



تحلیل پایداری دینامیکی صفحات دایروی پیزوالکتریک با ریزساختار مدرج تابعی

فرزاد ابراهیمی*

استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین
#قزوین، کدپستی: ۱۶۸۱۸-۳۴۱۴۹، febrahimi@eng.ikiu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، تحلیل پایداری دینامیکی صفحات دایروی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت بارگذاری شعاعی و میدان الکتریکی و براساس تئوری لاو-کرشوف و رابطه غیرخطی تغییر مکان-جابجایی ساندرز ارائه شده است. خواص فیزیکی، مکانیکی، پیزوالکتریک و دی الکتریک صفحه مطابق تابع توانی از جزء حجمی مواد تشکیل دهنده آن در راستای ضخامت صفحه مدل شده است. با استفاده از فرمول‌بندی حساب تغییرات ابتدا معادلات تعادل و پایداری به دست آمده و سپس معادلات حاکم ناپایداری از نوع متیو-هیل ارائه شده است. در ادامه از روش بولوتین برای به دست آوردن نواحی ناپایداری دینامیکی استفاده شده است. تاثیر عوامل مختلف همچون ضخامت صفحه و شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی و اثر بارگذاری مکانیکی و میدان الکتریکی بر روی بار بحرانی کمانش صفحه پیزوالکتریک مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاکی از تاثیر قابل توجه خواص ماده مدرج تابعی بر روی بار بحرانی کمانش و نواحی ناپایداری و اثر ناچیز اثر پیزوالکتریک می‌باشد. پاسخ‌های تحلیلی و نتایج حاصل مدل ساده شده‌ای برای مطالعه پارامتری و درک مشخصات پایداری دینامیکی صفحه پیزوالکتریک مدرج تابعی ارائه می‌دهد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۰۶ مرداد ۱۳۹۲
پذیرش: ۳۱ شهریور ۱۳۹۲
ارائه در سایت: ۲۶ بهمن ۱۳۹۲
کلید واژگان:
پایداری دینامیکی
اثر پیزوالکتریک
صفحات دایروی
مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی

Effect of functionally graded microstructure on dynamic stability of piezoelectric circular plates

Farzad Ebrahimi*

Department of Mechanical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
*P.O.B. 34149-16818, Qazvin, febrahimi@eng.ikiu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 28 July 2013
Accepted 22 September 2013
Available Online 15 February 2014

Keywords:
Dynamic Stability
Functionally Graded Piezoelectric Material
Circular Plates

ABSTRACT

Analytical solution for the dynamic stability analysis of functionally graded piezoelectric materials (FGPM) circular plates has been presented based on Love-Kirchhoff hypothesis and the Sander's non-linear strain-displacement relation. The FGPM plate assumed to be graded across the thickness. The material properties of the FGPM plate assumed to vary continuously through the thickness of the plate according to a power law distribution of the volume fraction of the constituent materials. The plates are subjected to a radial loading and electric field in the normal direction. Bolotin's method has been employed to obtain the dynamic instability regions. The effect of plate parameters such as thickness-radius ratios, power index, as well as electric field and state loads on instability behavior of the plate is comprehensively investigated. The functionally graded composite material plays a significant role in changing the unstable regions and the buckling loads.

۱- مقدمه

این نقایص به خودی خود طول عمر، میزان جابه‌جایی ناشی از اعمال میدان الکتریکی و دوام محرک‌های پیزوالکتریک را کاهش می‌دهد و نیز کارایی محرک پیزوالکتریک را در برخی از وسایل اندازه‌گیری، که قابلیت اطمینان زیادی می‌خواهند، محدود می‌کند.

برای حل این مشکلات، ژو و منگ [۱] ساخت محرک از جنس مواد پیزوالکتریک با ساختار مدرج تابعی^۲ را گزارش داده‌اند و با اندازه‌گیری آزمایشگاهی مشخصات و میزان جابه‌جایی و نحوه توزیع ترکیبات مواد این سیستم‌های محرک را ارائه کرده‌اند. محرک جدید با ضرایب مختلف مواد، که به‌طور یکنواخت در طول ضخامت تغییر می‌کنند، در بین لایه‌های مجزای

هم‌اکنون حسگرها و محرک‌های پیزوالکتریک به‌طور وسیع در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی^۱ استفاده می‌شوند. محرک‌های معمولی خمشی پیزوالکتریک، چند لایه بوده و از مد تغییر شکل جانبی برای ایجاد خیز بیشتر بهره می‌برند. به هر حال مهم‌ترین نقص محرک‌های پیزوالکتریک لایه‌ای متداول ترک برداشتن و جدایی لایه متصل‌کننده در دماهای پایین و به‌وجود آمدن خزش در دماهای بالا می‌باشد [۱]. نقطه ضعف دیگر آن‌ها ایجاد تمرکز تنش ناشی از تغییرات ناگهانی ترکیب مواد و خواص ترموالکترومکانیکی آن‌ها در ناحیه اتصال دولاایه می‌باشد که موجب کاهش قابل توجه استحکام لایه اتصالی و نیز عملکرد سیستم می‌گردد [۲].

شکل برشی مرتبه اول به دست آورده و برای ترکیبات متنوع شرایط مرزی حل دقیق ارائه کرده‌اند. حسینی هاشمی و همکاران [۹] نیز یک حل دقیق پاسخ بسته برای ارتعاشات آزاد ورق‌های نسبتاً ضخیم مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه پیزوالکتریک ارائه کرده‌اند. در مطالعه‌ای دیگر ژائو و همکاران [۱۰]، ارتعاشات صفحات مدرج تابعی سرامیک/ فلز را با روش بدون المان کاپی-ریتز بررسی کرده‌اند. رفتار پس کمانش صفحه تابعی مستطیلی کوپل شده با لایه‌های محرک پیزوالکتریک تحت اثر همزمان بارهای گرمایی-الکتریکی- مکانیکی نیز توسط لیو و همکاران [۱۱] بررسی شده است. اوتاوا و تانباگوا [۱۲] صفحه تابعی مستطیلی به همراه لایه پیزوالکتریک تحت بارگذاری گرمایی گذرا را مورد بررسی قرار داده‌اند. یک حل سه‌بعدی نیز برای صفحه مستطیلی تابعی کوپل شده با لایه محرک پیزوالکتریک توسط ردی و چنگ [۱۳] با استفاده از روش ماتریس انتقال و تکنیک بسط مجانبی پیشنهاد شده است. در حالی که یک مدل اجزاء محدود برای مطالعه کنترل شکل و ارتعاشات صفحه تابعی مستطیلی به همراه لایه‌های حسگر و محرک پیزوالکتریک توسط هی و همکاران [۱۴] پیشنهاد شده است. تمامی مطالعات اشاره شده فوق بر روی صفحات تابعی با شکل مستطیلی صورت گرفته است. ابراهیمی و همکاران تحقیق و بررسی بر روی رفتار صفحات تابعی دایروی/حلقوی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری کلاسیک تغییر شکل صفحات برای صفحات دایروی نازک [۱۵] و صفحات تابعی حلقوی نازک [۱۶] و نیز با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی برای صفحات تابعی دایروی و حلقوی نسبتاً ضخیم به همراه لایه‌های پیزوالکتریک [۱۷، ۱۸] را ارائه داده‌اند. از مقدمه ارائه شده و بررسی تحقیقات صورت گرفته در این حوزه مشاهده می‌شود که با وجود جذابیت قابل توجه تحقیق بر روی عملکرد، رفتار ارتعاشی و مشخصات دینامیکی صفحات مدرج تابعی کوپل با محرک‌های پیزوالکتریک، تاکنون تحقیقی برای بررسی و تحلیل پایداری صفحات پیزوالکتریک با ریز ساختار از جنس مواد مدرج تابعی ارائه نشده است. لذا در راستای پرکردن این خلا در تحقیقات، هدف مقاله حاضر بررسی و مطالعه بر روی ناحیه ناپایداری دینامیکی صفحات دایروی پیزوالکتریک مدرج تابعی با استفاده از روش بولوتین^۴ می‌باشد. خواص پیزوالکتریکی، فیزیکی و مکانیکی صفحه پیزوالکتریک مدرج تابعی به صورت تدریجی و یکنواخت و مطابق تابع توانی از جزء حجمی مواد تشکیل دهنده در راستای ضخامت صفحه مدل شده است. یک حل برای صفحات دایروی پیزوالکتریک تابعی، که تحت بارگذاری‌های فشاری یکنواخت قرار دارند، ارائه شده است. اثر پارامترهای مختلف از جمله نسبت ضخامت به شعاع صفحه، شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی و نیز اثر بارگذاری مکانیکی و میدان الکتریکی بر روی رفتار ناپایداری صفحه هوشمند مذکور به صورت جامع مورد تحقیق قرار گرفته است.

۲- ماده پیزوالکتریک مدرج تابعی

مدل‌های تحلیلی و محاسباتی مختلفی برای توزیع مکانی خواص فیزیکی و مکانیکی مواد تابعی پیشنهاد شده است. در این تحقیق از تابع توانی ساده جزء حجمی مواد تشکیل دهنده در راستای ضخامت صفحه استفاده خواهد شد. لذا برای ماده تابعی ساخته شده از مخلوط فلز و سرامیک خواهیم داشت:

$$V_m + V_c = 1 \quad (1)$$

که در آن V_m و V_c به ترتیب جزء حجمی سرامیک و فلز می‌باشند. همچنین،

پیزوالکتریک تعبیه شده است. مواد مدرج تابعی^۱ به خاطر خصوصیت مقاومت حرارتی‌شان به عنوان مواد با ساختار پیشرفته مورد توجه قرار گرفته‌اند. یک مزیت صفحه تابعی نسبت به صفحه لایه‌ای این است که خصوصیات ماده به طور یکنواخت در راستای ضخامت صفحه تغییر می‌کند. بنابراین، هیچ تغییر ناگهانی در تنش‌ها در لایه مابین دو لایه مجاور ایجاد نمی‌شود و در نتیجه از جدایش لایه‌ها جلوگیری می‌کند. مواد مدرج تابعی که نوعاً از ترکیبی از سرامیک‌ها و فلزات ساخته می‌شوند را می‌توان با تغییر آرام و یکنواخت خواص مکانیکی از یک سطح به سطح دیگر توصیف نمود. اجزاء سرامیکی مواد مدرج تابعی به واسطه مقاومت گرمایی بهتر خود قادرند محیط‌های دارای حرارت بالا را تحمل کنند، در حالی که اجزای فلزی عملکرد مکانیکی قدرتمندتری داشته و امکان شکست‌های زیانبار را کاهش می‌دهند. این مواد به دلیل خواص ترمومکانیکی ممتازشان کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف پیدا کرده‌اند، به ویژه در فضاپیماها و هواپیماها، جایی که محدوده دمایی بالا و بارگذاری دینامیکی مثل افت دمای زیاد و فشار صوتی از موضوعات اصلی می‌باشد. این کاربردهای وسیع منجر به رفتارهای کمانش و پایداری پیچیده این صفحات در اثر کوپلینگ خمشی-کششی و اثر بارگذاری‌های خارجی ترکیبی خواهد شد. بنابراین، شناخت رفتار کمانش صفحات از جنس مواد مدرج تابعی از اهمیت بسزایی برخوردار می‌باشد. در مواد پیزوالکتریک نیز اثر کوپل بین میدان الاستیک و میدان الکتریکی وجود دارد و در سال‌های اخیر به دلیل استفاده وسیع از مواد پیزوالکتریک در حسگرها و محرک‌ها، مطالعه بر روی استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک کوپل با سازه مورد نظر بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است.

به علاوه توجه ویژه به مطالعه و بررسی رفتار صفحات دایروی و حلقوی کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک به دلیل امکان استفاده از ماده پیزوالکتریک به عنوان محرک در موتور آلتراسونیک [۳] می‌باشد که به دنبال تقاضا برای موتور با وزن کم، گشتاور بالا و سرعت پایین برای کاربردهایی با توان برابر کسری از اسب بخار ایجاد شده است. این موضوع بر پایه ایده راندن یک روتور به وسیله ارتعاشات مکانیکی ناشی از اثر پیزوالکتریک یک قطعه پیزوالکتریکی نصب شده بر روی استاتور استوار است [۴]. مسائل پایداری صفحات برای اولین بار توسط بوندر [۵] با به کار بردن سری‌ها و استفاده از روش گالرکین^۲ حل شده است. بولوتین [۶] پایداری دینامیکی صفحات تحت نیروهای متناوب مختلف را با انجام محاسبات غیرخطی بررسی کرد.

همچنین، در سال‌های اخیر به علت قابلیت و رواج استفاده از مواد پیزوالکتریک به عنوان حسگر یا محرک، مطالعه و بررسی این مواد، که بر روی سازه‌های مختلف تعبیه شده‌اند، مورد اقبال بسیار زیاد پژوهشگران قرار گرفته است. در این راستا، جهت بهره‌برداری بهینه از خواص حسگری/محرکی این مواد، اندرکنش بین سازه اصلی و ماده پیزوالکتریک بایستی به خوبی شناخته شود. به تازگی مطالعاتی بر روی قابلیت‌های مختلف مواد پیزوالکتریک برای نصب بر روی صفحات ساخته شده از مواد تابعی نیز ارائه شده است. از جمله پروین و ردی [۷] پاسخ دینامیکی صفحات سرامیک/فلز از جنس مواد مدرج تابعی را با استفاده از روش المان محدود و با لحاظ کردن اثرات اینرسی دورانی، کرنش‌های برشی جانبی و دوران‌های نسبتاً بزرگ مطابق تئوری فون کارمن^۳ ارائه نموده‌اند. افرایم و ایزنبرگر [۸] نیز معادلات حرکت مربوط به این صفحات را با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی و براساس تئوری تغییر

1- Functionally graded materials (FGMs)

2- Galerkin

3- Von Kármán

4- Bolotin's method

باشد. بر طبق فرضیات تئوری لاو-کرسهف^۱ رابطه (۸) برقرار خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{rr} \\ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\varepsilon}_{r\theta} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{rr} \\ k_{\theta\theta} \\ k_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_r + \frac{w_r^2}{2} \\ \frac{v_{,\theta}}{r} + \frac{u}{r} + \left(\frac{w_{,\theta}}{2}\right)^2 \\ \frac{u_{,\theta}}{r} + v_{,r} - \frac{v}{r} + \left(\frac{w_r}{r}\right)w_{,\theta} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -w_{,rr} \\ -\frac{w_r}{r} - \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \\ -2\left(\frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2}\right) \end{Bmatrix} \quad (۸)$$

که در آن $\bar{\varepsilon}_{rr}$ ، $\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}$ و $\bar{\varepsilon}_{r\theta}$ مولفه‌های کرنش مهندسی در صفحه میانی و k_{rr} ، $k_{\theta\theta}$ و $k_{r\theta}$ مقادیر انحناست که برحسب تغییر مکان‌ها قابل تعریف هستند، u ، v و w نیز مولفه‌های تغییر مکان یک نقطه بر روی صفحه میانی را نشان می‌دهند. در ادامه برای به دست آوردن معادله رفتار دینامیکی صفحه دایروی پیزوالکتریک مدرج تابعی از اصل همیلتون به صورت رابطه (۹) استفاده می‌شود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} V = \delta \int_{t_1}^{t_2} [U + W - T] dt = 0 \quad (۹)$$

در رابطه (۹)، δ نشانگر عملگر حساب تغییرات مرتبه اول، V کل انرژی، T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل و W کار انجام شده توسط بارگذاری مکانیکی متناوب p_r می‌باشند که به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شوند:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{ij} \sigma_{ij} + D_{ij} E_{ij}) r dr d\theta dz \quad (۱۰-الف)$$

$$W = - \int_0^r \int_0^{2\pi} p_r u_r r dr d\theta \quad (۱۰-ب)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho w_x^2 r dr d\theta dz \quad (۱۰-ث)$$

با جایگذاری روابط (۶) و (۷) و (۸) در معادله (۹) و سپس انتگرال‌گیری z در راستای ضخامت صفحه از $-h/2$ تا $h/2$ انرژی کل به صورت رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$V = \iint F r dr d\theta \quad (۱۱)$$

که در آن F به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود:

$$F = r \left\{ \frac{A}{2(1-\nu^2)} \left(\bar{\varepsilon}_{rr}^2 + \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^2 + 2\nu \bar{\varepsilon}_{rr} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + \frac{1-\nu}{2} \bar{\varepsilon}_{r\theta}^2 \right) + \frac{B}{2(1-\nu^2)} \left(k_{rr}^2 + k_{\theta\theta}^2 + 2\nu k_{rr} k_{\theta\theta} + \frac{1-\nu}{2} k_{r\theta}^2 \right) + \frac{C}{1-\nu^2} \left(\bar{\varepsilon}_{rr} k_{rr} + \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} k_{\theta\theta} + \nu (\bar{\varepsilon}_{rr} k_{\theta\theta} + \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} k_{rr}) + \frac{1-\nu}{2} \bar{\varepsilon}_{r\theta} k_{r\theta} \right) + \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \xi_{33} E_z^2 dz + \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho w_x^2 dz - p_r u_r \right\} \quad (۱۲)$$

که در آن A و B و C عبارت‌اند از:

$$(A, B, C) = \int_{-h/2}^{h/2} E (1, z^2, z) dz \quad (۱۳)$$

بر طبق اصل همیلتون، F باید روابط اولر مربوط به حساب تغییرات ارتعاشات

تغییرات V_c در راستای ضخامت تیر به صورت رابطه (۲) بیان می‌گردد [۱۹]:

$$V_c = \left(\frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^n, n \geq 0 \quad (۲)$$

که در آن z محور مختصات در راستای ضخامت صفحه، h ضخامت صفحه تابعی و n شاخص گرادبان این ماده می‌باشد. در واقع در حالت $n=1$ تغییرات هر دو جزء سرامیک و فلز خطی است و وقتی $n=0$ است ماده یک سرامیک کامل خواهد بود. دیگر خواص مکانیکی، فیزیکی و پیزوالکتریکی ماده تابعی نیز دارای تغییراتی همانند V_c هستند. در این صورت مشخصات موثر ماده صفحه تابعی به صورت رابطه (۳) بیان می‌شود [۱۹]:

$$P_{eff} = P_u + (P_b - P_u) \left(\frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (۳)$$

که در آن P_{eff} نشانگر خاصیت موثر ماده مدرج تابعی و P_u و P_b به ترتیب خواص مربوط به سطح بالا و پایین صفحه می‌باشند. شاخص گرادبان ماده تابعی پروفایل تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت صفحه را نشان می‌دهد و می‌تواند جهت توزیع مطلوب خواص مواد بهینه گردد. از معادله (۳) مدول الاستیک E ، چگالی جرمی ρ ، ثابت تنش پیزوالکتریک e_{ij} و ثابت‌های دی الکتریک ξ_{ij} مربوط به صفحه پیزوالکتریک مدرج تابعی به صورت رابطه (۴) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (E, \rho, e_{ij}, \xi_{ij}) &= (E, \rho, e_{ij}, \xi_{ij})_u + \\ & \left((E, \rho, e_{ij}, \xi_{ij})_b - (E, \rho, e_{ij}, \xi_{ij})_u \right) \left(\frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^n \end{aligned} \quad (۴)$$

صفحه دایروی پیزوالکتریک مدرج تابعی مورد مطالعه تحت بارگذاری شعاعی یکنواخت فشاری p_r در طول لبه آن و نیز تحت اثر میدان الکتریکی متناوب در جهت خارج از صفحه به صورت رابطه (۵) قرار دارد:

$$\begin{aligned} p_r &= p_0 + p_t \cos \omega t \\ E_z &= E_{z0} + E_{zt} \cos \omega t \end{aligned} \quad (۵)$$

معادلات اساسی ماده پیزوالکتریک تابعی نیز براساس روابط تنش-کرنش دو بعدی تنش مسطح به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 1-\nu^2 & 1-\nu^2 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1-\nu^2 & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

$$\begin{Bmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (۷)$$

در روابط (۶) و (۷)، $\{\sigma\}$ تانسور تنش و $\{D\}$ بردار تغییر مکان الکتریکی است و فرض شده است که نسبت پواسون ν در طول ضخامت صفحه ثابت

در رابطه (۱۷)، ∇^2 اپراتور لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای و به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

۳- معادلات پایداری

در این مرحله جهت به دست آوردن معادلات پایداری دینامیکی صفحه دایروی پیزوالکتریک از معیار شبه‌تعدالی ارائه شده مطابق مرجع شماره [۲۰] و به صورت رابطه (۱۸) استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u_0 + u_1 & N_r &\rightarrow N_{r0} + \Delta N_r \\ v &\rightarrow v_0 + v_1 & N_\theta &\rightarrow N_{\theta0} + \Delta N_\theta \\ w &\rightarrow w_0 + w_1 & N_{r\theta} &\rightarrow N_{r\theta0} + \Delta N_{r\theta} \end{aligned} \quad (18)$$

به طوری که تغییرات مکان (u_1, v_1, w_1) به طور دلخواه کوچک اختیار شده و تغییر مکان‌های (u_0, v_0, w_0) و $(u_{0'}, v_{0'}, w_{0'})$ نشانگر تغییر مکان‌های مربوط به دو حالت تعادل نزدیک به هم هستند. در این روابط ترم‌های با زیرنویس صفر مربوط به حالت تغییر مکانی u_0, v_0, w_0 بوده $\Delta N_r, \Delta N_\theta, \Delta N_{r\theta}$ نیز تغییرات نیرویی مربوط به حالت تغییر مکانی u_1, v_1, w_1 می‌باشند. فرض می‌شود که $N_{r1}, N_{\theta1}, N_{r\theta1}$ به ترتیب جزء خطی N_{r01} و $N_{r1}, N_{\theta1}$ می‌باشد. به عنوان نمونه از ترکیب معادلات (۸) و (۱۶) رابطه (۱۹) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} N_r + \Delta N_r &= \frac{A}{1-v^2} \times \\ &\left\{ \left[u_{0,r} + \frac{(w_0 + w_1)_{,r}^2}{2} + v \left(\frac{v_{0,\theta}}{r} + \frac{u_0}{r} + \frac{(w_0 + w_1)_{,\theta}^2}{2r^2} \right) \right] \right. \\ &+ \left. \left[u_{1,r} + v \left(\frac{v_{1,\theta}}{r} + \frac{u_1}{r} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{C}{1-v^2} \left\{ \left[-w_{0,rr} + v \left(-\frac{w_{0,\theta}}{r} - \frac{w_{0,\theta\theta}}{r^2} \right) \right] + \right. \\ &\left. \left[-w_{1,rr} + v \left(-\frac{w_{1,\theta}}{r} - \frac{w_{1,\theta\theta}}{r^2} \right) \right] \right\} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} E_z dz = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

حال، با حذف جملات مرتبه بالا و با فرض اینکه w_0 و مشتقاتش برابر صفر باشند، به علت بارگذاری صفحه‌ای و لبه‌ای روابط (۲۰) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{r0} &= \frac{A}{1-v^2} \left[u_{0,r} + v \left(\frac{v_{0,\theta}}{r} + \frac{u_0}{r} \right) \right] - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} E_z dz \\ \Delta N_r &= \frac{A}{1-v^2} \left[u_{1,r} + \frac{w_{1,r}^2}{2} + v \left(\frac{v_{1,\theta}}{r} + \frac{u_1}{r} + \frac{w_{1,\theta}^2}{2r^2} \right) \right] + \\ &\frac{C}{1-v^2} \left[-w_{1,rr} + v \left(-\frac{w_{1,\theta}}{r} - \frac{w_{1,\theta\theta}}{r^2} \right) \right] \\ N_{r1} &= \frac{A}{1-v^2} \left\{ \left[u_{1,r} + v \left(\frac{v_{1,\theta}}{r} + \frac{u_1}{r} \right) \right] + \right. \\ &\left. \frac{C}{1-v^2} \left[-w_{1,rr} + v \left(-\frac{w_{1,\theta}}{r} - \frac{w_{1,\theta\theta}}{r^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

سپس، با استفاده از معادله (۱۷) معادلات حاکم بر پایداری دینامیکی صفحه

را ارضا نماید که منجر به روابط تعادل دینامیکی (۱۴) بر حسب F خواهد شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial u_r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial u_\theta} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial v_r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial v_\theta} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial w_r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial w_\theta} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial w_t} &+ \\ + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{\partial F}{\partial w_{rr}} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial F}{\partial w_{r\theta}} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\partial F}{\partial w_{\theta\theta}} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۸) و (۱۲) در معادله (۱۴)، روابط تعادل دینامیکی برای صفحه دایروی از جنس مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی به صورت رابطه (۱۵) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r,\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} &= 0 \\ N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta w_{,\theta} + N_{r\theta} w_{,r}) + \frac{\partial}{\partial r} (r N_r w_{,r} + N_{r\theta} w_{,\theta}) &+ \\ + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2M_{r\theta}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_r) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (2M_\theta) &+ \\ - \frac{\partial}{\partial r} M_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{M_\theta}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_z w_{,r} dz &+ \\ - \frac{\partial}{\partial r} \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_z z dz - \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{e_{31} E_z w_{,\theta}}{r} dz &+ \\ + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_{-h/2}^{h/2} r e_{31} E_z z dz + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{e_{31} E_z z}{r} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \rho w_{,tt} dz &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} (N_r, M_r) \\ (N_\theta, M_\theta) \\ (N_{r\theta}, M_{r\theta}) \end{Bmatrix} &= \frac{(A, C)}{1-v^2} \begin{Bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{rr} \\ \bar{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\epsilon}_{r\theta} \end{Bmatrix} \\ + \frac{(C, B)}{1-v^2} \begin{Bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{rr} \\ k_{\theta\theta} \\ k_{r\theta} \end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{31} \\ 0 \end{Bmatrix} E_z(I, z) dz & \end{aligned} \quad (16)$$

حال با جایگذاری معادله (۸) در رابطه سوم معادله (۱۵) معادله دینامیکی صفحه دایروی پیزوالکتریک مدرج تابعی به صورت رابطه (۱۷) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r,\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} &= 0 \\ N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta} &= 0 \\ \frac{B}{1-v^2} \nabla^4 w - \left[N_r w_{,rr} + N_\theta \left(\frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + 2N_{r\theta} \left(-\frac{w_{,\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r\theta}}{r} \right) \right] &+ \\ + \frac{C}{1-v^2} \left(\frac{v_{,\theta}}{r^3} + \frac{v_{,r\theta}}{r^2} + \frac{u_{,r}}{r^2} - \frac{u}{r^3} - \frac{2u_{,rr}}{r} \right. &+ \\ \left. - \frac{u_{,\theta\theta}}{r^3} - \frac{u_{,r\theta\theta}}{r^2} - \frac{u_{,rr\theta}}{r} - \frac{v_{,\theta\theta\theta}}{r^3} - u_{,rrr} \right) &+ \\ - \nabla^2 w \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_z dz + w_{,tt} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

دایروی پیزوالکتریک به صورت روابط (۲۱) حاصل می شود:

$$\begin{aligned} N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{N_{r1} - N_{\theta1}}{r} &= 0 \\ N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta1,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta1} &= 0 \\ \frac{B}{1-\nu^2} \nabla^4 w_1 - \left[N_{r0} w_{1,rr} + N_{\theta0} \left(\frac{w_{1,r}}{r} + \frac{w_{1,\theta\theta}}{r^2} \right) + \right. \\ &+ 2N_{r\theta0} \left(-\frac{w_{1,\theta}}{r^2} + \frac{w_{1,r\theta}}{r} \right) \left. + \frac{C}{1-\nu^2} \left(-\frac{v_{1,\theta}}{r^3} + \frac{v_{1,r\theta}}{r^2} + \frac{u_{1,r}}{r^2} \right) \right. \\ &\left. - \frac{u_1}{r^3} - \frac{2u_{1,rr}}{r} - \frac{u_{1,\theta\theta}}{r^3} - \frac{u_{1,r\theta\theta}}{r^2} - \frac{u_{1,rr\theta}}{r} - \frac{v_{1,\theta\theta\theta}}{r^3} - u_{1,rrr} \right) \\ &- \nabla^2 w_1 \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_z dz + w_{1,tt} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{r0} \\ N_{\theta0} \\ N_{r\theta0} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \\ \begin{Bmatrix} Au_{0,r} \\ A \left(\frac{v_{0,\theta} + u_0}{r} \right) \\ A \left(\frac{u_{0,\theta} + v_0}{r} + v_{0,r} \right) \end{Bmatrix} &- \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{31} \\ 0 \end{Bmatrix} E_z dz \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{r1} \\ N_{\theta1} \\ N_{r\theta1} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \\ \begin{Bmatrix} Au_{1,r} - Cw_{1,rr} \\ A \left(\frac{v_{1,\theta} + u_1}{r} \right) - C \left(\frac{rw_{1,\theta} + w_{1,\theta\theta}}{r^2} \right) \\ A \left(\frac{u_{1,\theta} - v_1}{r} + v_{1,r} \right) - 2C \left(\frac{rw_{1,r\theta} - w_{1,\theta}}{r^2} \right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

۴- محدوده نواحی ناپایداری

با در نظر گرفتن پایداری دینامیکی صفحه به صورت متقارن محوری، $N_{\theta0}$ و N_{r0} بارهای پیش-کمانش هستند که از طریق تحلیل تعادل صفحه محاسبه می شوند:

$$N_{r0} = N_{\theta0} = -p_r, \quad N_{r\theta0} = 0 \quad (24)$$

با این شرایط، معادله اول و سوم پایداری دینامیکی (۲۱) به رابطه های (۲۵) تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{du_1}{r dr} - \frac{u_1}{r} \right) + \frac{C}{1-\nu^2} \left(-\frac{d^3 w_1}{dr^3} - \frac{d^2 w_1}{r dr^2} + \frac{dw_1}{r^2 dr} \right) = 0 \\ \frac{B}{1-\nu^2} \nabla^4 w_1 + \left(p_r - \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_z dz \right) \nabla^2 w_1 + \frac{C}{1-\nu^2} \\ \left(\frac{du_1}{r^2 dr} - \frac{u_1}{r^3} - \frac{2d^2 u_1}{r dr^2} - \frac{d^3 u_1}{dr^3} \right) + w_{1,tt} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

حال با تغییر متغیرهای مطابق رابطه (۲۶):

$$\frac{dw_1}{dr} = Y, \quad \frac{d^2 w_1}{dr^2} = \frac{dY_1}{dr} = Y', \quad \frac{d^3 w_1}{dr^3} = \frac{d^2 Y_1}{dr^2} = Y'' \quad (26)$$

و فرض:

$$q = \frac{A}{1-\nu^2} u_1 - \frac{C}{1-\nu^2} Y \quad (27)$$

و با جایگذاری معادلات (۲۶) و (۲۷) در معادله اول پایداری (۲۵) رابطه (۲۸) حاصل می شود:

$$rq'' + rq' - q = 0 \quad (28)$$

جواب معادله دیفرانسیل (۲۸) به صورت زیر می باشد:

$$q = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (29)$$

شرایط مرزی در حالت تکیه گاه گیردار نیز به صورت رابطه (۳۰) تعریف می شود:

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{dw_1}{dr} = \text{محدود} \quad & \text{در } r=0 \\ u_1 = \frac{dw_1}{dr} = 0 \quad & \text{در } r=R \end{aligned} \quad (30)$$

حال با اعمال شرایط مرزی در معادله (۲۹) روابط (۳۱) و (۳۲) حاصل می شود:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \quad (31)$$

$$q = 0 \quad (32)$$

با قرار دادن $q = 0$ در معادله (۲۷)، و حل آن برای u_1 نیز رابطه (۳۳) به دست می آید:

$$rq'' + rq' - q = 0 \quad (33)$$

پس از جایگذاری مقدار u_1 مطابق معادله (۳۳) در رابطه دوم معادله (۲۵) رابطه پایداری دینامیکی متقارن محوری صفحه دایروی پیزوالکتریک مدرج تابعی به صورت رابطه (۳۴) به دست می آید:

$$\nabla^4 w_1 + \left(p_r - \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_z dz \right) \nabla^2 w_1 + M w_{1,tt} = 0 \quad (34)$$

به طوری که:

$$D = \frac{B}{1-\nu^2} - \frac{C}{A(1-\nu^2)}, \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (35)$$

جواب معادله پایداری دینامیکی به صورت رابطه (۳۶) در نظر گرفته می شود:

$$w_1 = f(t) \psi(r) \quad (36)$$

که در آن

$$\psi(r) = I_n(\lambda R) J_n(\lambda r) - J_n(\lambda R) I_n(\lambda r) \quad (37)$$

حال جواب به دست آمده باید شرایط مرزی مطابق رابطه (۳۸) را ارضا نماید:

$$w_1 = \frac{dw_1}{dr} = 0: \quad \text{در } r=R \quad (38)$$

و معادله فرکانس های طبیعی به صورت رابطه (۳۹) خواهد بود:

$$D \nabla^4 \psi - M \omega^2 \psi = 0 \quad (39)$$

در رابطه (۳۷)، $J_n(x)$ و $I_n(x)$ به ترتیب معادلات بسل نوع اول و اولین معادله بسل اصلاح شده نوع اول هستند. λR ها نیز ریشه های معادله فرکانس می باشند.

$$J_n(\lambda r) \frac{dI_n(\lambda R)}{dr} - \frac{dJ_n(\lambda R)}{dr} I_n(\lambda r) = 0 \quad (40)$$

پایداری دینامیکی صفحه پیزوالکتریک مدرج تابعی و به دست آوردن مرزهای نواحی ناپایداری آن به کار می‌رود.

۵- ارائه نتایج عددی و بحث و بررسی آن‌ها

تحلیل پایداری متقارن محوری صفحه دایروی از جنس مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی لبه‌ای به صورت تکیه‌گاه گیردار در نظر گرفته شده‌اند. صفحه تحت بارگذاری متناوب به صورت نیروی شعاعی فشاری ضربه‌ای و میدان الکتریکی متناوب در جهت خارج از صفحه می‌باشد که به صورت رابطه (۴۷) تعریف می‌شوند:

$$p_r(t) = p_0 + p_t \cos \omega t = \alpha p_{cr} + \beta p_{cr} \cos \omega t$$

$$E_z(t) = E_{z0} + E_{zt} \cos \omega t \quad (47)$$

در رابطه فوق، α ضریب نیروی استاتیکی و β ضریب نیروی دینامیکی است که در این تحلیل $\beta = 0.15$ در نظر گرفته شده است. خواص فیزیکی، مکانیکی، پیزوالکتریک صفحه مدرج تابعی در جدول شماره ۱ ارائه شده است.

خاصیت ماده	p_u (PZT)	p_b (PZT/30%Pt)
ρ (kg/m ³)	۷۹۰	۱۱۸۷
E (GPa)	۱۱۸۷	۱۵۳/۷۷
e_{31} (C/m ²)	-۱۶/۸	.
ξ_{11} / ξ_0	۱۶۵۴	.
ξ_{33} / ξ_0	۱۹۲۴	.

تغییرات مواد در راستای ضخامت صفحه مدرج تابعی به صورت تغییر سطح بالایی از جنس ترکیب PZT/30%Pt به سطح پایینی از جنس PZT می‌باشد. نتایج فرکانس‌های ناپایداری دینامیکی برای حالات مختلف در جدول ۲ آورده شده‌اند. در این جدول ω_{a1}^2 و ω_{a2}^2 به ترتیب نشانگر فرکانس‌های مشخص شده در معادلات (۴۶-الف) و (۴۶-ب) می‌باشند و ω_{a0}^2 معرف فرکانس ارتعاش آزاد صفحه می‌باشد. شکل ۱ نمای از ناحیه ناپایداری فرکانسی را نشان می‌دهد. ولتاژ متناوب اعمالی به یک مقدار متوسط میدان الکتریکی در جهت شعاعی افزایش می‌یابد. در این بخش تاثیر عواملی همچون ضخامت صفحه و شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی و اثر بارگذاری مکانیکی و میدان الکتریکی بر روی بار بحرانی کماتش و نرخ فرکانس ارتعاشات آزاد مورد تحقیق قرار می‌گیرد.

از جدول ۲ مشخص می‌شود که یک میدان الکتریکی استاتیکی می‌تواند موجب حرکت نواحی ناپایدار به ناحیه فرکانسی بالاتر یا پایین‌تر شود و همچنین میدان الکتریکی دینامیکی می‌تواند موجب کاهش یا گسترش ناحیه ناپایدار گردد. به علاوه میدان الکتریکی مثبت باعث ناپایداری سازه می‌گردد، در حالی که میدان الکتریکی منفی این اثر را کاهش می‌دهد. براساس نتایج ارائه شده در جدول ۲ میدان الکتریکی مثبت ناحیه ناپایداری را کاهش و میدان الکتریکی منفی آن را گسترش می‌دهد. اما اثر پیزوالکتریک معکوس، تاثیر کمی روی ناحیه ناپایدار دارد و می‌توان این‌طور نتیجه‌گیری کرد که میدان الکتریکی، که در اغلب کاربردها کمتر از 10^{-6} V/m است به‌تنهایی فقط می‌تواند تاثیر کمی روی ناحیه ناپایدار داشته باشد. برای بررسی تاثیر شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی بر روی نیروی کماتش صفحه نتایج حاصل در شکل

فرکانس‌های طبیعی مطابق رابطه (۴۱) به این ریشه‌ها مربوط می‌شوند:

$$\omega^2 = \frac{\lambda^4 D}{M} \quad (41)$$

با جایگذاری معادلات (۴)، (۳۶)، (۳۷) و (۴۱) در معادله (۳۴) داریم:

$$M\psi \frac{d^2 f}{dt^2} + \left\{ \omega^2 M\psi + \left[\left(p_0 - \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_{z0} dz \right) + \left(p_r - \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_{zt} dz \right) \cos \omega t \right] \nabla^4 \psi \right\} f = 0 \quad (42)$$

حال با ضرب جمله $\psi(r) r dr$ در معادله (۴۲)، و انتگرال‌گیری در کل صفحه، معادله دیفرانسیل (۴۳) حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_a^2 (1 - 2\mu_a \cos \omega_a t) f = 0 \quad (43)$$

به‌طوری که:

$$\omega_a^2 = \omega^2 \left[1 - \left(p_0 - \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_{z0} dz \right) / p_{cr} \right]$$

$$\mu_a = \frac{\left(p_r - \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_{zt} dz \right)}{2 \left(p_{cr} - p_0 + \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} E_{z0} dz \right)}$$

$$p_{cr} = - \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \psi^2 r dr d\theta}{\int_0^R \int_0^{2\pi} \nabla^2 \psi r dr d\theta} M\psi^2$$

$$= \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} [I_n(\lambda R) J_n(\lambda r) - J_n(\lambda R) I_n(\lambda r)]^2 r dr d\theta}{\int_0^R \int_0^{2\pi} \lambda^2 [I_n(\lambda R) J_n^2(\lambda r) - J_n^2(\lambda R) I_n^2(\lambda r)]^2 r dr d\theta} M\psi^2 \quad (44)$$

رابطه (۴۳) به نام معادلات شناخته شده متیو^۱ است که در آن μ_a پارامتر تحریک و ω_a فرکانس ارتعاش صفحه تحت بار شعاعی ثابت و اثر میدان الکتریکی می‌باشد. p_{cr} نیروی کماتش اولیه و ω_a فرکانس‌های مرزی در نواحی ناپایداری را نشان می‌دهد. معادله (۴۳) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب متناوب از نوع معادله متیو است که حل متناوب آن با استفاده از روش بولوتین [۶] قابل انجام خواهد بود. مرزهای پایداری با جواب‌هایی با دوره تناوب $2T$ و T ، که در آن $T = 2\pi / \omega$ است، حاصل می‌شود. به‌طور کلی جواب‌های با دوره تناوب $2T$ ترجیح دارند. یک تقریب مرتبه اول برای حل با تناوب $2T$ به صورت رابطه (۴۵) به دست می‌آید:

$$f(t) = \{a\} \sin(\omega t / 2) + \{b\} \cos(\omega t / 2) \quad (45)$$

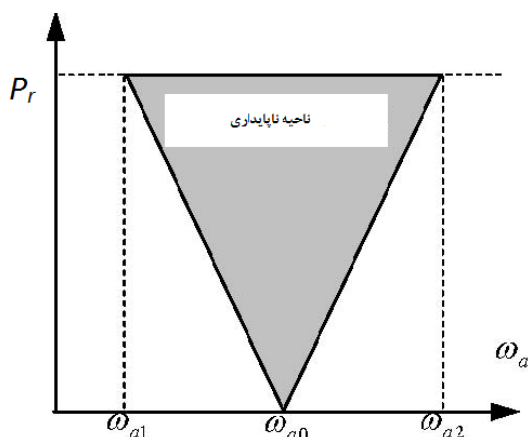
که در رابطه فوق $\{a\}$ و $\{b\}$ بردارهای دلخواه هستند. برای محاسبه مرزهای نواحی ناپایداری، $f(t)$ مطابق رابطه (۴۵) در معادله (۴۳) جایگذاری و سپس دترمینان مرتبه اول برای به دست آوردن روابط (۴۶) تنظیم می‌گردد:

$$\omega_a^2 = 4\omega^2 (1 - \mu_a), \quad (46-الف)$$

$$\omega_a^2 = 4\omega^2 (1 + \mu_a) \quad (46-ب)$$

معادله (۴۶) به‌عنوان معادله فرکانس‌های مرزی نامیده شده و برای اعمال

1- Mathieu equation



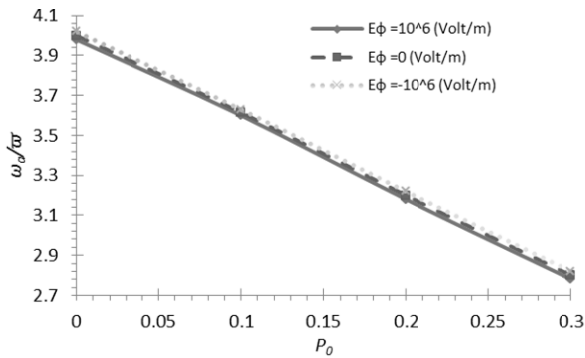
شکل ۱ نمای شماتیک ناحیه ناپایدار در حوزه فرکانس

۲ ارائه شده است. در این شکل اثر شاخص گرادیان که از صفر تا ۱۰ تغییر می‌کند بر روی نیروی کماتش p_{cr} برای نسبت‌های مختلف ارتفاع به شعاع صفحه $(h/R = 0/04, 0/08, 0/1)$ نشان داده شده است. در این حالت تغییرات مواد به صورتی است که سطح بالایی از جنس PZT/30%Pt و سطح پایینی از جنس PZT می‌باشد.

در شکل ۳ تغییرات نیروی کماتش p_{cr} در مقابل تغییرات شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی برای نسبت $h/R = 0/1$ و برای دو حالت ترکیب مواد به صورت تغییر از جنس PZT/30%Pt به PZT از سطح بالایی به سطح پایینی و برعکس نشان داده شده است.

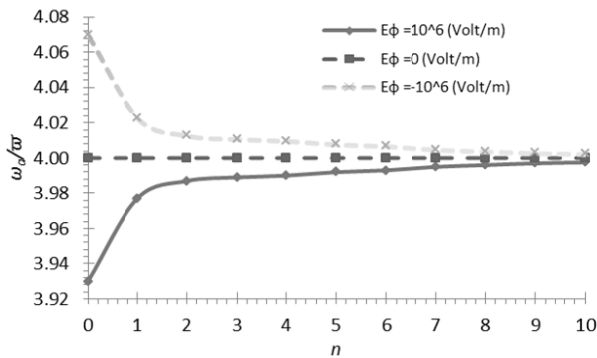
جدول ۲ ناحیه ناپایدار مربوط به نرخ فرکانس $\frac{\omega_a}{\omega}$ در حالت $(h = 0/1, R = 1, \beta = 0/5, \alpha = 0)$

مدل m	مقدار میدان الکتریکی	نسبت فرکانسی	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$m=0$	$E_{z0} = 0$	ω_{a1}/ω	۳/۰۰۰	۳/۰۰۰	۳/۰۰۰	۳/۰۰۰
	$E_{zt} = 0$	ω_{a0}/ω	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰
	$E_{z0} = 10^\circ$	ω_{a2}/ω	۵/۰۰۰	۵/۰۰۰	۵/۰۰۰	۵/۰۰۰
	$E_{zt} = 0$	ω_{a1}/ω	۲/۹۹۰	۲/۹۸۶	۲/۹۷۷	۲/۹۳۰
	$E_{z0} = -10^\circ$	ω_{a0}/ω	۳/۹۹۰	۳/۹۸۶	۳/۹۷۷	۳/۹۳۰
	$E_{zt} = 0$	ω_{a2}/ω	۴/۹۹۰	۴/۹۸۶	۴/۹۷۷	۴/۹۳۰
	$E_{z0} = 0$	ω_{a1}/ω	۳/۰۱۰	۳/۰۱۴	۳/۰۲۳	۳/۰۷۰
	$E_{zt} = 0$	ω_{a0}/ω	۴/۰۱۰	۴/۰۱۴	۴/۰۲۳	۴/۰۷۰
	$E_{z0} = 10^\circ$	ω_{a2}/ω	۵/۰۱۰	۵/۰۱۴	۵/۰۲۳	۵/۰۷۰
	$E_{zt} = 0$	ω_{a1}/ω	۲/۹۹۵	۲/۹۹۳	۲/۹۸۹	۲/۹۶۵
	$E_{z0} = 0$	ω_{a0}/ω	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰
	$E_{zt} = 10^\circ$	ω_{a2}/ω	۵/۰۰۵	۵/۰۰۷	۵/۰۱۱	۵/۰۳۵
$m=1$	$E_{z0} = 0$	ω_{a1}/ω	۳/۰۰۵	۳/۰۰۷	۳/۰۱۱	۳/۰۳۵
	$E_{zt} = -10^\circ$	ω_{a0}/ω	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰
	$E_{z0} = 0$	ω_{a2}/ω	۴/۹۹۵	۴/۹۹۳	۴/۹۸۹	۴/۹۶۵
	$E_{zt} = 0$	ω_{a1}/ω	۳/۰۰۰	۳/۰۰۰	۳/۰۰۰	۳/۰۰۰
	$E_{z0} = 10^\circ$	ω_{a0}/ω	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰
	$E_{zt} = 0$	ω_{a2}/ω	۵/۰۰۰	۵/۰۰۰	۵/۰۰۰	۵/۰۰۰
	$E_{z0} = -10^\circ$	ω_{a1}/ω	۲/۹۹۷	۲/۹۹۶	۲/۹۹۳	۲/۹۷۸
	$E_{zt} = 0$	ω_{a0}/ω	۳/۹۹۷	۳/۹۹۶	۳/۹۹۳	۳/۹۷۸
	$E_{z0} = 0$	ω_{a2}/ω	۴/۹۹۷	۴/۹۹۶	۴/۹۹۳	۴/۹۷۸
	$E_{zt} = 10^\circ$	ω_{a1}/ω	۳/۰۰۳	۳/۰۰۴	۳/۰۰۷	۳/۰۲۲
	$E_{z0} = -10^\circ$	ω_{a0}/ω	۴/۰۰۳	۴/۰۰۴	۴/۰۰۷	۴/۰۲۲
	$E_{zt} = 0$	ω_{a2}/ω	۵/۰۰۳	۵/۰۰۴	۵/۰۰۷	۵/۰۲۲
$E_{z0} = 0$	ω_{a1}/ω	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۸	۲/۹۹۵	
$E_{zt} = 10^\circ$	ω_{a0}/ω	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	
$E_{z0} = 0$	ω_{a2}/ω	۵/۰۰۱	۵/۰۰۱	۵/۰۰۱	۵/۰۰۵	
$E_{zt} = -10^\circ$	ω_{a1}/ω	۳/۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۰۲	۳/۰۰۵	
$E_{z0} = 0$	ω_{a0}/ω	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	۴/۰۰۰	
$E_{zt} = 0$	ω_{a2}/ω	۴/۹۹۹	۴/۹۹۹	۴/۹۹۸	۴/۹۹۵	



شکل ۶ تغییر فرکانس ارتعاش آزاد تحت بارهای استاتیکی مختلف در حالت

$$\left(\frac{h}{R} = 0.1, n = 2, m = 2\right)$$



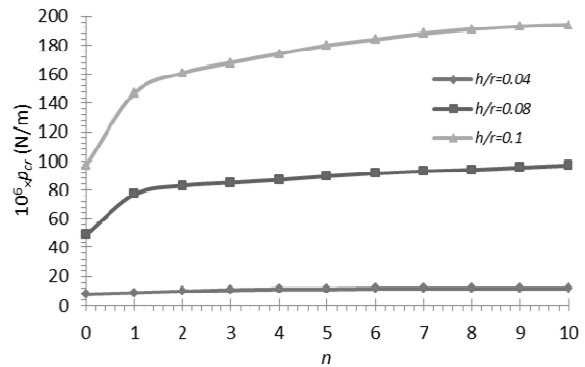
شکل ۷ تغییر نسبت فرکانس ارتعاش آزاد با شاخص گرادیان‌ها و میدان‌های

$$\text{الکتریکی متفاوت در حالت } (h/R = 0.1, m = 0, \alpha = 0)$$

مقدار شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی از صفر تا ۱۰ تغییر می‌کند. دیده می‌شود که نیروی کمانش ناپایداری مکانیکی صفحه پیزوالکتریک مدرج تابعی از نیروی کمانش صفحه از جنس PZT/30%Pt کمتر و از نیروی کمانش صفحه از جنس PZT بیشتر است. ضمن آنکه با افزایش نسبت h/R ، همان‌طور که انتظار می‌رود، نیروی کمانش صفحه نیز افزایش می‌یابد. برای بررسی تاثیر مشخصات هندسی صفحه، اثر نسبت ضخامت به شعاع بر روی نیروی کمانش برای دو حالت شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی برابر ۲ و صفر در شکل ۴ ارائه شده است. از این شکل مشخص است که با افزایش ضخامت صفحه نیروی کمانش نیز افزایش می‌یابد. از شکل ۵ نیز مشخص است که اثر میدان الکتریکی بر روی نسبت فرکانس ارتعاش آزاد صفحه تابعی با افزایش m ناچیز می‌گردد. شکل ۶ تغییرات نرخ فرکانس ارتعاش آزاد در مقابل مقادیر بار استاتیکی p_0 را برای حالت $(h/R = 0.1, n = 2, m = 2)$ نشان می‌دهد. از این شکل مشخص می‌شود که بار استاتیکی می‌تواند فرکانس ارتعاش آزاد را به صورت قابل توجهی تغییر دهد، در حالی که تاثیر میدان الکتریکی ناچیز است. شکل ۷ نیز به بررسی اثر شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی بر روی نرخ فرکانس ارتعاش آزاد صفحه مدرج تابعی پیزوالکتریک تحت میدان‌های الکتریکی مختلف می‌پردازد. از این شکل مشخص است که با افزایش شاخص گرادیان ماده تابعی اثر میدان الکتریکی بر روی نرخ فرکانس ارتعاش آزاد کاهش می‌یابد.

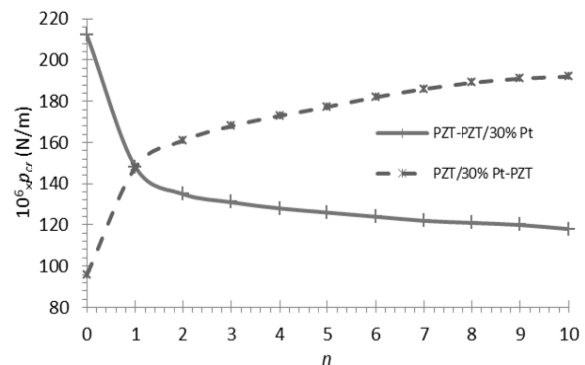
۶- نتیجه گیری

در این تحقیق، با استفاده از تئوری لاو-کرشلف و فرمول بندی حساب تغییرات، پایداری دینامیکی صفحه دایروی از جنس پیزوالکتریک مدرج تابعی مورد مطالعه قرار گرفته است. در مطالعات عددی تاکید اصلی بر بررسی اثر عوامل مختلف همچون ضخامت صفحه و شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی و



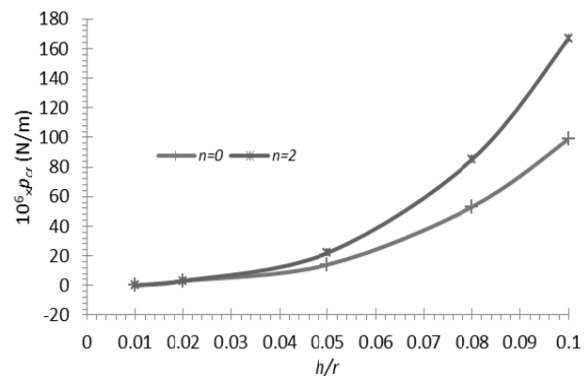
شکل ۸ اثر شاخص گرادیان ماده مدرج تابعی بر روی نیروی کمانش صفحه در حالت

$$(m = 0, \alpha = 0)$$



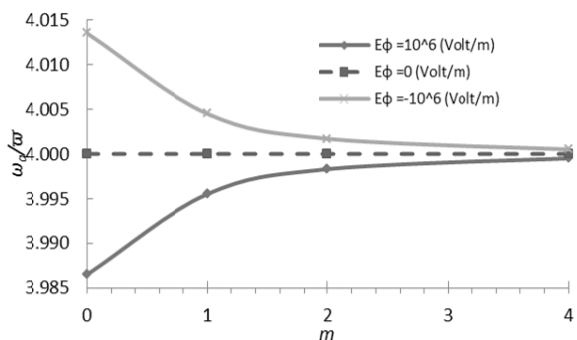
شکل ۹ اثر شاخص گرادیان بر روی نیروی کمانش صفحه برای دو حالت تغییر

$$\text{ترکیب مواد } (h/R = 0.1, m = 0, \alpha = 0)$$



شکل ۱۰ اثر نسبت ضخامت به شعاع صفحه تابعی بر روی نیروی کمانش آن

$$(m = 0, \alpha = 0)$$



شکل ۱۱ اثر میدان الکتریکی بر روی نسبت فرکانس ارتعاش آزاد صفحه تابعی در

$$\text{حالت } (h/R = 0.1, n = 2, \alpha = 0)$$

[10] X. Zhao, Y. Y. Lee, K. M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 918-939, 2009.

[11] Liew, K. M. , Yang, J. and Kitipornchai, S., Post buckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 3869-92, 2003.

[12] Y. Ootao, Y. Tanigawa, Control of transient thermo-elastic displacement of a functionally graded rectangular plate bonded to a piezoelectric plate due to nonuniform heating, *Acta Mechanica*, Vol. 148, pp. 17-33, 2001.

[13] J. N. Reddy, Z. Q. Cheng, Three-dimensional solutions of smart functionally graded plates, *Journal of Applied Mechanics-ASME*, Vol. 68, pp. 234-41, 2001.

[14] X. Q. He, T. Y. Ng, S. Sivashanker, K. M. Liew, Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators, *International journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 1641-55, 2001.

[15] F. Ebrahimi, A. Rastgoo, An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, pp. 1402- 1408, 2008.

[16] F. Ebrahimi, A. Rastgoo, Free vibration analysis of smart annular FGM plates integrated with Piezoelectric layers, *Smart Matererials and Structures*, Vol. 17, 015044 (13pages), 2008.

[17] F. Ebrahimi, A. Rastgoo, A. A. Atai, A theoretical analysis of smart moderately thick shear deformable annular functionally graded plate, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 28, No. 5, pp. 962-973, 2009.

[18] F. Ebrahimi, A. Rastgoo, M. H. kargarnovin, Analytical investigation on axisymmetric free vibrations of moderately thick circular functionally graded plate integrated with piezoelectric layers, *Journal of mechanical scienece and technology*, Vol. 22, pp. 1058-1072, 2008.

[19] T. Y. Ng, K. Y. Lam, K. M. Liew, J. N. Reddy, Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 38, pp. 1295-1309, 2001,

[20] D. O. Brush, B. O. Almorh, *Buckling of bars, plates and shells*, McGraw-Hill, New York, 1975.

[21] K. Takagi, J. F. Li, S. Yokoyama, R. Watanabe, A. Almajid, M. Taya, Design and fabrication of functionally graded PZT/Pt piezoelectric bimorph actuator, *Science and Technology of Advanced Materials*, Vol. 3, pp. 217-224, 2002.

اثر بارگذاری مکانیکی و میدان الکتریکی بر روی بار بحرانی کمانش و فرکانس ارتعاشات آزاد صفحه پیزوالکتریک مدرج تابعی بوده است. نتایج به دست آمده نشان می دهد که اثرات پیزوالکتریک در نواحی ناپایداری ناچیز می باشد و خواص ماده مدرج تابعی نقشی مهم در تغییر نواحی ناپایداری و بارهای کمانش ایفا می کند.

۷- مراجع

[1] X. H. Zhu, Z. Meng, Operational principle, fabrication and displacement characteristics of a functionally gradient piezoelectric ceramic actuator, *Sensors and Actuators A*, Vol. 48, pp. 169-176, 1995.

[2] H. J. Lee, Layerwise laminate analysis of functionally graded piezoelectric bimorph beams, *International Journal of Materials systems and structures*, Vol. 16, pp. 365-371, 2005.

[3] L. Lebrun, L. Petit, R. Briot, P. Gonnard, Electromechanical conversion in an ultrasonic motor using a non-axisymmetric (1,1) mode, *Smart Matererials and Structures*, Vol. 8, pp. 47-52, 1997.

[4] K. Uchino, Piezoelectric ultrasonic motors: overview, *Smart Matererials and Structures*, Vol. 7, pp. 273- 285, 1998.

[5] V. A. Bodner, Stability of plates under the action of periodic force, *Prikladnaya Matematika I Mekhanika*, Vol. 2, pp.87-94, 1938. (in Russian)

[6] V. V. Bolotin, *The Dynamic Stability of Elastic System*, Holden-Day, San Francisco, 1964.

[7] G. N. Praveen, J. N. Reddy, Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, pp. 4457-4476, 1998.

[8] E. Efraim, M. Eisenberger, Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, pp.720-738, 2007.

[9] Sh. Hosseini-Hashemi, H. Akhavan, M. Fadaee, Exact closed-form free vibration analysis of moderately thick rectangular functionally graded plates with two bounded Piezoelectric Layers, *Modares mechanical engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 57-74, 2011. (in Persian)