http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
فوق‌العاده اسفند ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۳ ص ص ۵۷-۶۶

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۲/۳/۱۹
تاریخ پذیرش ۹۲/۵/۳
ارائه در سایت ۹۲/۱۰/۳۰

تحلیل غیرخطی صفحه گرافن دایره‌ای با استفاده از تئوری مکانیک محیط پیوسته غیرموضعی

مهرداد جبارزاده[1*]، حبیب طلعتی[2]، احمدرضا نوروزی[3]

۱- استادیار گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد
۲،۳- دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد
* مشهد، صندوق‌پستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

چکیده- دراین مقاله خمش غیرخطی صفحه گرافن تک لایه دایره‌ای، تحت بارگذاری عرضی یکنواخت موردبررسی قرار گرفته است. با استفاده از تئوری مکانیک‌های محیط پیوسته غیرموضعی،اصل کارمجازی وتئوری مرتبه اول برشی، معادلات حاکم بدست آمده و برای گسسته‌سازی معادلات، روش مربعات دیفرانسیلی به کار گرفته شده است. در این روش، از توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت (توزیع چبیشف- گوس- لوباتو) برای افزایش سرعت همگرایی و دقت حل استفاده شده است. تأثیر ضریب غیرموضعی، تعداد گره‌ها، ضخامت، شعاع و میزان بار عرضی بر روی خیز صفحه گرافن مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین برای بررسی دقت روش مورد استفاده، نتایج بدست آمده با نتایج دیگر تحقیقات مقایسه شده که تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

کلیدواژگان: خمش غیرخطی، صفحه گرافن دایره‌ای، مکانیک محیط پیوسته غیرموضعی، روش مربعات دیفرانسیلی.

Nonlinear analysis of circular graphene sheet using nonlocal continuum mechanic theory

M. Jabbarzadeh[1*], H. Talati[2], A.R. Noroozi[3]

1- Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad branch, Mashhad, Iran
2,3- MSc Student, Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad branch, Mashhad, Iran
* P.O.B. 9187144123, Mashhad, Iran. jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

Abstract- In this article, nonlinear bending analysis of single-layered circular graphene sheet is studied. The equilibrium equations are derived based on the nonlocal continuum mechanics, principle of virtual work and first order shear deformation plate theory (FSDT).Differential quadrature method is used to discretize the equilibrium equations. In this method a non-uniform mesh point distribution (Chebyshev- Gauss- Lobatto) is used for provide accuracy of solutions and convergence rate.The effect of nonlocal parameter, number of grid points, thickness, radius and lateral loading are investigated on deflection of graphene sheet. The results are compared with valid results reported in the literature.

Keywords: Nonlinear Bending, Circular Graphene Sheet, Nonlocal Continuum Mechanic, Differential Quadrature Method.

۱- مقدمه

ساختارهای نانو از زمان کشف آن‌ها به دلیل کاربرد وسیع و خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی منحصر به‌فرد خود، توجه بسیاری از محققان را در سراسردنیا به خود جلب کرده است [۱]. این مواد به طور گسترده در نانوالکترونیک، نانودستگاه‌ها و نانوکامپوزیت‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲]. انواع گوناگونی از نانوساختارهای کربن از قبیل فلورین‌ها [۳] نانولوله‌های کربنی [۴] و نانوحلقه‌ها [۵] وجود دارند که با شکل‌دهی

ورقه‌های گرافن ایجاد می‌شوند. به همین دلیل، تحلیل صفحات گرافن موضوع اصلی مطالعه نانوموادکربنی می‌باشد. صفحه گرافن دارای ضخامتی به اندازه یک اتم کربن می‌باشد که در یک شبکه کریستالی شش وجهی کنار هم منظم گشته‌اند. این مواد خواص مکانیکی و فیزیکی منحصر بفردی داشته که از آن جمله می‌توان به انعطاف‌پذیری بالا، استحکام زیاد در کشش، انبساط حرارتی کم، رسانایی گرمایی و الکتریکی بالا اشاره کرد، همچنین صفحات گرافن اغلب در کامپوزیت‌های پلیمری به عنوان تقویت کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند [۷،۶].

امروزه تحقیقات بسیاری برای تحلیل رفتار مکانیکی ساختارهای نانو صورت گرفته است. علاوه بر روش‌های آزمایشگاهیاز روش‌های مدل سازی مانند: تأثیر اتمی[1]، مدل سازی ترکیبی مکانیک محیط‌های پیوسته- اتمی[2] و مدل سازی مکانیک محیط‌های پیوسته[3]، برای بررسی رفتار مکانیکی نانو مواد استفاده می‌شود [۸]. از آنجا که کنترل آزمایش‌ها در مقیاس نانو بسیار مشکل بوده و روش‌های شبیه‌سازی اتمی از نظر محاسباتی هزینه‌بر می‌باشند، از روش مکانیک محیطپیوسته به عنوان یک روش مؤثر، که فاقد مشکلات ذکر شده بوده و دارای فرمول‌بندی ساده‌تری می‌باشد، در تحلیل نانو ساختارها بسیار مورد استفاده قرار گرفته است [۹]. مدل‌سازی مکانیک محیط پیوسته نیز شامل روش‌های مختلفی نظیر: تئوری تنش جفتی [۱۰]، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی اصلاح شده [۱۱]، تئوری تنش جفتی اصلاح شده [۱۲] و تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن [۱۳] می‌باشد. از میان این روش‌ها تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن بیشتر ازسایر روش‌ها برای بررسی رفتار مکانیکی ساختارهای نانوبه کار گرفته شده است [۱۴]. براساس این تئوری تنش در یک نقطه در یک محیط الاستیک پیوسته، نه تنها به کرنش در آن نقطه، بلکه به تمامی کرنش‌ها در کل دامنه محیط پیوسته وابسته می‌باشد. در واقع وقتی ابعاد ماده تا اندازه نانو کاهش پیدا می‌کند، دیگر نمی‌توان از اثرات نیروهای درون اتمی[4] و درون مولکولی[5] بر روی ویژگی‌های دینامیکی و استاتیکی مواد صرف‌نظر کرد. به همین دلیل تئوری‌های کلاسیک موضعی قادر به پیش‌بینی رفتار مکانیکی ساختارهای نانو نیستند [۱۴].

در سال ۱۹۶۲ هانس پیتربوهم [۱۵] یک ورق کربن تک لایه با شبکه لانه زنبوری۶ را با عنوان گرافن توصیف کرد. گرافیت از روی هم قرار گرفتن صفحات گرافن ایجاد می‌شود. همچنین نانولوله‌های کربنی در سال ۱۹۹۱ توسط ساميو ایجیما [۴]، در آزمایشگاه ان ای سی[7] در تسوکوبا[8] ژاپن کشف شد. تحقیقات بسیاری برروی تحلیل صفحات گرافن انجام گرفته است که در منابع موجود می‌باشد. در سال ۲۰۰۵ بهفر و نقدآبادی [۱۶]، تحلیل ارتعاشات صفحات گرافن مستطیلی چند لایه در محیط الاستیک با استفاده از تئوری غیرموضعی کلاسیک صفحات و با در نظر گرفتن صفحه گرافن به صورت یک صفحه ارتوتروپیک را ارائهکردهوتغییرات فرکانس‌های طبیعی را نسبت به تغییر طول‌های مختلف صفحات گرافن محاسبه کردند. کیتی پورنچای و دیگران [۱۷]، در سال ۲۰۰۵ مدل پیوسته غیرموضعی برای ارتعاشات صفحات گرافن مستطیلی چندلایه با تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفته و فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مود را بدست آوردند. آن‌ها نشان دادند نیروهای واندوالس تأثیر مشخصی بر روی فرکانس و شکل‌های مود ارتعاشی صفحات گرافن دارند. در سال ۲۰۰۶ لیو و همکارانش [۱۸]، صفحه گرافن را به صورت یک ماده ایزوتروپیک در مدل پیوسته خود در نظر گرفته، ارتعاشات صفحات گرافن چند لایه بر روی پایه الاستیک را بررسی کرده و تأثیر نیروهای واندروالس بر روی فرکانس و شکل‌های مود را بدست آوردند. دان و وانگ [۱۹]، در سال ۲۰۰۷ خمش یک صفحه گرافن دایره‌ای را با استفاده از مدل مکانیک پیوسته غیرموضعی و تئوری کلاسیک صفحات به صورت خطی مورد بررسی قرار داده و نشان دادند میزان خیز صفحه گرافن دراین روش بیشتر از خیز در مدل پیوسته موضعی می‌باشد. در سال ۲۰۰۹ پرادهان و فادیکار [۲۰]، تأثیر ضریب غیرموضعی درتحلیل ارتعاشی صفحات گرافن چند لایه را مورد بررسی قرارداده و ضمن حل معادلات تعادل به روش ناویر، اهمیت استفاده از ضریب غیر موضعی را در معادلات مدل محیط پیوسته بر دقت نتایج مورد بررسی و تاکید قرار دادند.شن شن و همکارانش [۲۱]، در سال ۲۰۱۰، ارتعاشات غیرخطی صفحه

1. Atomistic Modeling
2. HybridAtomistic–Continuum Mechanics Modeling
3. Continuum Mechanics Modeling
4. Interatomic
5. Intermolecular
6. Honeycomb Lattice
7. NEC
8. Tsukuba

گرافن مستطیلی تک لایه را با در نظر گرفتن اثر حرارتی و با استفاده از تئوری غیرموضعی کلاسیک صفحات ارائه کرده ونتایج را با تحقیقات موجود مقایسه کردند. شن شن و چن ژانگ [۲۲]، در سال ۲۰۱۰ کمانش نانولوله‌های کربنی دوجداره را با استفاده از مدل پوسته غیرموضعی تحلیل کرده و مشاهده کردند رفتار کمانشی نانولوله‌های کربنی بسیار حساس به ضریب غیرموضعی می‌باشد. در سال ۲۰۱۱ شن شن و همکارانش [۲۳]، خمش غیرخطی صفحه گرافن مستطیلی را در محیط گرمایی مورد بررسی قرار داده و تأثیر ضریب غیرموضعی و اثرات حرارتی را بر روی خیز بررسی کرده و پی بردند تغییرات دمایی تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار خمشی صفحات گرافن دولایه دارد. در سال ۲۰۱۱ جمعه‌زاده و سعیدی [۲۴]، ارتعاشات صفحات گرافن مستطیلی با تغییر شکل‌های بزرگ را ارائه کرده و اثر تعداد لایه‌ها، ضرایب هندسی و ضریب غیرموضعی را بر روی رفتار ارتعاشی صفحه بررسی کرده و نشان دادند نتایج بدست آمده در تطابق با نتایج تحلیل ارتعاش خطی است. انصاری و روحی [۲۵]، در سال ۲۰۱۱ رفتار کمانشی نانولوله‌های کربنی چند جداره را بر اساس مدل پوسته غیرموضعی مورد بررسی قرار داده و نشان دادند که اثر ضریب غیرموضعی در نانولوله‌های کربنی چند جداره با قطرکوچک‌تر، بیشتر می‌باشد. محمدی و همکارانش [۲۶]، در سال ۲۰۱۳ارتعاشات آزاد صفحه گرافن دایره‌ای را با استفاده از مدل مکانیک پیوسته غیرموضعی و تئوری کلاسیک صفحات ارائه دادند. آن‌ها اثرات ضریب غیرموضعی، شعاع صفحه گرافن و تعداد گره‌ها را بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار داده و نشان دادند نتایج بدست آمده، در تطابق با نتایج موجود در مراجع است.

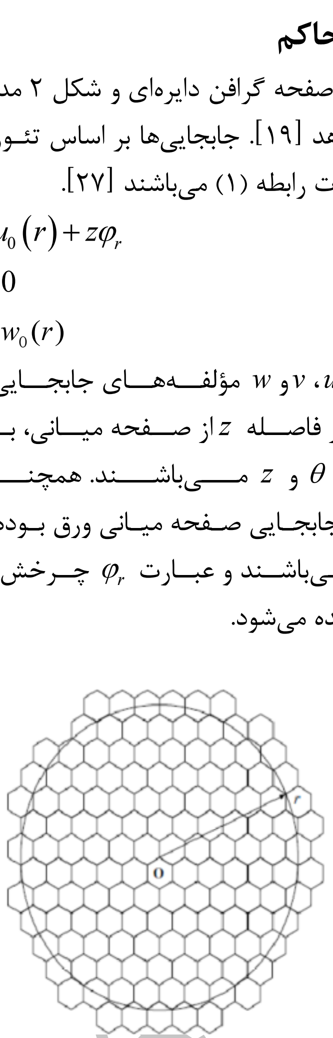
با توجه به این که تحقیقی بر روی خمش غیرخطی نانو صفحات دایروی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی غیرموضعی صورت نگرفته است، در این تحقیق به کمک این تئوری، معادلات حاکم برای تحلیل خمش غیرخطی صفحه گرافن تک لایه دایره‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به معادلات تعادل بدست آمده از روش کار مجازی و معادلات مربوط به منتجه‌های تنش و ترکیب آن‌ها با یکدیگر، یک دستگاه معادله بدست آمده که این معادلات با روش عددی مربعات دیفرانسیلی حل شده و تأثیر ضریب غیرموضعی، تعداد گره‌ها، ضخامت، شعاع و میزان بارعرضی بر روی خیز صفحه گرافن مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین برای بررسی دقت روش مورد استفاده، نتایج بدست آمده با نتایج دیگر تحقیقات مقایسه شده است.

۲- روابط حاکم

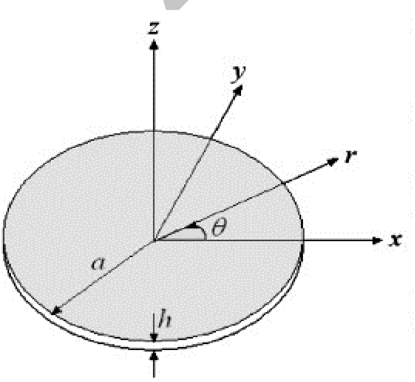
شکل ۱، یک صفحه گرافن دایره‌ای و شکل ۲ مدل پیوسته آن را نشان می‌دهد [۱۹]. جابجایی‌ها بر اساس تئوری مرتبه اول برشی به صورت رابطه (۱) می‌باشند [۲۷].

$$
\begin{aligned}
&u(r,\theta,z)=u_0(r)+z\varphi_r\\
&v(r,\theta,z)=0\\
&w(r,\theta,z)=w_0(r)
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در آن u، v و w مؤلفه‌های جابجایی هر نقطه دلخواهی در فاصله z از صفحه میانی، به ترتیب در جهات r، θ و z می‌باشند. همچنین u_0 و w_0 مؤلفه‌های جابجایی صفحه میانی ورق بوده که تابعی از متغیر r می‌باشند و عبارت φ_r چرخش المان حول محور θ نامیده می‌شود.



شکل ۱ صفحه گرافن دایره‌ای



شکل ۲ مدل محیط پیوسته صفحه

بـا اسـتفاده از فرضـیات فـون کـارمن بـرای روابـط غیرخطـی کـرنش- جابجـایی، مؤلفـه‌هـای کـرنش بـه صـورت رابطه (۲) بدست می‌آیند [۲۷].

$$\varepsilon_{rr}=\frac{du_0}{dr}+z\,\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_0}{r}+z\,\frac{\varphi}{r}$$
$$\gamma_{rz}=\frac{dw}{dr}+\varphi \qquad (۲)$$

ε_{rr} و $\varepsilon_{\theta\theta}$ مؤلفه‌های کـرنش عمـودی و γ_{rz} کـرنش برشـی می‌باشند.

در تئوری مکانیک پیوسته موضعی، تنش در یک نقطـه بـه کرنش در همان نقطه وابسـته اسـت امـا اریـنگن نشـان داد در تئوری مکانیک پیوسته غیرموضعی تنش در یک نقطه به کرنش در تمـام محـیط پیوسـته وابسـته اسـت [۱۳]. معادلـه حـاکم درتئوری مکانیک پیوسته غیرموضعی توسط ارینگن به صـورت رابطه (۳) ارائه شده است:

$$\sigma^{nl}-\mu\nabla^2\sigma^{nl}=\sigma^{l} \qquad (۳)$$

در رابطه (۳)، $\mu=\left(e_0a_0\right)^2$ بوده که e_0a_0 ضریب غیرموضعی نامیده می‌شود، a_0 طول مشخصه داخلی (فاصله بین اتم‌های کربن) e_0، ثابت درجه‌بندی متناسب با هر ماده، σ^{nl} تانسور تنش غیرموضعی و σ^{l} تانسور تنش ماکروسکوپیک است که به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$\sigma^{l}=C:\varepsilon \qquad (۴)$$

C ماتریس سختی است. در این مقاله صفحه گرافن به صورت ورق ایزوتروپیک تک‌لایه در نظر گرفته می‌شود [۱۸]، بنابراین با ترکیب معادلات (۳) و (۴) روابط تنش-کرنش در مختصات قطبی به صورت رابطه (۵) بدست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r^{nl}\\ \sigma_\theta^{nl}\\ \sigma_{rz}^{nl}\end{Bmatrix}-\mu\nabla^2\begin{Bmatrix}\sigma_r^{nl}\\ \sigma_\theta^{nl}\\ \sigma_{rz}^{nl}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{E}{(1-\upsilon^2)} & \frac{\upsilon E}{(1-\upsilon^2)} & 0\\ \frac{\upsilon E}{(1-\upsilon^2)} & \frac{E}{(1-\upsilon^2)} & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix} \qquad (۵)$$

که E مدول الاستیسیته، G مدول برشی و υ ضریب پواسون می‌باشند. منتجه‌هـای تـنش بـه صـورت روابـط (۶،۷) تعریـف می‌شوند [۱۳].

$$\left(N_r,N_\theta,Q_r\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_r^{nl},\sigma_\theta^{nl},\sigma_{rz}^{nl}\right)dz \qquad (۶)$$

$$\left(M_r,M_\theta\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_r^{nl},\sigma_\theta^{nl}\right)z\,dz \qquad (۷)$$

که h ضخامت صفحه گرافن است.

حال با انتگرال‌گیری نسبت به z از طرفین روابط (۵) و استفاده از رابطه (۶) و همچنین ضرب رابطه (۵) در z و سپس انتگرال‌گیری نسبت به z و استفاده از رابطه (۷)، منتجه‌های تنش برحسب جابجایی‌ها به صورت روابط (۸-۱۲) بدست می‌آیند.

$$M_r-\mu\nabla^2M_r=\frac{F_1}{3}\left[\frac{d\varphi}{dr}+\upsilon\left(\frac{\varphi}{r}\right)\right] \qquad (۸)$$

$$M_\theta-\mu\nabla^2M_\theta=\frac{F_1}{3}\left[\frac{\varphi}{r}+\upsilon\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)\right] \qquad (۹)$$

$$Q_r-\mu\nabla^2Q_r=F_2\left[\frac{dw}{dr}+\varphi\right] \qquad (۱۰)$$

$$N_r-\mu\nabla^2N_r=F_3\left[\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\upsilon\frac{u_0}{r}\right] \qquad (۱۱)$$

$$N_\theta-\mu\nabla^2N_\theta=F_3\left[\frac{u_0}{r}+\upsilon\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\frac{du_0}{dr}\right)\right] \qquad (۱۲)$$

مقادیر F_1، F_2 و F_3 عبارتند از:

$$F_1=\frac{Eh^3}{4\left(1-\upsilon^2\right)} \qquad (۱۳)$$

$$F_2=\frac{Eh}{2\left(1+\upsilon\right)} \qquad (۱۴)$$

$$F_3=\frac{Eh}{\left(1-\upsilon^2\right)} \qquad (۱۵)$$

برای تعیین معادلات تعادل از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می‌شود:

$$\Pi=U+\Omega \qquad (۱۶)$$

که Π انرژی پتانسیل کل سیستم، U انرژی کرنشی سیستم و Ω انرژی پتانسیل بارهای خارجی است. طبق این اصل، وقتی سیستمی در حال تعادل است، تغییرات انرژی پتانسیل کل آن سیستم صفر است:

$$\delta\,\Pi=\delta\,U+\delta\,\Omega\cong 0 \qquad (۱۷)$$

که δ نشان دهنده عملگر تغییرات است. مقادیر تغییرات انرژی کرنشی سیستم وانرژی پتانسیل بارهای خارجی به صورت روابط (۱۸و۱۹) بدست می‌آیند:

$$\delta U=\iint_S 2\pi\left(\sigma_r\delta\varepsilon_{rr}+\sigma_\theta\delta\varepsilon_{\theta\theta}+\sigma_{rz}\delta\gamma_{rz}\right)rdrdz \quad (۱۸)$$

$$\delta\Omega=\int_0^a 2\pi rq\delta w dr \quad (۱۹)$$

a شعاع دایره و q مقدار بار اعمالی بر روی صفحه گرافن در راستای محور z است.

با ترکیب معادلات (۲)، (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) معادلات تعادل حاصل می‌شود:

$$\delta u_0: N_\theta-N_r-r\frac{dN_r}{dr}=0$$

$$\delta\varphi: M_\theta-M_r+rQ_r-r\frac{dM_r}{dr}=0$$

$$\delta w:$$

$$N_r\frac{dw}{dr}+r\frac{dN_r}{dr}\frac{dw}{dr}+rN_r\frac{d^2w}{dr^2}+Q_r+r\frac{dQ_r}{dr}+rq=0 \quad (۲۰)$$

حال با توجه به معادلات (۶) تا (۱۴) و معادلات (۱۹)، یک دستگاه معادله ایجاد می‌شود که با حذف M_r، M_θ، N_r و N_θ دستگاه چهار معادله چهار مجهول رابطه (۲۱) بدست می‌آید:

$$Q_r-\mu\nabla^2Q_r-F_2\left[\frac{dw}{dr}+\varphi\right]=0 \quad (۲۱)$$

که سه معادله دیگر در پیوست ارائه شده است. در این تحقیق معادلات بدست آمده، به روش مربعات دیفرانسیلی حل شده است.

۳- حل به روش مربعات دیفرانسیلی

روش مربعات دیفرانسیلی یک روش عددی برای حل مسائل مقدار مرزی و مسائل مقدار اولیه می‌باشد. از این روش علاوه بر ساختارهای بزرگ در تحلیل ساختارهای نانو نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در روش مربعات دیفرانسیلی مشتق یک تابع به صورت جمع خطی توابع وزنی در طول دامنه مورد نظر نوشته می‌شود که در مختصات قطبی در راستای شعاع به صورت رابطه (۲۲) بیان می‌شود [۲۸].

$$\frac{d^nF}{dr^n}=\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(n)}F\left(r_j\right) \quad (۲۲)$$

به طوری که $C_{ij}^{(n)}$ ضریب وزنی نامیده می‌شود. ضریب وزنی برای مشتق مرتبه اول به صورت رابطه (۲۳) بدست می‌آید.

$$C_{ij}^{(1)}=\frac{\pi\left(r_i\right)}{\left(r_i-r_j\right)\pi\left(r_j\right)} \qquad i,j=1,2,...,\mathrm{N};\ i\neq j \quad (۲۳)$$

$$\pi\left(r_i\right)=\prod_{j=1}^{N}\left(r_i-r_j\right) \qquad i\neq j \quad (۲۴)$$

و هنگامی که $i=j$ می‌باشد، رابطه (۲۵) حاصل می‌شود.

$$C_{ij}^{(1)}=C_{ii}^{(1)}=-\sum_{k=1}^{N}C_{ik}^{(1)} \qquad i=1,2..,N;\ i\neq k\ ;\ \ i=j \quad (۲۵)$$

در رابطه (۲۵) N تعداد گره‌ها در راستای شعاع است. ضرایب وزنی برای مشتق‌های مرتبه دوم، سوم و چهارم به صورت رابطه (۲۶) بدست می‌آیند.

$$C_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{N}C_{ik}^{(1)}C_{kj}^{(1)}$$

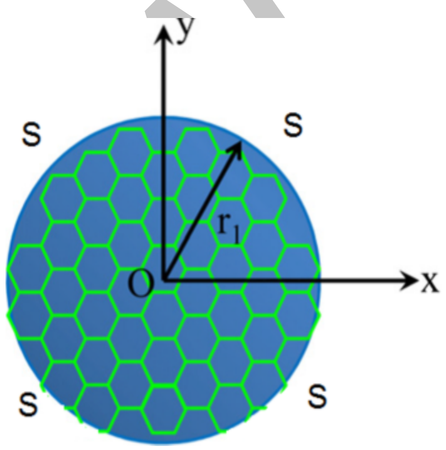
$$C_{ij}^{(3)}=\sum_{k=1}^{N}C_{ik}^{(1)}C_{kj}^{(2)}=\sum_{k=1}^{N}C_{ik}^{(2)}C_{kj}^{(1)}$$

$$C_{ij}^{(4)}=\sum_{k=1}^{N}C_{ik}^{(1)}C_{kj}^{(3)}=\sum_{k=1}^{N}C_{ik}^{(3)}C_{kj}^{(1)} \quad (۲۶)$$

توزیع نقاط شبکه براساس نقاط چبیشف-گوس-لوباتو به صورت رابطه (۲۷) می‌باشد.

$$r_i=\frac{a}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi i}{N-1}\right)\right] \qquad i=0,1,...,N \quad (۲۷)$$

شرایط مرزی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته به صورت تکیه‌گاه ساده می‌باشد (شکل ۳).



شکل ۳ صفحه گرافن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده

در $r = 0$:

$$\frac{dw}{dr} = 0 \; Q_r = 0 \; ; \; \varphi = 0 \; ; \; u_0 = 0 \; ; \tag{۲۸}$$

در $r = a$:

$$M_r = 0 \; w = 0 \; ; \; u_0 = 0 \; ; \tag{۲۹}$$

به‌عنوان نمونه فرم گسسته معادله اول به شکل رابطه (۳۰) بدست می‌آید.

$$Q_{r,i} - \mu\left(\sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{(2)} Q_{r,j} - \sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{(1)} Q_{r,j}\right) - F_2\left[\sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{(1)} w_{r,i} + \varphi\right] = 0 \tag{۳۰}$$

۴- نتایج عددی

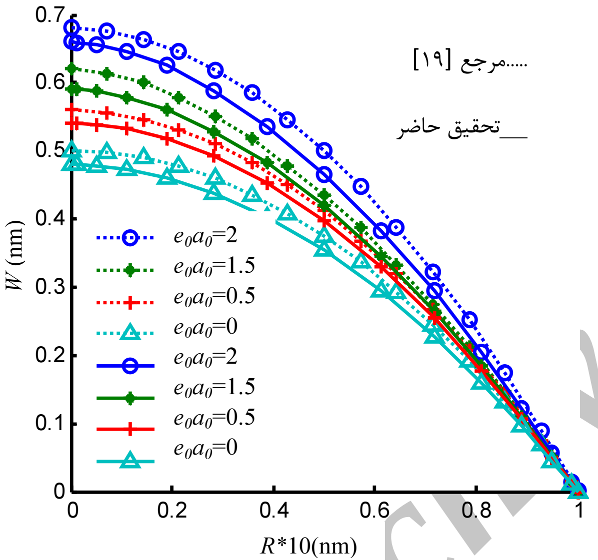
برای تعیین نتایج عددی، صفحه گرافن تک لایه دایره‌ای توپر با شعاع $r = 10\ \text{nm}$، ضخامت صفحه گرافن $h = 0.34\ \text{nm}$ (فاصله بین صفحات گرافن در گرافیت)، مدول الاستیسیته $E = 1.06\ \text{TPa}$، ضریب پواسون $\upsilon = 0.19$، بار یکنواخت $q = 10^5\ \text{Pa}$ و ضریب غیرموضعی $e_0a_0 = 0, 0.5, 1.5, 2\ \text{nm}$ در نظر گرفته شده است. دلیل انتخاب این مقادیر برای ضریب غیرموضعی این است که وانگ [۲۹] در مدل‌سازی نانولوله‌های کربنی با استفاده از تئوری مکانیک پیوسته غیرموصعی نشان داد ضریب غیرموضعی e_0a_0 کوچک‌تر از ۲ می‌باشد. همچنین خواص مکانیکی در نظر گرفته شده برای صفحه گرافن، با توجه به داده‌های موجود در مرجع [۱۳] انتخاب شده است.

در ابتدا برای بررسی دقت نتایج روش ارائه شده، خیز صفحه گرافن بر اساس ضرایب غیرموضعی مختلف تحت بار عرضی یکنواخت $10^5\ \text{Pa}$، در جدول ۱ بیان شده و با نتایج مرجع [۱۹] مقایسه شده و همچنین در شکل ۴ نمودارتغییرات آن ارائه شده است. همان‌گونه که قابل پیش‌بینی می‌باشد نتایج خیز در صورت استفاده از تحلیل غیر خطی و با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی به علت کاهش اثرات تغییر شکل‌های صلب گونه بر نتایج کرنش، کمتر از خیز در تحلیل خطی با استفاده از تئوری کلاسیک می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود با افزایش خیز تأثیر ضریب غیر موضعی افزایش می‌یابد.

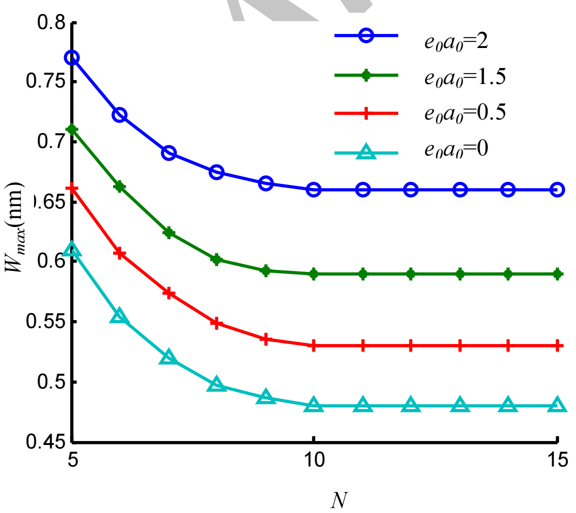
در شکل ۵ با افزایش تعداد گره‌ها مقدار خیز بیشینه کمتر شده و از گره دهم به بعد مقدار خیز بیشینه به مقدارثابتی می‌رسد که نشان‌دهنده آن است که این مسأله را می‌توان به کمک ده گره تحلیل کرده و نتایج مناسبی را بدست آورد.

جدول ۱ مقایسه خیز صفحه گرافن در تحقیق حاضر و مرجع [۱۹]

شعاع (nm)	خیز در مرجع [۱۹] (nm)				خیز در تحقیق حاضر (nm)			
	ضرایب غیرموضعی $(\text{nm})^2$							
	۲	۱/۵	۰/۵	۰	۲	۱/۵	۰/۵	۰
۰	۰/۶۸	۰/۶۲	۰/۵۶	۰/۵۰	۰/۶۶	۰/۵۹	۰/۵۴	۰/۴۸
۲	۰/۶۳	۰/۵۷	۰/۵۲	۰/۴۷	۰/۶۲	۰/۵۵	۰/۵۰	۰/۴۶
۴	۰/۵۷	۰/۴۹	۰/۴۷	۰/۴۳	۰/۵۳	۰/۴۸	۰/۴۵	۰/۴۰
۶	۰/۴۶	۰/۴۰	۰/۳۷	۰/۳۴	۰/۴۰	۰/۳۶	۰/۳۳	۰/۳۰
۸	۰/۲۹	۰/۲۵	۰/۲۴	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۰	۰/۱۸	۰/۱۵
۱۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰



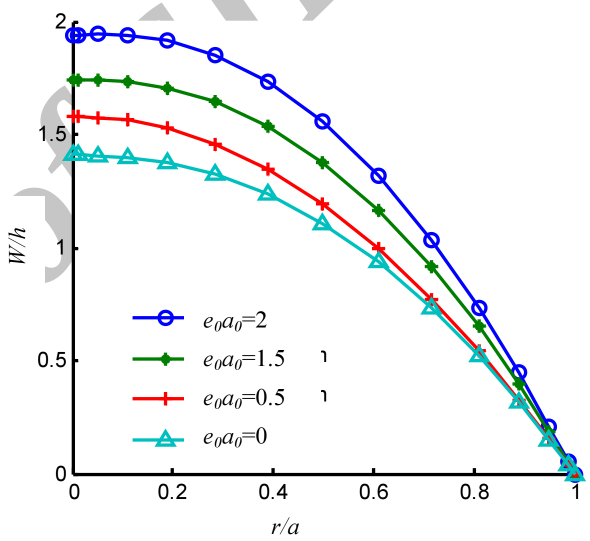
شکل ۴ نمودار مقایسه خیزنسبت به مرجع [۱۹]



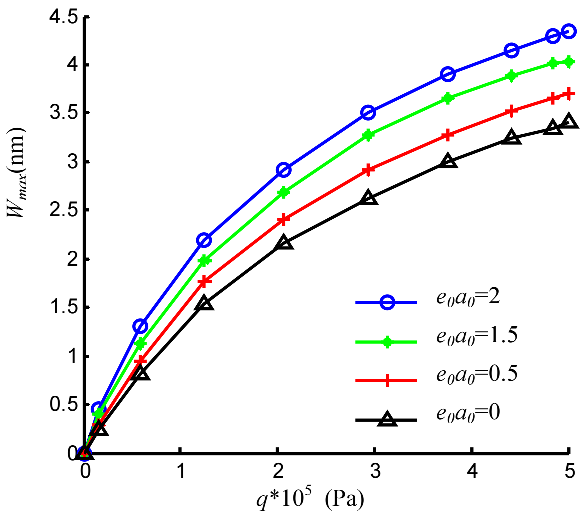
شکل ۵ نمودارخیز بیشینه نسبت به تعدادگره‌ها

شکل ۶ تغییرات بی‌بعد خیز صفحه گرافن تحت بار عرضی یکنواخت 10^5Pa، در راستای شعاع را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش ضریب غیرموضعی در یک شعاع معین میزان خیز بی‌بعد افزایش یافته و زمانی که ضریب غیرموضعی e_0a_0 برابر صفر است تئوری غیرموضعی تبدیل به تئوری موضعی می‌شود و در این حالت کمترین میزان خیز بی‌بعد صفحه ایجاد می‌شود.

در شکل ۷ نمودار تغییرات خیز بیشینه نسبت به بار عرضی در ضرایب غیرموضعی مختلف نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود با افزایش بار عرضی یکنواخت اعمالی بر روی صفحه، مقدار خیز بیشینه با افزایش ضریب غیرموضعی افزایش می‌یابد.



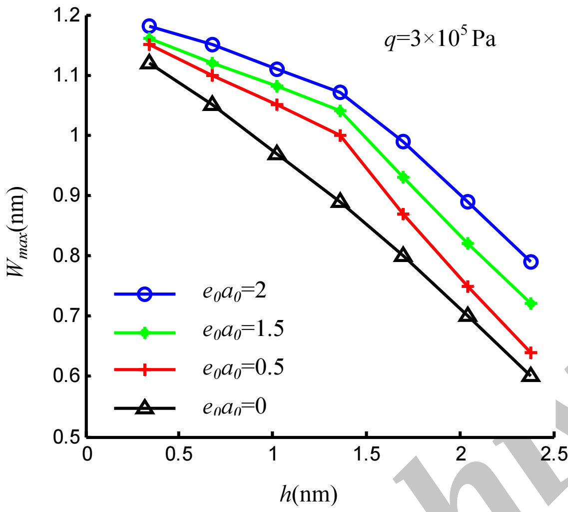
شکل ۶ نمودار خیز نسبت به شعاع به صورت بی‌بعد



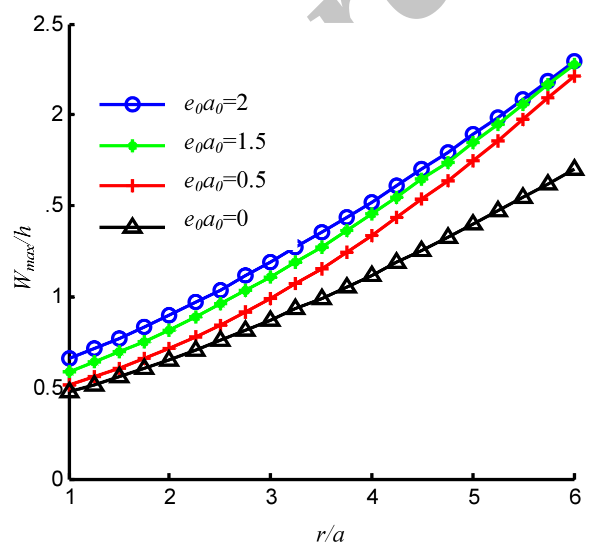
شکل ۷ نمودار تغییرات خیز بیشینه نسبت به بار عرضی

در شکل ۸ نمودار خیز بیشینه نسبت به بار عرضی در ضخامت‌های مختلف برای ضرایب غیرموضعی مختلف ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت، تأثیر افزایش ضریب غیر موضعی بر خیز بیشینه افزایش می‌یابد.

شکل ۹ نمودار تغییرات خیز بیشینه نسبت به تغییرات شعاع را نشان می‌دهد. با توجه به شکل با افزایش نسبت شعاعی تأثیر ضریب غیرموضعی بر میزان خیز بیشینه افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت شعاعی تأثیر تغییرات ضریب غیرموضعی بر خیز بیشینه کاهش یافته و نتایج به صورت همگرا در می‌آیند.



شکل ۸ نمودار خیز بیشینه نسبت ضخامت



شکل ۹ نمودار خیز بیشینه نسبت به شعاع

۵- بحث و نتیجه‌گیری

از آنجا که استفاده از تحلیل‌های دینامیک ملکولی از نظر محاسباتی بسیار هزینه‌بر بوده و با محدودیت بسیاری مواجه است و تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته موضعی قابلیت پیش‌بینی صحیح رفتار مواد را در ابعاد نانو ندارند، در این تحقیق سعی شده است به کمک تئوری مکانیک محیط پیوسته غیرموضعی، اصل کار مجازی و تئوری مرتبه اول برشی، معادلات حاکم برای صفحه گرافن تک‌لایه دایره‌ای بدست آورده شود. با توجه به معادلات تعادل بدست آمده از روش کار مجازی و معادلات مربوط به منتجه‌های تنش و ترکیب آن‌ها با یکدیگر، یک دستگاه معادله بدست آمده که این معادلات با روش عددی مربعات دیفرانسیلی حل شده و تأثیر ضریب غیرموضعی، تعداد گره‌ها، ضخامت، شعاع و میزان بار عرضی بر روی خیزصفحه گرافن مورد ارزیابی قرار گرفته است. همچنین برای بررسی دقت روش مورد استفاده، نتایج بدست آمده با نتایج دیگر تحقیقات مقایسه شده است که تطابق خوبی را نشان می‌دهد. با توجه به نمودارها مشاهده می‌شود:

- با افزایش ضریب غیرموضعی در صفحه گرافن تک‌لایه میزان خیز صفحه افزایش و به عبارتی صلبیت صفحه گرافن کاهش می‌یابد.

- با استفاده از تحلیل غیرخطی موجب کاهش تغییر شکل‌های صلب گونه بر نتایج کرنش شده و لذا استفاده از تئوری فوق موجب کاهش نتایج نسبت به تحلیل‌های خطی می‌شود. همچنین با افزایش تغییر شکل اهمیت استفاده از تحلیل‌های غیرخطی مشهودتر می‌باشد.

- با بررسی تغییرات خیز در راستای شعاع مشاهده می‌شود، اثرات غیرموضعی در نقاط نزدیک به مرکز صفحه گرافن بیشتر شده و به عبارتی دیگر هر چه مقدار خیز صفحه گرافن در مرکز بیشتر می‌شود، اثرات غیرموضعی بر روی خیز نیز افزایش می‌یابد.

- با افزایش ضخامت، تأثیر افزایش ضریب غیرموضعی بر خیز بیشینه افزایش می‌یابد.

- با افزایش شعاع، تأثیر ضریب غیرموضعی بر خیز بیشینه بیشتر می‌شود اما تأثیر تغییرات ضریب غیرموضعی کاهش یافته و نتایج در ضرایب غیرموضعی مختلف به صورت همگرا در می‌آیند.

۶- پیوست

سه معادله دیگر دستگاه معادلات، به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{F_1}{6}\left[\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r}+\upsilon\left(\frac{\varphi}{r}-\frac{d\varphi}{dr}\right)\right]+\mu\left[\frac{dQ_r}{dr}+\frac{Q_r}{2r}\right]$$

$$+\frac{F_2 r}{2}\left[\frac{dw}{dr}+\varphi\right]+\frac{r}{6}\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^2}\right)\right]$$

$$-\mu\left\{\frac{5}{6}F_1\left[\frac{d^3\varphi}{dr^3}+\upsilon\left(-\frac{2}{r^2}\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+2\frac{\varphi}{r^3}\right)\right]\right.$$

$$+\mu\left[\frac{d^3Q_r}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{dQ_r}{dr}+\frac{1}{2r}\frac{d^2Q_r}{dr^2}+\frac{1}{r^3}Q_r\right]$$

$$-\frac{F_1}{6}\left[-\frac{2}{r^2}\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r^3}\varphi+\upsilon\frac{d^3\varphi}{dr^3}\right]$$

$$-F_2\left[\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{d\varphi}{dr}\right]-\frac{1}{4}rF_2\left[\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right]+\frac{1}{6}rF_1$$

$$\left[\frac{d^4\varphi}{dr^4}+\upsilon\left(\frac{6}{r^3}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{3}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d^3\varphi}{dr^3}-6\frac{\varphi}{r^4}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{F_1}{3}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^2}\right)\right)\right.$$

$$+\mu\left[\frac{d^2Q_r}{dr^2}+\frac{1}{2r}\frac{dQ_r}{dr}-\frac{Q_r}{2r^2}\right]$$

$$-\frac{F_1}{6}\left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^2}+\upsilon\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right]$$

$$-\frac{1}{2}rF_2\left[\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{d\varphi}{dr}\right]-\frac{F_2}{2}\left[\frac{dw}{dr}+\varphi\right]$$

$$+\frac{1}{6}rF_1\left[\frac{d^3\varphi}{dr^3}+\upsilon\left(-\frac{2}{r^2}\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r^3}\varphi\right)\right]$$

$$\left.\left.+\frac{F_1}{6}\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^2}\right)\right]\right]\right\}=0$$

$$\frac{F_3}{2}\left[\frac{du_0}{dr}-\frac{u_0}{r}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\upsilon\left(\frac{u_0}{r}-\frac{du_0}{dr}-\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right)\right]$$

$$+\frac{rF_3}{2}\left[\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{dw}{dr}\frac{d^2w}{dr^2}+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}-\frac{u_0}{r^2}\right)\right]$$

$$-\mu\left\{\frac{5}{2}F_3\left[\frac{d^3u_0}{dr^3}+\frac{d^3w}{dr^3}\frac{dw}{dr}+\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.+\upsilon\left(-\frac{2}{r^2}\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{2}{r^3}u_0\right)\right]+\frac{rF_3}{2}\left[\frac{d^4u_0}{dr^4}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{d^4w}{dr^4}\frac{dw}{dr}+3\frac{d^3w}{dr^3}\frac{d^2w}{dr^2}+\upsilon\Bigg(\frac{6}{r^3}\frac{du_0}{dr}-\frac{3}{r^2}\frac{d^2u_0}{dr^2}\\
&+\frac{1}{r}\frac{d^3u_0}{dr^3}-\frac{6}{r^4}u_0\Bigg)\Bigg]-\frac{F_3}{2}\Bigg[-\frac{2}{r^2}\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2u_0}{dr^2}\\
&-\frac{F_3}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}-\frac{u_0}{r^2}+\upsilon\left(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{dw}{dr}\frac{d^2w}{dr^2}\right)\right]\Bigg]\Bigg\}=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dw}{dr}\Bigg[\frac{3}{2}F_3\left(\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\upsilon\frac{u_0}{r}\right)+\frac{rF_3}{2}\Bigg(\frac{d^2u_0}{dr^2}\\
&+\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dw}{dr}+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}-\frac{u_0}{r^2}\right)\Bigg)-\frac{F_3}{2}\Bigg(\frac{u_0}{r}+\upsilon\Bigg(\frac{du_0}{dr}\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\Bigg)\Bigg)\Bigg]+r\frac{dw}{dr}\Bigg[2F_3\Bigg(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dw}{dr}\\
&+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}-\frac{u_0}{r^2}\right)\Bigg)+\frac{rF_3}{2}\Bigg(\frac{d^3u_0}{dr^3}+\frac{d^3w}{dr^3}\frac{dw}{dr}\\
&+\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)^2+\upsilon\left(-\frac{2}{r^2}\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{2}{r^3}u_0\right)\Bigg)\\
&-\frac{F_3}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}-\frac{u_0}{r^2}+\upsilon\left(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dw}{dr}\right)\right)\Bigg]\\
&+r\frac{d^2w}{dr^2}\Bigg[\frac{3}{2}F_3\left(\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\upsilon\frac{u_0}{r}\right)\\
&+\frac{rF_3}{2}\left(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dw}{dr}+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}-\frac{u_0}{r^2}\right)\right)\\
&-\frac{F_3}{2}\left(\frac{u_0}{r}+\upsilon\left(\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right)\right)\Bigg]\\
&+Q_r+r\frac{dQ_r}{dr}+rq=0
\end{aligned}
$$

۷- مراجع

[1] Gibson R.F., Ayorinde E.O., Wen Y.F., “Vibrations of Carbon Nanotubes and their Composites: A Review”, *Composites science and technology*, Vol. 67, 2007, pp. 1-28.

[2] Geim A.K., “Graphene: Status and Prospects”, *Science*, Vol. 324, 2009, pp. 1530-1534.

[3] Kroto H.W., Heath J.R., O’Brien S.C, Curl. R.F., “Buckminster Fullerene”, *Nature*, Vol. 318, No. 318, 1985, pp. 162-163.

[4] Iijima S., “Helical Microtubules of Graphitic Carbon”, *Nature*, Vol. 8, No. 385, 1991, pp. 354-356.

[5] Kong X.Y., Ding Y., “Single-Crystal Nano-rings Formed by Epitaxial Self-Coiling of Polar Nano-belts”, *Science*, Vol. 303, No. 5662, 2004, pp. 1348-1351.

[6] Chunyu Li., “Atomistic Simulations on Multilayer Graphene Reinforced Epoxy Composites”, *Composites: Part A*, Vol. 43, No. 4, 2012, pp. 1293-1300.

[7] Kuilla T., Bhadra S., Yao D., Kimc N.M., Bosed S., Leea J.H., “Recent Advances in GrapheneBased Polymer Composites”, *Progress in polymer science*. Vol. 35, 2010, pp. 1350-1375.

[8] Arash B., Wang Q., “A Review on the Application of Nonlocal Elastic Models in Modeling of Carbon Nanotubes and Graphenes”, *Computational materials science*, Vol. 51, 2012, pp. 303-313.

[9] PradhanS.C., KumarA.,“ Vibration Analysis of Orthotropic GrapheneSheets Using Nonlocal Elasticity Theory and Differential Quadrature Method”, *Composite structures*, Vol. 93, 2004, pp. 774-779.

[10] Haftbaradaran H, Shodja H., “Elliptic In homogeneities and Inclusions in Anti-Plane Couple Stress Elasticity with Application to Nano-Composites”, *International journal of solids and structures*, Vol. 46, 2009, pp. 2978-2987.

[11] Fleck N.A, Hutchinson J.W., “Strain Gradient Plasticity ”, *Advance applied mechanics*, Vol.33, 1997, pp. 295-361.

[12] Yang F, Chong A.C.M, Lam D.C.C, Tong P., “Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity”, *International journal of solid structs*, Vol.39, 2002, pp. 2731-2743.

[13] Eringen A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, New york, Springer-Verlag, 2002.

[14] Pradhan S.C., Murmu T., “Small Scale Effect on the Buckling of Single-Layered GrapheneSheets under Biaxial Compression via Nonlocal Continuum Mechanics”, *Computational materials science*, Vol. 47, 2009, pp. 268-274.

[15] Boehm H.P., Clauss A., Fischer G.O and Hofmann U., “Das Adsorptions Verhalten Sehr Dünner Kohlenstof-ffolien”, *Zeitschrift für anorganische und allgemeine chemie*, Vol. 316, No. 4, 2004, pp. 119-127.

[16] Behfar K., Naghdabadi R., “Nanoscale Vibrational Analysis of Multi-Layered Graphene Sheet Embedded in an Elastic Medium”, *Composites science and technology*, Vol. 65, 2005, pp. 1159-1164.

[17] Kitipornchai S., He X.Q., Liew K.M., “Continuum Model for the Vibration of Multilayered Graphene

Sheets", *Phys. rev. B*, Vol. 72, 2005, pp 1-7.

[18] Liew K.M., He X.Q.,Kitipornchai S., "Predicting Nanovibration of Multi-Layered Graphene Sheets Embedded in an Elastic Matrix", *Actamaterialia*, Vol. 54, 2006, pp. 4229-4236.

[19] Duan W.H., Wang C.M., "Exact Solutions for Axisymmetric Bending of Micro/Nanoscale Circular Plates Based on Nonlocal Plate Theory", *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 38, 2007, pp. 1-5.

[20] Pradhan S.C., Phadikar J.K., "Small Scale Effect on Vibration of Embedded Multilayered Graphene Sheets Based on Nonlocal Continuum Models", *Physics letters A*, Vol. 373, 2009, pp. 1062-1069.

[21] ShenShenHui., Shen Le., Zhang and Chen-Li., "Nonlocal Plate Model for Nonlinear Vibration of Single Layer Graphene Sheets in Thermal Environments", *Computational materials science*, Vol. 48, 2010, pp. 680-685.

[22] ShenShenHui., Zhang., Chen-Li., "Torsional Buckling and Post-buckling of Double-Walled Carbon Nanotubes by Nonlocal Shear Deformable Shell Model", *Composite structures*, Vol. 92, 2010, pp. 1073-1084.

[23] ShenShenHui.,Shen Le., Zhang Chen-Li., "Nonlocal Plate Model for Nonlinear Bending of Single-Layer Graphene Sheets Subjected to Transverse Loads in Thermal Environments", *Applied physics A*, Vol. 103, 2011, pp. 103-112.

[24] Jomehzadeh E., Saidi A.R., "A Study on Large Amplitude Vibration of Multilayered Graphene Sheets", *Computational materials science*, Vol. 50, 2011, pp. 1043-1051.

[25] Ansari R., Rouhi H., Sahmani S., "Thermal Effect on Axial Buckling Behavior of Multi-Walled Carbon Nanotubes Based on Nonlocal Shell Model", *Physica E*, Vol. 44, 2011, pp. 373-378.

[26] Mohammadi M., Ghayour M., Farajpour A., "Free Transverse Vibration Analysis of Circular and Annular Graphene Sheets with Various Boundary Conditions Using the Nonlocal Continuum Plate Model",*Composites*, Vol. 45, 2013, pp. 32-42.

[27] NosierA., Fallah F., "Non-linear Analysis of Functionally Graded Circular Plates under Asymmetric Transverse Loading", *International journal of non-Linear mechanics*, Vol. 44, 2009, pp. 928-942.

[28] Shu C., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Berlin, Springer, 2000.

[29] Wang Q., Wang C.M., "The Constitutive Relation and Small Scale Parameter of Nonlocal Continuum Mechanics for Modeling Carbon Nanotube", *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 7, 2007, pp. 1-10.