته و تاثیر ضریب اصطکاک و ضریب ناهمگنی را بر تنشهای ناشی از تماس و ضرایب شدت تنش در مودهای اول و دوم بررسی

در اکثر کارهای تحلیلی ذکر شده، تغییر خواص به صورت نمایی در نظر گرفته شده است. این امر سبب میشود معادلات حاکم نهایتا به یک معادله دیفرانسیل با ضریب ثابت تبدیل شوند که امکان ارائه حل تحلیلی برای آنها وجود دارد. اما این توابع فقط حالت خاصی از توزیع تغییرات را نشان میدهند و همچنین اثر برهمکنش ریزساختارهای جسم را نیز در نظر نمی گیرند. در نظر گرفتن تغییر خواص مطابق قانون مخلوطها و یا مدل تی-تی-او⁽ امکان حل مسأله در حالت کلی تر را ایجاد می کند؛ اما تعریف خواص مواد به این صورت، معادلات را پیچیدهتر کرده و ارائه حلهای تحلیلی را بسیار سخت و بعضاً غیرممکن می سازد. برای حل چنین مسائلی ناچار باید از روشهای عددی استفاده کرد. روشهای المان محدود یکی از

اخیر روش المان مرزی^۱ نیز برای حل این گونه مسائل به کار گرفته شده است در این میان روش تفاضلات محدود چندان مورد توجه قرار نگرفته است. علت اصلی این مطلب این است که با استفاده از این روش نمیتوان شکلهای نامنظم را مشبندی کرد [۲۱]. اما میتوان با استفاده از تکنیک نگاشت، مشبندی مناسبی ایجاد کرد به گونهای که در اطراف ناحیه تماس و ترک مشبندی ریز باشد و با دور شدن از این ناحیه المانها درشتتر شوند (مش درجهای^۲). این تکنیک در کارهای آلتوس و همکارانش و نیز تحقیقات دوروگوی و بانکسسیلس به کار گرفته شده است [۲۲-۲۴].

روشهای عددی محاسبه پارامترهای شکست به دو دسته کلی تقسیم میشوند:

 ۱) روش هایی که بر اساس میزان انرژی آزاد شده در اثر گسترش ترک عمل میکنند، مانند روش انتگرال *I* و تکنیک بسته شدن مجازی ترک^۳.

۲) روشهایی که اساس آنها بر برونیابی در اطراف نوک ترک است.

روش هایی که بر پایه انرژی بنا نهاده شده اند دقت بالایی دارند و نیاز به مش بندی ریز نیز ندارند و حتی با مش درشت نیز دقت این روش ها مناسب است اما در این روش ها جدا کردن مودهای اول و دوم بسیار سخت و بعضاً غیرممکن است [۲۵]. همین عامل باعث شده است، روش های دسته دوم با وجود محدودیت هایی که دارند، مورد توجه قرار گیرند. یکی از روش هایی که بر اساس برون یابی بنا نهاده شده است، روش نیرو[†] است. این روش نخستین بار توسط راجو و نیومن در سال روش در تعیین ضرایب شدت تنش برای ترک مرکزی در ورق به این روش اشاره کردند [۲۷]. دومورایس نشان داد که این روش در تعیین ضرایب شدت تنش برای ترک مرکزی در ورق ایزوتروپ و تیر ارتوتروپ از دقت خوبی برخوردار است. وی سه مزیت مهم برای این روش بیان کرد [۲۸]:

۱) این روش نیازی به المانهای منفرد خاص^۵ در نوک ترک ندارد و جواب المانهای معمول نیز از دقت خوبی برخوردار خواهند بود.

۲) این روش برای مواد غیرایزوتروپ به راحتی قابل استفاده است و نیازی به دانستن روابط پیچیده الاستیسیته در نوک ترک ندارد.

۳) این روش برای مودهای ترکیبی شکست نیز مناسب است.

در راستای تحقیقاتی که پیش از این توسط سایر محققان در زمینه بررسی همزمان ترک و تماس در مواد هدفمند انجام شده است، در مقاله حاضر مسأله تماس لغزشی دوبعدی یک پانچ تخت صلب بر روی یک زمینه همگن با یک پوشش هدفمند در حضور ترک سطحی بررسی شده است. مسأله به صورت کرنش صفحه ای، و خواص زمینه و لایه هدفمند به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. با توجه به توضیحاتی که در زمینه نحوه تغییرات خواص مواد داده شد؛ ضریب پواسون ثابت فرض شده و تغییرات مدول الاستیسیته در راستای عمق جسم و در کلیترین حالت و طبق مدل تی-تی-او در نظر گرفته شده است. این مدل که برای اولین بار توسط -تامورا، توموتا و اوزاوا مطرح شد، با تعريف پارامتر q تاثير برهم کنشهای ریزساختارها را نیز در نظر می گیرد [۲۹]. دقت این مدل در محدوده الاستیک به خصوص در مواد هدفمند سرامیک-فلزی توسط نیکبخت و همکارانش نشان داده شده است [۳۰]. برای حل، از کدنویسی روش تفاضلات محدود در نرمافزار متالب⁶ استفاده شده است و با به کار بردن تکنیک نگاشت مشبندی مناسب در ناحیه تماس و نیز ناحیه نوک ترک ایجاد شده است.

در ادامه ایتدا خواص مواد تشریح شده است. سپس هندسه حاکم بر مسأله و معادلات در حالت کلی شرح داده شده و نحوه استفاده از تکنیک نگاشت و اعمال روش تفاضلات محدود برای مدل کردن مسأله تماس آورده شده است. همچنین برای نشان دادن دقت و صحت این روش در مسأله تماس، مسألهای خاص حل شده و جوابها با جوابهای تحلیلی موجود مقایسه شده است. برای محاسبه ضرایب شدت تنش، از روش نیرو استفاده شده است. در این روش، ابتدا در حضور ترک مسأله تماس حل شده است و توزیع تنش در جسم بدست میآید، سپس با محاسبه شده است. در این مرحله نیز با حل یک مسأله خاص و مقایسه نتایج آن با نتایج ارائه شده توسط داگ، روش محاسبه ضرایب شدت تنش صحتسنجی شده است در پایان اثر تغییر

^{1.} Boundary Element (BE)

^{2.} Graded mesh

^{3.} Virtual Crack Closure Technique (VCCT)

^{4.} Force Method

^{5.} Special singular quadratic element

^{6.} MATLAB

مهندسی مکانیک مدرس اسفند ۱۳۹۲، دورهٔ ۱۳ شمارهٔ ۱۲

ضریب اصطکاک و نیز پارامترهای r (توان ناهمگنی)، q، ابعاد پانچ و ضخامت لایه هدفمند برضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است.

۲- خواص مواد

در مقاله حاضر خواص مواد به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون ثابت فرض شده و تغییرات مدول الاستیسیته در راستای عمق جسم و طبق مدل تی-تی-او در نظر گرفته شده است.این مدل تنش تک محوری، σ ، و کرنش تک محوری، 3، را در یک ماده کامپوزیت دو فازی بر حسب تنش و کرنش میانگین در هر کدام از فازها به صورت رابطه (۱) بیان می نماید [۲۹]:

$$\sigma = \sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2 \qquad (ij - 1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2 \qquad (i - 1)$$

که در آن $\sigma_i \sigma_i \sigma_i$ مشخص کننده تنشها و کرنشها در هر کدام از فازها و V_i (i=1) کسر حجمی فازها میباشد. (i=1) برای فاز سرامیکی و i=۲ برای فاز فلزی انتخاب شده است. در این مقاله تغییرات کسر حجمی به صورت توانی در نظر گرفته شده است.

$$V_{2}(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)^{r}, \frac{-h}{2} \le z \le \frac{h}{2}$$
 (Y)

که r توان ناهمگنی و h ضخامت لایه هدفمند است. z نیز از وسط لایه هدفمند اندازه گیری میشود. مدل تی-تی-او پارامتر دیگری به نام p را نیز شامل میشود که در رابطه (۳) تعریف شده است:

$$q = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right|, \qquad 0 \le q < \infty \tag{(7)}$$

مقدار این پارامتر با استفاده از دادههای تجربی و بر اساس خواص فازهای تشکیل دهنده ساختار و بر هم کنش آنها در ماده کامپوزیت تعیین می شود. با فرض خطی بودن رابطه تنش-کرنش و با استفاده از این دو رابطه، در کاربردهای الاستیک، مدول الاستیسیته، برای ماده کامپوزیت دوفازی طبق رابطه (۴) بدست می آید [۲۹]:

$$E = \frac{\frac{V_2 E_2 (q + E_1)}{q + E_2} + (1 - V_2) E_1}{\frac{V_2 (q + E_1)}{q + E_2} + (1 - V_2)}$$
(f)

مهندسی مکانیک هدرس اسفند ۱۳۹۲. دورهٔ ۱۳ شمارهٔ ۱۲ www.SID.ir

۳- هندسه و معادلات حاکم و شرایط مرزی

در مقاله حاضر مسأله تماس لغزشی دوبعدی پانچ تخت صلب با یک جسم نیمه بینهایت بررسی شده است. شکل ۱ هندسه مسأله و نحوه بارگذاری را در کلیترین حالت نشان میدهد. جسم به صورت سه لایه در نظر گرفته شده است به گونهای که یک لایهٔ همگن سرامیکی در تماس با پانچ قرار دارد، و لایهای از جنس مواد هدفمند این لایه را به زمینهٔ همگن فلزی متصل می سازد. اصطکاک به صورت کولمب لحاظ شده است.

در حالت دو بعدی روابط کرنش-جابجایی، تنش-کرنش و تعادل تنشها به ترتیب از روابط (۵) تا (۲) بدست میآید:

 $\varepsilon_{jx} = \frac{\partial u_j}{\partial x}$ (...)

$$\varepsilon_{jy} = \frac{\partial v_j}{\partial y} \qquad (-\Delta)$$

$$2\varepsilon_{jxy} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}$$
 (z- Δ)

$$\sigma_{jxx} = \frac{G_j}{\kappa - 1} \Big[(1 + \kappa) \varepsilon_{jx} + (3 - \kappa) \varepsilon_{jy} \Big] \qquad (1 - \kappa) \varepsilon_{jy} \Big]$$

$$\sigma_{ixy} = \frac{G_j}{\kappa - 1} \Big[(1 + \kappa) \varepsilon_{iy} + (3 - \kappa) \varepsilon_{iy} \Big] \qquad (1 - \kappa) \varepsilon_{iy}$$

$$\tau_{jxy} = G_j (2\varepsilon_{jxy})$$

$$\frac{\partial \sigma_{jxx}}{\partial \sigma_{jxx}} + \frac{\partial \tau_{jxy}}{\partial \sigma_{jxy}} = 0$$
(j. -7)

$$\frac{\partial \tau_{jxy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jyy}}{\partial y} = 0 \qquad (\because -Y)$$



شکل ۱ هندسه و بارگذاری مسأله

$$\lim_{x \to \infty} u_3(x, y) = \lim_{x \to \infty} v_3(x, y) = 0$$
 (17)

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\partial u_j(x, y)}{\partial y} = \lim_{y \to -\infty} \frac{\partial u_j(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (1^{\circ})$$

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\partial v_j(x, y)}{\partial y} = \lim_{y \to \infty} \frac{\partial v_j(x, y)}{\partial y} = 0 \qquad (-1)$$

۴- اعمال روش تفاضلات محدود

در روش تفاضلات محدود معمول اندازه المانها در جهت x و yثابت است. در نتیجه برای ایجاد مش,بندی ریز در ناحیه تماس یا ناحیه نوک ترک باید کل جسم را به صورت ریز مش زد؛ که این امر حجم محاسبات را به شدت بالا برده و عملاً روش تفاضلات محدود را به روشی نامناسب برای بررسی مسائل تماس تبدیل کرده است. برای رفع این مشکل از تکنیک نگاشت استفاده شده است. با استفاده از این تکنیک، ابتدا معادلات از فضای فیزیکی y - x به فضای عددی $\pi - \xi$ برده شدهاند، که در این فضا مقادیر ξ و π از ۲ تا ۲ تغییر میکنند، سپس معادلات در مختصات جدید حل شده و دوباره به مختصات y - x بازگردانده شدهاند [۳۳]. با استفاده از این

شکل ۲ نمونهای از مشبندی ایجاد شده توسط این تکنیک را نشان میدهد. برای تغییر مختصات ذکر شده از رابطـه (۱۴) استفاده می شود:

$$x = \sum_{i=1}^{M} a_i \xi^i$$

$$y = \sum_{j=1}^{N} b_j \eta^j$$
(...)

در این رابط ه مقادیر a_i و b_j مقادیر دلخواهی هستند که باید به گونهای انتخاب شوند که نهایتاً مش بندی مناسب را ایجاد کنند.



شکل ۲ نمونهای از مشبندی ایجاد شده

در این روابط، $u_j e_j v_j e_j v_j$ مولفههای جابجایی در راستای $x e_j v_j$ هستند و اندیس j که مقادیر ۱ تا ۳ را می تواند اختیار کند، به v_j هستند و اندیس نشان دهندهٔ لایه سرامیکی، لایه هدفمند و زمینه فلزی است. G مدول برشی و تابعی از x است، همچنین x برای حالت کرنش صفحهای و تنش صفحهای به ترتیب از رابطه (۸) بدست می آید.

$$\kappa = 3 - 4\upsilon \tag{(b)}$$

$$\kappa = \frac{3 - \upsilon}{1 + \upsilon} \tag{(--\lambda)}$$

با استفاده از روابط (۵)و (۶) و (۲) می توان معادلات تعادل را بر حسب مولفه های تغییر مکان به صورت رابطه (۹) نوشت: $G_{\mu} = \frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{1}{G_{j}(\kappa-1)} \frac{dG_{j}}{dx} \left[(1+\kappa) \frac{\partial u_{j}}{\partial x} + (3-\kappa) \frac{\partial v_{j}}{\partial y} \right] + \nabla^{2} u_{j} + \frac{2}{\kappa-1} \left[\frac{\partial^{2} u_{j}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} v_{j}}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (id) - 9)$$

$$\nabla^{2} v_{j} + \frac{2}{\kappa-1} \left[\frac{\partial^{2} v_{j}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} u_{j}}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{G_{j}} \frac{dG_{j}}{dx} \left(\frac{\partial u_{j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{j}}{\partial x} \right) = 0 \quad (iq)$$

شرایط مرزی برای نقاطی که روی ترک قرار میگیرند در رابطه (۱۰) آورده شده است:

$$\tau_{1xy}(0, y) = 0 \\ \sigma_{1yy}(0, y) = 0 \}, 0 < x < d$$
 (1.)

شرایط مرزی در سطح بالایی از دو قسمت تشکیل شده است. قسمتی که در تماس با پانچ قرار دارد و قسمتی که در تماس با پانچ نیست و اصطلاحاً سطح آزاد نامیده میشود. شرایط مرزی در این سطوح طبق رابطه (۱۱) بیان میشود: $\tau_{1,m}(0, y) = \mu \sigma_{nm}(0, y)$

$$u_{1(y)}(0,y) = \mu \partial_{1xx}(0,y) \qquad (a < y < b \qquad (a < y < b) \qquad (a < y < b$$

$$\begin{aligned} & \tau_{_{1xy}}\left(0,y\right) = 0 \\ & \sigma_{_{1xx}}\left(0,y\right) = 0 \end{aligned}, & -\infty < y < a, b < y < \infty \end{aligned}$$

 $(y - 11)$

 $(y - 1)$

 $(y - 1)$

(۱۲) خواهد بود:

با تغییر متغیر فوق مشتقات نسبت به *γوγ*، بر حسب مشتقات بر حسب *ξ*و *η* نوشته میشود.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} = \frac{f_{,\xi}}{x_{,\xi}} \tag{(10)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_{,y} = \frac{f_{,\eta}}{y_{,\eta}} \qquad (-1\Delta)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{,xx} = a_{xx} f_{,\xi} + c_{xx} f_{,\xi\xi} \qquad (z-1\Delta)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{,yy} = b_{yy} f_{,\eta} + d_{yy} f_{,\eta\eta} \qquad (3-1\Delta)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \,\partial y} = f_{,xy} = e_{xy} f_{,\xi\eta} \qquad (\circ -1\Delta)$$

که در این عبارات:

$$a_{xx} = \frac{-x_{,\xi\xi}}{x_{,\xi}^3} \tag{(1-18)}$$

$$b_{yy} = \frac{-\mathcal{Y}_{,\eta\eta}}{\mathcal{Y}_{,\eta}^{3}} \qquad (-1\mathcal{F})$$

$$c_{xx} = \frac{1}{x_{,\xi}^2} \tag{(7.16)}$$

$$d_{yy} = \frac{1}{y_{,\eta}^{2}} \tag{(s-19)}$$

$$e_{xy} = \frac{1}{x_{,\xi} y_{,\eta}} \tag{o-19}$$

حال با استفاده از روابط (۱۵)، معادله (۹) بازنویسی شده و به صورت (۱۷) نوشته میشود:

$$u_{,\xi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[a_{xx} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{x_{,\xi}} \right] + u_{,\xi\xi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c_{xx}$$
$$+ u_{,\eta} b_{yy} + u_{,\eta\eta} d_{yy} + v_{,\xi\eta} \frac{2}{\kappa-1} e_{xy}$$
$$+ v_{,\eta} \frac{3-\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{y_{,\eta}} = 0 \qquad (ij)$$

$$\begin{aligned} v_{,\xi} \left[a_{xx} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{x_{,\xi}} \right] + c_{xx} v_{,\xi\xi} + b_{yy} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} v_{,\eta} \\ + d_{yy} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} v_{,\eta\eta} + u_{,\xi\eta} \frac{2}{\kappa - 1} e_{xy} \\ + u_{,\eta} \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{y_{,\eta}} = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

$$(-17)$$

$$(-17)$$

$$(2) \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}$$

سطوح ترک) نوشته شده و نهایتاً یک دستگاه معادلات ایجاد می شود که برای حل آن از روش تفاضلات محدود استفاده شده است. به طریق مشابه معادلات مربوط به شرایط مرزی نیز از فضای y - y برده شده است.

روش حل مسأله بر پایه جابجایی پانچ قرار داده شده است. بدین ترتیب که جابجایی پانچ به عنوان شرایط مرزی به لایهٔ بالایی جسم اعمال میشود و سطحی که در تماس قرار دارد شکل پروفیل پانچ را میگیرد. پس از حل مسأله با انتگرالگیری از تنش عمودی در سطح پایینی جسم نیروی اعمالی مورد نیاز برای ایجاد این جابجایی بدست میآید.

برای نشان دادن دقت و صحت روش فوق، مسألهای خاص حل شده و نتایج با نتایج تحلیلی ارائه شده توسط که و وانگ [۱۵] مقایسه شده است. برای این منظور جسم نیمه بینهایت به صورت یک لایه از مواد هدفمند بر روی یک زمینه نیمه بینهایت همگن مدل شده و تحت بارگذاری توسط یک پانچ تخت با پهنای 2*a* قرار گرفته است. ضریب اصطکاک و ضریب پواسون به ترتیب برابر ۰/۵ و ۲/۳ در نظر گرفته شده است و تغییرات مدول برشی در لایه هدفمند از رابطه (۱۸) پیروی می کند.

$$G(x) = G^* e^{(\frac{h-x}{h})\ln(k)}$$

here $G(x) = G^* e^{(\frac{h-x}{h})\ln(k)}$

(۱۸) که *k* از

(19)

$$k = \frac{G_0}{G^*}$$

که در این رابطه G_0 و G_0 به ترتیب مدول برشی جسم نیمه بینهایت همگن و مدول برشی در سطح بالایی لایه هدفمند است. نسبت n/h برابر $1/\cdot c_{1}$ نظر گرفته شده وابعاد کلی جسم ۱۰ برابر پهنای پانچ فرض شده است. در این حالت اثرات پانچ در لبههای جسم ناچیز و فرض نیمه بینهایت بودن صحیح است. در هر کدام از راستاهای x e Y، ۱۰۰ گره استفاده شده و با استفاده از تکنیک ذکر شده، مش بندی به صورت مش درجهای انجام شده است. نتایج توزیع تنش در شکل ۳ نشان داده شده است. تنشها نسبت به پارامتر σ_{0} بی بعد شده است (رابطه (۲۰)).

$$\sigma_0 = \frac{P}{2a} \tag{7}$$

على طالع زاده لارى و همكار



شکل ۴ محورهای انتخاب شده برای محاسبه ضرایب شدت تنش

$$K_{I} = F_{y} \sqrt{\frac{\pi}{2x_{c}}} \tag{(TT)}$$

$$K_{II} = F_x \sqrt{\frac{\pi}{2x_c}} \tag{(14)}$$

 x_c با محاسبه F_x و F_y در فواصل x_c مختلف و میل دادن x_c به سمت صفر، مقادیر K_I و K_I در نوک ترک بدست میآید [۲۸].

برای اعتبارسنجی این روش، مسأله ای خاص حل شده است و نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده توسط داگ مقایسه شده است[۲۰]. در این مسأله پانچ صلب تخت در تماس با جسمی متشکل از یک لایه هدفمند بر روی زمینه نیمه بینهایت همگن قرار دارد. خواص مواد در لایه هدفمند به صورت نمایی تغییر می کند و نسبت مدول الاستیسیته فلز به سرامیک برابر ۸ است. ضریب پواسون ثابت و برابر ۲۵/۰ فرض شده است. ابعاد جسم نیمه بینهایت ۲۰۳۳ ×۸۰mm در نظر گرفته شده است. پرابر ۳ میلیمتر در نظر گرفته شده است (*d=h=b-a=*3mm). شکل ۵ نتایج بدست آمده را در مقایسه با نتایج داگ نشان میدهد. همان گونه که پیداست تطابق خوبی میان نتایج بدست

۶- نتایج و بحث

در این قسمت تماس لغزشی دوبعدی پانچ صلب تخت بر روی یک جسم نیمه بینهایت، در حضور ترک سطحی حل شده و اثر پارامترهای مختلف بر ضرایب شدت تنش مودهای اول و دوم بررسی شده است. جسم نیمه بینهایت مطابق شکل ۱ با ابعاد ۲۰×۲۳۳۸۰۳۳ در نظر گرفته شده است. عمق ترک سطحی و ضخامت لایه سرامیکی برابر ۳ میلیمتر فرض شده است. فولاد و شیشه با مدول الاستیسیته ۱۸۰ گیگاپاسکال و ارائه شده توسط که و وانگ دارد. هرچند اختلاف نتایج در لبههای پانچ بیشتر است. البته با توجه به وجود تمرکز تنش در این نقاط، نمیتوان روی تنشهای بدست آمده در این نقاط بحث کرد؛ چنانچه در کارهای انجام شده توسط سایر محققان نیز در مورد تنش در این نقاط بحثی نشده است.

۵- محاسبه ضرایب شدت تنش

پس از حل دستگاه معادلات و اعمال شرایط مرزی، نهایتاً توزیع تنش در کل جسم بدست خواهد آمد. با استفاده از توزیع تنش در حوزه نوک ترک میتوان ضرایب شدت تنش را محاسبه کرد. برای محاسبه ضرایب شدت تنش از روش نیرو استفاده شده است. اگر ترکی مطابق شکل ۴ در جسم وجود داشته باشد با صرفنظر کردن از ترمهای بالاتر، تنشهای σ_y و τ_{xy} به از رابطه (۲۱) و (۲۲) بدست میآیند [۲۸]:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \tag{(Y1)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}} \tag{(YY)}$$

با انتگرال گیری از تنشها در فاصله صفر تا x_c روابط (۲۳) و (۲۴) برای ضرایب شدت تنش بدست میآید.



۲۰ www.SID.ir

۷۰ گیگاپاسکال به ترتیب به عنوان فاز فلزی و سرامیکی انتخاب شده است. ضریب پواسون برای کل جسم ثابت و برابر ۰/۳ در نظر گرفته شده است.

شکل ۶ اثر ضریب اصطکاک را بر تغییرات ضرایب شدت تنش نشان می دهد. با توجه به شکل پیداست که در حالت بدون اصطکاک ضریب شدت تنش مود اول همواره منفی است. این مسأله به معنای باز نشدن نوک ترک است و به علت وجود تنشهای فشاری در زیر پانچ است. اما در حضور اصطکاک، در زیر پانچ تنشهای کششی نیز ایجاد می شود، بنابراین ضریب شدت تنش مود اول می تواند مثبت باشد. در این حالت با افزایش ضریب اصطکاک، ضریب شدت تنش مود اول افزایش می یابد.









مهندسی مکانیک مدرس اسفند ۱۳۹۲.دورهٔ ۱۳ شمارهٔ ۱۲ www.SID.ir

علاوه بر این با دور شدن پانچ از ترک ضرایب شدت تنش ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش مییابند و نهایتاً به مقدار ثابتی همگرا میشوند. علت آن است که با دور شدن پانچ از ترک تنشهای فشاری و کششی در نوک ترک کاهش مییابد؛ اما نرخ کاهش تنشهای فشاری بیشتر است. با افزایش فاصله پانچ از ترک رفته رفته اثر پانچ بر روی ترک کاهش مییابد تا نهایتاً ضریب شدت تنش به یک مقدار همگرا شود. مقادیر ضریب شدت تنش مود دوم، در حالت بدون اصطکاک از یک مقدار مثبت شروع شده و با دور شدن پانچ از ترک کاهش مییابد تا در نهایت به صفر همگرا شود. در حضور اصطکاک رفتار کلی نمودار عوض میشود. در این حالت با افزایش ضریب ضمن این که با دور شدن پانچ از ترک ضویب ضمن این که با دور شدن پانچ از ترک ضرایب شدت کاهش مییابند و به مقادیر منفی میرسند و سپس افزایش یافته و به صفر همگرا میشوند.





علی طالع زادہ لاری و همکار

شكل ۷ ضرایب شدت تنش را برای مقادیر مختلف r و مقادیر ثابت p و μ ، بر حسب موقعیت پانچ نسبت به ترک (b/d) نشان میدهد. همان گونه که مشخص است تغییرات rرفتار کلی نمودار و مقادیر ماکزیمم ضریب شدت تنش مود اول را تغییر نمیدهد. برای نسبتهای 2 > b/d افزایش r باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش میشود اما برای نسبتهای 2 < b/d افزایش r مقادیر ضریب شدت تنش را کاهش میدهد. از طرفی افزایش r باعث کاهش مقدار ضرایب شدت تنش مربوط به مود دوم شکست میگردد.

نتایج نشان داد که تاثیر تغییرات p بر نمودار ضرایب شدت q تنش بسیار جزئی است. علت این امر را می توان تاثیر جزئی q بر توزیع خواص جسم دانست.

روند تغییرات ضرایب شدت تنش برای مقادیر مختلف ضخامت لایه هدفمند در شکل ۸ نشان داده شده است.





rشکل ۷ ضرایب شدت تنش برای پانچ تخت به ازای مقادیر مختلف (h₁=3mm, h₁/(b-a)=h₁/h=1, q=20 GPa, μ=0.3)

مشاهده می شود که با افزایش ضخامت این لایه در مقابل لایه همگن سرامیکی، ضمن حفظ رفتار کلی نمودارها، مقادیر ضریب شدت تنش مود اول افزایش می یابد. علت این است که از آنجا که مدول الاستیسیته لایه هدفمند بیشتر از لایه سرامیکی است؛ با افزایش ضخامت لایه هدفمند، مدول الاستیسیته معادل افزایش یافته و در نتیجه تنشها و ضرایب شدت تنش افزایش می یابد. در مورد ضریب شدت تنش مود دوم، برای نسبتهای 2 > b/d افزایش ضخامت لایه هدفمند باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش می شود اما برای نسبتهای 2 < b/d افزایش ضخامت لایه هدفمند مقادیر نسبتهای 2 می افزایش ضخامت در مود اما برای



شکل ۸ ضرایب شدت تنش برای پانچ تخت بر حسب مقادیر مختلف ضخامت لایه هدفمند (*h*₁=3mm, *h*₁/(*b-a*)=1, *r*=4, *q*=20 GPa, *μ*=0.3)

بررسی تغییرات ضرایب شدت تنش برای مقادیر مختلف ابعاد پانچ نشان میدهد که ماکزیمم مقدار ضریب شدت تنش

على طالع زاده لاري و همكار

بررسی عددی پارامترهای شکست در مسأله تماس...

University, Pennsylvania, USA., 2002.

- [2] Erdogan F., "Fracture mechanics of functionally graded materials", *Composites Engineering*, Vol. 5, pp. 753-770, 1995.
- [3] Jin Z. H., Batra R., "Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials", *Journal* of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 44, pp. 1221-1235, 1996.
- [4] Erdogan F., Wu B., "Crack problems in FGM layers under thermal stresses", *Journal of thermal* stresses, Vol. 19, pp. 237-265, 1996.
- [5] Erdogan F. and Wu B., "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, p. 449, 1997.
- [6] Choi H. J., "The problem for bonded half-planes containing a crack at an arbitrary angle to the graded interfacial zone", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 6559-6588, 2001.
- [7] Walters M. C., Paulino G. H., Dodds R. H., "Stressintensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 1081-1118, 2004.
- [8] Dag S., "Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 73, pp. 2802-2828, 2006.
- [9] Dag S., Yildirim B., and Sarikaya D., "Mixed-mode fracture analysis of orthotropic functionally graded materials under mechanical and thermal loads", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 7816-7840, 2007.
- [10] Dag S., Erhan Arman E., and Yildirim B., "Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using Jkintegral", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 3480-3488, 2010.
- [11]Hertz H., "Uber die Berührung fester elastischer Körper", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 92, p. 22, 1882.
- [12] Giannakopoulos A., Pallot P., "Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, pp. 1597-1631, 2000.
- [13] Aizikovich S., Alexandrov V., Kalker J., Krenev L., Trubchik I., "Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients

مود اول به ازای ابعاد مختلف پانچ ثابت است و فقط مکان آن تغییر می کند. هر چه ابعاد پانچ بزرگتر باشد نمودار ضریب شدت تنش مود اول در فاصله نزدیکتری از ترک به نقطه ماکزیمم خود می رسد. همچنین با توجه به نتایج بدست آمده، افزایش ابعاد پانچ ضریب شدت تنش مود دوم را کاهش می دهد. علت این امر این است که با کاهش ابعاد پانچ تمرکز نیرو بیشتر شده و ضریب شدت تنش مود دوم افزایش می یابد.

۷- نتیجهگیری و جمعبندی

در این مقاله پارامترهای شکست جسم نیمه بینهایت هدفمند در تماس لغزشی با پانچ صلب تخت بررسی شده است که نتایج حاصل به شرح زیر است:

۱) با افزایش ضریب اصطکاک ضریب شدت تنش مود اول
 افزایش می ابد و ضریب شدت تنش مود دوم کاهش می ابد.

۲) بر خلاف ضریب اصطکاک، تغییرات *۲ ۹،* ابعاد پانچ و ضخامت لایه هدفمند شکل کلی نمودار ضرایب شدت تنش را تغییر نمیدهد.

۳) برای نسبتهای 2 > b/d افزایش r باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش مود اول می شود، اما برای نسبتهای b/d > 2 > b/d افزایش r مقادیر ضریب شدت تنش را کاهش می دهد. از طرفی افزایش r باعث کاهش مقدار ضرایب شدت تنش مود دوم شکست می شود.

۴) تاثیر تغییرات q بر نمودار ضرایب شدت تـنش بسـیار جزئی است.

۵) با افزایش ضخامت لایه هدفمند، مقادیر ضریب شدت تنش مود تنش مود اول افزایش مییابد. در مورد ضریب شدت تنش مود دوم، برای نسبتهای b/d < 2 افزایش ضخامت لایه هدفمند باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش می شود، اما برای نسبتهای 2 < b/d افزایش ضخامت لایه هدفمند مقادیر ضریب شدت تنش می شود. اما برای نسبتهای d < 2

۶) ماکزیمم مقدار ضریب شدت تنش مود اول به ازای ابعاد مختلف پانچ ثابت است و فقط مکان آن تغییر میکند. افزایش ابعاد پانچ ضریب شدت تنش مود دوم را کاهش میدهد.

۸- مراجع

[1] Sahin A., An Interface Crack for a Graded Coating Bonded to Layered Medium, PhD Thesis, Lehigh

- [23] Dorogoy A., Banks-Sills L., "Shear loaded interface crack under the influence of friction: a finite difference solution", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, pp. 1749-1780, 2004.
- [24] Dorogoy A., Banks-Sills L., "Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens— A finite difference solution", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 72, pp. 2758-2773, 2005.
- [25] Guinea G. V., Planas J., Elices M., "KI evaluation by the displacement extrapolation technique", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 66, pp. 243-255, 2000.
- [26] Raju I., Newman J., "Three dimensional finiteelement analysis of finite-thickness fracture specimens", NASA TN D-8414, Technical report, Langley Research Center May 1977.
- [27] Smith S. A., Raju I. S., "Evaluation of stressintensity factors using general finite-element models", *Fatigue and Fracture Mechanics* (*Twenty-Ninth Volume*) ASTM STP, Vol. 1332, pp. 176-200, 1998.
- [28] de Morais A. B., "Calculation of stress intensity factors by the force method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, pp. 739-750, 3// 2006.
- [29] Tamura I., Tomota I., Ozawa M., "Strength and ductility of Fe-Ni-C alloys composed of austenite and martensite with various strengths", Microstruc. and Design Alloys, Proceedings of the Third International Conference on Strength Metal and Alloys, Cambridge (1973), Vol. 1, pp. 611-615.
- [30] Nikbakht A., Arezoodar A. F., Sadighi M., Zucchelli A., Talezadeh A., "Frictionless elastic contact analysis of a functionally graded vitreous enameled low carbon steel plate and a rigid spherical indenter", *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 484-501, 2// 2013.

with the depth elastic properties", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2745-2772, 2002.

- [14] Ke L. L. and Wang Y. S., "Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 5779-5798, 2006.
- [15] Ke L. L., Wang Y. S., "Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 26, pp. 171-188, 2007.
- [16] Guler M., Erdogan F., "The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings", *International journal* of mechanical sciences, Vol. 49, pp. 161-182, 2007.
- [17] Dag S., Guler M. A., Yildirim B., Cihan Ozatag A., "Sliding frictional contact between a rigid punch and a laterally graded elastic medium", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 4038-4053, 2009.
- [18] Dag S., Crack and Contact Problems in Graded Materials, PhD Thesis, Dissertation, Department of Mechanical Engineering and Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, USA, 2001.
- [19] Choi H. J., "Effects of graded layering on the tip behavior of a vertical crack in a substrate under frictional Hertzian contact", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 68, pp. 1033-1059, 2001.
- [20] Dag S., Apatay T., Guler M. A., Gulgeç M., "A surface crack in a graded coating subjected to sliding frictional contact", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 80, pp. 72-91, 1// 2012.
- [21] Liebowitz H., Sandhu J., Lee J., Menandro F., "Computational fracture mechanics: research and application", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 50, pp. 653-670, 1995.
- [22] AltusE., Bar-Yoseph P., "A 3-D finite difference solution for orthotropic laminated composites using curvilinear coordinates", *Computers & Computers & Computers Structures*, Vol. 17, pp. 573-577, 1983.