مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین ۱۳۹۳، دوره ۱٤، شماره ۱، ص‌ص ۱۳۱-۱۳۹

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدلسازی دینامیکی بازوهای رباتیکی ویسکوالاستیک با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو

محرم حبیب نژاد کورایم*[۱]، علی محمد شافعی[۲]، مهسا دوست حسینی[۳]، بهزاد کدخدایی الیادرانی[۴]

۱- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

۴- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۶۸۴۶۱۳۱۱۴، hkorayem@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۴ مرداد ۱۳۹۲

پذیرش: ۲۶ شهریور ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۶ بهمن ۱۳۹۲

کلید واژگان:

تیموشنکو

کلوین-ویت

میرایی هوا

گیبس-اپل

دستگاه آزمایش

چکیده

در این مقاله، تحقیقی بر روی ارتقاء مدل‌سازی بازوهای رباتیکی N لینکی ویسکوالاستیک انجام شده است. مدل دینامیکی سیستم با استفاده از فرمولاسیون گیبس- اپل و روش مودهای فرضی استخراج شده است. زمانی‌که طول رابط در جهت طول آن کوتاه باشد، تغییر فرم برشی عاملی است که می‌تواند تأثیر مهمی بر روی دینامیک سیستم بگذارد. بنابراین در مدل‌سازی، فرض تئوری تیر تیموشنکو و مودهای مرتبط با آن لحاظ شده است. اگر چه در نظر گرفتن تأثیر میرایی در سیستم‌های ممتد، فرمولاسیون مربوط به معادلات حرکت را پیچیده‌تر می‌کند، دو مکانیزم مهم میرایی، یعنی میرایی کلوین-ویت به‌عنوان میرایی داخلی و اثر ویسکوز هوا به عنوان عامل مستهلک‌کننده خارجی در معادلات لحاظ شده است. در نهایت، برای تأیید مدل پیشنهادی، ارزیابی مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده از آزمایش عملی و شبیه‌سازی در حوزه زمان انجام شده است.

Dynamic modeling of visco-elastic robotic manipulators using Timoshenko beam theory

M. Habibnejad Korayem[1*], A. M. Shafei[2], M. Doosthoseini[3], B. Kadkhodaei[4]

1- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
3- Mechatronic Engineering Department, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran-Iran
4- Mechatronic Engineering Department, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran-Iran
* P.O.B. 1684613114 Tehran, hkorayem@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 August 2013
Accepted 17 September 2013
Available Online 15 February 2014

Keywords:
Timoshenko
Kelvin-Voigt
Air Damping
Gibbs-Appell
Experimental Setup

ABSTRACT

This paper presents a research into the progress of modeling of N-viscoelastic robotic manipulators. The governing equations of the system is obtained by using Gibbs-Appell (G-A) formulation and Assumed Mode Method (AMM). When the beam is short in length direction, shear deformation is a factor that may have substantial effects on the dynamics of the system. So, in modeling the assumption of Timoshenko Beam Theory (TBT) and its associated mode shapes has been considered. Although considering the effects of damping in continuous systems makes the formulations more complex, two important damping mechanisms, namely, Kelvin-Voigt damping as internal damping and the viscous air damping as external damping have been considered. Finally, to validate the proposed formulation a comparative assessment between the results achieved from experiment and simulation is presented in time domain.

۱- مقدمه

در چند دهه اخیر، به وجود آمدن مسائلی در زمینه رباتیک، بیومکانیک و سیستم‌های دینامیکی فضائی، احساس نیاز به استخراج معادلات حرکت سیستم‌های دینامیکی با درجات آزادی بالا را به وجود آورده است. لذا تحلیل کننده در جستجوی شیوه‌ای مؤثر بوده تا بتواند معادلات حاکم را به دست آورده و سپس حل کند. یکی از مواردی که در این زمینه به شدت مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته، بررسی معادلات حرکت ربات‌ها است. اما این روش‌ها تنها در مواردی که بازوی مربوط به ربات‌ها صلب فرض شود، مناسب به نظر می‌رسند. فرض ربات صلب برای دسته وسیعی از ربات‌های کاربردی امروزی فرض مناسبی است زیرا بازوی این ربات‌ها آن چنان سخت و محکم ساخته می‌شوند که جلوی هرگونه ارتعاشات ناخواسته را می‌گیرد. ولی در این موارد جرم زیادی به بازوها تحمیل می‌شود که این امر هزینه‌های زیادی را چه به لحاظ ماده مصرفی و چه به لحاظ انرژی مصرفی که به منظور شتاب بازوها مورد نیاز است؛ در پی دارد. همچنین مواردی پیش می‌آید که عامل

Please cite this article using: برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Habibnejad Korayem, A.M. Shafei, M. Doosthoseini, B. Kadkhodaei, Dynamic modeling of visco-elastic robotic manipulators using Timoshenko beam theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 131-139, 2014 (In Persian)

جرم، فاکتور محدود کننده‌ای محسوب می‌شود. به طور مثال در ربات‌هایی که برای کاربردهای فضایی مورد استفاده قرار می‌گیرند، باید تا حد امکان از جرم آنها کاسته شود. در عین حال طول بازوی این دسته از ربات‌ها نسبت به ربات‌های صنعتی بلندتر است. لذا هر دوی این عوامل باعث ایجاد ارتعاشاتی ناخواسته در بازوی این ربات‌ها می‌شوند. این ارتعاشات سبب می‌شود که پنجه در موقعیت از پیش تعیین شده خود واقع نشود. بنابراین باید سیستم‌های کنترلی پیشرفته‌ای برای کنترل حرکت این ربات‌ها در نظر گرفته شود. برای منظور فوق اولین قدم استخراج معادلات حرکت ربات با بازوی انعطاف‌پذیر است. روش‌هایی که تاکنون در این زمینه ارائه شده یا از پیچیدگی محاسباتی بالایی برخوردارند و یا آن‌که از دقت لازم در مدل‌سازی برخوردار نیستند. به گونه‌ای که پس از محاسباتی طولانی و وقت‌گیر به معادلاتی حجیم می‌رسند، که حتی برای مدل‌سازی عددی نیز وقت زیادی از کامپیوتر می‌گیرند.

لذا در این مقاله به دنبال ارائه مدلی تقریباً کامل از ربات با بازو الاستیک هستیم. مدلی که در آن تقریباً همه عوامل مؤثر بر روی دینامیک ربات لحاظ شده باشد. این عوامل، مواردی چون تأثیر میرایی هوا، میرایی سازه‌ای، اثر برش و تأثیر اینرسی دورانی را شامل می‌شود. برای در نظر گرفتن اثرات مربوط به خمش، استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی که در آن اثرات مربوط به برش و اینرسی دورانی لحاظ نشده، به کرات استفاده می‌شود. استفاده از تئوری تیر تیموشنکو در مدل‌سازی تیرهای انعطاف‌پذیر این دو اثر را همزمان در بر می‌گیرد. سون و جاو [۱] و موریس و مدنی [۲] اثر برش را در دینامیک معکوس بازوهای الاستیک مورد بررسی قرار دادند. ونگ و همکارانش [۳] اثر تغییر فرم برشی و اینرسی دورانی را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین ونگ و گوآن [۴] تأثیرات مربوط به تغییر فرم برشی، اینرسی دورانی و بار حمل شده توسط ربات را در حوزه فرکانس به بحث گذاشتند. ناگاناتان و سونی [۵] یک مدل غیر خطی را با استفاده از روش اجزاء محدود برای ربات‌های فضایی که دارای مفاصل دورانی هستند، توسعه دادند. تئوری به کار رفته در روش آنها بر پایه تئوری تیر تیموشنکو استوار بود. هوساین و همکارانش [۶] تأثیرات مربوط به خمش و تغییر فرم برشی را در مدل‌سازی ربات با چندین بازوی الاستیک مورد تحلیل قرار دادند. اثرات مربوط به پیچش و خمش برای ربات با بازوی الاستیک به علاوه اثرات مربوط به تغییر فرم برشی و اینرسی دورانی در کار میرووویچ [۷] لحاظ شده است.

زمانی که یک تیر نازک در هوا به ارتعاش در می‌آید، چندین عامل مستهلک کننده باعث تحلیل دامنه ارتعاشی آن می‌شوند. نیروهای مستهلک کننده یا به دلیل یک عامل داخلی مانند حرکت صفحات ماده سازنده بازو نسبت بهم به وجود می‌آیند و یا به دلیل یک عامل خارجی مانند اثر میرایی ویسکوزی که محیط بر روی رابط می‌گذارد. اولین کوشش‌ها برای وارد کردن ترم‌های میرایی در معادلات حرکت ارتعاشی تیرها به کار سزاوا [۸] برمی‌گردد. او از مدل ویت برای جنس تیر خود استفاده و معادلات حرکت را بر این اساس استخراج کرد. بیکر [۹] مدل ویت را، هم برای برش و هم برای تنش قائم در معادلات حرکت تیر تیموشنکو به کار برد. تیر تیموشنکو با ترکیب اثرات مختلف میرایی توسط بنکس و اینمن [۱۰] و بنکس، ونگ و اینمن [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. در زمینه رباتیک، تحقیقات اولیه‌ای که در آن از مدل تیر تیموشنکو استفاده و اثر میرایی داخلی و خارجی هر دو لحاظ شده است، در کارهای کی و چن [۱۲]، ونگ و همکارانش [۱۳]، سوراکسا و چن [۱۴] و لودینی و همکارانش [۱۵] دیده می‌شود. اما متأسفانه همه این تحقیقات به یک ربات تک بازویی محدود شده است.

اگر چه روش‌های مختلفی برای استخراج معادلات حرکت ربات با بازوی الاستیک در مقالات ارائه شده؛ اما معادلات گیبس-اپل یکی از اصولی است که از آن در حل دینامیک ربات‌ها بسیار کم استفاده شده است. در زمینه ربات با لینک صلب ماتا یک فرمولاسیون بازگشتی برای حل مسئله دینامیک معکوس ربات‌های صلب ارائه کرده است [۱۶]. وثوقی و همکارانش ربات‌های شبه مار را با استفاده از این فرمولاسیون مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. همچنین می‌توان به کارهای کورایم و شافعی اشاره کرد که در آن معادلات دینامیک مستقیم و معکوس ربات با لینک الاستیک که در آن تمامی مفاصل دورانی بودند، مورد تحلیل قرار گرفت [۱۸]. در پایان به مقاله اسماعیل زاده خادم و پیرمحمدی می‌توان اشاره کرد که در آن یک زنجیره از لینک الاستیک که دارای مفاصل دورانی-کشویی بودند با استفاده از این روش مورد تحلیل دینامیکی قرار گرفت [۱۹].

همان‌گونه که پیشتر نیز بیان شد هدف از این تحقیق، مطالعه ربات با بازوی‌های ویسکوالاستیک با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل است. استفاده از فرمولاسیون مذکور نسبت به روش لاگرانژ از مزیت بالاتری برخوردار است زیرا در این روش از مشتقات جزئی کمتری نسبت به روش لاگرانژ برای استخراج معادلات حرکت استفاده می‌شود. علاوه بر این، اضافه کردن اثر میرایی هوا و میرایی سازه‌ای در مدل تیر تیموشنکو که تا قبل از این تحقیق تنها در حوزه تئوری و آن هم برای ربات با یک لینک انعطاف‌پذیر محدود شده بود، اکنون در ربات‌ها با تعداد دلخواه بازو فرموله شده است. نهایتاً به منظور صحه‌گذاری بر نتایج به دست آمده از تئوری یک نمونه آزمایشگاهی ساخته شده است تا اثر میرایی داخلی و خارجی بر روی پاسخ سیستم مورد مطالعه قرار گیرد.

۲- سینماتیک ربات با بازوی انعطاف‌پذیر

در این بخش، سینماتیک یک ربات N بازویی ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اختصاص دستگاه مختصات به هر رابط از اصولی که توسط دناویت و هارتنبرگ توسعه داده شده است، استفاده می‌شود. $X_0Y_0Z_0$ دستگاه مختصات متصل به پایه ربات است که در سینماتیک بازوهای انعطاف‌پذیر می‌توان آن را چار چوب مرجع در نظر گرفت.

به دلیل خاصیت الاستیک بازوها، علاوه بر دوران در مفاصل، یک دوران نیز در بازوها داریم. برای ارائه روابطی به شکل ساده می‌توان این دو دوران را از هم جدا کرد. به همین دلیل به هر بازو دو دستگاه مختصات اختصاص می‌دهیم. $x_iy_iz_i$ دستگاه متصل به رابط i ام را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که مبدأ آن بر روی ابتدای این رابط و محور x_i آن در امتداد طول بازو باشد؛ در حالی‌که $\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$ را به انتهای رابط i ام به‌گونه‌ای متصل می‌کنیم که محورهای آن زمانی‌که این رابط هیچ‌گونه تغییر فرمی ندارد به موازات محورهای $x_iy_iz_i$ باشند.

در شکل ۱، المان دیفرانسیلی دلخواه Q بر روی رابط i ام نشان داده شده است. موقعیت این المان دیفرانسیلی نسبت به دستگاه مختصات مرجع محلی رابط i ام توسط بردار ${}^{i}\vec{r}_{Q/O_i}$ نشان داده می‌شود. چون لینک i ام انعطاف‌پذیر است از تکنیک مودهای فرضی برای بیان موقعیت این المان دیفرانسیلی استفاده می‌شود. بنابراین:

$${}^{i}\vec{r}_{Q/O_i} = \vec{\eta} + \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T \tag{۱}$$

که در آن $\vec{\eta} = \{\eta \quad 0 \quad 0\}^T$ بردار موقعیت المان دیفرانسیلی Q نسبت به O_i (زمانی‌که رابط i ام هیچ‌گونه تغییر فرمی ندارد) را نشان می‌دهد؛

همچنین u_i، v_i و w_i به‌ترتیب تغییر فرم‌های کوچک در جهت‌های O_ix_i، O_iy_i و O_iz_i را نشان می‌دهد. این تغییر فرم‌های کوچک را تحت بسط مودال برش یافته به طریق زیر می‌توان بیان کرد.

$$\{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T = \sum_{j=1}^{m_i}\delta_{ij}(t)\vec{r}_{ij}(\eta) \qquad (۲)$$

که در آن $\vec{r}_{ij}=\{x_{ij} \quad y_{ij} \quad z_{ij}\}^T$ بردار مربوط به شکل مودها است که اجزاء آن یعنی x_{ij}، y_{ij} و z_{ij}، jامین شکل مود مربوط به تغییر فرم‌های طولی و جانبی رابط iام را نشان می‌دهد. همچنین δ_{ij}، jامین مختصات مودال تعمیم یافته از رابط iام و m_i تعداد مودهایی است که برای بیان تغییر فرم رابط iام استفاده شده است.

خمش و برش دو عامل تغییر مکان خط مرکزی المان دیفرانسیلی Q می‌باشند. بنابراین شیب کلی خط مرکزی تغییر فرم یافته حول جهت‌های O_iy_i و O_iz_i توسط روابط زیر ارائه می‌شوند.

$$-\frac{\partial w_i}{\partial \eta}=\theta_{yi}+\varphi_{yi} \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \eta}=\theta_{zi}+\varphi_{zi} \qquad (۴)$$

که در آن φ_{yi} و φ_{zi} شیب خط مرکزی تغییر فرم یافته تحت اثر برش و θ_{yi} و θ_{zi} شیب خط مرکزی تغییر فرم یافته تحت اثر خمش است.

المان دیفرانسیلی Q تحت اثر برش دچار دوران نمی‌شود؛ بلکه این المان دیفرانسیلی تنها تحت تأثیر خمش و پیچش دچار دوران می‌شود. دوران این المان دیفرانسیلی حول جهت‌های O_ix_i، O_iy_i و O_iz_i به‌ترتیب θ_{xi}، θ_{yi} و θ_{zi} نامگذاری می‌شود. این زوایای کوچک تحت بسط مودال برش یافته به‌طریق زیر ارائه می‌شوند.

$${}^i\vec{\theta}_i=\{\theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}\}^T=\sum_{j=1}^{m_i}\delta_{ij}(t)\vec{\theta}_{ij}(\eta) \qquad (۵)$$

که در آن $\vec{\theta}_{ij}=\{\theta_{xij} \quad \theta_{yij} \quad \theta_{zij}\}^T$ بردار مربوط به شکل مودها است که اجزاء آن یعنی θ_{xij}، θ_{yij} و θ_{zij} به‌ترتیب jامین شکل مود دورانی رابط iام را در جهت‌های O_ix_i، O_iy_i و O_iz_i نشان می‌دهد.

بردار دلخواه ${}^i\vec{a}$ را که در دستگاه مرجع محلی رابط iام بیان شده است، می‌توان در دستگاه دلخواه j به‌طریق زیر ارائه کرد.

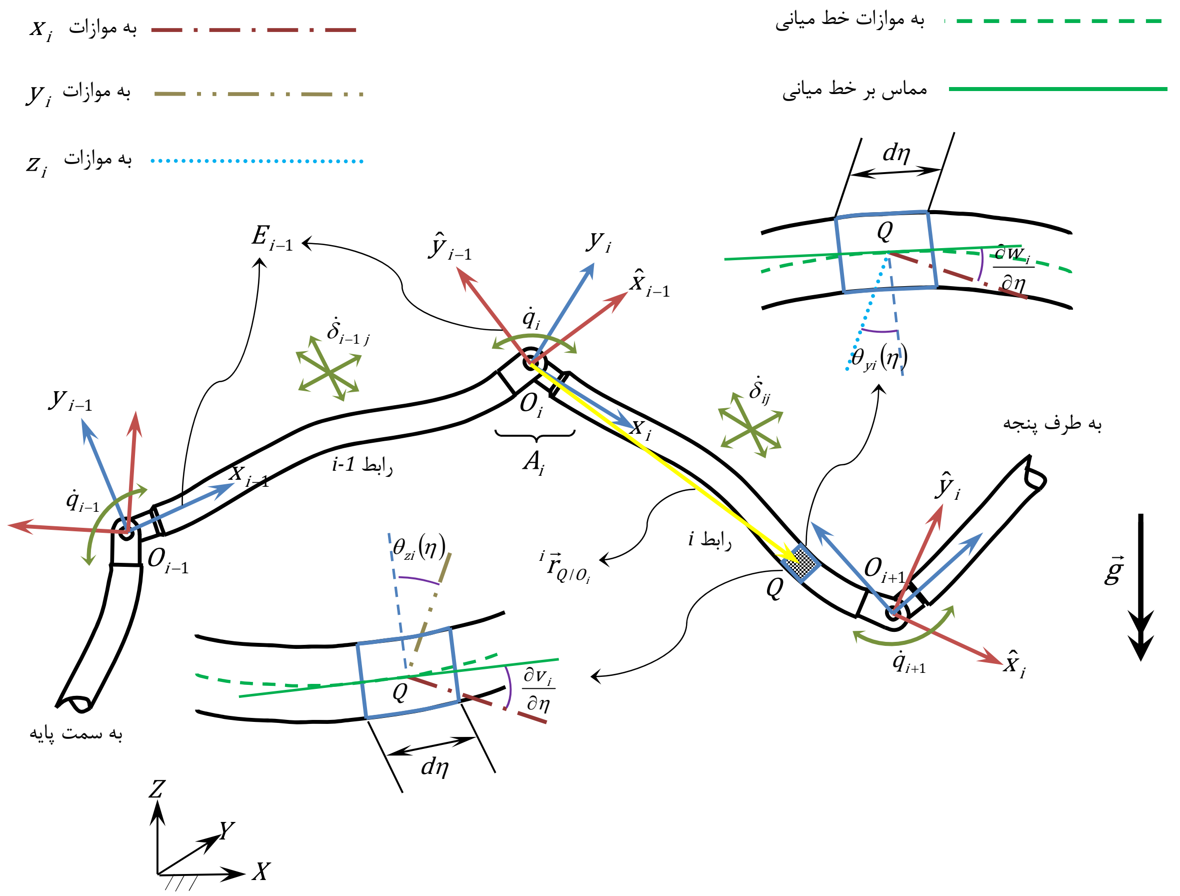
$${}^j\vec{a}={}^jR_i\,{}^i\vec{a} \qquad (۶)$$

در رابطه بالا ${}^jR_i$ ماتریس دوران مرکبی است که جهت‌گیری دستگاه مرجع محلی رابط iام را نسبت به jامین دستگاه نشان می‌دهد. همان‌گونه که پیشتر نیز اشاره شد، بهتر است که دوران مربوط به مفاصل را از دورانی که در بازوها ایجاد می‌شود، جدا کرد. بنابراین ${}^jR_i$ بفرم بازگشتی به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

$${}^jR_i={}^jR_{i-1}E_{i-1}A_i \qquad (۷)$$

در رابطه بالا A_i همان ماتریس دوران مفاصل است که دستگاه $x_iy_iz_i$ را نسبت به دستگاه $\hat{x}_{i-1}\hat{y}_{i-1}\hat{z}_{i-1}$ بیان می‌کند. درایه‌های این ماتریس تنها تابعی از q_i می‌باشند؛ که در آن q_i مختصات تعمیم یافته وابسته به زمان iامین مفصل است. این ماتریس دوران توسط حاصل‌ضرب نقطه‌ای یک زوج از بردارهای یکه به‌طریق زیر به‌دست می‌آید.

$$A_i=\begin{bmatrix} x_i\cdot\hat{x}_{i-1} & y_i\cdot\hat{x}_{i-1} & z_i\cdot\hat{x}_{i-1} \\ x_i\cdot\hat{y}_{i-1} & y_i\cdot\hat{y}_{i-1} & z_i\cdot\hat{y}_{i-1} \\ x_i\cdot\hat{z}_{i-1} & y_i\cdot\hat{z}_{i-1} & z_i\cdot\hat{z}_{i-1} \end{bmatrix} \qquad (۸)$$



شکل ۱ ربات با بازوی انعطاف‌پذیر

همچنین، E_i ماتریس دوران مربوط به iامین رابط است که دستگاه $\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$ را نسبت به دستگاه $x_iy_iz_i$ نشان می‌دهد. این ماتریس همانند A_i از حاصل‌ضرب یک زوج از بردارهای یکه تشکیل می‌شود ولی با توجه به اینکه زاویه دوران دو دستگاه نسبت به‌هم کوچک است، ماتریس E_i به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{zi} & \theta_{yi} \\ \theta_{zi} & 1 & -\theta_{xi} \\ -\theta_{yi} & \theta_{xi} & 1 \end{bmatrix} \tag{۹}$$

در اینجا باید به این نکته اشاره شود که تمامی زوایا در ماتریس E_i در $\eta = l_i$ محاسبه شده‌اند که در آن l_i طول iامین رابط است.

۳- معادلات دینامیک سیستم

این بخش از سه قسمت تشکیل شده است. در ابتدا انرژی شتاب سیستم محاسبه می‌شود. سپس انرژی پتانسیل سیستم، تابع استهلاک ریلی و مشتقات آنها ارائه می‌شوند. در پایان معادلات دینامیک معکوس این سیستم رباتیکی به فرم بسته مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۳-۱- انرژی شتاب سیستم (تابع گیبس)

در این بخش انرژی شتاب سیستم به‌منظور به‌کارگیری در معادلات گیبس-اپل بسط داده می‌شود. انرژی شتاب المان دیفرانسیلی Q بر روی iامین رابط از دو منبع ناشی می‌شود. ۱- انرژی شتاب به‌دلیل حرکت انتقالی المان و ۲- انرژی شتاب به‌دلیل حرکت دورانی المان، زیرا اینگونه فرض شده است که تیر از تئوری تیر تیموشنکو تبعیت می‌کند.

$$ds_i = \frac{1}{2}\mu_i\left({}^i\ddot{\vec{r}}_Q^T \cdot {}^i\ddot{\vec{r}}_Q\right)d\eta + \frac{1}{2}{}^i\ddot{\vec{\theta}}_i^T \cdot J_i(\eta)\,{}^i\ddot{\vec{\theta}}_i d\eta \tag{۱۰}$$

که در آن $\mu_i(\eta)$ و $J_i(\eta)$ به‌ترتیب جرم واحد طول و ممان اینرسی جرمی بر واحد طول iامین رابط است. همچنین ${}^i\ddot{\vec{r}}_Q$ و ${}^i\ddot{\vec{\theta}}_i$ به‌ترتیب شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای المان دیفرانسیلی Q هستند که در دستگاه مختصات مرجع محلی جسم iام بیان شده‌اند.

$$\begin{aligned} {}^i\ddot{\vec{r}}_Q = {}&{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\ddot{\vec{r}}_{Q/O_i} + 2\,{}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\dot{\vec{r}}_{Q/O_i} \\ &+ {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^i\vec{r}_{Q/O_i} + {}^i\vec{\omega}_i \times \left({}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{r}_{Q/O_i}\right) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

$${}^i\ddot{\vec{\theta}}_i = \sum_{j=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}(t)\vec{\theta}_{ij}(\eta) \tag{۱۲}$$

در عبارت بالا، ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ شتاب مطلق مبدأ مختصات مرجع محلی رابط iام، ${}^i\vec{\omega}_i$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ به‌ترتیب سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای بازوی iام و ${}^i\dot{\vec{r}}_{Q/O_i}$ و ${}^i\ddot{\vec{r}}_{Q/O_i}$ به‌ترتیب سرعت و شتاب المان دیفرانسیلی Q هستند که با یکبار و دوبار مشتق‌گیری از رابطه (۱) نسبت به زمان به‌دست می‌آیند. با وارد کردن معادله (۱۱) و معادله (۱۲) در معادله (۱۰) و با انتگرال‌گیری از معادله حاصله از 0 تا l_i انرژی شتاب رابط iام به‌دست خواهد آمد. با جمع کردن انرژی تک‌تک رابطها، انرژی شتاب کل سیستم به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

$$S = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} ds_i$$

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^{n} &\frac{1}{2}B_{0i}\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot {}^i\vec{B}_{1i} - 2\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot B_{2i}\,{}^i\vec{\omega}_i \\ &- {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot B_{3i}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i - {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot {}^i\tilde{\omega}_i B_{3i}\,{}^i\vec{\omega}_i + \frac{1}{2}B_{4i} - 2\,{}^i\vec{\omega}_i^T \cdot {}^i\vec{B}_{5i} \\ &+ {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot {}^i\vec{B}_{6i} - {}^i\vec{\omega}_i^T \cdot B_{7i}\,{}^i\vec{\omega}_i + 2\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot B_{8i}\,{}^i\vec{\omega}_i \\ &+ \frac{1}{2}{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot B_{9i}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot {}^i\tilde{\omega}_i B_{9i}\,{}^i\vec{\omega}_i + \frac{1}{2}B_{10i} \end{aligned}$$

(۱۳) جملات غیر مرتبط +

که در آن ${}^i\tilde{\omega}_i$ ماتریس پاد متقارن مربوط به بردار ${}^i\vec{\omega}_i$ است. همچنین، دیگر متغیرهایی که در معادله (۱۳) ظاهر شده‌اند به‌طریق زیر قابل ارائه هستند.

$$B_{0i} = \int_0^{l_i}\mu_i\, d\eta \tag{۱۴}$$

$${}^i\vec{B}_{1i} = \sum_{j=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\vec{C}_{1ij} \tag{۱۵}$$

$$B_{2i} = \sum_{j=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}\tilde{C}_{1ij} \tag{۱۶}$$

$$B_{3i} = C_{2i} + \sum_{j=1}^{m_i}\delta_{ij}\tilde{C}_{1ij} \tag{۱۷}$$

$$B_{4i} = \sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\ddot{\delta}_{ik}C_{3ijk} \tag{۱۸}$$

$${}^i\vec{B}_{5i} = \sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\dot{\delta}_{ik}\vec{C}_{4ijk} \tag{۱۹}$$

$${}^i\vec{B}_{6i} = \sum_{j=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\vec{\alpha}_{ij} \tag{۲۰}$$

$$B_{7i} = \sum_{j=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\beta_{ij} \tag{۲۱}$$

$$B_{8i} = \sum_{j=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}\beta_{ij} \tag{۲۲}$$

$$B_{9i} = C_{5i} + \sum_{j=1}^{m_i}\delta_{ij}\left(C_{6ij}^T + \beta_{ij}\right) \tag{۲۳}$$

$$B_{10i} = \sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\ddot{\delta}_{ij}\ddot{\delta}_{ik}C_{7ijk} \tag{۲۴}$$

در معادله (۱۳)، ترمی تحت عنوان "جملات نامربوط" وجود دارد. از آنجا که برای استخراج معادلات حرکت ربات به مشتق تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها احتیاج داریم؛ لذا در تابع گیبس می‌توان از تمامی ترمهایی که فاقد $\ddot{q}_j$ و $\ddot{\delta}_{jf}$ هستند، صرف‌نظر کرد. در معادلات بالا، $\tilde{C}_{1ij}$ ماتریس پادمتقارن مربوط به بردار $\vec{C}_{1ij}$ است. این بردار و دیگر متغیرهایی که در معادلات (۲۴-۱۴) ظاهر شده‌اند، به‌طریق زیر قابل ارائه هستند.

$$\vec{C}_{1ij} = \int_0^{l_i}\mu_i\,\vec{r}_{ij}\,d\eta \tag{۲۵}$$

$$C_{2i} = \int_0^{l_i}\mu_i\,\tilde{\eta}\,d\eta \tag{۲۶}$$

$$C_{3ijk} = \int_0^{l_i}\mu_i\,\vec{r}_{ij}^T \cdot \vec{r}_{ik}\,d\eta \tag{۲۷}$$

$$\vec{C}_{4ijk} = \int_0^{l_i}\mu_i\,\tilde{r}_{ij}\,\vec{r}_{ik}\,d\eta \tag{۲۸}$$

$$C_{5i} = \int_0^{l_i}\mu_i\,\tilde{\eta}^T\tilde{\eta}\,d\eta \tag{۲۹}$$

$$C_{6ij} = \int_0^{l_i}\mu_i\,\tilde{\eta}^T\tilde{r}_{ij}\,d\eta \tag{۳۰}$$

$$C_{7ijk} = \int_0^{l_i}\vec{\theta}_{ij}^T \cdot J_i\,\vec{\theta}_{ik}\,d\eta \tag{۳۱}$$

$$\vec{C}_{8ij} = \int_0^{l_i}\mu_i\,\tilde{\eta}\,\vec{r}_{ij}\,d\eta \tag{۳۲}$$

$$C_{9ijk} = \int_0^{l_i}\mu_i\,\tilde{r}_{ij}^T\tilde{r}_{ik}\,d\eta \tag{۳۳}$$

$$\vec{\alpha}_{ij} = \vec{C}_{8ij} + \sum_{k=1}^{m_i}\delta_{ik}\vec{C}_{4ikj} \tag{۳۴}$$

$$\beta_{ij} = C_{6ij} + \sum_{k=1}^{m_i}\delta_{ik}C_{9ikj} \tag{۳۵}$$

که در آن $\tilde{\eta}$ و $\tilde{r}_{ij}$ به‌ترتیب ماتریس‌های پادمتقارن مربوط به بردارهای $\vec{\eta}$

و $\vec{r}_{ij}$ هستند. در اینجا باید به این نکته نیز اشاره شود که B_{9i} از جنس ماتریس اینرسی است. به‌عنوان مثال، اولین ترم آن یعنی C_{5i} ترم اینرسی حالت صلب را نشان می‌دهد. اگر یک رابط در مجموعه رابطها صلب باشد $(m_i = 0)$، آنگاه جملاتی که در معادلات (۲۴-۱۵) ظاهر گشته‌اند، به‌راحتی ساده می‌شوند. در پایان ذکر این نکته حائز اهمیت است که حاصل‌ضرب شکل مودها که در معادلات (۳۳-۲۵) ظاهر شده‌اند، یک‌بار به صورت خارج خط محاسبه شده و در تمام طول محاسبات از نتایج آن استفاده می‌شود.

۳-۲- مشتقات تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها

یک بخش از معادلات دینامیکی سیستم با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل با مشتق‌گیری از تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها $\left(\partial S/\partial \ddot{q}_j \,,\, \partial S/\partial \ddot{\delta}_{jf}\right)$ به دست می‌آید. در تابع گیبس، تنها ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ تابعی از $\ddot{q}_j$ هستند. بنابراین مشتق تابع گیبس نسبت به $\ddot{q}_j$ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T}{\partial \ddot{q}_j} \cdot {}^i\vec{S}_i + \sum_{i=j}^{n} \frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T}{\partial \ddot{q}_j} \cdot {}^i\vec{T}_i \qquad (۳۶)$$

که در آن:

$${}^i\vec{S}_i = B_{0i}\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\vec{B}_{1i} - 2B_{2i}\,{}^i\vec{\omega}_i - B_{3i}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i - {}^i\tilde{\omega}_i B_{3i}\,{}^i\vec{\omega}_i \qquad (۳۷)$$

$${}^i\vec{T}_i = B_{3i}\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\vec{B}_{6i} + 2B_{8i}\,{}^i\vec{\omega}_i + B_{9i}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i + {}^i\tilde{\omega}_i B_{9i}\,{}^i\vec{\omega}_i \qquad (۳۸)$$

مشتق تابع گیبس نسبت به $\ddot{\delta}_{jf}$ کمی پیچیده‌تر است، زیرا علاوه بر ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ عبارت‌های مربوط به ${}^i\vec{B}_{1i}$، B_{4i}، ${}^i\vec{B}_{5i}$، ${}^i\vec{B}_{6i}$، B_{7i} و B_{10i} نیز تابعی از شتاب مودال تعمیم یافته هستند. بنابراین:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} \cdot {}^i\vec{S}_i + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} \cdot {}^i\vec{T}_i + Q_{jf} \qquad (۳۹)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} Q_{jf} = {} & \sum_{k=1}^{m_j} \ddot{\delta}_{jk}\left(C_{3jfk} + C_{7jfk}\right) - 2\,{}^j\vec{\omega}_j^T \cdot \sum_{k=1}^{m_j} \dot{\delta}_{jk}\vec{C}_{4jfk} \\ & - {}^j\vec{\omega}_j^T \cdot \beta_{jf}\,{}^j\vec{\omega}_j + {}^j\ddot{\vec{r}}_{O_j}^T \cdot \vec{C}_{1jf} + {}^j\dot{\vec{\omega}}_j^T \cdot \vec{\alpha}_{jf} \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

۳-۳- انرژی پتانسیل سیستم

انرژی پتانسیل سیستم از دو منبع نشأت می‌گیرد. ۱- انرژی پتانسیل به‌واسطه جاذبه زمین و ۲- انرژی پتانسیل به‌واسطه تغییر فرم‌های الاستیک. تأثیر بارگذاری گرانی بر رابطها را می‌توان به سادگی با قرار دادن ${}^0\ddot{\vec{r}}_{O_0} = \vec{g}$ در نظر گرفت. که در آن $\vec{g}$ بردار گرانی است. در این صورت می‌توان فرض کرد که پایه ربات با شتاب $1g$ به سوی بالا حرکت می‌کند. این شتاب فرضی به سوی بالا، اثری دقیقاً همانند تأثیر گرانی بر رابطها دارد. بدین ترتیب بدون هیچ‌گونه محاسبات اضافی می‌توان اثر گرانی را در نظر گرفت.

برای بیان انرژی پتانسیل کرنشی ذخیره شده در i امین بازو، با برقراری فرض تیر تیموشنکو عبارت زیر بر حسب خیز و دوران ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned} V_{ei} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i} \Bigg[& E_i I_{yi}\left(\frac{\partial \theta_{yi}}{\partial \eta}\right)^2 + E_i I_{zi}\left(\frac{\partial \theta_{zi}}{\partial \eta}\right)^2 \\ & + kA_iG_i\left(\varphi_{yi}^{\,2} + \varphi_{zi}^{\,2}\right) \\ & + E_iA_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta}\right)^2 + G_iI_{xi}\left(\frac{\partial \theta_{xi}}{\partial \eta}\right)^2 \Bigg] d\eta \end{aligned} \qquad (۴۱)$$

که در آن E_i و G_i به‌ترتیب مدول الاستیسیته و مدول برشی، I_{xi} ممان اینرسی قطبی حول محور O_ix_i؛ I_{yi} و I_{zi} ممان اینرسی حول محورهای O_iy_i و O_iz_i؛ A_i سطح مقطع i امین بازو و k ضریب تصحیح برش است.

همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، زوایای کوچک θ_{xi}، θ_{yi} و θ_{zi} و تغییر مکان‌های کوچک u_i، v_i و w_i با استفاده از بسط مودال برش یافته بیان می‌شوند. با جایگذاری این روابط در معادله (۴۱)، انرژی پتانسیل کرنشی برای کل سیستم به‌شکل زیر ارائه می‌شود.

$$V_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\delta_{ij}(t)\delta_{ik}(t)K_{ijk} \qquad (۴۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned} K_{ijk} = \int_0^{l_i} \Bigg[& E_i\left(I_{yi}\frac{\partial \theta_{yij}}{\partial \eta}\frac{\partial \theta_{yik}}{\partial \eta} + I_{zi}\frac{\partial \theta_{zij}}{\partial \eta}\frac{\partial \theta_{zik}}{\partial \eta}\right) \\ & + kA_iG_i\left(\varphi_{yij}\varphi_{yik} + \varphi_{zij}\varphi_{zik}\right) \\ & + E_iA_i\frac{\partial x_{ij}}{\partial \eta}\frac{\partial x_{ik}}{\partial \eta} + G_iI_{xi}\frac{\partial \theta_{xij}}{\partial \eta}\frac{\partial \theta_{xik}}{\partial \eta}\Bigg] d\eta \end{aligned} \qquad (۴۳)$$

۳-۴- مشتقات انرژی پتانسیل نسبت به شبه مختصات‌ها

برای استخراج معادلات حرکت ربات با بازوی ویسکوالاستیک، به مشتق جزئی انرژی پتانسیل نسبت به مختصات‌های تعمیم یافته احتیاج داریم. مشتق جزئی انرژی پتانسیل کرنشی نسبت به q_j هیچ نقشی در معادلات حرکت ندارد، زیرا:

$$\frac{\partial V_e}{\partial q_j} = 0 \qquad (۴۴)$$

ولی مشتق جزئی انرژی پتانسیل کرنشی نسبت به δ_{jf} نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial V_e}{\partial \delta_{jf}} = \sum_{k=1}^{m_j}\delta_{jk}(t)K_{jkf} \qquad (۴۵)$$

که در آن K_{jkf} به صورت تحلیلی یا عددی، به عنوان مثال با روش المان محدود تعیین می‌شود.

۳-۵- تابع استهلاک ریلی

یک کلاس مهم از نیروهای ناپایستار، آن کلاس از نیروهاست که باعث تحلیل انرژی سیستم می‌شوند. یک روش رایج برای مدل‌سازی آن دسته از نیروهایی که باعث اتلاف انرژی می‌شوند، فرض میرایی ویسکوز در مدل‌سازی است. در این مدل‌سازی، نیروی میرایی ویسکوز، به‌عنوان نیرویی که در مقابل سرعت مقاومت نشان می‌دهد ولی با آن متناسب است، مدل می‌شود. حالت خاصی که در آن نیروی میرایی به‌صورت خطی با سرعت متناسب است، در این تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مکانیک تحلیلی، یک راه ساده برای مواجهه با نیروی میرایی ویسکوز استفاده از تابع استهلاک ریلی است. همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد، دو مکانیزم مهم میرایی در این مدل‌سازی لحاظ شده است. اولین اثر، اثر مربوط به میرایی خارجی ناشی از اثر ویسکوز هوا و دومین اثر مربوط به میرایی داخلی ناشی از اثر ویسکوالاستیک سازه است.

تابع استهلاک ریلی برای میرایی داخلی و خارجی مربوط به i امین بازو به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned} D_i = \frac{1}{2}\int_0^{l_i} \Bigg[& \gamma\left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2\right) \\ & + K_{vi}\left(I_{zi}\left(\frac{\partial^3 v_i}{\partial \eta^2 \partial t}\right)^2 + I_{yi}\left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial \eta^2 \partial t}\right)^2\right)\Bigg] d\eta \end{aligned} \qquad (۴۶)$$

که در آن K_{vi} ضریب میرایی کلوین-ویت مربوط به iامین بازو، و γ ضریب میرایی مربوط به هوا است. با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۴۶) و با جمع بستن بر روی n رابط، تابع استهلاک ریلی برای کل سیستم به‌طریق زیر ارائه می‌شود.

$$D=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}(t)\dot{\delta}_{ik}(t)D_{ijk} \tag{۴۷}$$

که در آن

$$D_{ijk}=\int_0^{l_i}\Big[\gamma\left(y_{ij}y_{ik}+z_{ij}z_{ik}\right)+K_{vi}\left(I_{zi}\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2 y_{ik}}{\partial\eta^2}+I_{yi}\frac{\partial^2 z_{ij}}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2 z_{ik}}{\partial\eta^2}\right)\Big]d\eta \tag{۴۸}$$

۳-۶- مشتقات تابع استهلاک ریلی نسبت به شبه سرعت‌ها

نیروهای تعمیم یافته مربوط به میرایی داخلی و میرایی خارجی با مشتق‌گیری از تابع استهلاک ریلی نسبت به سرعت‌های تعمیم یافته به‌دست می‌آید. مشتق‌گیری نسبت به $\dot{q}_j$ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}=0 \tag{۴۹}$$

در حالی‌که مشتق‌گیری از تابع استهلاک ریلی نسبت به $\dot{\delta}_{jf}$ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_{jf}}=\sum_{k=1}^{m_j}\dot{\delta}_{jk}(t)D_{jkf} \tag{۵۰}$$

۳-۷- معادلات دینامیک معکوس به شکل بسته

در بخش‌های قبل، نیروهای تعمیم یافته مرتبط با عوامل پایستار و ناپایستار که به سیستم اعمال می‌شوند، مورد بررسی قرار گرفتند. در اینجا فرض می‌کنیم که هیچ‌گونه بار خارجی بر روی رابط‌ها اعمال نمی‌شود. بنابراین، نیروهای تعمیم یافته در معادلات مربوط به تغییر فرم‌ها، صفر خواهند شد. ولی نیروهای تعمیم یافته در معادلات مربوط به مفاصل، همان گشتاور τ_j است که به jامین مفصل اعمال می‌شود. با این فرض، معادلات حرکت دینامیکی با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل به طریق زیر کامل می‌شود.

۱. معادلات مربوط به مفاصل:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial V_e}{\partial q_j}=\tau_j \qquad j=1,2,\ldots\ldots,n \tag{۵۱}$$

۲. معادله مربوط به تغییر فرم لینک‌ها:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\delta}_{jf}}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_{jf}}+\frac{\partial V_e}{\partial \delta_{jf}}=0 \qquad j=1,2,\ldots\ldots,n;\quad f=1,2,\ldots\ldots,m_j \tag{۵۲}$$

تمام اجزاء معادلات حرکت در مراحل قبل محاسبه شده‌اند. معادلات بالا به‌فرم دینامیک معکوس هستند. در این نوع دینامیک، با دانستن یک حالت مشخص از پیکربندی ربات (موقعیت، سرعت و شتاب) گشتاور اعمالی به مفاصل به‌راحتی از طریق جبری به‌دست خواهد آمد.

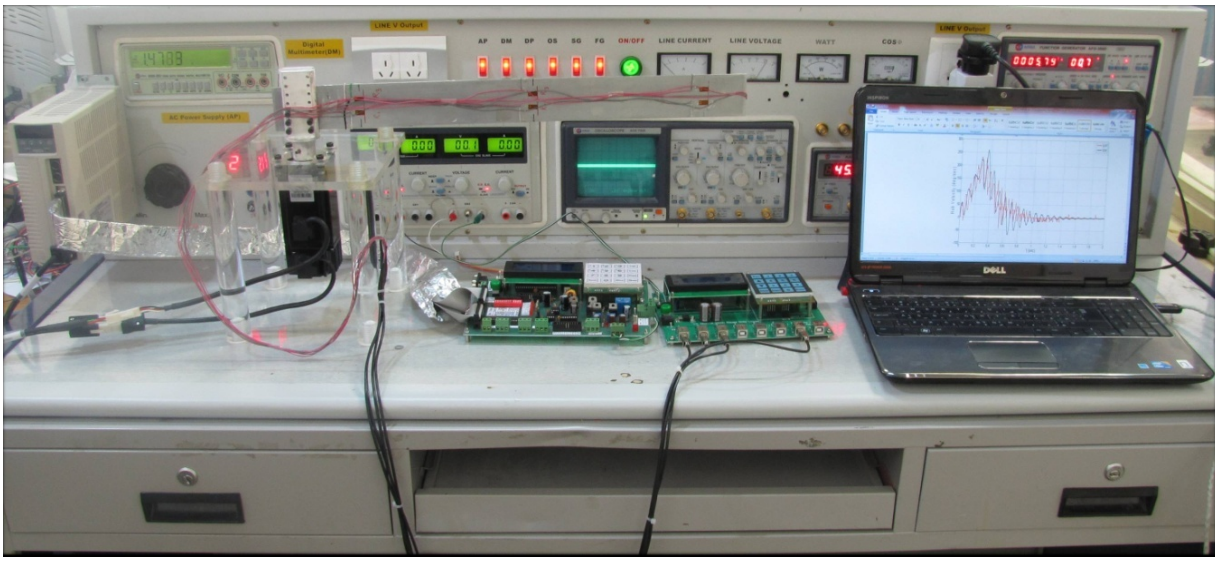
۴- مشخصات ربات الاستیک ساخته شده

نمونه آزمایشگاهی ساخته شده یک بازوی رباتیکی تک بازوی انعطاف‌پذیر است که توسط یک موتور AC ۴۰۰ وات تحریک می‌شود (شکل ۲). همچنین پارامترهای این ربات انعطاف‌پذیر در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱ پارامترهای فیزیکی ربات الاستیک ساخته شده

پارامتر	مقدار	واحد
l	۰/۵	m
A	۷/۷۵۵×۱۰^-۵	m^2
EI_z	۱/۰۱۷۸۴۳۷۵	$N.m^2$
k	۰/۸۳۳۳	
μ	۰/۲۴۴۲	$kg.m^{-1}$
G	۲۷×۱۰^۹	$N\cdot m^{-2}$
K_v	۱۱۰۰	$kg.m^{-1}.s$
γ	۰/۲	$kg.m^{-1}.s$
J	$\begin{bmatrix}۴/۶ & 0 & 0\\ 0 & ۴/۶ & 0\\ 0 & 0 & ۴/۶\end{bmatrix}\times ۱۰^{-۵}$	$kg\cdot m^{-1}$

یک انکودر با تفکیک‌پذیری ۲۵۰۰ پالس در هر دور به منظور اندازه‌گیری موقعیت زاویه‌ای شفت موتور، استفاده شده است. سرعت زاویه‌ای موتور با مشتق‌گیری از موقعیت زاویه‌ای به دست می‌آید. تغییر فرم نقطه انتهایی رابط با استفاده از سه پل کرنش‌سنج که بر روی بازو نصب شده‌اند، اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۲ ربات تک بازوی انعطاف‌پذیر ساخته شده در دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران

جدول ۲ ضرایب مربوط به شکل مودها

	$i=$ ۱	$i=$ ۲	$i=$ ۳	$i=$ ۴
C_{1i}	-۱/۰۰۰۰۱۲۳۴	۱/۰۱۸۵۴۸۸۹	-۱/۰۰۰۲۱۶۵۶	۱/۰۰۰۴۵۸۰۰
C_{2i}	۱/۳۶۲۲۲۳۲۸	-۱	۱/۰۰۰۷۷۶۶۰	-۱
C_{3i}	۱	-۱/۰۱۸۴۷۰۱۲	۱	-۱/۰۰۰۰۳۳۶۱
C_{4i}	-۱/۳۶۲۲۲۳۲۸	۱	-۱/۰۰۰۷۷۶۶۰	۱
a_i	۳/۷۵۰۲۰۵۶۵	۹/۳۸۸۱۲۵۲۴	۱۵/۷۰۹۳۷۱۵	۲۱/۹۹۰۷۹۸۵
b_i	۳/۷۵۰۱۹۰۲۲	۹/۳۸۷۸۸۳۲۲	۱۵/۷۰۸۲۳۷۶	۲۱/۹۸۷۶۸۸۵
α_i	-۳/۷۵۰۱۷۴۷۹	-۹/۳۸۷۶۴۱۲۱	-۱۵/۷۰۷۱۰۳۹	-۲۱/۹۸۴۵۷۸۹
β_i	۳/۷۵۰۲۲۱۰۸	۹/۳۸۸۳۶۷۲۶	۱۵/۷۱۰۵۰۵۴	۲۱/۹۹۳۹۰۸۹

داده‌های اندازه‌گیری شده توسط انکودر و کرنش‌سنج‌ها به منظور نمایش گرافیکی در نرم افزار متلب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۵- شبیه‌سازی عددی

در این قسمت، نتایج حاصل از شبیه‌سازی و تست ربات تک بازوی الاستیک ارائه خواهد گشت. برای مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی و تست، پاسخ‌ها در حوزه زمان مقایسه گشته‌اند. گشتاور اعمالی از جانب موتور، بدون حضور گیربکس و مستقیماً به بازو الاستیک اعمال می‌شود.

در این مدل‌سازی، روش مودهای فرضی با چهار شکل مود اول مربوط به تیر یکسر گیردار-آزاد استفاده شده است. این شکل مودها به طریق زیر ارائه می‌شوند.

$$y_{1i} = C_{1i}\sin(a_i.\eta) + C_{2i}\cos(a_i.\eta) + C_{3i}\sinh(b_i.\eta) + C_{4i}\cosh(b_i.\eta) \qquad (۵۳)$$

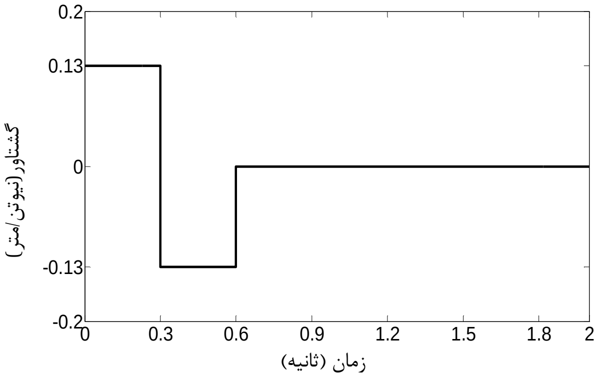
$$\theta_{1zi} = \alpha_i.C_{2i}\sin(a_i.\eta) - \alpha_i.C_{1i}\cos(a_i.\eta) + \beta_i.C_{4i}\sinh(b_i.\eta) + \beta_i.C_{3i}\cosh(b_i.\eta) \qquad (۵۴)$$

که در آن تمامی ضرایب مربوط به شکل مودها در جدول ۲ ارائه شده است.

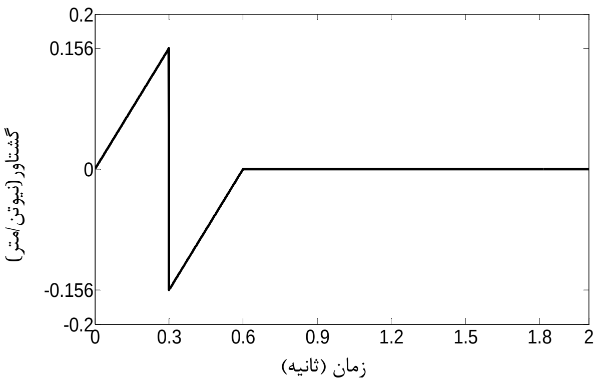
در نمونه آزمایشگاهی ساخته شده، به دلیل سختی نسبتاً زیاد آن، گشتاور ورودی نرم باعث ایجاد تغییر فرم‌های بسیار کوچک می‌شود که به منظور نمایش اثرات ارتعاشی چندان مناسب به نظر نمی‌رسد. لذا گشتاور ورودی بایستی به طور آنی تغییر جهت دهد. علاوه بر این، گشتاور اعمالی باید به گونه‌ای باشد که در ابتدا باعث شتاب مثبت رابط شود، سپس باعث شتاب منفی رابط و در نهایت باعث توقف آن شود (شکل‌های ۳ و ۴).

به منظور مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نمونه آزمایشگاهی ساخته شده، چهار پاسخ سیستم، یعنی موقعیت زاویه‌ای رابط، سرعت زاویه‌ای رابط، تغییر فرم نقطه انتهایی تیر و سرعت نقطه انتهایی تیر نسبت به دستگاه متصل به بازو مورد بررسی قرار می‌گیرد. پاسخ سیستم با نرخ داده برداری ۲۰۰ Hz انجام پذیرفته است. در تمامی شکل‌های ارائه شده رنگ نارنجی نمایانگر نتایج حاصل از آزمون‌های آزمایشگاهی و رنگ سیاه نمایانگر نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی است.

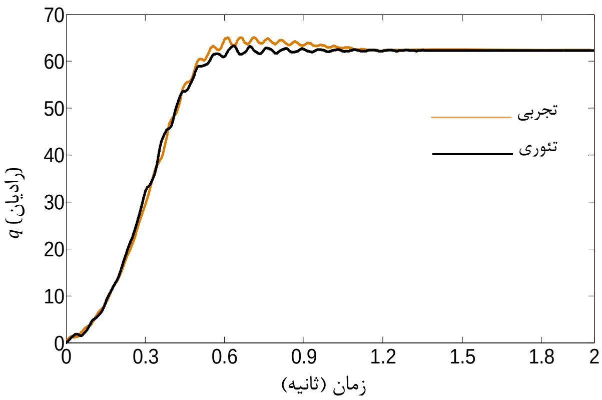
برای موقعیت زاویه‌ای بازو، زاویه توقف برای حالت I زاویه ۶۲/۳۷ درجه و برای حالت II زاویه ۲۴/۹ درجه است (شکل‌های ۵ و ۹). علاوه بر این، توافق خوبی بین نتایج حاصل از تئوری و آزمون برای موقعیت زاویه‌ای بازو (شکل‌های ۵ و ۹) و تغییر فرم نقطه انتهایی بازو (شکل‌های ۷ و ۱۱) مشاهده می‌شود. برای به دست آوردن سرعت زاویه‌ای رابط و همچنین سرعت نقطه انتهایی تیر بایستی به ترتیب از موقعیت زاویه‌ای بازو و تغییر فرم نقطه انتهایی تیر نسبت به زمان مشتق‌گیری شود. در اینجا ذکر این نکته ضروری است که مشتق‌گیری از یک سیگنال آغشته به نویز از تغییرات شدیدی برخوردار است. لذا نمودارهای ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ که از مشتق‌گیری نمودارهای ۵، ۷، ۹ و ۱۱ به دست آمده‌اند، مانند آن‌ها از تطابق خوبی برخوردار نیستند.



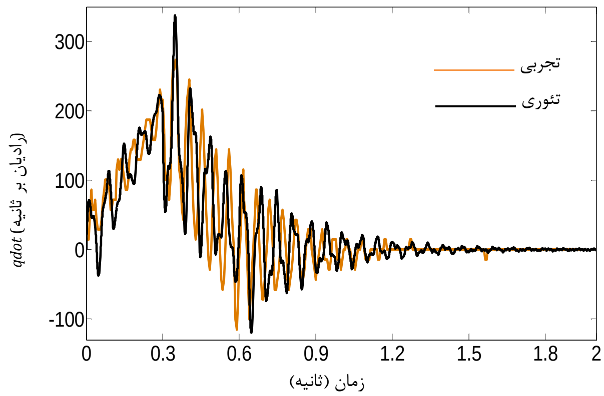
شکل ۳ گشتاور ورودی برای حالت I



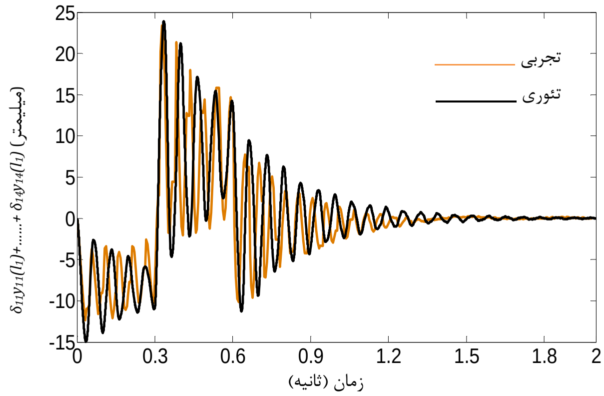
شکل ۴ گشتاور ورودی برای حالت II



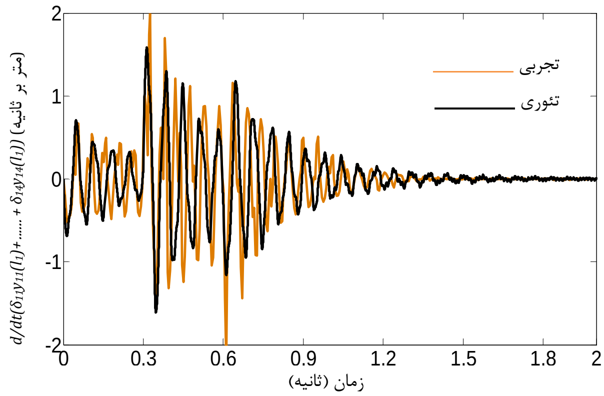
شکل ۵ موقعیت زاویه‌ای بازو برای حالت I



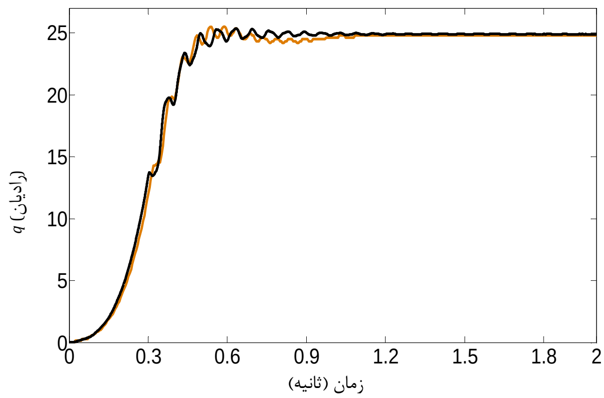
شکل ۶ سرعت زاویه‌ای بازو برای حالت I



شکل ۷ خیز نقطه انتهایی بر حسب زمان برای حالت I

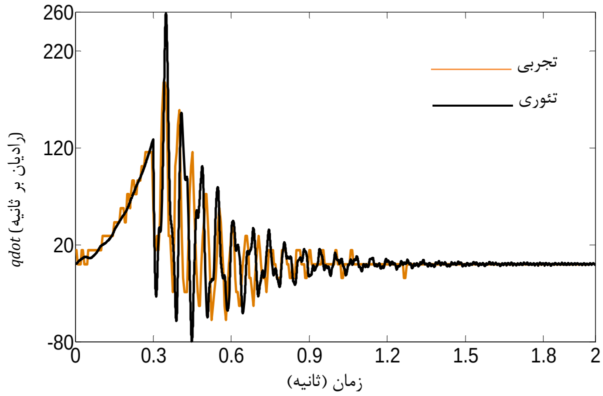


شکل ۸ سرعت نقطه انتهایی بر حسب زمان برای حالت I

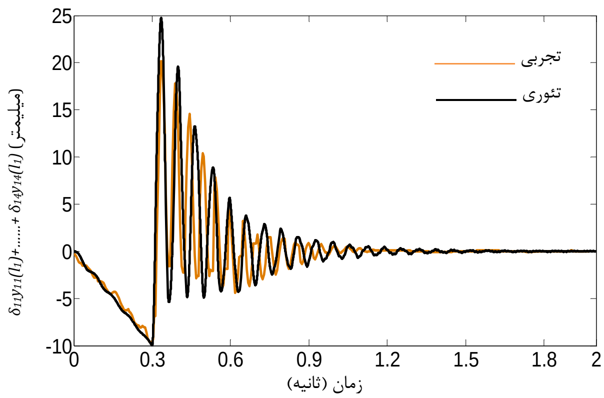


شکل ۹ موقعیت زاویه‌ای بازو برای حالت II

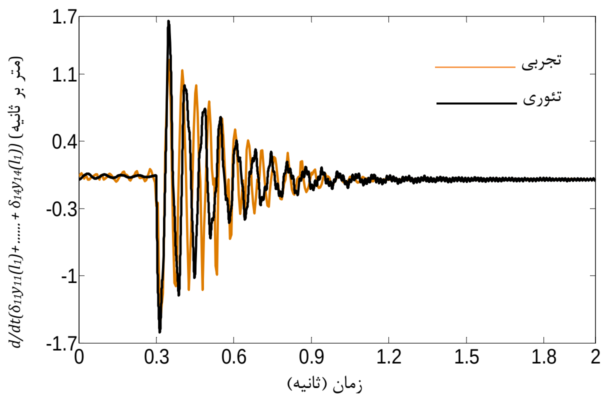
مقایسه میان نتایج حاصل از تئوری و آزمون نشان می‌دهد که مقادیر تخمین زده شده برای ضریب میرایی هوا و ضریب کلوین-ویت می‌تواند به عنوان یک تقریب خوب محسوب شود. اگر چه یک نگاه کلی بر روی نتایج به دست آمده از تئوری و آزمایش از توافق خوب این دو نتیجه حکایت دارد، اما مقایسه بهتر نتایج، در حوزه فرکانس امکان‌پذیر است. تابع پاسخ فرکانسی برای تغییر فرم نقطه انتهایی برای هر دو ورودی در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است. سه فرکانس اول برای ورودی نوع I، مربوط به نتایج حاصل از شبیه‌سازی به ترتیب ۱/۶۶، ۱۵ و ۳۵ هرتز و مربوط به نتایج حاصل از آزمون به ترتیب ۱/۶۸، ۱۸/۴۹ و ۳۶/۹۸ هرتز هستند. اما برای ورودی نوع II، سه فرکانس اول به ترتیب ۱/۶۶، ۱۵ و ۳۶/۶۶ برای نتایج حاصل از شبیه‌سازی و ۱/۶۸، ۱۸/۴۹ و ۳۶/۹۸ برای نتایج حاصل از آزمون است. خطای بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نتایج حاصل از آزمون آزمایشگاهی به ترتیب ۱/۱۹٪، ۱۸/۸۷٪ و ۵/۳۵٪ برای ورودی نوع I و ۱/۱۹٪، ۱۸/۸۷٪ و ۰/۸۶٪ برای ورودی نوع II است.



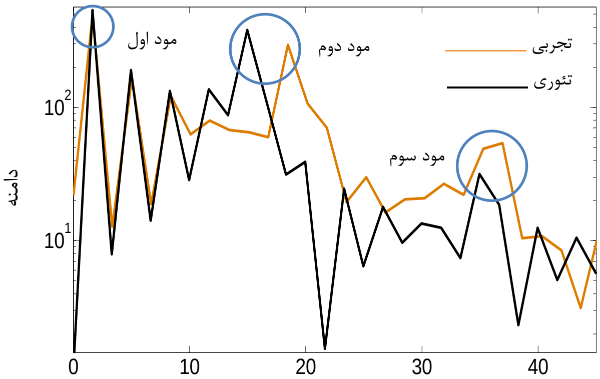
شکل ۱۰ سرعت زاویه‌ای بازو برای حالت II



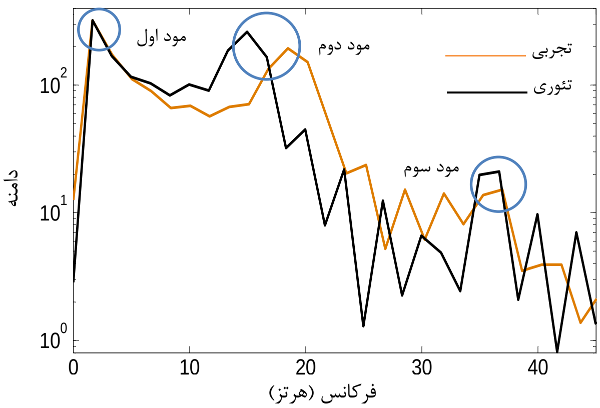
شکل ۱۱ خیز نقطه انتهایی بر حسب زمان برای حالت II



شکل ۱۲ سرعت نقطه انتهایی بر حسب زمان برای حالت II



شکل ۱۳ تحلیل فرکانسی برای تغییر فرم نقطه انتهایی برای حالت I



شکل ۱۴ تحلیل فرکانسی برای تغییر فرم نقطه انتهایی برای حالت II

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از فرمول‌بندی گیبس-اپل و روش مودهای فرضی معادلات حرکت یک ربات N بازویی ویسکوالاستیک استخراج شد. صحه‌گذاری نتایج به دست آمده از فرمول‌بندی استخراجی با مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نتایج حاصل از تئوری در حوزه زمان انجام گرفت. این نتایج نشان می‌دهد که مدل ارائه شده یک مدل قابل اعتماد است که می‌تواند در یک زنجیره از بازوهای ویسکوالاستیک مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که پاسخ سیستم به شدت تابع اثر میرایی‌های داخلی و خارجی سیستم است. از سوی دیگر، از آن جایی که دامنه ارتعاشات، تحت اثر میرایی کاهش می‌یابد؛ از این رو مواد با خاصیت ویسکوالاستیک بالا (به عنوان کنترل غیرفعال) همراه با کنترل فعال ممکن است نتایج عملکرد بهتری جهت کنترل ارتعاشات این‌گونه از سیستم‌ها داشته باشد.

۷- مراجع

[1] L. T. Soon, J. Y. Jaw, Shear deformation effect in design considerations of flexible manipulators, *Robotica*, Vol. 11, No. 1, pp. 83-92, 1992.

[2] A. S. Morris, A. Madani, Inclusion of shear deformation term to improve accuracy in flexible link robot modeling, *Mechatronics*, Vol. 6, pp. 631-647, 1996.

[3] D. Wang, M. Meng, Y. Liu, Influence of shear, rotary inertia on the dynamic characteristics of flexible manipulators, *IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computer and Signal Processing*, pp. 615-618, 1999.

[4] F. Y. Wang, G. G. Guan, Influence of rotary inertia, shear deformation and loading on vibration behaviors of flexible manipulators, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 171, No. 4, pp. 433-452, 1994.

[5] G. Naganathan, A. H. Soni, Non-linear flexibility studies for spatial manipulators, *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3, pp. 373-378, 1986.

[6] R. Hussain, A. S. Morris, A. Madani, Accurate modeling of dynamic coupling in flexible link manipulators, *in: UKCC International Conference on Control*, pp. 1180-1185, 1998.

[7] L. Meirovitch, T. Stemple, Hybrid equations of motion for flexible multibody systems using quasi-coordinates, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 18, No. 4, pp. 678-688, 1995.

[8] K. Sezawa, Dispersion of elastic waves propagated on the surface of stratified bodies and on curved surfaces, *Bulletin-Earthquake Research Institute (Tokyo*), 3, pp. 1-18, 1927.

[9] W. E. Baker, *A comparison of experiment with theory of internal damping of metals*, Part I of dissertation for degree of Dr. Eng, The Johns Hopkins University, Baltimore, Md, 1958.

[10] H. T. Banks, D. J. Inman, On damping mechanisms in beams, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 716-723, 1991.

[11] H. T. Banks, Y. Wang, D. J. Inman, Bending and shear damping in beams: Frequency domain techniques, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 116, pp. 188-198, 1994.

[12] X. Qi, G. Chen, Mathematical modeling of kinematics and dynamics of certain single Flexible-link robot arms, *IEEE International Conference on Control Applications*, 1, pp. 288-293, 1992.

[13] F. Y. Wang, P. Zhou, P. Lever, Dynamic effects of rotary inertia and shear deformation on flexible manipulators, *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 3, pp. 2315-2320, 1996.

[14] P. Sooraksa, G. Chen, Mathematical modeling and fuzzy control of a flexible-link robot, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 27, No. 6, pp. 73-93, 1998.

[15] M. Loudini, D. Boukhetala, M. Tadjine, M. A. Boumehdi, Application of Timoshenko beam theory for deriving motion equations of a lightweight elastic link robot manipulator, *International Journal of Automation, Robotics and Autonomous systems*, Vol. 5, No. 2, pp. 11-18, 2006.

[16] V. Mata, S. Provenzano, F. Valero, J. I. Cuadrado, Serial-robot dynamics algorithms for moderately large number of joints, *International Journal of Automation, Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, No. 8, pp. 739-755, 2002.

[17] G. Vossoughi, H. Pendar, Z. Heidari, S. Mohammadi, Assisted Passive Snake-Like Robots: Conception and Dynamic Modeling using Gibbs-Appell Method, *Robotica*, Vol. 26, No. 3, pp. 267-276, 2008.

[18] M. H. Korayem, A. M. Shafei, Motion Equations Proper for Forward Dynamic of Robotic manipulators with flexible links by using Recursive Gibbs-Appell Formulation, *Scientia Iranica Transaction B-mechanical engineering*, Vol. 16, No. 6, pp. 479-495, 2009.

[19] S. E. Khadem, A. A. Pirmohammadi, Analytical development of dynamic equations of motion for a three-dimensional flexible link manipulator with revolute and prismatic joints, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 33, No. 2, pp. 237-249, 2003.