



# حل دقیق کمانش نانو صفحه‌های مستطیل شکل با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی غیرمحلی

مهدی کرماجانی<sup>۱</sup>، شاهرخ حسینی هاشمی<sup>۲\*</sup>، رضا ناظم‌نژاد<sup>۳</sup>، شهرام امیرعبداللهیان<sup>۴</sup>

- ۱- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
  - ۲- استاد دانشکده مهندسی مکانیک و راه‌آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
  - ۳- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
  - ۴- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سمنان، سمنان
- \* تهران، صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۶۵، shh@iust.ac.ir

**چکیده** - در این مقاله، اثرات مقیاس کوچک بر روی کمانش نانو صفحات مستطیلی، براساس تئوری غیرمحلی تغییرشکل برشی مرتبه سوم ردی و با استفاده از یک روش دقیق تحلیلی بررسی شده است. به منظور حل دقیق معادلات حرکت، ابتدا معادلات بی‌بعد شده و با استفاده از تابع کمکی از یکدیگر دی‌کوپله شده‌اند. نهایتاً، معادلات جدیدی بر حسب یک سری توابع پتانسیل بدست آمده که بصورت دقیق و تحلیلی قابل حل می‌باشند و به این ترتیب بارهای کمانش برای مسأله بدست می‌آید. در حل معادلات فوق، از شرایط مرزی لوی استفاده شده که بر اساس آن، دو لبه نانو صفحه دارای شرایط مرزی ساده و دو لبه دیگر می‌تواند ترکیبی از شرایط مرزی ساده، گیردار یا آزاد باشد. به منظور تأیید صحت روش حل حاضر، نتایج بدست آمده با دیگر روش‌های عددی و تقریبی مقایسه شده است. برای ارائه نتایج بیشتر، اثرات شرایط مرزی، مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی، نسبت طول به عرض و نسبت ضخامت به طول بر بار کمانش نانورق بررسی شده است. مطالعه حاضر می‌تواند به منظور تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌های صفحه مانند ضخیم در مقیاس نانو مانند گرافن چندلایه و گرافیت بصورت سازه‌های کامپوزیتی یا ساندویچی، مفید باشد.

**کلید واژگان:** نانو صفحه، حل تحلیلی دقیق، کمانش، الاستیسیته غیرمحلی، تئوری صفحه ردی.

## Exact solutions for buckling of rectangular nanoplates via nonlocal third-order plate theory

M. Kermajani<sup>1</sup>, Sh. Hosseini-Hashemi<sup>2\*</sup>, R. Nazemnezhad<sup>3</sup>, Sh. Amirabdollahian<sup>4</sup>

- 1- MSc, Mech. Eng., IUST, Tehran, Iran
  - 2- Prof., Mech. Eng., IUST, Tehran, Iran
  - 3- PhD. Student, Mech. Eng., IUST, Tehran, Iran
  - 4- MSc., Mech. Eng., Islamic Azad University, Semnan Branch, Semnan, Iran
- \* P.O.B. 16765-163 Tehran, Iran. shh@iust.ac.ir

**Abstract-** In this paper, exact closed-form solutions in explicit forms are presented to investigate small scale effects on the buckling of Lévy-type rectangular nanoplates based on the Reddy's nonlocal third-order shear deformation plate theory. Two other edges may be restrained by different combinations of free, simply supported, or clamped boundary conditions. Hamilton's principle is used to derive the nonlocal equations of motion and natural boundary conditions of the nanoplate. Two comparison studies with analytical and numerical techniques reported in literature are carried out to demonstrate the high accuracy of the present new formulation. Comprehensive benchmark results with considering the small scale effects on buckling load ratios and non-dimensional buckling loads of rectangular nanoplates with different combinations of boundary conditions are tabulated for various values of nonlocal parameters, aspect ratios and thickness to length ratios. Due to the inherent features of the present exact closed-form solution, the present findings will be a useful benchmark for evaluating the accuracy of other analytical and numerical methods, which will be developed by researchers in the future. Also, the present study may be useful for static and dynamic analysis of thicker nano scale plate-like structures, multi-layer graphene and graphite as composite or sandwich structures.

**Keywords:** Exact Analytical Solution, Buckling, Nonlocal Elasticity, Reddy Plate Theory.

## ۱- مقدمه

مبتنی بر روش‌های عددی (روش المان محدود [۵]، روش تفاضل محدود [۶]، روش گالرکین [۷]، روش دی.کی.ام [۹،۸]) و روش‌های تقریبی تحلیلی [۱۱،۱۰] می‌باشد. علاوه بر این، بسیاری از تحقیقات انجام گرفته، مبتنی بر تئوری‌های کلاسیک و میندلین، و با در نظر گرفتن شرایط مرزی ناویر می‌باشد (تمام لبه‌های نانو صفحه دارای شرایط مرزی ساده می‌باشد)، و در معدود مراجعی، ترکیبی از شرایط مرزی ساده و گیردار استفاده شده است [۱۳،۱۲]. بنابراین، هیچ حل دقیق و تحلیلی‌ای برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی نانو ورق‌های ضخیم و با شرایط مرزی مختلف موجود نمی‌باشد.

یکی از نانو صفحه‌های پرکاربرد، گرافن<sup>۵</sup> بوده که بعنوان نازک‌ترین سازه دوبعدی نیز شناخته شده است. شاید نازک بودن گرافن، استفاده از تئوری‌های مرتبه بالاتر برای تحلیل نانو صفحات را، بی‌معنی یا کم‌معنی نشان دهد. اما وقتی گرافن چندلایه مدنظر باشد می‌توان آنها را از دیدگاه سازه‌های ساندویچی و کامپوزیتی مورد نظر قرار داد و با در نظر گرفتن خواص معادل، بصورت یک سازه همگن تک لایه آن را تحلیل نمود. حال، گرافن چندلایه، بصورت ماده همگن تک لایه و با خواص معادل است که برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی آن، استفاده از تئوری‌های مرتبه بالاتر ناگزیر می‌باشد. این ایده، توسط چاندر و همکاران [۱۴] مورد استفاده قرار گرفته است که گرافن‌های دولایه، بصورت تیر و با خواص معادل مدل شده و مورد تحلیل قرار گرفته‌اند و نتایج قابل قبولی مشاهده شده است.

هدف اصلی مقاله، استفاده از روش حل تحلیلی دقیق ارائه شده برای صفحات ماکرو توسط نویسندگان [۱۶،۱۵] برای تحلیل کمانش نانو ورق‌ها بر اساس تئوری غیرمحلّی تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی می‌باشد. معادلات حرکت و شرایط مرزی طبیعی، با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده و نانو ورق‌ها، دارای شرایط مرزی لوی می‌باشند. این مطالعه، بررسی اثر مقیاس کوچک و تنش برشی در ضخامت نانو صفحه را امکان‌پذیر می‌سازد. برای ارائه نتایج بیشتر، اثرات شرایط مرزی، مقادیر مختلف پارامتر غیر محلّی، نسبت طول به عرض و نسبت ضخامت به طول بر بار کمانش نانو ورق بررسی شده است.

بسیاری از دستگاه‌های میکرو و نانو، شامل تیرها و صفحاتی می‌باشند که به صورت افقی بر روی لایه‌ای<sup>۱</sup> دیگر قرار گرفته‌اند. در مقیاس میکرو، این صفحات به عنوان جزء فعال شتاب‌سنج، ژيروسکوپ سرعت، سنسورهای فشار، سنسورهای شیمیایی، سوئیچ‌ها، محرک الکترواستاتیک، سوپاپ‌ها و پمپ استفاده می‌شود. انکار ناپذیر است که صفحات نقش مهمی در مقیاس نانو بازی می‌کنند. بنابراین، در مرحله طراحی، تعیین دقیق فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش صفحات نانو برای طراحان و مهندسان بسیار ضروری می‌باشد. برای این منظور، باید اثرات مقیاس کوچک به منظور اصلاح تئوری‌های کلاسیک و دستیابی به معادلات حاکم برای سازه‌های نانو در نظر گرفته شود. اثرات مقیاس کوچک با در نظر گرفتن اندازه داخلی به عنوان یک پارامتر مادی منظور می‌شود. نتایج تجربی نشان می‌دهد که اگر ابعاد یک ماده کاهش یابد، اثرات بین اتمی دور برد<sup>۲</sup> و نیروهای چسبندگی بین مولکولی<sup>۳</sup>، بر خواص مکانیکی، از اهمیت بالایی برخوردار شده و نمی‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

تئوری غیرمحلّی ارینگن [۱] از تئوری‌های شناخته شده برای بررسی اثر مقیاس کوچک می‌باشد که تنش در یک نقطه از جسم را به عنوان تابعی از میدان کرنش در تمام نقاط جسم در نظر می‌گیرد. از این رو، در بسیاری از مقالات منتشر شده، از این تئوری برای تحلیل سازه‌های نانو مقیاس استفاده شده است. آقابابایی و ردی [۲] معادلات حرکت نانو ورق را بر اساس تئوری غیرمحلّی تغییرشکل برشی مرتبه سوم صفحه استخراج نموده و اثرات پارامتر غیرمحلّی روی فرکانس‌های طبیعی نانو صفحه مستطیلی با شرایط تکیه‌گاهی ساده را بررسی کردند. پرادهان [۳] با استفاده از روش ناویر، کمانش ورق گرافن تک‌لایه را بر پایه الاستیسیته غیرمحلّی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر تحلیل نمود. علاوه بر این، فرج‌پور و همکاران [۴] کمانش صفحات ارتوتروپیک نانو/میکرو تحت بار خطی متغیر در صفحه را با استفاده از مکانیک محیط‌های پیوسته غیرمحلّی و به کمک روش عددی دی.کی.ام<sup>۴</sup> مورد مطالعه قرار دادند. از ادبیات تحقیق به نظر می‌رسد که حل معادله حاکم،

1. Substrate
2. Long-Range Interatomic
3. Intermolecular Cohesive Forces
4. DQM

5. Graphene

## ۲- شرح مسأله

### ۱-۲- هندسه مسأله

نانو صفحه مستطیلی ضخیم، همسانگرد و مسطح به طول  $a$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  در نظر گرفته شده است (شکل ۱). برای دولبه روبرو در امتداد محور  $x_2$  (در امتداد لبه‌های  $x_1=0$  و  $x_1=a$ ) شرایط تکیه‌گاهی ساده در نظر گرفته شده، و دو لبه دیگر می‌تواند ترکیبی از شرایط مرزی آزاد، ساده یا گیردار داشته باشد. سیستم مختصات دکارتی  $(x_1, x_2, x_3)$  برای دستیابی به روابط ریاضی، به صورتی در نظر گرفته شده است که محورهای  $x_1$  و  $x_2$ ، در وسط ضخامت نانو صفحه (تار خنثی) قبل از تغییر شکل قرار گرفته باشد.

### ۲-۲- فرضیات نظری مرتبه سوم برشی

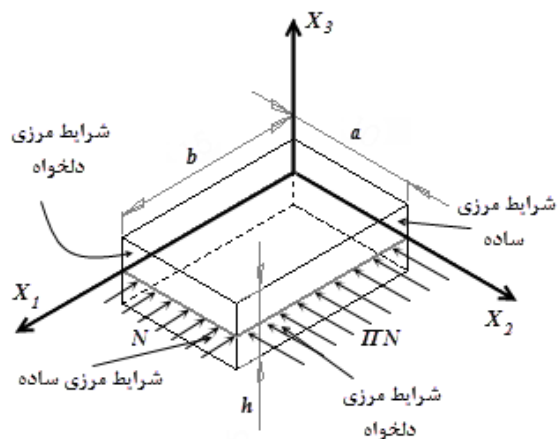
میدان‌های جابه‌جایی نانو صفحه در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم، تابعی درجه سوم از ضخامت و تغییر شکل عرضی می‌باشد و بصورت روابط (۱) تعریف می‌شوند.

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) + x_3 \psi_1(x_1, x_2, t) - \frac{4x_3^3}{3h^2} (\psi_1(x_1, x_2, t) + \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1})$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, t) + x_3 \psi_2(x_1, x_2, t) - \frac{4x_3^3}{3h^2} (\psi_2(x_1, x_2, t) + \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2})$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_2, t) \quad (1)$$

که در آن  $u$  و  $v$  و  $w$  به ترتیب جابه‌جایی وسط صفحه در راستای محورهای  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$ ،  $\psi_1$  و  $\psi_2$  به ترتیب نشان‌دهنده چرخش نرمال عمود بر وسط صفحه حول محورهای  $x_2$  و  $x_1$  و  $t$  زمان می‌باشد.



شکل ۱ شماتیک صفحه مستطیل شکل با شرایط مرزی لوی

بر مبنای قانون هوک، روابط جابه‌جایی-تنش بصورت رابطه (۲) تعریف می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \text{Local} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} u_{,1} + \nu v_{,2} \\ v_{,1} + \nu u_{,1} \\ \frac{1-\nu}{2}(u_{,2} + v_{,1}) \\ \frac{1-\nu}{2}(\psi_2 + w_{,2}) \\ \frac{1-\nu}{2}(\psi_1 + w_{,1}) \end{Bmatrix}$$

$$+ x_3 \begin{Bmatrix} \psi_{1,1} + \nu \psi_{2,2} \\ \psi_{2,2} + \nu \psi_{1,1} \\ \frac{1-\nu}{2}(\psi_{1,2} + \nu \psi_{2,1}) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$- \frac{4x_3^2}{h^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1-\nu}{2}(\psi_2 + w_{,2}) \\ \frac{1-\nu}{2}(\psi_1 + w_{,1}) \end{Bmatrix}$$

$$- \frac{4x_3^3}{h^2} \begin{Bmatrix} (\psi_{1,1} + w_{,11}) + \nu(\psi_{2,2} + w_{,22}) \\ (\psi_{2,2} + w_{,22}) + \nu(\psi_{1,1} + w_{,11}) \\ \frac{1-\nu}{2}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1} + 2w_{,12}) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

در معادله (۲)،  $E$  مدول الاستیسیته و  $\nu$  نسبت پواسون است.

### ۲-۳- معادلات حرکت

در اینجا، با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکت غیرمحملی بر اساس روش مورد استفاده در مرجع [۲] بدست آمده است:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} = 0 \quad (3-الف)$$

غیرمحملی و دینامیک شبکه<sup>۲</sup> برای ساختارهای کریستالی نانو مواد با یکدیگر مقایسه شوند. هم چنین نشان داده شده است که مقدار قابل قبول و منطقی برای پارامتر غیرمحملی، بین بازه ۰ تا ۴ نانومتر مربع می‌باشد. به همین دلیل در این پژوهش، مقدار این پارامتر در این بازه در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی برای لبه‌های موازی با محور  $x_1$  به صورت روابط (۶) تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} \psi_2 = 0 \quad \text{یا} \quad M_6 - \frac{4}{3h^2} P_6 = 0, \\ \psi_2 = 0 \quad \text{یا} \quad M_2 - \frac{4}{3h^2} P_2 = 0, \\ w_{,2} = 0 \quad \text{یا} \quad P_2 = 0, \\ w = 0 \quad \text{یا} \\ Q_2 - \frac{4R_2}{h^2} + \frac{4}{3h^2} \left( 2 \frac{\partial P_6}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} \right) - N_{xx} w_{,2} = 0 \end{aligned} \quad (۶)$$

از آنجا که در این مقاله، کماتش نانو صفحه مستطیلی بررسی می‌شود جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای اولیه  $u$  و  $v$  در رابطه (۱) باید صفر باشد. از طرفی، رابطه بین معادلات (۳-الف) و (۳-ب) با معادلات (۳-ج تا ه) با فرض  $I_2 = \bar{I}_2 = I_4 = 0$  از بین رفته است. در نتیجه، با جایگذاری روابط (۴) و (۵) در رابطه (۳-ج تا ه) و با استفاده از قانون هوک، معادلات حرکت (روابط ۷) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} D \left[ \frac{68}{210} (1-\nu) \nabla^2 \psi_1 + \frac{68}{210} (1+\nu) (\psi_{1,11} + \psi_{2,12}) - \frac{16}{105} \nabla^2 w_{,1} - \frac{16}{5h^2} (1-\nu) (\psi_1 + w_{,1}) \right] = 0 \\ D \left[ \frac{68}{210} (1-\nu) \nabla^2 \psi_2 + \frac{68}{210} (1+\nu) (\psi_{1,11} + \psi_{2,12}) - \frac{16}{105} \nabla^2 w_{,2} - \frac{16}{5h^2} (1-\nu) (\psi_2 + w_{,2}) \right] = 0 \\ D \left[ \frac{16}{105} \nabla^2 (\psi_{1,1} + \psi_{2,2}) + \frac{16(1-\nu)}{5h^2} (\psi_{1,1} + \psi_{2,2}) + \frac{16(1-\nu)}{5h^2} \nabla^2 w - \frac{\nabla^4 w}{21} \right] + N_{xx} (\nabla^2 w - \mu \nabla^4 w) = 0 \end{aligned}$$

$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  سختی خمشی، و  $\nabla^2$  نشان‌دهنده عملگر لاپلاس بوده و بصورت رابطه (۸) تعریف می‌شود.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (۸)$$

## 2. Lattice dynamics

$$\frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial N_6}{\partial x_1} = 0 \quad (۳-ب)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \frac{4}{h^2} \left( \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \right) + \frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 p_6}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_2^2} \right) + (1 - \mu \nabla^2) (N_{xx} w_{,xx} + II N_{xx} w_{,yy}) = 0 \end{aligned} \quad (۳-ج)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_6}{\partial x_2} - \frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_6}{\partial x_2} \right) - Q_1 + \frac{4R_1}{h^2} = 0 \quad (۳-د)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial M_6}{\partial x_1} - \frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_6}{\partial x_1} \right) - Q_2 + \frac{4R_2}{h^2} = 0 \quad (۳-ه)$$

در معادله (۳-ج)،  $II = N_{xx}/N_{yy} = 1$  و متغیرهای  $N_i, P_i, M_i$  و اینرسی  $I_i$  ( $i=1,2,3,4,4,6,7$ ) بصورت روابط (۴) و (۵) تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(1, x_3, x_3^2, x_3^3, x_3^4, x_3^6) dx_3 \\ \bar{I}_2 = I_2 - \frac{4I_4}{3h^2}; \bar{I}_5 = I_5 - \frac{4I_7}{3h^2}; \bar{I}_3 = I_3 - \frac{8I_5}{3h^2} + \frac{16I_7}{9h^4} \end{aligned} \quad (۴)$$

$$(N_i, M_i, P_i) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_i(1, x_3, x_3^3) dx_3; \quad (i=1, 2, 6)$$

$$(Q_1, R_1) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_5(1, x_3^2) dx_3,$$

$$(Q_2, R_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_4(1, x_3^2) dx_3,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_1; \sigma_{22} = \sigma_2; \sigma_{23} = \sigma_4; \sigma_{13} = \sigma_5; \sigma_{12} = \sigma_6 \quad (۵)$$

همان طور که از معادله (۳-ج) مشخص است پارامتر غیرمحملی،  $\mu$ ، در معادلات حرکت ظاهر شده است. مقدار پارامتر غیرمحملی، یک عدد ثابت و مشخصی نبوده و به شرایط تکیه‌گاهی، عدد مد، تعداد دیواره‌ها و لایه‌ها، و همچنین به ماهیت حرکت بستگی دارد. تا به امروز، منابع اندکی وجود دارد که مقدار دقیق این پارامتر را گزارش کرده باشد [۱۷، ۱۹]. منابع موجود در این زمینه برای بدست آوردن این پارامتر پیشنهاد می‌کنند تا منحنی‌های انتشار<sup>۱</sup> مکانیک محیط پیوسته

## 1. Dispersion curves

(۱۱)، معادلات (۱۲-ب) و (۱۲-ج) را می‌توان بصورت معادلات (۱۳-الف) و (۱۳-ب) بازنویسی کرد.

$$L_1(\phi) = \left(\frac{16}{105}\right) \nabla^4 \tilde{w} + \left(\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}\right) \nabla^2 \tilde{w} \quad (۱۳-الف)$$

$$L_2(\phi) = \left(\frac{1}{21}\right) \nabla^4 \tilde{w} - \left(\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}\right) \nabla^2 \tilde{w} \quad (۱۳-ب)$$

و با جایگذاری معادله (۱۳-الف) در معادله (۱۳-ب)، تابع پتانسیل  $\phi$  بصورت رابطه (۱۴) بدست می‌آید.

$$\phi = e_1 \nabla^4 \tilde{w} + e_2 \nabla^2 \tilde{w} \quad (۱۴)$$

که

$$e_1 = -\frac{12\tau^2(1+85N\xi^2)}{4032(\nu-1)}; e_2 = \frac{4032(\nu-1)-1020\tau^2(N)}{4032(1-\nu)}$$

هم چنین، پس از انجام یک سری عملیات ریاضی، معادله (۱۵) با استفاده از روابط (۱۳-الف)، (۱۳-ب) و (۱۴) بدست می‌آید.

$$\nabla^6 \tilde{w} + a_1 \nabla^4 \tilde{w} + a_2 \nabla^2 \tilde{w} = 0 \quad (۱۵)$$

که ضرایب  $a_1$  و  $a_2$  عبارتند از:

$$a_1 = \frac{2(12(2520(\nu-1)) + 60N(-102\tau^2 + \xi^2(504(\nu-1))))}{144\tau^2(1+85N\xi^2)}$$

$$a_2 = \frac{-60N(1008(\nu-1)) + 120\xi^2(504(\nu-1))}{144\tau^2(1+85N\xi^2)}$$

برای حل معادله (۱۵)، رابطه (۱۶) تعریف شده است که در آن روابط (۱۷) برقرارند.

$$\tilde{w} = W_1 + W_2 + W_3 \quad (۱۶)$$

$$\nabla^2 W_1 + \alpha_1^2 W_1 = 0; \quad \nabla^2 W_2 + \alpha_2^2 W_2 = 0;$$

$$\nabla^2 W_3 + \alpha_3^2 W_3 = 0, \quad (۱۷)$$

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \quad (۱۸)$$

$\alpha_1^2$ ،  $\alpha_2^2$  و  $\alpha_3^2$  ریشه‌های معادله (۱۸) می‌باشند و بصورت روابط زیر می‌باشند.

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{6A} (2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} (a_1^2 - 3a_2) - 2a_1 A + 2^{\frac{2}{3}} A^2)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{4(i \cdot 2^{\frac{1}{2}} (i + \sqrt{3})(a_1^2 - 3a_2) - a_1 A - 2^{\frac{4}{3}} (1 + i\sqrt{3}) A^2)}{12A}$$

$$\alpha_3^2 = \frac{(i \cdot 2^{\frac{4}{3}} (1 + i\sqrt{3}) A^2 - 2^{\frac{1}{2}} i (-i + \sqrt{3})(a_1^2 - 3a_2) - a_1 A)}{3A}$$

کاما پس از ۱، ۲ یا ۳ به ترتیب مشتق نسبت به  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  را نشان می‌دهد. برای سهولت و جامعیت بیشتر، متغیرهای بدون بعدی بصورت روابط (۹) معرفی شده‌اند.

$$X_1 = \frac{x_1}{a}; X_2 = \frac{x_2}{a}; \eta = \frac{b}{a}; \tau = \frac{h}{a}; \bar{\psi}_2 = \psi_2$$

$$\xi^2 = \frac{\mu}{a^2}; \tilde{N} = \frac{a^2}{D} N_{xx}; \bar{w} = \frac{w}{a}; \bar{\psi}_1 = \psi_1 \quad (۹)$$

نهایتاً، سه معادله حرکت بدون بعد نانو صفحه ضخیم تحت بار فشاری دو محوره در فضای الاستیسیته غیرمحللی به صورت معادلات (۱۰-الف تا ج) بدست می‌آیند.

$$\frac{68}{210}(1-\nu)\nabla^2 \tilde{\psi}_1 + \frac{68}{210}(1+\nu)(\tilde{\psi}_{1,11} + \tilde{\psi}_{2,12}) - \frac{16}{105}\nabla^2 \tilde{w}_{,1} - \frac{16}{5\tau^2}(1-\nu)(\tilde{\psi}_1 + \tilde{w}_{,1}) = 0 \quad (۱۰-الف)$$

$$\frac{68}{210}(1-\nu)\nabla^2 \tilde{\psi}_2 + \frac{68}{210}(1+\nu)(\tilde{\psi}_{2,22} + \tilde{\psi}_{1,12}) - \frac{16}{105}\nabla^2 \tilde{w}_{,2} - \frac{16}{5\tau^2}(1-\nu)(\tilde{\psi}_2 + \tilde{w}_{,2}) = 0 \quad (۱۰-ب)$$

$$\frac{16}{105}\nabla^2(\tilde{\psi}_{1,1} + \tilde{\psi}_{2,2}) - \xi^2\left(\frac{1}{21} + \tilde{N}\right)\nabla^4 \tilde{w} + \frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}(\tilde{\psi}_{1,1} + \tilde{\psi}_{2,2}) \times \left(\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2} + \tilde{N}\right)\nabla^2 \tilde{w} = 0$$

(۱۰-ج)

#### ۲-۴- روش حل دقیق

با مشتق گرفتن از معادلات (۱۰-الف) و (۱۰-ب) به ترتیب نسبت به  $x_1$  و  $x_2$  و سپس ترکیب آنها، معادله جدیدی بصورت معادله (۱۱) حاصل می‌شود.

$$\frac{68}{105}\nabla^2(\tilde{\psi}_{1,1} + \tilde{\psi}_{2,2}) - \frac{16}{105}\nabla^4 \tilde{w} - \frac{16}{5\tau^2}(1-\nu)(\tilde{\psi}_{1,1} + \tilde{\psi}_{2,2} + \nabla^2 \tilde{w}) = 0 \quad (۱۱)$$

حال، تابع پتانسیل  $\phi$  و دو اپراتور لاپلاس  $L_1$  و  $L_2$  بصورت روابط (۱۲-الف تا ج) تعریف می‌شوند.

$$\phi = \tilde{\psi}_{1,1} + \tilde{\psi}_{2,2} \quad (۱۲-الف)$$

$$L_1 = \left(\frac{68}{105}\right) \nabla^2 - \frac{16(1-\nu)}{5\tau^2} \quad (۱۲-ب)$$

$$L_2 = \left(\frac{16}{105}\right) \nabla^2 + \frac{16(1-\nu)}{5\tau^2} \quad (۱۲-ج)$$

با جایگذاری معادلات (۱۲-الف تا ج) در معادلات (۱۰-ج) و

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 = 0, \quad \tilde{P}_2 = 0, \quad \tilde{M}_6 - \frac{4}{3}\tilde{P}_6 = 0 \quad \text{آزاد} \\ \tilde{Q}_2 - 4\tilde{R}_2 + \frac{8\tau^2}{3(1-\nu)}\left(\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial x_2}\right) \\ + \frac{8\tau^2}{3}\frac{\partial \tilde{P}_6}{\partial x_1} + \frac{\tau^2}{6(1-\nu)}\tilde{N}w_{,2} = 0 \quad \text{(۲۲-الف)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w} = 0, \quad \tilde{\psi}_1 = 0, \quad \tilde{M}_2 = 0, \quad \tilde{P}_2 = 0 \quad \text{(۲۲-ب)} \\ \tilde{w} = 0, \quad \tilde{\psi}_1 = 0, \quad \tilde{w}_{,2} = 0, \quad \tilde{\psi}_2 = 0 \quad \text{(۲۲-ج)} \end{aligned}$$

که در آنها روابط زیر برقرار می‌باشند.

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 = \frac{aM_1}{12D}, \quad \tilde{M}_2 = \frac{aM_2}{12D}, \quad \tilde{M}_6 = \frac{aM_6}{Gh^3} \\ \tilde{P}_1 = \frac{aP_1}{12h^2D^1}, \quad \tilde{P}_2 = \frac{aP_2}{12h^2D}, \quad \tilde{P}_6 = \frac{aP_6}{Gh^5} \\ \tilde{Q}_1 = \frac{Q_1}{Gh}, \quad \tilde{Q}_2 = \frac{Q_2}{Gh}, \quad \tilde{R}_1 = \frac{R_1}{Gh^3}, \quad \tilde{R}_2 = \frac{R_2}{Gh^3} \end{aligned}$$

$G = E/2(1+\nu)$  مدول برشی است.

### ۲-۵- حل نوع لوی

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد اگر دو لبه مقابل، دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده باشند، صفحه از نوع لوی نامیده می‌شود. با تغییر اندیس‌های ۱ و ۲ در معادلات (۲۱)، شرایط مرزی مختلف برای لبه‌های  $x_1=0$  و  $x_1=1$  به دست می‌آید. با توجه به شکل ۱، که شرایط مرزی نانو صفحه در راستای  $x_1=0$  و  $x_1=1$  به صورت ساده در نظر گرفته شده است، و اعمال آن بر معادلات (۲۱)، روابط ساده شده (۲۳) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} W_1 = [A_1 \text{Sinh}(\xi_1 X_2) + A_2 \text{Cosh}(\xi_1 X_2)] \text{Sin}(\theta_1 X_1); \\ W_2 = [A_3 \text{Sinh}(\xi_2 X_2) + A_4 \text{Cosh}(\xi_2 X_2)] \text{Sin}(\theta_2 X_1); \\ W_3 = [A_5 \text{Sin}(\xi_3 X_2) + A_6 \text{Cos}(\xi_3 X_2)] \text{Sin}(\theta_3 X_1); \\ W_4 = [A_7 \text{Sinh}(\xi_4 X_2) + A_8 \text{Cosh}(\xi_4 X_2)] \text{Sin}(\theta_4 X_1); \\ \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = m\pi \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{(۲۳)} \end{aligned}$$

با جایگذاری روابط (۲۳) در چهار شرط مرزی (روابط ۲۲-الف تا ج) در امتداد لبه‌های  $x_2=0$  و  $x_2=\eta$ ، دترمینان مشخصه مرتبه هشت به ازای هر  $m$  بدست می‌آید. پس از بسط و ساده‌سازی دترمینان ضرایب، فرم تحلیلی معادلات مشخصه برای هر یک از شرایط مرزی به صراحت به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} A = (-2a_1^3 + 9a_1 a_2 - 27a_3 \\ + \sqrt{-4(a_1^2 - 3a_2)^3 + (2a_1^3 - 9a_1 a_2 + 27a_3)^2})^{1/3} \end{aligned}$$

با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۶) در معادلات (۱۰-الف تا ج)، متغیرهای  $\tilde{\psi}_1$  و  $\tilde{\psi}_2$  بصورت معادلات (۱۹-الف) و (۱۹-ب) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 = C_1 W_{1,1} + C_2 W_{2,1} + C_3 W_{3,1} + W_{4,2} \quad \text{(۱۹-الف)} \\ \tilde{\psi}_2 = C_1 W_{1,2} + C_2 W_{2,2} + C_3 W_{3,2} - W_{4,1} \quad \text{(۱۹-ب)} \end{aligned}$$

در روابط فوق، رابطه زیر برقرار است و  $i=1,2,3$

$$C_i = \frac{2\tau^2 \left( \begin{aligned} & -24\alpha_i^2 - \frac{504(\nu-1)}{\tau^2} - \frac{17(1+\nu)}{1344(\nu-1)} \\ & \times \left( \alpha_i^4 \tau^2 (-12 - 1020N\xi^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_i^2 (4032(\nu-1) - 1020\tau^2 N) \right) \right)}{(-1008 + 36\nu(28 - 17\alpha_i^2 \tau^2))}$$

هم‌چنین:

$$\nabla^2 W_4 + \alpha_4^2 W_4 = 0; \quad \alpha_4^2 = \frac{-1008}{102\tau^2} \quad \text{(۲۰)}$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، یک مجموعه جواب برای معادلات (۱۶) و (۱۹-الف و ب) به صورت معادلات (۲۱) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} W_1 = [A_1 \text{Sinh}(\xi_1 X_2) + A_2 \text{Cosh}(\xi_1 X_2)] \text{Sin}(\theta_1 X_1) \\ + [B_1 \text{Sinh}(\xi_1 X_2) + B_2 \text{Cosh}(\xi_1 X_2)] \text{Cos}(\theta_1 X_1); \\ W_2 = [A_3 \text{Sinh}(\xi_2 X_2) + A_4 \text{Cosh}(\xi_2 X_2)] \text{Sin}(\theta_2 X_1) \\ + [B_3 \text{Sinh}(\xi_2 X_2) + B_4 \text{Cosh}(\xi_2 X_2)] \text{Cos}(\theta_2 X_1); \\ W_3 = [A_5 \text{Sin}(\xi_3 X_2) + A_6 \text{Cos}(\xi_3 X_2)] \text{Sin}(\theta_3 X_1) \\ + [B_5 \text{Sin}(\xi_3 X_2) + B_6 \text{Cos}(\xi_3 X_2)] \text{Cos}(\theta_3 X_1); \\ W_4 = [A_7 \text{Sinh}(\xi_4 X_2) + A_8 \text{Cosh}(\xi_4 X_2)] \text{Sin}(\theta_4 X_1) \\ + [B_7 \text{Sinh}(\xi_4 X_2) + B_8 \text{Cosh}(\xi_4 X_2)] \text{Cos}(\theta_4 X_1); \end{aligned} \quad \text{(۲۱)}$$

در رابطه (۲۱) روابط زیر برقرار می‌باشند.

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 = \xi_1^2 + \theta_1^2; \quad \xi_1^2 < 0, \theta_1^2 > 0 \\ \alpha_2^2 = \xi_2^2 + \theta_2^2; \quad \xi_2^2 < 0, \theta_2^2 > 0 \\ \alpha_3^2 = \xi_3^2 + \theta_3^2; \quad \xi_3^2 < 0, \theta_3^2 > 0 \\ \alpha_4^2 = \xi_4^2 + \theta_4^2; \quad \xi_4^2 < 0, \theta_4^2 > 0 \end{aligned}$$

بر اساس تئوری مرتبه سوم برشی غیرمحلّی صفحات، شرایط مرزی برای یک لبه، بعنوان مثال برای محور  $x_1$ ، به صورت معادلات بدون بعد (۲۲) به دست می‌آید.

## ۳- تحلیل نتایج

غیرمحل، افزایش می‌یابد.

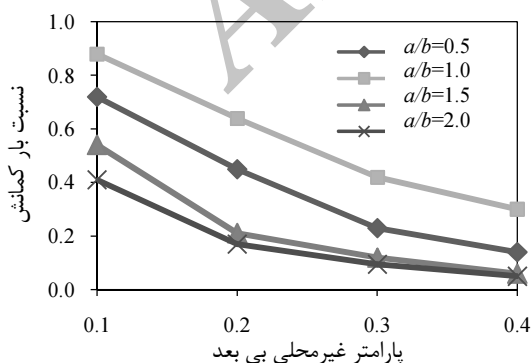
جدول ۱ نسبت بار بحرانی کمانش نانو صفحه با شرایط مرزی SSSS به ازای پارامترهای غیرمحل مختلف

طول ضلع (a)	روش حل	$\sqrt{\mu}$			
		۲/۰	۱/۵	۱/۰	۰/۵
۵	دی.کیوام [۲۰]	۰/۲۴۲	۰/۳۶۱	۰/۵۶۰	۰/۸۳۵
	روش دقیق	۰/۲۴۱	۰/۳۶۰	۰/۵۵۹	۰/۸۳۵
۱۵	دی.کیوام [۲۰]	۰/۱۸۸۹	۰/۹۳۵	۰/۹۷۰	۰/۹۹۳
	روش دقیق	۰/۱۸۸۸	۰/۹۳۱	۰/۹۶۹	۰/۹۹۲

## ۳-۲- نتایج معیار

پس از تایید صحت و دقت بالای حل دقیق ارائه شده، نتایج جدید زیر برای تحلیل کمانش نانو صفحات مستطیل شکل ردی نوع لوی را می‌توان به عنوان یک معیار برای تحقیقات آینده مورد استفاده قرار داد.

در جدول ۲، بارهای کمانش بی بعد دقیق ( $\tilde{N}_{cr}^{nl}$ ) و نسبت بار کمانش دقیق ( $N_{cr}^{nl}/N_{cr}^l$ ) (مقادیر داده شده در پرانتز)، برای نانو صفحات مستطیلی نوع لوی با شش شرایط مرزی مختلف (SSSS، SCSC، SSSF، SCSF و SFSF) داده شده است. به ازای هر یک از شرایط مرزی، اثرات مقادیر مختلف پارامتر غیرمحل بی بعد (۰/۴، ۰/۳، ۰/۲، ۰/۱)، نسبت ابعاد (۰/۱، ۰/۱۵) و  $\sqrt{\mu/a}=0/10$  و طول ( $h/a=0/10$ ) روی بارهای کمانش بی بعد دقیق و نسبت بار کمانش بررسی شده است. شکل‌های ۲ تا ۵ نیز برای درک بهتر نتایج بدست آمده، رسم شده است.



شکل ۲ تغییرات نسبت بار کمانش با پارامتر غیرمحل بی بعد  $\sqrt{\mu/a}$  به ازای نسبت ابعاد مختلف صفحه نانو ( $\tau=0.1$ ).

نتایج برجسته‌ای که از جدول ۲ قابل ذکر است عبارتند از:

از آنجا که روش مورد استفاده در این مقاله یک روش تحلیلی دقیق می‌باشد، محاسبه دقیق بار کمانش نانو صفحات مستطیلی لوی با شرایط مرزی مختلف، آزاد ( $F$ )، ساده ( $S$ ) و گیردار ( $C$ ) به آسانی امکان‌پذیر می‌باشد. در این بخش، نتایج به ازای مقادیر مختلف نسبت ابعاد ( $a/b$ )، نسبت ضخامت به طول ( $h/L$ ) و پارامتر غیرمحل ( $\mu$ )، و بصورت بارهای کمانش بی بعد و نسبت بار کمانش ارائه شده‌اند. پارامتر بار بحرانی کمانش بدون بعد به صورت  $\tilde{N}_{cr} = N_{cr} a^2 / D$  و نسبت بار کمانش توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{بار بحرانی کمانش بدون بعد غیرمحل} \\ (BLR) &= \frac{\text{بار بحرانی کمانش بدون بعد محلی}}{\text{بار بحرانی کمانش بدون بعد محلی}} \\ &= \frac{\tilde{N}_{cr}^{nl}}{\tilde{N}_{cr}^{cl}} \end{aligned}$$

برای اختصار و بعنوان مثال،  $SCSF$  نشان دهنده نانو صفحه مستطیلی‌ای است که لبه‌های  $x_1=0$ ،  $x_2=0$ ،  $x_1=a$  و  $x_2=b$  آن به ترتیب دارای شرایط مرزی ساده، گیردار، ساده و آزاد می‌باشد.

## ۳-۱- اعتبارسنجی نتایج

در این بخش، به منظور تایید نتایج بدست آمده از روش حل دقیق، نتایج حاضر با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. همان طور که پیشتر در مقدمه ذکر شد، مراجع کمی برای تحلیل کمانش صفحات نانو بر اساس تئوری‌های مختلف صفحه وجود دارد. اشاره به این نکته نیز ضروری است که در بسیاری از این منابع به تحلیل صفحات نانو با شرایط مرزی ناوبر که در آن تمام لبه‌ها دارای شرایط مرزی ساده می‌باشند توجه شده است، در حالیکه در تعداد کمی از موارد، ترکیبی از شرایط مرزی گیردار و ساده مشاهده شده است.

در جدول ۱، نسبت بار کمانش بحرانی به دست آمده توسط حل دقیق و روش دی.کیوام [۲۰] برای نانو صفحه مربعی با شرایط مرزی ساده، و به ازای طول صفحه و پارامترهای غیرمحل مختلف مقایسه شده است. جدول ۱، مطابقت بسیار خوبی را بین نتایج نشان می‌دهد. همچنین از جدول ۱ مشاهده می‌شود که نتایج دقیق ارائه شده در بسیاری از موارد، کمی پایین‌تر از روش دی.کیوام بوده و تفاوت بین نتایج حل دقیق ارائه شده و روش دی.کیوام، با افزایش طول ضلع و یا پارامتر

مقدار این اثر افزایشی از مقدار اثر کاهشی آن بسیار کم‌تر است. (ج) اثر پارامتر غیرمحلّی روی نسبت بارکمانش، مستقل از نسبت ضخامت به طول نانو ورق می‌باشد (شکل ۴). (د) اثر پارامتر غیرمحلّی روی نسبت بار کمانش نانو ورق را بر اساس شرایط مرزی، می‌توان به ترتیب زیر بیان کرد:  $SFSF < SSSS < SFSC < SSSS < SSSC < SCSC$  از ترتیب فوق می‌توان نتیجه‌گیری نمود که استفاده از شرایط مرزی سخت‌تر در دو لبه‌ای که می‌توانند ترکیبی از شرایط تکیه‌گاهی ساده، گیردار و آزاد داشته باشند موجب افزایش اثر کاهشی پارامتر غیرمحلّی بر بار کمانش بحرانی می‌شود (شکل ۵).

(الف) با افزایش پارامتر غیرمحلّی، بار کمانشی کاهش می‌یابد. به بیان دیگر، بطور کلی می‌توان گفت پارامتر غیرمحلّی اثری کاهشی بر بارهای کمانش نانو صفحات دارد (شکل ۲). (ب) برای صفحات نانو با شرایط مرزی  $SCSC$ ،  $SSSS$ ،  $SFSF$  و  $SFSC$ ، با افزایش نسبت ابعاد نانو صفحه  $(a/b)$ ، اثر کاهشی پارامتر غیرمحلّی روی نسبت بارکمانش افزایش می‌یابد در حالی که این نتیجه‌گیری برای نانو صفحه با شرایط مرزی  $SFSF$  صادق نیست (شکل ۳). در واقع، با افزایش نسبت ابعاد نانو صفحه با شرایط مرزی  $SFSF$ ، پارامتر غیرمحلّی اثری افزایشی بر بارهای کمانش دارد. همچنین،

جدول ۲ بار کمانش بی‌بعد  $\bar{N}_{cr} = N_{cr} a^2 / D$  و نسبت بارکمانش  $(N_{cr}^{nl} / N_{cr}^l)$  به ازای پارامترهای غیرمحلّی بی‌بعد مختلف  $\xi = \sqrt{\mu} / a$

$\bar{N}_{cr}(N_{cr}^{nl}/N_{cr}^l)$					$h/a$	$a/b$	شرایط مرزی
$\xi=0.14$	$\xi=0.13$	$\xi=0.12$	$\xi=0.11$	$\xi=0.1$			
۴/۴۹۳۷(۰/۲۴۱)	۶/۷۲۰۰(۰/۳۶۰)	۱۰/۴۴۸۰(۰/۵۵۹)	۱۵/۶۰۵۷(۰/۸۳۵)	۱۸/۶۸۶۱(۱)	۰/۱۰	۱/۰	SSSS
۴/۷۵۰۶(۰/۲۴۱)	۷/۱۰۳۰(۰/۳۶۰)	۱۱/۰۱۳۶(۰/۵۵۹)	۱۶/۴۹۱۶(۰/۸۳۵)	۱۹/۷۲۸۱(۱)	۰/۰۱		
۴/۰۰۷۲(۰/۳۳۶)	۶/۷۲۸۹(۰/۵۷۶)	۷/۹۷۹۴(۰/۶۷۰)	۱۰/۶۰۸۴(۰/۸۹۰)	۱۱/۹۱۷۱(۱)	۰/۱۰	۰/۵	
۴/۱۴۷۸(۰/۳۳۶)	۷/۱۰۵۲(۰/۵۷۶)	۸/۲۵۷۷(۰/۶۷۰)	۱۰/۹۷۸۲(۰/۸۹۰)	۱۲/۳۳۲۷(۱)	۰/۰۱		
۴/۸۰۴۵(۰/۱۴۴)	۷/۶۵۲۲(۰/۲۲۷)	۱۳/۳۴۷۴(۰/۴۰۰)	۲۴/۲۴۵۹(۰/۷۲۷)	۳۳/۳۴۰۰(۱)	۰/۱۰	۱/۰	SCSC
۵/۳۵۵۸(۰/۱۴۴)	۸/۵۶۸۴(۰/۲۲۷)	۱۵/۰۲۴۴(۰/۴۰۰)	۲۷/۹۷۱۱(۰/۷۲۷)	۳۷/۷۴۷۶(۱)	۰/۰۱		
۴/۱۸۴۹(۰/۳۰۰)	۶/۰۳۰۶(۰/۴۳۲)	۸/۸۰۷۳(۰/۶۳۲)	۱۲/۱۷۱۲(۰/۸۷۳)	۱۳/۹۴۶۵(۱)	۰/۱۰	۰/۵	
۴/۳۷۵۶(۰/۳۰۰)	۶/۳۰۸۵(۰/۴۳۲)	۹/۲۱۹۵(۰/۶۳۲)	۱۲/۷۴۷۰(۰/۸۷۳)	۱۴/۶۱۰۳(۱)	۰/۰۱		
۴/۶۷۱۳(۰/۱۹۳)	۷/۲۱۱۸(۰/۲۹۸)	۱۱/۸۱۵۹(۰/۴۸۸)	۱۹/۱۷۳۸(۰/۷۹۲)	۲۴/۱۹۸۸(۱)	۰/۱۰	۱/۰	SSSC
۵/۰۴۰۸(۰/۱۹۳)	۷/۷۹۹۹(۰/۲۹۸)	۱۲/۷۸۶۲(۰/۴۸۸)	۲۰/۷۹۳۶(۰/۷۹۲)	۲۶/۲۵۰۰(۱)	۰/۰۱		
۴/۰۸۵۰(۰/۳۲۱)	۵/۸۱۰۰(۰/۴۵۶)	۸/۳۲۳۶(۰/۶۵۴)	۱۱/۲۴۰۹(۰/۸۸۳)	۱۲/۷۲۷۸(۱)	۰/۱۰	۰/۵	
۴/۲۴۳۸(۰/۳۲۱)	۶/۰۳۸۳(۰/۴۵۶)	۸/۶۵۰۳(۰/۶۵۴)	۱۱/۶۸۵۰(۰/۸۸۳)	۱۳/۲۳۲۰(۱)	۰/۰۱		
۳/۹۴۱۷(۰/۴۴۵)	۴/۹۱۱۶(۰/۵۵۴)	۶/۵۰۹۴(۰/۷۳۵)	۸/۰۹۴۵(۰/۹۱۴)	۸/۸۵۳۹(۱)	۰/۱۰	۱/۰	SFSF
۳/۷۰۱۵(۰/۴۴۵)	۵/۰۱۸۰(۰/۵۵۴)	۶/۶۶۱۰(۰/۷۳۵)	۸/۳۵۶۹(۰/۹۱۴)	۹/۱۸۷۵(۱)	۰/۰۱		
۳/۵۶۹۰(۰/۳۹۸)	۴/۸۹۹۰(۰/۵۴۲)	۶/۵۶۵۰(۰/۷۲۵)	۸/۲۳۹۲(۰/۹۱۰)	۹/۰۴۹۸(۱)	۰/۱۰	۰/۵	
۳/۷۴۰۹(۰/۳۹۸)	۵/۰۸۵۰(۰/۵۴۲)	۶/۷۹۲۳(۰/۷۲۵)	۸/۸۳۷۶(۰/۹۱۰)	۹/۳۸۷۹(۱)	۰/۰۱		
۳/۱۴۶۰(۰/۳۶۳)	۵/۳۶۷۷(۰/۵۱۱)	۷/۴۱۲۸(۰/۷۰۱)	۹/۴۴۲۸(۰/۸۹۹)	۱۰/۵۰۵۱(۱)	۰/۱۰	۱/۰	SFSC
۴/۰۸۳۱(۰/۳۶۳)	۵/۷۴۱۱(۰/۵۱۱)	۷/۸۷۶۶(۰/۷۰۱)	۱۰/۰۵۸۴(۰/۸۹۹)	۱۱/۲۳۷۰(۱)	۰/۰۱		
۳/۶۰۸۷(۰/۳۸۷)	۵/۰۹۳۳(۰/۵۳۱)	۶/۷۷۵۴(۰/۷۱۵)	۸/۵۵۵۱(۰/۹۰۶)	۹/۴۴۱۰(۱)	۰/۱۰	۰/۵	
۳/۸۲۵۵(۰/۳۸۷)	۵/۲۴۳۲(۰/۵۳۱)	۷/۰۶۵۱(۰/۷۲۵)	۸/۹۲۸۲(۰/۹۰۶)	۹/۸۷۱۶(۱)	۰/۰۱		
۳/۶۴۴۷(۰/۳۷۸)	۵/۰۹۶۸(۰/۵۲۳)	۶/۹۸۷۰(۰/۷۰۹)	۸/۸۶۴۹(۰/۹۰۱)	۹/۸۳۸۶(۱)	۰/۱۰	۱/۰	SSSF
۳/۹۱۹۷(۰/۳۷۸)	۵/۴۲۵۷(۰/۵۲۳)	۷/۳۶۰۶(۰/۷۰۹)	۹/۳۳۷۴(۰/۹۰۱)	۱۰/۳۸۱۱(۱)	۰/۰۱		
۳/۶۰۴۴(۰/۳۸۹)	۴/۹۹۳۰(۰/۵۳۳)	۶/۷۳۹۵(۰/۷۱۷۳)	۸/۵۰۲۰(۰/۹۰۶)	۹/۳۸۱۰(۱)	۰/۱۰	۰/۵	
۳/۸۰۹۰(۰/۳۸۹)	۵/۲۱۲۲(۰/۵۳۳)	۷/۰۱۴۰(۰/۷۱۷۳)	۸/۸۵۴۰(۰/۹۰۶)	۹/۷۷۷۵(۱)	۰/۰۱		



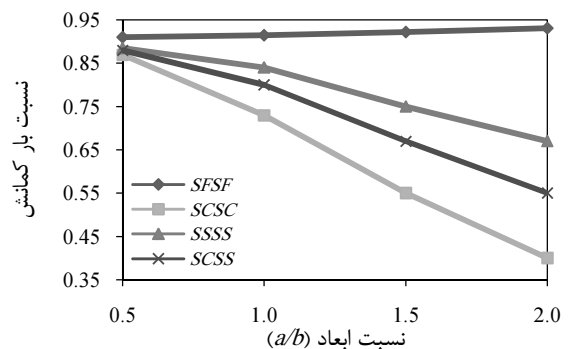
یانگ معادل در نظر گرفت. بنابراین استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر صفحه، تئوری ردی، برای تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق گرافن چندلایه منطقی به نظر می‌رسد. سه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی پیچیده حاکم بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم غیرمحللی صفحه، به روش دقیق تحلیلی با استفاده از روش جداسازی متغیرها، حل شده است. مشاهده شده است با افزایش نسبت ابعاد نانو صفحه با شرایط مرزی  $SCSC$ ،  $SSSS$ ،  $SFSC$  و  $SFSF$ ، اثر کاهش پارامتر غیرمحللی روی نسبت بار کمانش افزایش می‌یابد در حالی که برای نانو صفحه با شرایط مرزی  $SFSF$ ، نتیجه‌گیری دیگر می‌توان اثر پارامتر غیرمحللی روی نسبت بار کمانش نانو ورق را بر اساس شرایط مرزی، به ترتیب زیر بیان نمود:

$$SFSF < SSSF < SFSC < SSSS < SSSC < SCSC$$

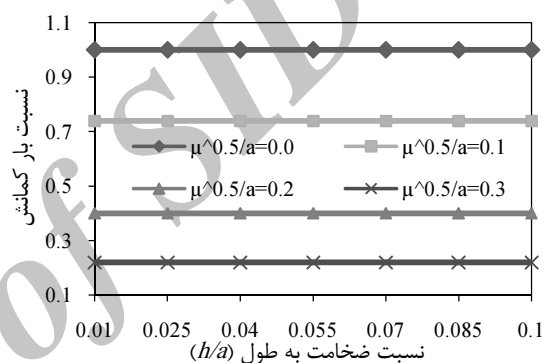
از ترتیب فوق می‌توان نتیجه‌گیری نمود که استفاده از شرایط مرزی سخت‌تر در دو لبه‌ای که می‌توانند ترکیبی از شرایط تکیه‌گاهی ساده، گیردار و آزاد داشته باشند موجب افزایش اثر کاهش پارامتر غیرمحللی بر بار کمانش بحرانی می‌شود.

#### ۵- فهرست علائم

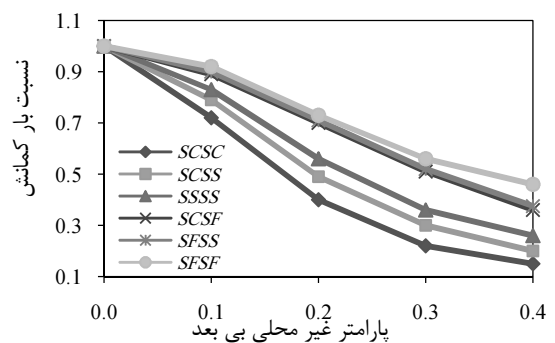
$E$	مدول الاستیسیته
$N_{xx}$	نیروی درون صفحه‌ای در راستای $x$
$h$	ضخامت نانو ورق
$b$	عرض نانو ورق (راستای $y$ )
$u$	جابجایی درون صفحه‌ای صفحه میانی در راستای $x$
$u_i$	جابجایی درون صفحه‌ای در راستای $x$
$\varepsilon$	کرنش
$v$	ضریب پواسون
$D$	سختی خمشی ورق (نانو ورق)
$\psi_i$	چرخش نسبت به صفحه میانی
$\nabla^2$	عملگر لاپلاسین
$\tau$	نسبت ضخامت به طول
$\bar{N}_{cr}^{nl}$	بار بحرانی کمانش بی‌بعد غیر محللی
$\bar{N}_{cr}$	بار بحرانی کمانش بی‌بعد
$\Pi$	نسبت بار درون صفحه‌ای در راستای $y$ به $x$
$x_i$	مختصات دستگاه کارترین
$M$	گشتاور



شکل ۳ تغییرات نسبت بار کمانش با نسبت ابعاد برای شرایط مرزی متفاوت ( $\sqrt{\mu}/a = 0.1$ ,  $\tau = 0.1$ )



شکل ۴ تغییرات نسبت بار کمانش با نسبت ضخامت به طول به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحللی بی‌بعد ( $SCSC$ ,  $\eta = 1$ )



شکل ۵ تغییرات نسبت بار کمانش با پارامتر غیرمحللی ( $\mu$ ) برای شرایط مرزی مختلف ( $\eta = 1$ ,  $\tau = 0.1$ )

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، اثرات مقیاس کوچک روی کمانش صفحات مستطیلی نانو نوع لوی با استفاده از حل دقیق تحلیلی در چارچوب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم غیرمحللی صفحات مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان ساده‌ترین تقریب، یک ورق گرافن چند لایه را می‌توان با ضخامت و مدول

- model for free vibrations of single-layered graphene sheets”, *Physics Letters A*, Vol. 375, No. 1, pp. 53-62, 2010 .
- [9] S. Pradhan, A. Kumar, Vibration analysis of orthotropic graphene sheets embedded in Pasternak elastic medium using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method”, *Computational Materials Science*, Vol. 50, No. 1, pp. 239-245, 2010 .
- [10] P. Lu, P. Zhang, H. Lee, C. Wang, J. Reddy, “Non-local elastic plate theories”, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 463, No. 2088, pp. 3225-3240, 2007 .
- [11] J. Reddy, “Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007 .
- [12] T. Aksencer, M. Aydogdu, “Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory”, *Physica E*, Vol. 43, No. 4, pp. 954-959, 2011 .
- [13] S. Pradhan, A. Kumar, “Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method”, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 774-779, 2011 .
- [14] Y. Chandra, R. Chowdhury, F. Scarpa, S. Adhikaricor, Vibrational characteristics of bilayer graphene sheets”, *Thin Solid Films*, Vol. 519, No. 18, pp. 6026-6032, 2011 .
- [15] M. Bedroud, Sh. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, Axisymmetric/Asymmetric buckling of circular/annular nanoplates via nonlocal elasticity”, *Modares Mechanical Engineering* Vol. 13, No. 5, pp. 144-152, 2013. (In Persian)
- [16] Sh. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S. Atashipour, “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 1, pp. 11-22, 2011 .
- [17] B. Arash, R. Ansari, “Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain”, *Physica E*, Vol. 42, No. 8, pp. 2058-2064, 2010 .
- [18] W. Duan, C. Wang, Y. Zhang, “Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 101, No. 2, pp. 024305-024305-7, 2007 .
- [19] Q. Wang, C. Wang, “The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes”, *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 7, pp. 075702, 2007 .
- [20] S. Pradhan, T. Murmu, “Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics”, *Computational Materials Science*, Vol. 47, No. 1, pp. 268-274, 2009 .
- چگالی  $P$
- طول نانوورق (راستای  $x$ )  $A$
- جابه‌جایی عرضی در راستای  $z$   $W$
- جابه‌جایی درون صفحه‌ای صفحه میانی در راستای  $y$   $V$
- جابه‌جایی عرضی بی‌بعد در راستای  $z$   $\bar{w}$
- تنش  $\Sigma$
- مدول برشی الاستیسیته  $G$
- بار درون صفحه‌ای  $N_0$
- پارامتر غیرمحملی  $\mu$
- نسبت طول به عرض  $\eta$
- ضریب غیرمحملی بی‌بعد  $\xi$
- تابع پتانسیل  $\tilde{N}_{CR}^{nl}$
- زمان  $t$
- مختصات بی‌بعد دستگاه کارتزین  $X_i$
- چرخش بی‌بعد نسبت به صفحه میانی  $\bar{\psi}_i$

## ۶- مراجع

- [1] A. C. Eringen, “Nonlocal polar elastic continua”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, 1972 .
- [2] R. Aghababaei, J. Reddy, “Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, No. 1, pp. 277-289, 2009 .
- [3] S. Pradhan, “Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory”, *Physics Letters A*, Vol. 373, No. 45, pp. 4182-41, 2009.
- [4] A. Farajpour, A. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, “Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics”, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1605-1615, 2012 .
- [5] R. Ansari, R. Rajabiehfarid, B. Arash, “Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets”, *Computational Materials Science*, Vol. 49, No. 4, pp. 831-838, 2010 .
- [6] R. Ansari, R. Gholami, K. Hosseini, S. Sahmani, “A sixth-order compact finite difference method for vibrational analysis of nanobeams embedded in an elastic medium based on nonlocal beam theory”, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 54, No. 11, pp. 2577-2586, 2011 .
- [7] Z.-B. Shen, H.-L. Tang, D.-K. Li, G.-J. Tang, “Vibration of single-layered graphene sheet-based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory”, *Computational Materials Science*, Vol. 61, pp. 200-205, 2012 .
- [8] R. Ansari, S. Sahmani, B. Arash, “Nonlocal plate