مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۱، ص ص ۵۹-۶۶

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های مرکب متعامد متقارن با استفاده از نظریه لایه‌ای

مرتضی رضوانی[۱]، احمد قاسمی قلعه بهمن[۲*]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

*سمنان، صندوق پستی ۱۹۱۱۱-۳۵۱۳۱، ghasemi@semnan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۲۷ تیر ۱۳۹۲
پذیرش: ۲۱ شهریور ۱۳۹۲
ارائه در سایت: ۰۵ بهمن ۱۳۹۲

کلید واژگان:
تنش بین لایه‌ای
نظریه لایه‌ای
ورق‌های متعامد متقارن
روش المان محدود
اثر لبه‌های آزاد

چکیده

در تحقیق حاضر، یک حل تحلیلی برای محاسبه تنش‌های بین لایه‌ای در ورق های مرکب متعامد متقارن طویل، تحت کرنش محوری یکنواخت و بارگذاری حرارتی ارائه شد. ابتدا با انتگرال‌گیری متوالی از روابط الاستیک کرنش-جابه‌جایی و اعمال قیود فیزیکی حاکم بر الگوهای موجود در تغییر شکل این ورق‌ها، شکل عمومی میدان جابه‌جایی بر مبنای نظریه لایه‌ای استخراج شد. سپس، با استفاده از اصل حداقل مجموع انرژی پتانسیل، معادلات تعادل استخراج شده و به منظور تعیین میدان تنش سه بعدی در این ورق‌ها به‌صورت تحلیلی حل شدند. سرانجام مثال‌های عددی مختلفی به منظور تأیید کارایی و دقت نظریه لایه‌ای در پیش‌بینی توزیع تنش‌های بین لایه‌ای بررسی شد. برای ارزیابی دقت این روش، تنش‌های بین لایه‌ای در قالب یک آنالیز سه بعدی المان محدود و با استفاده از نرم‌افزار آباکوس محاسبه گردید. نتایج عددی مربوطه در توافق خوبی با نتایج نظیر حاصل از نظریه لایه‌ای می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که روش ارائه شده از قابلیت خوبی در پیش‌بینی تنش‌های بین لایه‌ای در مناطق داخلی و تمرکز تنش بالای آنها در نزدیکی لبه‌های آزاد که عامل تخریب جدایش است، برخوردار است.

Inter laminar stresses in symmetric cross-ply composite laminates using layer wise theory

Morteza Rezvani[1], Ahmad Ghasemi Ghalebahman[2*]

1- Department of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran.
2- Department of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran.
*P.O.B. 35131-19111 Semnan, ghasemi@semnan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 18 July 2013
Accepted 12 September 2013
Available Online 25 January 2014

Keywords:
Interlaminar stresses
Layerwise theory
Symmetric Cross-Ply Laminate
Finite Element Method
Free-Edges Effects

ABSTRACT

In this study, an analytical solution is presented to calculate inter laminar stresses in long symmetric cross-ply composite laminates subjected to uniform axial strain and thermal loading. At first, the most general form of layerwise-based displacement field is extracted by a successive integration of elastic strain–displacement relations and imposing the physical restrictions based on deformation patterns of these laminates. The equilibrium equations are then derived by using the principle of minimum total potential energy and solved analytically in order to obtain three-dimensional stress field in the laminated plate. Finally, various numerical examples are investigated in order to validate the efficiency and accuracy of the layerwise theory in predicting the interlaminar stresses. For the assessment of the accuracy of the proposed method, the interlaminar stresses are also calculated within the framework of a 3D finite element analysis using the Abaqus software. The corresponding numerical results are in good agreement with those obtained through the layerwise theory. All results indicate that the presented approaches have a good prediction capability of interlaminar stresses in interior regions of the laminate and theirs high stress concentration near its free edges that can cause delamination failure.

۱ – مقدمه

وجود میدان تنش سه بعدی در مجاورت لبه‌های آزاد ورق‌های مرکب، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین مشکلات موجود در طراحی و تحلیل این نوع سازه‌ها شناخته می‌شود. این پدیده که از آن به‌عنوان پدیده لایه مرزی تنش یاد می‌شود اغلب در بارگذاری‌های بسیار پایین‌تر از حد پیش‌بینی شده توسط نظریه کلاسیک[۱] روی می‌دهد. همچنین این پدیده باعث ایجاد جدایش بین لایه‌ای[۲] و ترک‌های عرضی در سازه‌های مرکب می‌شود که خود باعث کاهش سفتی و استحکام سازه شده و در نهایت منجر به شکست کلی آن می‌گردد. بنابراین تعیین دقیق وضعیت تنش در نواحی نزدیک لبه‌ها برای پیشگیری از خرابی سازه‌های مرکب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

در طی سال‌های گذشته کارهای تحقیقاتی بسیاری برای تعیین تنش در نزدیکی لبه‌های آزاد ورق‌های مرکب انجام شده که گردآوری کامل‌تری از

1- Classical Lamination Theory (CLT)

2- Delamination

Please cite this article using: **برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:**

M. Rezvani, A. Ghasemi Ghalebahman, Inter laminar stresses in symmetric cross-ply composite laminates using layer wise theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 59-66, 2014 (In Persian)

کارهای انجام شده توسط کانت و سومیناتان[۱] ارائه شده است. اولین حل تقریبی تنش‌های بین لایه‌ای توسط پاپو و اونسون[۲] ارائه شد که آنها، تنش‌های برشی بین لایه‌ای در یک ورق مرکب ایده‌آل را مورد بررسی قرار دادند. نخستین تحلیل کامل تنش‌های بین لایه‌ای توسط پایپس و پاگانو[۳] ارائه شد. از روش‌های تقریبی تحلیلی استفاده شده برای تعیین تنش‌های بین لایه‌ای می‌توان به استفاده از نظریه مرتبه بالا[۴]، حل تقریبی الاستیسیته[۵]، روش لایه مرزی[۶] و روش اغتشاشات[۷] اشاره نمود. وانگ و کراسمن[۸] مبتنی بر فرمولاسیون ارائه شده در مرجع [۵]، تنش‌های لبه‌های آزاد در ورق‌های متوازن متقارن تحت بارگذاری حرارتی را با استفاده از روش المان محدود مورد مطالعه قرار دادند. اسپیلکر و چائو[۹] با معرفی روش المان محدود خاصی که در آن شرایط لبه‌های آزاد به‌طور کامل اعمال می‌گردید، تنش‌های بین لایه‌ای را در ورق‌های متقارن تحت کرنش طولی یکنواخت محاسبه کردند. وانگ و چوی[۱۰] تابع تنش لخنیسکی[1] و نظریه الاستیک غیر ایزوتروپیک را برای بررسی منفرد بودن وضعیت تنش در لایه مرزی استفاده نمودند. لگیس و کاساپگلو[۱۱] براساس اصل کمینه‌سازی انرژی مکمل[2] و روش تعادل نیرویی[3]، ورق مرکب تحت بار محوری را مورد بررسی قرار دادند. وبر و مورتون[۱۲] با رویکردی مشابه کار انجام شده در [۱۱]، تلاش کردند تا توزیع تنش بین لایه‌ای در چند لایه‌های متقارن تحت بارگذاری حرارتی را محاسبه کنند. آلتوری و همکاران[۱۳] با استفاده از روش انرژی مکمل، تنش‌های بین لایه‌ای را در یک چند لایه مرکب تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی به‌دست آوردند. یین[۱۴] براساس بسط چند جمله‌ای توابع تنش و با توجه به اصل کمینه‌سازی انرژی مکمل، تنش در لبه‌های آزاد یک چند لایه متقارن تحت بارگذاری حرارتی غیر یکنواخت را محاسبه کرد. چو و کیم[۱۵] با استفاده از بسط روش کانترویچ[4]، تنش‌های بین لایه‌ای را تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی به‌دست آوردند. تحقیقات فراگیری در تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های چند لایه متعامد توسط طهانی و نثیر[۱۶] ارائه شده است. آن‌ها با فرض جابه‌جایی‌هایی از مرتبه صفر در ورق، روابط الاستیسیته را برای ورق‌های متعامد عمومی با طول محدود تحت کشش محوری و همچنین توزیع دمای لایه‌ای به‌دست آورده و با استفاده از نظریه لایه‌ای[5] تنش‌های بین لایه‌ای در نزدیکی لبه‌های آزاد ورق را محاسبه کردند. نثیر و بهرامی[۱۷] با استفاده از کلی‌ترین شکل میدان جابه‌جایی برای یک ورق مرکب بلند، تنش‌های بین لایه‌ای را تحت بارگذاری حرارتی-رطوبتی برای لایه‌گذاری‌های متعامد، متقارن و زاویه‌دار شبه متقارن به‌دست آوردند. آقایان یزدانی[۱۸] با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول بهبود یافته و نظریه لایه‌ای، توزیع تنش را در ناحیه لایه مرزی تحت بارگذاری‌های کشش محوری، خمش و پیچش برای ورق‌هایی با لایه‌گذاری عمومی به‌دست آوردند. میری و نثیر[۱۹] با تعیین تنش‌های بین لایه‌ای در پوسته‌های چندلای مرکب استوانه‌ای شکل، اثرات لبه‌های آزاد را در بارگذاری کششی مورد مطالعه قرار دادند. موسی‌نژاد و همکاران[۲۰]، تنش‌های بین لایه‌ای را در ورق‌های مرکب متقارن تحت بارگذاری برشی به‌دست آوردند. آنها همچنین با ارائه نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول بهبود یافته، ثابت مجهول تغییر شکل کلی ورق مرکب را با احراز شرایط مرزی تعیین نمودند.

هدف از تحقیق حاضر، تحلیل تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های مرکب متعامد متقارن[6] تحت کرنش محوری یکنواخت و توزیع حرارت یکنواخت در سراسر ورق است. برای این منظور با استفاده از کلی‌ترین شکل میدان جابه‌جایی، که از روابط کرنش-جابه‌جایی به‌دست آمده است، میدان جابه‌جایی عمومی براساس نظریه لایه‌ای و برای ورق‌های متعامد متقارن استخراج می‌شود. سپس به کمک اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل[7]، معادلات تعادل با استفاده از نظریه لایه‌ای به‌دست آمده و این معادلات به‌صورت تحلیلی حل می‌شود. در نهایت به‌منظور اعتبارسنجی، نتایج به‌دست آمده از حل تحلیلی با نتایج حاصل از حل المان محدود توسط نرم‌افزار آباکوس و نیز نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه خواهد شد. در اکثر مسائل مهندسی در این حوزه، دسترسی به حل تحلیلی و دقیق الاستیسیته سه بعدی در لبه‌های آزاد به سهولت امکان‌پذیر نمی‌باشد و لذا روش ارائه شده در این مقاله می‌تواند بدون هیچ قیدی تخمین قابل قبولی از رشد و توزیع تنش‌های بین لایه‌ای در لبه‌های آزاد داشته باشد[۱۷،۱۹].

۲- میدان جابه‌جایی الاستیسیته

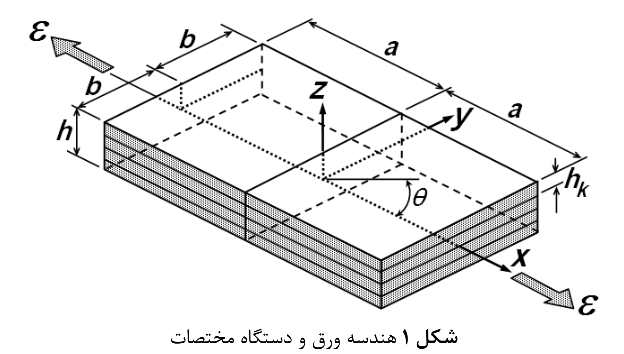
یک چند لایه مرکب به طول $2a$ ، عرض $2b$ و ضخامت h درنظر گرفته می‌شود. هندسه ورق و محورهای مختصات در شکل ۱ نشان داده شده است.

فرض می‌شود که بار مکانیکی در $x=a$ و $x=-a$ اعمال شده و بار حرارتی در سراسر ورق به‌صورت یکنواخت توزیع شده است. با فرض طولانی بودن طول ورق در جهت x، با دور شدن کافی از دو انتهای ورق مؤلفه‌های کرنش فقط توابعی از y و z خواهند شد. لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x{}^{(k)}(y,z) &= \frac{\partial}{\partial x} u_1{}^{(k)}(x,y,z)\\
\varepsilon_y{}^{(k)}(y,z) &= \frac{\partial}{\partial y} u_2{}^{(k)}(x,y,z)\\
\varepsilon_z{}^{(k)}(y,z) &= \frac{\partial}{\partial z} u_3{}^{(k)}(x,y,z)\\
\gamma_{xy}{}^{(k)}(y,z) &= \frac{\partial u_1{}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_2{}^{(k)}}{\partial x}\\
\gamma_{xz}{}^{(k)}(y,z) &= \frac{\partial u_1{}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_3{}^{(k)}}{\partial x}\\
\gamma_{yz}{}^{(k)}(y,z) &= \frac{\partial u_2{}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_3{}^{(k)}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $u_1{}^{(k)}$ ، $u_2{}^{(k)}$ و $u_3{}^{(k)}$ به‌ترتیب مولفه‌های جابه‌جایی در جهات x، y و z یک نقطه مادی دلخواه(x,y,z) در لایه k ام است. فرم کلی میدان جابه‌جایی در لایه k ام که با انتگرال‌گیری متوالی از معادلات کرنش-جابه‌جایی الاستیسیته (دسته معادلات (۱)) به‌دست می‌آید، مطابق زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
u_1{}^{(k)}(x,y,z) &= B_4xy + B_6xz + B_2x + U^{(k)}(y,z)\\
u_2{}^{(k)}(x,y,z) &= -B_1xz + B_3x - \frac{1}{2}B_4x^2 + V^{(k)}(y,z)\\
u_3{}^{(k)}(x,y,z) &= B_1xy + B_5x - \frac{1}{2}B_6x^2 + W^{(k)}(y,z)
\end{aligned} \tag{۲}$$



شکل ۱ هندسه ورق و دستگاه مختصات

1- Lekhnistskii stress function
2- Principle of minimum complementary energy
3- Balanced forced method
4- Kantorovich method
5- Layerwise theory
6- Symmetric cross-ply laminates
7- Principle of minimum total potential energy

که در آن ترم‌های نظیر توابع مجهول $U^{(k)}$، $V^{(k)}$ و $W^{(k)}$ توصیف کننده تغییر شکل محلی در هر لایه و ترم‌های نظیر ثوابت مجهول $B_j\ (j=1,\dots,6)$ معرف تغییر شکل کلی ورق می‌باشند. تحت بارگذاری کششی اعمال شده، شرایط فیزیکی ضد متقارن و متقارن[1] زیر برای تغییر شکل هر لایه برقرار است:

$$\begin{aligned}
u_1{}^{(k)}(x,y,z) &= -u_1{}^{(k)}(-x,-y,z)\\
u_2{}^{(k)}(x,y,z) &= -u_2{}^{(k)}(-x,-y,z)\\
u_3{}^{(k)}(x,y,z) &= u_3{}^{(k)}(-x,-y,z)
\end{aligned} \tag{۳}$$

پس از جایگذاری روابط (۳) در دسته معادلات (۲)، مقدار صفر برای ثوابت B_4 و B_5نتیجه خواهد شد. با جایگذاری عبارت $U^{(k)}(y,z)-B_3y$ به‌جای $U^{(k)}(y,z)$ در معادله (۲) مشاهده می‌شود که ترم‌های شامل B_3، متناظر با چرخش بی‌نهایت کوچک صلب[2] ورق مرکب حول محور z بوده و هیچ کرنشی ایجاد نمی‌کنند و لذا می‌توان آن‌ها را حذف نمود. بنابراین فرم عمومی میدان جابه‌جایی به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
u_1{}^{(k)}(x,y,z) &= B_6xz + B_2x + U^{(k)}(y,z)\\
u_2{}^{(k)}(x,y,z) &= -B_1xz + V^{(k)}(y,z)\\
u_3{}^{(k)}(x,y,z) &= B_1xy - \frac{1}{2}B_6x^2 + W^{(k)}(y,z)
\end{aligned} \tag{۴}$$

این میدان جابه‌جایی در اصل به‌منظور محاسبه میدان تنش در هر چند لایه مرکب دلخواه تحت ترکیبی از بارهای مکانیکی و حرارتی استفاده می‌شود. اما در این مقاله، چند لایه‌های متعامد متقارن تحت کرنش محوری مشخص و بارگذاری حرارتی یکنواخت، مورد توجه قرار می‌گیرد. لذا برای ورق‌های متعامد محدودیت‌های زیر اعمال می‌شود:

$$\begin{aligned}
u_1{}^{(k)}(x,y,z) &= u_1{}^{(k)}(x,-y,z)\\
u_2{}^{(k)}(x,y,z) &= -u_2{}^{(k)}(x,-y,z)\\
u_3{}^{(k)}(x,y,z) &= u_3{}^{(k)}(x,-y,z)
\end{aligned} \tag{۵}$$

با جایگذاری روابط (۵) در دسته معادلات (۴) نتیجه می‌شود $U^{(k)}(y,z)=0$ و $B_1=0$. همچنین در صورتی که چند لایه مرکب، متقارن نیز باشد با اعمال شرط تقارن حول محور z خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
u_1^{(k)}(x,y,z) &= u_1^{(N+1-k)}(x,y,-z)\\
u_2^{(k)}(x,y,z) &= u_2^{(N+1-k)}(x,y,-z)\\
u_3^{(k)}(x,y,z) &= -u_3^{(N+1-k)}(x,y,-z)\\
&;\ k=1,\dots,N/2
\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن N تعداد کل لایه‌ها می‌باشد. با اعمال شرایط مطرح شده در روابط (۶)، نتیجه می‌گیریم $B_6=0$. در نتیجه فرم عمومی میدان جابه‌جایی برای ورق‌های مرکب متعامد متقارن به‌صورت زیر کاهش خواهد یافت:

$$\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= B_2x\\
u_2(x,y,z) &= V^{(k)}(y,z)\\
u_3(x,y,z) &= W^{(k)}(y,z)
\end{aligned} \tag{۷}$$

۳- میدان جابه‌جایی در نظریه لایه‌ای

مطابق با نظریه لایه‌ای، عمومی‌ترین شکل میدان جابه‌جایی در یک نقطه دلخواه از ورق به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= U_k(x,y)\phi_k(z)\\
u_2(x,y,z) &= V_k(x,y)\phi_k(z)\\
u_3(x,y,z) &= W_k(x,y)\phi_k(z)\\
&;\ k=1,2,\dots,N+1
\end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن $\phi_k(z)$ تابع درونیاب لاگرانژ کلی[3] مطابق با سطح k ام و یک تابع پیوسته از مختصه z می‌باشد. تابع درونیاب لاگرانژ کلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_k(z)=\begin{cases}0 & z\le z_{k-1}\\ \psi_{k-1}^2(z) & z_{k-1}\le z\le z_k\\ \psi_k^1(z) & z_k\le z\le z_{k+1}\\ 0 & z\ge z_{k+1}\end{cases}\quad ;\ k=1,2,\dots,N+1 \tag{۹}$$

که $\psi_k^j\ (j=1,2)$ تابع درونیاب لاگرانژ موضعی[4] مربوط به گره jام از لایه k ام است و فرض می‌شود دارای تغییرات خطی در جهت ضخامت در هر لایه عددی باشد. این تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_k^1=\frac{z_{k+1}-z}{h_k}\ ,\psi_k^2=\frac{z-z_k}{h_k} \tag{۱۰}$$

که h_k ضخامت زیر لایه k ام وN نیز تعداد لایه‌های عددی درنظر گرفته شده در کل ضخامت چند لایه مرکب است. شایان ذکر است به‌منظور همگرایی حل، هر لایه فیزیکی به چند زیر لایه عددی تقسیم می‌شود. با مقایسه دسته معادلات (۷) و (۸) میدان جابه‌جایی نظریه لایه‌ای برای ورق‌های متعامد متقارن به‌صورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= B_2x\ \equiv\ \varepsilon_0x\\
u_2(x,y,z) &= V_k(y)\phi_k(z)\\
u_3(x,y,z) &= W_k(y)\phi_k(z)\\
&;\ k=1,2,\dots,N+1
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

در معادله (۱۱)، $B_2=\varepsilon_0=\bar{U}/a$، معرف کرنش محوری یکنواخت در جهت x بوده و u_1، u_2 و u_3 به‌ترتیب معرف مؤلفه‌های جابه‌جایی در جهات x، y و z از یک نقطه مادی در مختصات (x,y,z) در چند لایه تغیر شکل نیافته می‌باشند. همچنین V_k و W_k به‌ترتیب بیانگر مؤلفه‌های جابه‌جایی نقاط قرار گرفته در لایه k ام در جهات y و z می‌باشد. با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۱۱) در روابط خطی کرنش-جابه‌جایی الاستیسیته (دسته معادلات (۱))، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\varepsilon_0\ ,\varepsilon_y=V_k\phi_k\ ,\varepsilon_z=W_k\frac{d\phi_k}{dz}\\
&\gamma_{yz}=V_k\frac{d\phi_k}{dz}+W_k\phi_k\ ,\gamma_{xz}=\gamma_{xy}=0
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

شایان ذکر است که ترم‌های پریم‌دار به‌صورت مشتق معمولی نسبت به متغیر y تعریف می‌شوند.

۳-۱- معادلات تعادل

برای تعیین معادلات تعادل در نظریه لایه‌ای، از اصل کمینه‌سازی مجموع انرژی پتانسیل استفاده می‌شود:

$$\delta\pi=\delta u+\delta v=\int\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dV=0 \tag{۱۳}$$

در این رابطه، u انرژی کرنشی کل[5] و v معرف منفی کار خارجی انجام شده روی جسم است که با توجه به شرایط اعمال بار $v=0$ می‌باشد. پس از جایگذاری مؤلفه‌های کرنش (روابط (۱۲)) در معادله تغییراتی (۱۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\delta V_k:\ \frac{dM_y^k}{dy}-Q_y^k=0\\
&\delta W_k:\frac{dR_y^k}{dy}-N_z^k=0
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

همچنین شرایط مرزی تنش در لبه‌های آزاد ورق مرکب ($y=b$ و $y=-b$) به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$M_y^k=\ R_y^k=0 \tag{۱۵}$$

در معادلات (۱۴) و (۱۵)، منتجه‌های تنش و ممان[6] به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\left(N_z^k\,,Q_y^k\right)&=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_z\,,\sigma_{yz}\right)\frac{d\phi_k}{dz}\,dz\\
\left(M_y^k\,,R_y^k\right)&=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_z\,,\sigma_{yz}\right)\phi_k\,dz
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

1- Antisymmetry and symmetry conditions
2- Infinitesimal rigid-body rotation
3- Global lagrangian interpolation function
4- Local lagrangian interpolation function
5-Total strain energy
6-Stress and moment resultants

روابط تنش-کرنش سه بعدی برای لایه k ام نسبت به دستگاه مختصات ورق مرکب به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{C}]^{(k)}\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^{(Th)}\right)^{(k)} \quad (۱۷)$$

که $[\bar{C}]$ ماتریس سفتی انتقال یافته در مختصات خارج از محور[1] در لایه k ام بوده و $\{\varepsilon\}^{(Th)}$ بردار کرنش حرارتی است. با جایگذاری مولفه‌های تنش از رابطه (۱۷) در روابط (۱۶)، منتجه‌های تنش و ممان برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\left(N_z^k, M_y^k\right) &= (A_{13}^k, B_{12}^k)\varepsilon_0 + \left(B_{23}^{jk}, D_{22}^{kj}\right)V_j \\
&\quad + \left(A_{33}^{kj}, B_{23}^{kj}\right)W_j - \left(N_z^{k(Th)}, M_y^{k(Th)}\right) \\
\left(Q_y^k, R_y^k\right) &= \left(A_{44}^{kj}, B_{44}^{kj}\right)V_j + \left(B_{44}^{kj}, D_{44}^{kj}\right)W_j
\end{aligned} \quad (۱۸)$$

ترم‌های صلبیت استفاده شده در روابط (۱۸) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\left(A_{pq}^k, B_{pq}^k\right) &= \sum_{i=1}^{N}\int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)}\left(\frac{d\phi_k}{dz}, \phi_k\right) dz \\
A_{pq}^{kj} &= \sum_{i=1}^{N}\int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)}\frac{d\phi_k}{dz}\frac{d\phi_j}{dz}\, dz \\
B_{pq}^{kj} &= \sum_{i=1}^{N}\int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)}\phi_k\frac{d\phi_j}{dz}\, dz \\
D_{pq}^{kj} &= \sum_{i=1}^{N}\int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)}\phi_k\phi_j\, dz
\end{aligned} \quad (۱۹)$$

همچنین منتجه‌های حرارتی در معالات (۱۸) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(N_z^{k(Th)}, M_y^{k(Th)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sum_{j=1}^{3}\left(\bar{C}_{3j}^{(k)}\bar{\alpha}_j^{(i)}\frac{d\phi_k}{dz}, \bar{C}_{2j}^{(k)}\bar{\alpha}_j^{(i)}\phi_k\right)\Delta T dz \quad (۲۰)$$

در معادله (۲۰)، ΔT و $\bar{\alpha}_j$ به‌ترتیب تغییر دما و ضرایب پخش حرارتی انتقال یافته در مختصات خارج از محور می‌باشند. در نهایت با جایگذاری روابط (۱۸) در معادلات (۱۴)، معادلات تعادل برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\delta V_k &: D_{22}^{kj}V_j'' - A_{44}^{kj}V_j + \left(B_{23}^{kj} - B_{44}^{jk}\right)W_j = 0 \\
\delta W_k &: \left(B_{44}^{kj} - B_{23}^{jk}\right)V_j + D_{44}^{kj}W_j'' - A_{33}^{kj}W_j = A_{13}^k\varepsilon_0 - N_z^{k(Th)}
\end{aligned} \quad (۲۱)$$

۴- حل تحلیلی

فرض می‌شود که ورق مرکب مستطیلی در معرض کرنش محوری یکنواخت ε_0 در هر یک از لبه‌های ورق (در *x=a* و *x=-a*) و یا در معرض توزیع دمای لایه‌ای یکنواخت ΔT قرار داشته باشد. فرض می‌شود توزیع دما در سطوح مشترک لایه‌های مختلف پیوسته باشد. همچنین فرض می‌شود خواص مادی ورق با تغیر دما، تغییر نکنند.

ورق مرکب دارای شرط مرزی کرنش یکنواخت در لبه‌های *x=a* و *x=-a*و شرط مرزی آزاد (روابط (۱۵)) در لبه‌های *y=b* و *y=-b*می‌باشد. از این رو معادلات (۲۱) را می‌توان با ارضای شرایط مرزی در هر یک از لبه‌های ورق به‌صورت تحلیلی حل کرد. اما باید توجه کرد که به‌علت وجود مقادیر ویژه صفر تکراری، روش حل بسیار پیچیده خواهد بود. با استفاده از روش کارآمد پیشنهاد شده در مرجع [۱۶]، روش حل ساده خواهد شد. برای تسهیل در طرح جواب این معادلات، ترم‌های ساختگی کوچکی به طرف دوم معادلات (۲۱) اضافه می‌شود تا ریشه‌های معادله مشخصه همگی مجزا و غیر صفر گردند. بنابراین معادلات (۲۱) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\delta V_k &: D_{22}^{kj}V_j'' - A_{44}^{kj}V_j + \left(B_{23}^{kj} - B_{44}^{jk}\right)W_j = \alpha^{kj}V_j \\
\delta W_k &: \left(B_{44}^{kj} - B_{23}^{jk}\right)V_j + D_{44}^{kj}W_j'' - A_{33}^{kj}W_j \\
&\quad = A_{13}^k\varepsilon_0 - N_z^{k(Th)} + \alpha^{kj}W_j
\end{aligned} \quad (۲۲)$$

که در آن:

$$\alpha^{kj} = \alpha\int_{-h/2}^{h/2}\phi_k\phi_j\, dz \quad (۲۳)$$

α یک مقدار دلخواه است به‌طوری که مقدار α^{kj} در معادله (۲۳) مقدار نسبتا کوچکی در مقایسه با مقادیر عددی صلبیت‌های $A_{pq}^{kj}(pq = 33, 44)$ است[۱۶]. با اضافه کردن α^{kj} به طرف دوم معادلات (۲۱)، مقادیر ویژه صفر تکراری حذف می‌شوند. لذا می‌توان از روش‌های معمول حل معادلات دیفرانسیل برای حل این معادلات استفاده کرد.

معادلات (۲۲) در بردارنده $2(N+1)$معادله دیفرانسیل مرتبه دوم وابسته به هم با ضرایب ثابت است. برای تسهیل در حل این سیستم معادلات، از رویکرد معادلات فضای حالت استفاده می‌شود. متغیرهای فضای حالت به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\{\eta_1\} &= \{V\}, \{\xi_1\} = \{V'\} = \{\eta_1'\} \\
\{\xi_2\} &= \{W\}, \{\eta_2\} = \{W'\} = \{\xi_2'\}
\end{aligned} \quad (۲۴)$$

که در آن:

$$\{\eta_1\}^{\mathrm{T}} = \left[V_1, V_2, \ldots, V_{N+1}\right] \quad (۲۵)$$

همچنین متغیرهای $\{\eta_2\}$، $\{\xi_1\}$ و $\{\xi_2\}$به‌صورت مشابه رابطه (۲۵) تعریف می‌شوند. با جایگذاری متغیرهای حالت در معادلات (۲۲)، دو دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول معمولی مطابق زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\{\xi'\} &= [A]\{\eta\} \\
\{\eta'\} &= [B]\{\xi\} + \{F\}
\end{aligned} \quad (۲۶)$$

که در روابط فوق:

$$\begin{aligned}
\{\eta\}^{\mathrm{T}} &= [\{\eta_1\}^{\mathrm{T}}, \{\eta_2\}^{\mathrm{T}}] \\
\{\xi\}^{\mathrm{T}} &= [\{\xi_1\}^{\mathrm{T}}, \{\xi_2\}^{\mathrm{T}}]
\end{aligned} \quad (۲۷)$$

ماتریس‌های ضرایب $[A]$ و $[B]$ و بردار $\{F\}$ ظاهر شده در معادله (۲۶) در پیوست (بخش ۷) آورده شده است. اکنون روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$[C][U] = [U][\Lambda^2] \quad (۲۸)$$

در معادله (۲۸)، $[\Lambda^2]$ ماتریس قطری مقادیر ویژه و $[U]$ ماتریس بردارهای ویژه (ماتریس مودال) متعلق به ماتریس $[C] = [A][B]$ می‌باشند. در حالت کلی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌توانند اعداد مختلط باشند. ماتریس قطری مقادیر ویژه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\Lambda^2] = diag\left(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_{2(N+1)}^2\right) \quad (۲۹)$$

جواب عمومی معادله (۲۴) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\{\xi\} &= [U][\cosh(\lambda y)]\{K\} - [B]^{-1}\{F\} \\
\{\eta\} &= [A]^{-1}[U][\Lambda][\sinh(\lambda y)]\{K\}
\end{aligned} \quad (۳۰)$$

که در آن $[\cosh(\lambda y)]$ و $[\sinh(\lambda y)]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&[\cosh(\lambda y)] \\
&= diag\left(\cosh(\lambda_1 y), \cosh(\lambda_2 y), \ldots, \cosh\left(\lambda_{2(N+1)}y\right)\right) \\
&[\sinh(\lambda y)] \\
&= diag\left(\sinh(\lambda_1 y), \sinh(\lambda_2 y), \ldots, \sinh\left(\lambda_{2(N+1)}y\right)\right)
\end{aligned} \quad (۳۱)$$

که در معادله (۳۰)، بردار $\{K\}$ شامل $2(N+1)$ ثابت انتگرال‌گیری مجهول است که با ارضای شرایط مرزی در لبه‌های ورق چند لایه مرکب به‌دست می‌آیند.

۵- مثال‌های عددی

در این قسمت توزیع تنش‌های خارج از صفحه[2] در لبه‌های آزاد ورق‌های $[0/90]_s$

1-Off-axis or global coordinate system

2- Out-of-plane stresses

و $[90/0]_s$ تحت کرنش محوری یکنواخت و یا بار حرارتی به‌صورت توزیع دمای لایه‌ای یکنواخت ارائه خواهد شد. همچنین فرض می‌شود تمام لایه‌ها دارای ضخامت یکسان h_k بوده و به‌صورت مواد ارتوتروپیک همگن از جنس گرافیت/ اپوکسی با خواص مکانیکی و فیزیکی زیر درنظر گرفته می‌شوند[۸]:

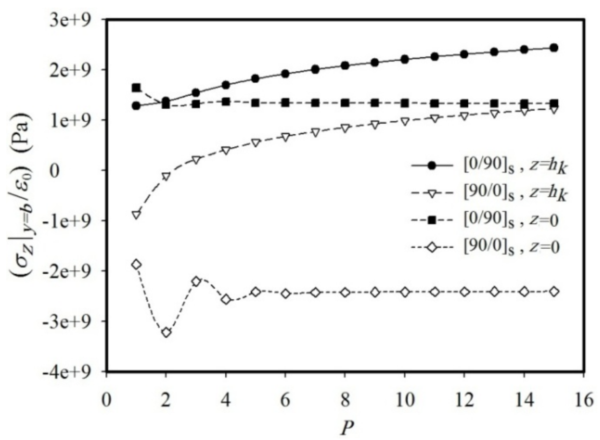
$$\begin{aligned} &E_1 = 137.9\ \text{GPa}\,,\\ &E_2 = E_3 = 14.48\ \text{GPa}\,,\\ &\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.21\,,\\ &G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5.86\ \text{GPa}\,,\\ &\alpha_1 = 0.36 \times 10^{-6}\ {}^{\circ}\text{C}^{-1}\,,\\ &\alpha_2 = \alpha_3 = 28.8 \times 10^{-6}\ {}^{\circ}\text{C}^{-1} \end{aligned} \tag{۳۲}$$

که زیرنویس ۱ در امتداد الیاف، ۲ عمود بر امتداد الیاف و ۳ در جهت ضخامت لایه‌ها استفاده می‌شود. انتخاب خواص مکانیکی به‌صورت روابط (۳۲)، براساس خواص مکانیکی ذکر شده در مراجع [۸، ۹، ۱۵، ۱۶] انتخاب گردیده است تا امکان مقایسه نتایج به‌دست آمده از حل تحلیلی و حل عددی المان محدود را با نتایج موجود در سایر مقالات فراهم کند. در تمامی نتایج به‌دست آمده، ورق‌ها با طول $2a$، پهنای $2b$ و ضخامت h، همچنین نسبت پهنا به ضخامت ۴ ($2b/h = 4$) و نسبت طول به ضخامت ۱۰ ($a/h = 10$) درنظر گرفته شده است. همچنین ضخامت هر لایه فیزیکی برابر 1 mm منظور می‌شود. شایان ذکر است برای پرهیز از حجیم شدن نتایج به‌دست آمده فقط پاره‌ای از نتایج و مطابق با فعالیت سایر محققین ارائه شده است.

۵-۱- مطالعه همگرایی

در این آزمون، همگرایی تنش عمودی σ_z در نزدیکی لبه‌های آزاد ورق‌های $[0/90]_s$ و $[90/0]_s$ تحت کرنش محوری یکنواخت ε_0بررسی می‌شود. تنش‌های برون صفحه‌ای با استفاده از انتگرال‌گیری از معادلات موضعی تعادل و درنظر گرفتن تعداد تقسیمات مختلف P در هر لایه فیزیکی که به‌عنوان تعداد زیرلایه عددی منظور می‌شود، محاسبه خواهند شد. به‌علت طبیعت ورق‌های مرکب متعامد، تنش‌های σ_{xy} و σ_{xz} در تمام نقاط ورق برابر صفر خواهد بود.

شکل ۲، مقدار عددی σ_z در محل برخورد سطح آزاد و سطح مشترک 0/90 و محل برخورد سطح آزاد و سطح میانی (z=0) را به‌ازای مقادیر مختلف P و برای ورق‌های $[0/90]_s$ و $[90/0]_s$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل در سطح میانی، مقدار تنش σ_z با افزایش P (به‌ازای $P \geq 5$) ثابت باقی می‌ماند در حالی که در سطح مشترک 0/90 مقدار σ_z وابسته به تعداد لایه‌های عددی بوده و با افزایش P، به‌طور پیوسته زیاد می‌شود. علت این رفتار منفرد بودن مولفه تنش σ_z در محل برخورد سطح آزاد و سطح مشترک 0/90 می‌باشد[۱۰].



شکل ۲ همگرایی تنش σ_z در y=b به‌ازای مقادیر مختلف P برای ورق‌های $[0/90]_s$ و $[90/0]_s$

در این مقاله، از شش لایه عددی در هر لایه فیزیکی (P=6) استفاده می‌شود و در صورت استفاده از تعداد لایه عددی دیگر، تعداد تقسیمات ذکر خواهد شد.

۵-۲- روش المان محدود

در ادامه به‌منظور بررسی صحت نتایج ارائه شده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس استفاده می‌شود. شایان ذکر است که در این قسمت، از المان‌های $C3D8R$ (المان‌های مکعبی ۸ گره‌ای با انتگرال کاهش مرتبه یافته) برای بارگذاری کرنش محوری یکنواخت و از المان‌های $C3D8T$ (المان‌های مکعبی ۸ گره‌ای با وابستگی جابه‌جایی به دما) برای بارگذاری حرارتی و با امکان تعریف لایه‌هایی با جهت الیاف مختلف استفاده شده است. تعداد بهینه المان در این مدل مش‌بندی ۱۵۳۶۰ عدد (به‌ازای ۶ لایه عددی در هر لایه فیزیکی) به‌دست آمده است. همچنین شایان ذکر است به‌علت تقارن در مساله، فقط ربع ورق مدل می‌شود ($0 < x < a\,, 0 < y < b$).

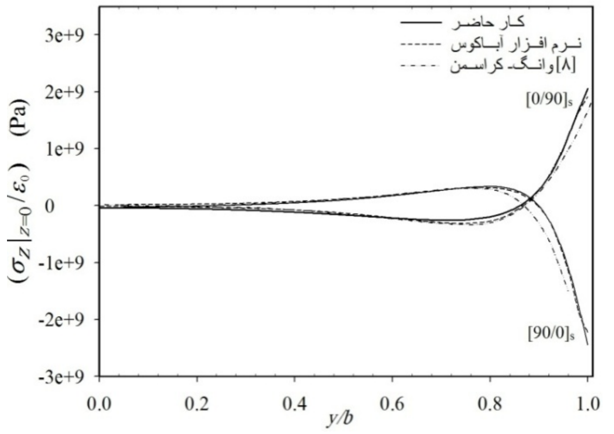
۵-۳- بارگذاری کرنش محوری یکنواخت

در این قسمت، توزیع تنش‌های خارج از صفحه تنها تحت کرنش محوری یکنواخت ε_0 بررسی شده و از نتایج ارائه شده در مقالات [۸، ۹، ۱۶] برای مقایسه نتایج استفاده می‌شود. همچنین در هر قسمت نیز از نتایج حل المان محدود برای ارزیابی نتایج به‌دست آمده استفاده خواهد شد.

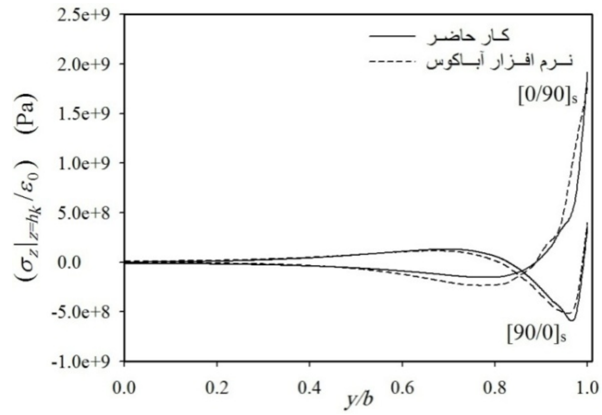
شکل ۳، توزیع تنش σ_z در سطح میانی (z=0) در راستای عرض ورق‌های $[0/90]_s$ و $[90/0]_s$ را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود در نقاط دور از لبه‌های آزاد، مقدار تنش ناچیز بوده و با نزدیک شدن به لبه‌های آزاد مقدار تنش با تغییرات شدیدی همراه است. همچنین نتایج به‌دست آمده تطابق خوبی با نتایج المان محدود و نتایج [۸] دارند.

در شکل ۴، توزیع تنش σ_z در سطح مشترک 0/90 ورق‌های $[0/90]_s$ و $[90/0]_s$ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن به لبه‌های آزاد مقدار تنش افزایش یافته چنانکه ماکزیمم مقدار آن در لبه‌های آزاد اتفاق می‌افتد.

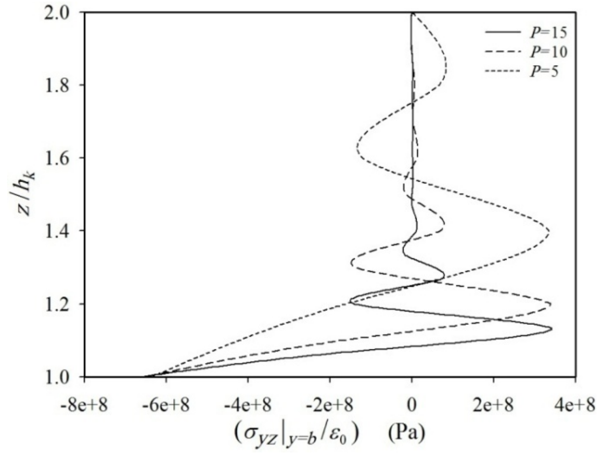
شکل ۵، تغییرات تنش برشی σ_{yz} را در سطح آزاد (y=b) و در لایه فوقانی°0 برای ورق $[0/90]_s$به‌ازای تعداد لایه‌های عددی مختلف P نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد لایه‌های عددی، مقدار σ_{yz} در همه جا به‌جز، در فصل مشترک لبه با سطح (سطح مشترک 90/0) به‌سمت صفر میل می‌کند اما مقدار σ_{yz} در سطح مشترک 90/0 تحت تاثیر افزایش P قرار نمی‌گیرد.



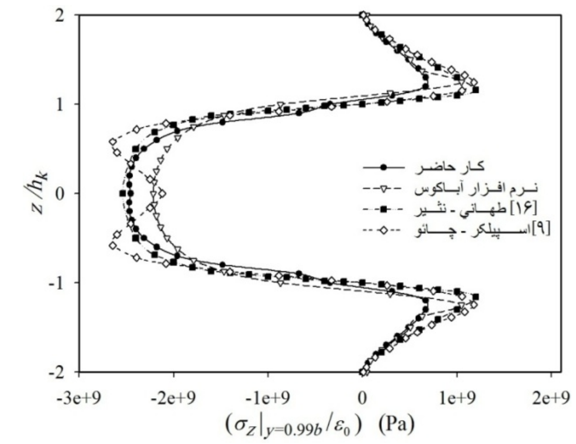
شکل ۳ توزیع تنش σ_z در سطح میانی (z=0) برای ورق‌های $[0/90]_s$ و $[90/0]_s$ تحت کرنش محوری یکنواخت



شکل ۴ توزیع تنش σ_z در سطح مشترک 0/90برای ورق‌های$_s$[0/90] و $_s$[90/0] تحت کرنش محوری یکنواخت



شکل ۵ توزیع تنش σ_{yz} در راستای لبه آزاد لایه فوقانی 0° برای ورق $_s$[0/90] و تحت کرنش محوری یکنواخت



شکل ۶ توزیع تنشσ_z در راستای ضخامت برای ورق$_s$[90/0] و تحت کرنش محوری یکنواخت

تغییرات تنش عمودی σ_z در راستای ضخامت در لبه آزاد ($y=b$) برای ورق $_s$[90/0] در شکل ۶، نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج تحلیلی به‌دست آمده تطابق خوبی با نتایج [۹ و ۱۶] و نتایج عددی حاصل از روش المان محدود دارد. اختلاف ناچیز مشاهده شده، مربوط به منفرد بودن مقدار تنش در نزدیکی سطح مشترک 0/90 ، 90/0 و خطای برشی[1] در روش حل می‌باشد. اگر چه با افزایش تعداد لایه‌های عددی، مقدار تنش در نزدیکی سطح مشترک 0/90 افزایش می‌یابد، اما در مجموع نتایج حاصل شده در تطابق خوبی با یکدیگر قرار دارند. توزیع تنش σ_z نسبت به سطح میانی ورق نیز متقارن بوده که ماکزیمم مقدار کششی تنش σ_z در سطح مشترک 0/90 و 90/0 اتفاق می‌افتد.

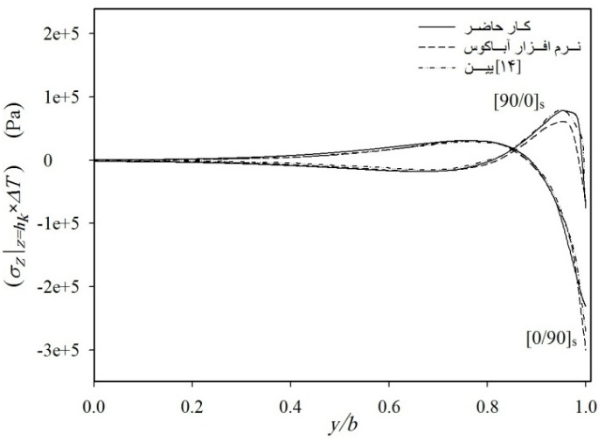
1- Truncation error

۵-۴- بارگذاری تغییرات دمایی یکنواخت

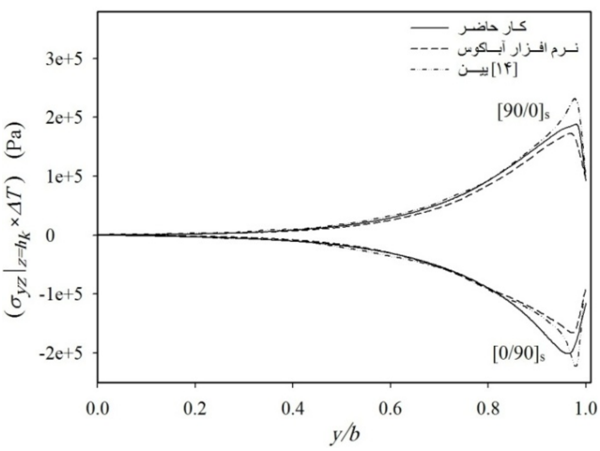
در این قسمت فرض می‌کنیم ورق‌ها فقط در معرض تغییر دمای یکنواخت ΔT قرار دارند. به‌منظور امکان مقایسه با سایر فعالیت‌ها، فرض می‌شود $\Delta T = 1\ ^\circ\mathrm{C}$. همچنین از نتایج ارائه شده در مقالات [۱۴ و ۱۵] و حل المان محدود اباکوس برای مقایسه و ارزیابی نتایج استفاده خواهد شد.

توزیع تنش عمودی σ_z در سطح مشترک 0/90 برای ورق‌های $_s$[0/90] و $_s$[90/0] در شکل ۷، نشان داده شده است. مشاهده می شود که توزیع تنش در این ورق‌ها از لحاظ کیفی شبیه شکل ۴ برای ورق‌های تحت کرنش محوری است. همچنین مشاهده می‌شود که توزیع تنش، تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع [۱۴] و همچنین حل المان محدود دارد.

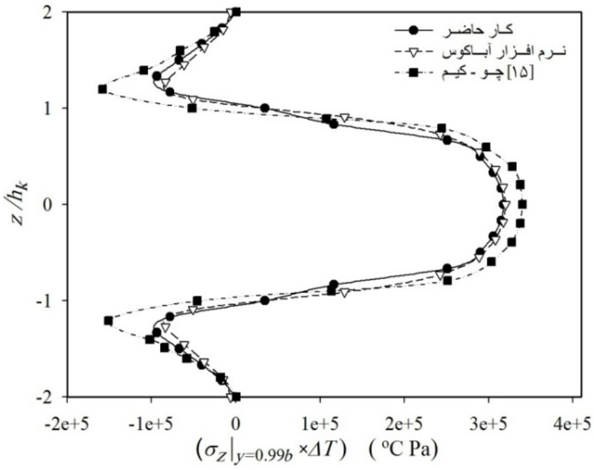
توزیع تنش برشی σ_{yz} در سطح مشترک 0/90 برای ورق‌های $_s$[0/90] و $_s$[90/0] در شکل ۸، نشان داده شده است. نمودارهای ارائه شده، تطابق خوبی میان نتایج مختلف را نشان می‌دهد؛ هر چند با افزایش تعداد لایه‌های عددی مقدار حداکثر تنش برشی در نزدیکی لبه آزاد افزایش و اختلاف نشان داده شده در لبه‌های آزاد تصحیح خواهد شد.



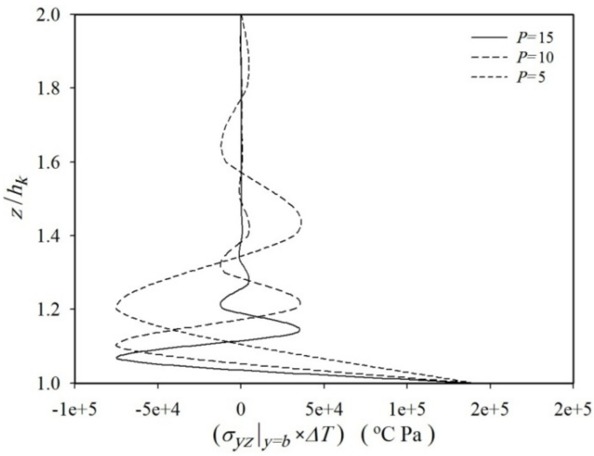
شکل ۷ توزیع تنشσ_z در سطح مشترک 0/90برای ورق‌های $_s$[0/90] و $_s$[90/0] به‌ازای تغییر دمای یکنواخت واحد



شکل ۸ توزیع تنش σ_{yz} در سطح مشترک 0/90 برای ورق های $_s$[0/90] و $_s$[90/0] در معرض تغییر دمای یکنواخت واحد



شکل ۹ توزیع تنش σ_z در راستای ضخامت در y=0.99b ورق $[90/0]_s$ در معرض تغییر دمای یکنواخت واحد



شکل ۱۰ توزیع تنش σ_{yz} در راستای لبه آزاد لایه فوقانی 0° ورق $[0/90]_s$ در معرض تغییر دمای یکنواخت واحد

توزیع تنش عمودی σ_z در راستای ضخامت در نزدیکی لبه آزاد (y=0.99b) از ورق $[0/90]_s$ در شکل ۹، نشان داده شده است. خاطر نشان می‌شود که مقدار y=0.99b جهت مقایسه نتایج با آنچه توسط سایر محققین ارائه گردیده، انتخاب شده است و حال آنکه نظریه لایه‌ای محدودیتی در به‌دست آوردن مقادیر تنش در لبه‌های آزاد ندارد. اگرچه با افزایش تعداد لایه‌های عددی، خطای برشی کاهش یافته و نتایج کار حاضر و نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس با نتایج مرجع [۱۵] تطابق بیشتری خواهد یافت، ولی به‌طور کلی مشاهده می‌شود که نتایج ارائه شده در تطابق خوبی با یکدیگر قرار دارند.

توزیع تنش σ_{yz} در لایه فوقانی (لایه 0°) ورق $[0/90]_s$ در محل لبه آزاد در شکل ۱۰، نشان داده می‌شود. مشاهده می‌شود نتایج از لحاظ رفتاری بسیار شبیه نتایج شکل ۵ برای ورق تحت کرنش محوری یکنواخت است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله از نظریه لایه‌ای به‌منظور تعیین تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های مرکب متقارن متعامد تحت بارگذاری‌های کرنش محوری یکنواخت و یا بارگذاری حرارتی به‌صورت تغییر دمای یکنواخت، استفاده شد. جهت ارزیابی نتایج چندین مثال عددی ارائه شد و توزیع تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های مرکب متقارن متعامد و با چیدمان مختلف به‌دست آمد. همچنین از آزمون همگرایی به‌منظور تعیین تعداد تقسیمات و تعداد زیرلایه‌های عددی مناسب در هر لایه فیزیکی استفاده شد. با مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه شده توسط سایر محققین و همچنین نتایج حل المان محدود آباکوس، صحت و دقت نظریه و روش حل استفاده شده در تخمین اثرات سه بعدی موضعی تنش، مورد ارزیابی قرار گرفت. مشاهده شد که نتایج ارائه شده در این تحقیق، تطابق خوبی با نتایج به‌دست آمده از مقالات و نتایج حاصل از حل المان محدود دارد. در کلیه نتایج به‌دست آمده وجود تمرکز تنش بالای تنش‌های بین لایه‌ای در موقعیت لبه‌های آزاد که عامل ایجاد تخریب جدایش بین لایه‌ای است، ملاحظه گردید.

۷- پیوست

ماتریس‌های [A]، [B] و بردار {F} که در معادلات (۲۶) آمده است، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[A]=\begin{bmatrix}[a_1] & [a_2]\\ [0] & [I]\end{bmatrix}$$
$$[B]=\begin{bmatrix}[I] & [0]\\ [b_1] & [b_2]\end{bmatrix}$$
$$\{F\}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{c\}\end{Bmatrix}$$

که در آن $[0]$ و $[I]$ به‌ترتیب ماتریس صفر و ماتریس همانی (ماتریس واحد) با ابعاد $(N+1)\times(N+1)$ و $\{0\}$ بردار صفر با $N+1$ عضو می‌باشد. ضرایب دیگر ماتریس‌های فوق به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[a_1]=\left[D_{22}^{kj}\right]^{-1}\left(\left[A_{44}^{kj}\right]+\left[\alpha^{kj}\right]\right)$$
$$[a_2]=\left[D_{22}^{kj}\right]^{-1}\left(\left[B_{44}^{jk}\right]-\left[B_{23}^{kj}\right]\right)$$
$$[b_1]=\left[D_{44}^{kj}\right]^{-1}\left(\left[B_{23}^{jk}\right]-\left[B_{44}^{kj}\right]\right)$$
$$[b_2]=\left[D_{44}^{kj}\right]^{-1}\left(\left[A_{33}^{kj}\right]+\left[\alpha^{kj}\right]\right)$$
$$\{c\}=\left[D_{44}^{kj}\right]^{-1}\left(\{A_{13}^{k}\}\varepsilon_0-\left\{N_z^{k(Th)}\right\}\right)$$

۸- مراجع

[1] T. Kant, K. Swaminathan, Estimation of transverse interlaminar stresses in laminated composites- aselective review andsurvey of current developments, *Composite Structures*, Vol. 49, pp.65–75, 2000.

[2] A. H. Puppo, H. A. Evensen, Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress, *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, pp.204–220, 1970.

[3] R. B. Pipes, N. J. Pagano, Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension, *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, pp. 538–548, 1970.

[4] N. J. Pagano, On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminates, *Journal of Composite Material,* Vol. 8, pp. 64–81, 1974.

[5] R. B. Pipes, N. J. Pagano, Interlaminar stresses in composite laminates - An approximate elasticity solution, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, pp. 668–72, 1974.

[6] S. Tang, A. Levy, A Boundary layer theory - part ii: extension of laminated finite strip, *Journal of Composite Materials*, Vol. 9, pp. 42–52, 1975.

[7] P. W. Hsu, C. T. Herakovich, Edge effects in angle-ply composite laminates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 11, pp. 422–430, 1977.

[8] A. S. D. Wang, F.W. Crossman, Some new results on edge effect in symmetric composite laminates, *Journal of Composite Materials,* Vol. 11, pp. 92–106, 1977.

[9] R. L. Spilker, S. C. Chou, Edge effects in symmetric composite laminates: importance of satisfying the traction-free-edge condition, *Journal of Composite Materials*, Vol. 14, pp. 2–20, 1980.

[10] S. S. Wang, I. Choi, Boundary layer effects in composite laminates, part II: free-edge stress solutions and basic characteristic, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 549–60, 1982.

[11] C. Kassapoglou, P. A. Lagace, An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp.744–50, 1986.

[12] J. P. H. Webber, S. K. Morton, An analytical solution for the thermal stresses at the free edges of laminated plates, *Composite Science Technology*, Vol. 46, pp. 175–85, 1993.

[13] T. Kim, S. N. Atluri, Analysis of edge stresses in composite laminate under combined thermo-mechanical loading, using a complementary energy approach, *Computational Mechanics*, Vol. 16, pp.83–97, 1995.

[14] W. L. Yin, The effect of temperature gradient on the free-edge interlaminar stresses in multilayered structures, *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, No. 24, pp. 2460–2477, 1997.

[15] M. Cho, H. S. Kim, Iterative free-edge stress analysis of composite laminates under extension, bending, twisting and thermal loadings, *International Journal of Solids and Structure*, Vol. 37, No. 3, pp. 435–59, 2000.

[16] M. Tahani, A. Nosier, Free edge stress analysis of general cross-ply composite laminates under extension and thermal loading, *Composite Structures*, Vol. 60, pp. 91–103, 2003.

[17] A. Nosier, A. Bahrami, Interlaminar hygrothermal stresses in laminated plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 8119–8142, 2007.

[18] S. H. Yazdani, S. M. Yazdani, Interlaminar stress analysis of general composite laminates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, pp. 958–967, 2011.

[19] A. K. Miri, A. Nosier, Interlaminar Stresses in antisymmetric angle-ply cylindrical shell panels, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 419–429, 2011.

[20] V. D. Mousanezhad, S. H. Yazdani, A. Nosier, Stress analysis in symmetric composite laminates subjected to shearing loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 75, pp. 16–25, 2013.