



تحلیل غیرخطی ترموالاستیک دیسک‌های دوار توخالی FGM با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم

مصطفی احمدی نوخندان^۱، مهرداد جبارزاده^{۲*}

۱- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۲ اسفند ۱۳۹۱

پذیرش: ۲۲ خرداد ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۰ فروردین ۱۳۹۳

کلید واژگان:

مواد تابعی

تغییر شکل‌های بزرگ

ترموالاستیک

دیسک دوار

شیبه‌سازی

هدف از این مقاله ارائه حل تحلیلی و عددی تغییر شکل‌های بزرگ دیسک‌های دوار تو خالی ساخته شده از مواد تابعی می‌باشد. دیسک‌ها تحت بارگذاری مکانیکی و دمایی قرار داده شده و خواص مواد در راستای ضخامت طبق تابع توانی تغییر می‌یابد. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم با فرضیات ون کارمن و اصل حداقل انرژی پتانسیل معادلات تعادل بدست آمده است. همچنین به منظور مقایسه اثر تغییر مرتبه تئوری در نتایج، معادلات تعادل با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه اول با کرنش‌های کوچک و کرنش‌های بزرگ و همچنین تئوری مرتبه سوم حل شده این نتایج با هم مقایسه شده‌اند. برای معادلات تعادل بدست آمده با کرنش‌های خطی یک حل بسته ارائه شده و معادلات تعادل ناشی از کرنش‌های غیرخطی مرتبه اول و سوم به کمک روش اغتشاشات و همچنین روش شبیه‌سازی عددی حل شده است. نتایج حاصل از دیسک توخالی برای تئوری مرتبه اول و سوم با یکدیگر و با نتایج دیگر تحقیقات و همچنین نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس مقایسه شده است.

Nonlinear thermoelastic analysis of FGM annular rotating discs with FSDT and TSDT shear deformation plate theories

Mostafa Ahmadi Nokhandan, Mehrdad Jabbarzadeh*

Department of Mechanical Engineering, Mashhad branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran

* P.O.B. 9187144123, Mashhad, Iran, jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 12 March 2013

Accepted 12 June 2013

Available Online 09 April 2014

Keywords:

Functionally Graded Materials

Large Deformation

Thermoelastic

Rotating Disk

Simulink

ABSTRACT

This paper presents the first and third order shear deformation plate theory and von Karman theories to solve Thermo-elastic problems of functionally graded hollow rotating disk. The material properties of the disk are assumed to be graded in the direction of the thickness by a power law distribution of volume fractions of the constituents. New set of equilibrium equations with small and large deflections are developed. Using small deflection theory an exact solution for displacement field is given. Solutions are obtained in series form in case of large deflection. Numerical results are presented for various percentages of ceramic-metal volume fractions and have been compared with those obtained using first-and third-order shear deformation plate theories. Also the results are verified with ABAQUS soft, simulink method and the known data in the literature.

۱- مقدمه

تحقیق برای دست‌یابی به مواد با مقاومت حرارتی بالا به این نوع از مواد غیر همگن دست یافتند [۱]. به سبب رفتار مناسب ترمومکانیکی مواد تابعی از دهه ۱۹۹۰ به بعد کارهای تحلیلی و تجربی زیادی روی این مواد انجام شده است. همچنین دیسک‌های دوار از دیر باز، زمینه تحقیقات متعددی بوده که از جمله این کاربردها می‌توان به دیسک توربین در موتورهای جت اشاره نمود. این دیسک‌ها تحت گرادیان دمایی در سرعت زاویه‌ای بسیار بالا و بار ناشی از جریان سیال بروی پره‌های آن قرار می‌گیرد. شتاب ناشی از سرعت زاویه‌ای بالا، به همراه فشار ناشی از جریان سیال باعث بوجود آمدن تغییر شکل در هندسه دیسک می‌شود. بررسی تغییر شکل ناشی از بارگذاری و سرعت

استفاده از مواد هدفمند تابعی^۱ در سال‌های اخیر توسعه یافته است. کاربرد این مواد در صنایع هوا فضا، موشک‌ها، توربین‌ها، راکتورها و در سایر مواردی که استحکام بالا، چگالی کم و مقاومت به حرارت دارای اهمیت باشد، مورد توجه قرار گرفته است. همچنین مطالعه عوامل غیر خطی بر تحلیل دینامیکی/استاتیکی المان‌های سازه‌ای برای مهندسان و محققانی که در زمینه هوا فضا کار می‌کنند، در مواردی که کم کردن وزن ضروری است دارای اهمیت زیادی می‌باشد. برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ محققان ژاپنی در حین

1- Functionally Graded Matrials

Please cite this article using:

M. Ahmadi Nokhandan, M. Jabbarzadeh, Nonlinear thermoelastic analysis of FGM annular rotating discs with FSDT and TSDT shear deformation plate theories, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 175-188, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

زاویه‌ای دیسک‌های دوار از اهمیت بررسی این دیسک‌ها خواهد بود. تسوجی و نودا [۲] تنش‌های حرارتی در حالت پایا در پوسته‌های ساخته شده از مواد تابعی که خواص مواد وابسته به دما است را بررسی کرده و روش‌های بهینه‌سازی را در راستای کاهش تنش‌های حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است.

اوباتا [۳] تحلیلی در زمینه توزیع تنش‌های حرارتی در داخل صفحاتی که ناشی از توزیع دما در جهت ضخامت صفحه می‌باشد را ارائه کرده است. در این تحقیق ارتباط بین ساختار حجمی از مواد کامپوزیتی و توزیع دمایی و تنش‌های گرمایی بررسی شده است. تاناکا [۴،۵] تحلیل تنش‌های حرارتی و کاربردهای آن، شامل روش‌هایی به منظور کاهش تنش‌های حرارتی برای حالت ترموالاستیک در مواد تابعی را مورد بررسی کرده است. در این تحقیق روش‌های بهینه‌سازی در ارتباط با تحلیل المان محدود ترموالاستیک برای رسیدن به یک توزیع بهبود یافته از ساختار حجمی در مواد تابعی ارائه شده است. زیرمن [۶] روش‌هایی برای تحلیل تنش‌های حرارتی سیلندرهای مدور در مواد تابعی، تحت حرارتی یکنواخت با استفاده از روش سری فروبنیوس^۱ را ارائه کرده است.

ردی [۷] بر مبنای تئوری صفحات تغییر شکل نیروی برشی مرتبه اول (FST)، خمش تقارن محوری در صفحات مسطح و مدور مواد تابعی را مورد مطالعه و ارزیابی قرار داده است. دردولا و همکارانش [۸] مزایای بالقوه استفاده مواد تابعی تقویت شده با فیبر در دیسک‌های دوار توخالی و توپر را ارائه کرده و روش اجزاء محدود و انتگرال‌گیری مستقیم از معادلات دیفرانسیل بدست آمده جهت پیش‌بینی تنش و تغییر شکل‌ها و توزیع آن در دیسک مورد استفاده قرار گرفته است. در تحقیق فوق تطابق مناسبی بین نتایج روش اجزاء محدود و انتگرال‌گیری مستقیم از معادلات دیفرانسیل کوپله شده به دست آمده است. چن [۹] صفحات ناهمگنی را که از مواد تابعی تشکیل شده را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و فرضیات ون کارمن و با استفاده از روش سری فوریه معادلات را حل کرده است. جباری [۱۰] تحلیل عمومی از تنش‌های حرارتی یکنواخت یک بعدی در سیلندرهای توخالی جدار ضخیم و ساخته شده از مواد تابعی را ارائه داده است. توزیع دمایی تابعی از شعاع فرض شده و شرایط مرزی دمایی و مکانیکی در میان سطح داخلی و خارجی اعمال شده است. خواص مواد و نسبت ضریب پواسون وابسته به متغیر شعاع می‌باشد. موسوی [۱۱] تحلیل تنش در دیسک دوار با ضخامت متغیر از مواد تابعی که دارای خواص مکانیکی متغیر و پیوسته در ضخامت می‌باشد را به روش عددی تفاضل محدود با برون‌یابی ریچاردسون ارائه کرده است. دیسک تحت بار مکانیکی و بار حرارتی ناشی از گرادیان دمایی قرار گرفته است. بیات و همکارانش [۱۲] حل دیسک‌های دوار تابعی با ضخامتی متغیر را برای تغییر شکل‌های کوچک بررسی نموده اند. خواص مواد و پروفایل‌های ضخامت دیسک بر پایه تابع توانی نسبت به راستای شعاع فرض شده و میدان جابجایی در راستای شعاع در نظر گرفته شده است. نتایج برای دیسک حلقوی با شرایط مرزی آزاد در شعاع درونی را به دو روش تحلیلی و شبه تحلیلی و همچنین برای یک دیسک توپر با شرایط مرزی ثابت در شعاع خارجی را با روش شبه تحلیلی ارائه داده اند. سعیدی [۱۳] خمش متقارن صفحات دایروی توپر تابعی را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم بررسی کرده است. در این تحقیق نتایج تغییرشکل، نیرو و گشتاور در تحلیل خمش صفحات دایروی

تابعی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ارائه شده است. خواص مکانیکی صفحه بر اساس تابع توانی در راستای ضخامت فرض شده و معادلات را به صورت تحلیلی و بسته حل گردیده است. نتایج برای تغییر شکل ماکزیمم در اثر بار خمشی برای مقادیر مختلفی از درصد حجمی خواص ماده بین سرامیک و فلز، با تئوری مرتبه اول مقایسه شده است. بیات و همکارانش [۱۴] حل ترموالاستیک دیسک دوار تابعی با ضخامت متغیر با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای تغییر شکل‌های کوچک را مورد بررسی قرار داده است. خواص مواد و پروفیل ضخامت در راستای شعاع و بر پایه تابع توانی فرض شده و یک حل نیمه تحلیلی برای دو نوع شرایط مرزی برای دیسک توپر ارائه داده‌اند. گلمکانی [۱۵] تحلیل غیرخطی متقارن در دیسک دوار توخالی تابعی با ضخامت ثابت را برای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم را با استفاده از تئوری ون کارمن بررسی کرده است. معادلات با روش DR^۲ و روش المان محدود حل شده و اثرات تغییرات n ، شرایط مرزی و تغییر شکل‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تفاوت بین تئوری تغییرشکل‌های مرتبه اول و سوم با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی بیشتر می‌شود.

هدف از این تحقیق حل تحلیلی تغییرشکل‌های بزرگ دیسک‌های دوار توخالی تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی می‌باشد. در مرجع [۱۲] به کمک تئوری مرتبه اول برشی دیسک‌های دوار توپر ضخامت متغیر مورد تحلیل قرار گرفته است. در تحقیق حاضر ضمن حل دیسک‌های دوار توخالی به کمک تئوری‌های مرتبه اول و سوم برشی، دیسک‌های دوار توپر نیز جهت افزایش دقت نتایج به کمک تئوری مرتبه سوم برشی مورد بررسی قرار گرفته است. ضمناً نتایج برای حالت‌های کرنش‌های خطی و غیرخطی به کمک تئوری مرتبه اول برشی و کرنش‌های غیرخطی به کمک تئوری مرتبه سوم برشی بدست آمده و تأثیر تغییر مرتبه و همچنین تأثیر عامل غیرخطی کرنش در نتایج، مورد بررسی قرار گرفته است. مثال‌های در نظر گرفته شده، به وسیله روش اغتشاشات و همچنین روش شبیه‌سازی عددی حل شده و با نتایج دیگر مقالات و همچنین نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است.

۲- فرمول‌بندی مسأله

۲-۱- خواص ماده تابعی

در این تحقیق مدل در نظر گرفته شده تحت قانون توانی از ساختار حجمی می‌باشد. مطابق با این مدل، گرادیان خواص مواد در طول ضخامتی از دیسک در یک ساختاری حجمی از ماده به صورت روابط (۱) و (۲) می‌باشد:

$$P = \sum_k^{i=1} P_i V_i \quad (1)$$

$$\sum_k^{i=1} V_i = 1 \quad (2)$$

V_i, P_i به ترتیب خواص مواد و ساختار حجمی از یک جز مواد می‌باشد. ساختار حجمی مواد تنها در راستای z از مواد هدفمند به صورت پیوسته تغییر می‌کند که از قانون توانی تبعیت می‌کند:

$$V_m(z) = \left(\frac{h-2z}{2h}\right)^n \quad (3)$$

n شاخص کسر حجمی ماده تابعی است که چگونگی ترکیب کسر حجمی

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 = \frac{du_0}{dr} + z \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} = \frac{u_0}{r} + z \frac{\varphi}{r} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \varphi + \frac{dw}{dr} \end{aligned} \quad (12)$$

می‌توان روابط هوک برای تنش‌ها را مطابق روابط (۱۳) بیان کرد [۱۲].

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} ((\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) - (1+\nu)\varepsilon^T) \\ \sigma_\theta &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} ((\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) - (1+\nu)\varepsilon^T) \\ \sigma_\theta &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} ((\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) - (1+\nu)\varepsilon^T) \end{aligned} \quad (13)$$

برای دیسک‌های دوار اگر U_1 انرژی کرنشی در واحد حجم و V_1 کار خارجی انجام شده روی جسم توسط نیروی خارجی باشد با توجه به اصل حداقل انرژی پتانسیل $\delta\Pi=0$ معادلات تعادل بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_0^r \left[-\frac{d}{dr}(rN_r) + N_\theta - \rho_1 r^2 \omega^2 \right] \delta(u_0) \\ + \left[-\frac{d(rM_r)}{dr} + M_\theta + rQ_r - \rho_2 r^2 \omega^2 \right] \delta(\varphi) \\ + \left[\frac{d}{dr}(rN_r \frac{dw}{dr}) + \frac{d(rQ_r)}{dr} + r q_r \right] \delta(w) dr = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

برای بیان متغیرهای روابط (۱۴)، روابط (۱۵) تا (۱۹) تعریف می‌شوند.

$$(N_r, M_r) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(1, z) dz \quad (15)$$

$$(N_\theta, M_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta(1, z) dz \quad (16)$$

$$(\rho_1, \rho_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(1, z) dz \quad (17)$$

$$Q_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz = A_2 \left(\varphi + \frac{dw}{dr} \right) = A_2 \gamma^0 \quad (18)$$

$$\kappa_1 = \frac{d\varphi}{dr}, \kappa_2 = \frac{\varphi}{r} \quad (19)$$

در $z=0$ معادلات (۱۲) به صورت روابط (۲۰) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{u_0}{r} \\ \gamma_{rz}^0 &= \varphi + \frac{dw}{dr} \end{aligned} \quad (20)$$

با ترکیب روابط (۱۲) رابطه (۲۱) بدست می‌آید.

$$\varepsilon_1^0 - \varepsilon_2^0 - r \frac{d\varepsilon_2^0}{dr} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (21)$$

در معادلات N_r و N_θ منتهی‌النیروی شعاعی و محیطی، M_r و M_θ گشتاورهای شعاعی و محیطی و Q_r برآیند برش عرضی است. با جایگذاری ε_r و ε_θ از معادلات (۱۲) در معادلات (۱۳) و قرار دادن σ_r و σ_θ از معادله

سرامیک و فلز را در راستای ضخامت مشخص می‌کند که می‌تواند بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. مقادیر صفر و بی‌نهایت برای این شاخص، به ترتیب معرف سرامیک خالص و فلز خالص است. حال اگر ماده هدفمند از دو جز تشکیل شود، با در نظر گرفتن رابطه (۳) و (۲) رابطه (۴) بدست می‌آید.

$$V_c(z) = 1 - \left(\frac{h-2z}{2h} \right)^n \quad (4)$$

مشابه با روابط (۱)، (۲) و (۳) می‌توان ضرایب مدول یانگ و ضریب پواسون و دانسیته را به دست آورد.

$$E = (E_m - E_c) \left(\frac{h-2z}{2h} \right)^n + E_c \quad (5)$$

$$\nu = (\nu_m - \nu_c) \left(\frac{h-2z}{2h} \right)^n + \nu_c \quad (6)$$

$$\rho = (\rho_m - \rho_c) \left(\frac{h-2z}{2h} \right)^n + \rho_c \quad (7)$$

۲-۲- میدان دمایی

فرض می‌شود که تغییرات دمایی فقط در جهت ضخامت می‌باشد. با حل معادلات انتقال حرارت یکنواخت، توزیع دمایی در جهت ضخامت بدست می‌آید:

$$-\frac{d}{dz} (k(z) \frac{dT}{dz}) = 0 \quad (8)$$

فرض می‌شود دیسک در دما $T=0$ تنش دمایی آن صفر باشد. شرایط مرزی دمایی در $z=h/2$ برابر $T=T_c$ و در $z=-h/2$ برابر $T=T_m$ است. این معادلات به صورت سری حل می‌شود [۱۷]:

$$\Delta T(z) = \Delta T_m + (\Delta T_c - \Delta T_m) \eta(z) \quad (9)$$

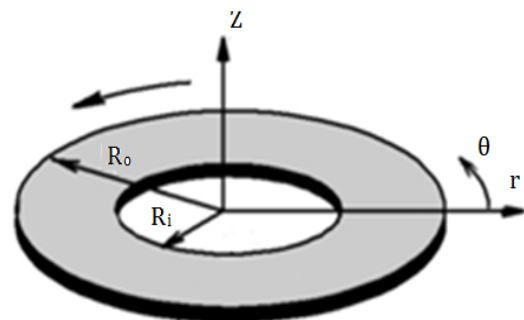
$$\Delta T_* = T_* - T_0 \quad (10)$$

۳-۲- فرمول‌بندی و معادلات تعادل

دیسک هدفمند با تقارن محوری و ضخامت ثابت h و شعاع بیرونی r_o که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω مطابق شکل ۱ می‌چرخد و تحت بار عرضی متقارن q_r و بارگذاری دمایی $\Delta T(z) = \Delta T$ می‌باشد، در نظر گرفته شده است. میدان تغییر مکان بر اساس تئوری مرتبه اول برشی عبارت است از [۱۲]:

$$\begin{aligned} u_r &= u_0(r) + z\varphi(r) \\ u_z &= w(r) \\ u_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

u_θ تغییر مکان در صفحه میانی است. u_r ، u_θ و u_z به ترتیب تغییر مکان شعاعی و تغییر مکان محیطی و تغییر مکان عمودی است. معادلات کرنش-جابجایی با استفاده از فرضیات ون کارمن بیان می‌شوند [۱۲]:



شکل ۱ دیسک دوار توخالی با ضخامت h و شعاع بیرونی r_o و r_i

$$u_0 = \frac{B_1}{\bar{D} A_1} \frac{H(r)}{r} \frac{1}{2A_1} \left(c_1 \left(1 + \frac{B_1^2}{A_1 D} \right) - \frac{B_1 c_3}{\bar{D}} \right) r - \left(\rho_1 \left(1 + \frac{B_1^2}{A_1 D} \right) - \frac{B_1 \rho_2}{\bar{D}} \right) \frac{\omega^2 r^3}{8A_1} + \frac{1}{2A_1} \left(c_2 \left(1 + \frac{B_1^2}{A_1 D} \right) - \frac{B_1 c_4}{\bar{D}} \right) \frac{1}{r} \quad (32)$$

$$\bar{D} = D_1 - \frac{B_1^2}{A_1}$$

با ترکیب معادلات (۱۲) و (۱۸) و بدست آوردن r° و قرار دادن آن و همچنین قرار دادن ϕ از معادله (۲۱) در رابطه (۳۱) و یک مرتبه انتگرال‌گیری معادله w بدست می‌آید:

$$w = \frac{-r^2}{4\bar{D}} \left(c_3 - \frac{B_1}{A_1} c_1 \right) + \frac{G(r)}{\bar{D}r} + \frac{(B_1 \rho_1 - A_2 \rho_2) \omega^2 r^4}{32\bar{D} A_1} \quad (33)$$

$$- \frac{F(r)}{kA_2} - \frac{1}{D} \left(c_4 - \frac{B_1}{A_1} c_2 \right) \ln r + c_5$$

$$G(r) = \int \frac{1}{r} H(r) dr$$

۲-۳-۲- استفاده از تئوری برشی مرتبه اول با کرنش‌های غیرخطی در یک دیسک توخالی

مطابق با تئوری برشی مرتبه اول با کرنش‌های غیرخطی معادلات تعادل حاصل از رابطه (۱۴) عبارت است از:

$$N_r - N_\theta + r \frac{d(N_r)}{dr} + \rho_1 r^2 \omega^2 = 0 \quad (34)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{u_0}{r} + z \frac{\phi_1}{r} + z^3 \frac{\phi_2}{r} \quad (35)$$

$$\int_{r_0}^r \left[\left(-\frac{d(rN_r)}{dr} + N_\theta - \rho_1 r^2 \omega^2 \right) \delta(u_0) + \left(-\frac{d(rM_r)}{dr} + M_\theta + rQ_r - \rho_2 r^2 \omega^2 \right) \delta(\phi_1) + \left(-\frac{d(rP_r)}{dr} + P_\theta + 3rR_r - \rho_3 r^2 \omega^2 \right) \delta(\phi_2) + \left(\frac{d}{dr} (rN_r dw) + \frac{d(rQ_r)}{dr} + r q_r \right) \delta(w) \right] dr = 0 \quad (36)$$

با جایگذاری $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ بدست آمده از حل معادلات (۲۲) و (۲۳) در رابطه (۲۱)، ساده شده معادله تعادل (۳۴) عبارت است از:

$$-2(A_1 B_2 - A_2 B_1) \frac{rd}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(r\phi)}{dr} \right) - \frac{A_1 r dN_\theta}{dr} + (A_1 - 2A_2) \frac{rdN_r}{dr} = (2A_1 - 2A_2) \left(r \frac{dN_r}{dr} + \rho_1 r^2 \omega^2 \right) - \frac{A^*}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2$$

پس از انتگرال‌گیری N_θ و N_r به صورت روابط (۳۷) و (۳۸) بدست می‌آید.

$$N_r = \frac{A^*}{2r^2 A_1} S(r) - \frac{1}{4} \rho_1 r^2 \omega^2 \left(2 - \frac{A_2}{A_1} \right) + \frac{c_1}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{c_2}{r^2} - \frac{2}{r} B^* \phi \quad (37)$$

حاصل در معادلات (۱۵) و (۱۶) و استفاده از روابط (۱۹) نتایج روابط (۲۲) تا (۲۵) حاصل می‌شود.

$$N_r = A_1 \varepsilon_1^0 + (A_1 - 2A_2) \varepsilon_2^0 + B_1 \kappa_1 + (B_1 - 2B_2) \kappa_2 - N^T \quad (22)$$

$$N_\theta = A_1 \varepsilon_2^0 + (A_1 - 2A_2) \varepsilon_1^0 + B_1 \kappa_2 + (B_1 - 2B_2) \kappa_1 - N^T \quad (23)$$

$$M_r = B_1 \varepsilon_1^0 + (B_1 - 2B_2) \varepsilon_2^0 + D_1 \kappa_1 + (D_1 - 2D_2) \kappa_2 - M^T \quad (24)$$

$$M_\theta = B_1 \varepsilon_2^0 + (B_1 - 2B_2) \varepsilon_1^0 + D_1 \kappa_2 + (D_1 - 2D_2) \kappa_1 - M^T \quad (25)$$

ضرایب معادلات (۲۲) تا (۲۵) بدین صورت بیان می‌شوند:

$$(A_1, B_1, D_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1, z, z^2) dz$$

$$(A_2, B_2, D_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (1, z, z^2) dz$$

$$(N^T, M^T) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{(1-\nu)} \alpha(z) \Delta T(z) (1, z) dz$$

۲-۳-۱- استفاده از تئوری برشی مرتبه اول با کرنش‌های خطی در یک دیسک توخالی

مطابق با تئوری برشی مرتبه اول با کرنش‌های خطی معادلات تعادل حاصل از رابطه (۱۴) عبارت است از:

$$N_r - N_\theta + r \frac{d(N_r)}{dr} + \rho_1 r^2 \omega^2 = 0 \quad (26)$$

$$M_r - M_\theta + r \frac{d(M_r)}{dr} - rQ_r + \rho_2 r^2 \omega^2 = 0 \quad (27)$$

$$rQ_r + J(R) = 0 \quad J(R) = \int r q_r dr \quad (28)$$

با جایگذاری معادلات (۲۰) در معادلات (۲۲) و (۲۳) و N_θ بدست آمده در معادله (۲۶) و یک بار انتگرال‌گیری، معادلات به صورت رابطه (۲۹) ساده می‌شود.

$$A_1 u_0 + B_1 \phi = \frac{-1}{8} \rho_1 r^3 \omega^2 + \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r} \quad (29)$$

از طرفی با جایگذاری معادلات (۲۰) در معادلات (۲۴) و (۲۵) و M_θ بدست آمده و همچنین Q_r از معادله (۲۸) در معادله (۲۷) و یک مرتبه انتگرال‌گیری رابطه (۳۰) حاصل می‌شود.

$$B_1 u_0 + D_1 \phi = \frac{-\rho_2 \omega^2 r^3}{8} + \frac{H(r)}{r} + \frac{c_3 r}{2} + \frac{c_4}{r} \quad (30)$$

$$H(r) = \int r F(r) dr$$

$$F(r) = \int \frac{1}{r} J(r) dr$$

با حل معادلات (۲۹) و (۳۰)، توابع u_0 و ϕ بدست می‌آید:

$$\phi = \frac{1}{2\bar{D}} \left(c_3 - \frac{B_1}{A_1} c_1 \right) r - \frac{H(r)}{D \cdot r} + \frac{(B_1 \rho_1 - A_2 \rho_2) \omega^2 r^3}{8\bar{D} A_1} + \frac{1}{2\bar{D}} \left(c_4 - \frac{B_1}{A_1} c_2 \right) \frac{1}{r} \quad (31)$$

با جایگزینی $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ بدست آمده در معادله (۲۰) مقدار u_0 بدست می‌آید:

$$u_0 = \frac{B_1}{\bar{D} A_1} \frac{(H(r) + V(r))}{r} + \frac{1}{2A_1} \left(c_1 \left(1 + \frac{B_1^2}{A_1 \bar{D}} \right) - \frac{B_1 c_3}{\bar{D}} \right) r - \left(\rho_1 \left(1 + \frac{B_1^2}{A_1 \bar{D}} \right) - \frac{B_1 \rho_2}{\bar{D}} \right) \frac{\omega^2 r^3}{8A_1} + \frac{1}{rA_1} \left(\left(1 + \frac{B_1^2}{A_1 \bar{D}} \right) c_2 - \frac{B_1 c_4}{\bar{D}} \right) - \frac{\left(\frac{B_1}{A_1} c_{22} + \frac{c_{12}}{2A_2} \right)}{r} + \frac{1}{2} r R(r) + \frac{2A_2}{rA} N^T \quad (46)$$

در رابطه (۴۶)، $V(r)$ ، $Y(r)$ و $F(r)$ عبارتند از:

$$V(r) = \int_{r_0}^r r L_1(r) dr, L_1(r) = \int_{r_0}^r N_r \frac{dw}{dr} dr$$

$$Y(r) = \int_{r_0}^r \frac{V_j(r)}{r} dr$$

$$F(r) = \int_{r_0}^r \frac{J(r)}{r} dr \quad (47)$$

۳-۳-۲- استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم در یک دیسک توخالی

در تئوری برشی مرتبه سوم میدان تغییر مکان به صورت رابطه (۴۸) در نظر گرفته می‌شود [۱۳]:

$$u_r = u_0(r) + z\phi_1(r) + z^3\phi_2(r)$$

$$u_z = w(r)$$

$$u_\theta = 0 \quad (48)$$

معادلات تغییر مکان- کرنش از تئوری تغییر شکل‌های بزرگ (با فرضیات ون کارمن) به صورت رابطه (۴۹) بیان می‌گردد:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 = \frac{du_0}{dr} + z \frac{d\phi_1}{dr} + z^3 \frac{d\phi_2}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{u_0}{r} + z \frac{\phi_1}{r} + z^3 \frac{\phi_2}{r}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \phi_1 + 3z^2\phi_2 + \frac{dw}{dr} \quad (49)$$

مانند قبل با استفاده از اصل حداقل انرژی معادلات تعادل عبارت است از:

$$\int_{r_0}^r \left[\left(-\frac{d(rN_r)}{dr} + N_\theta - \rho_1 r^2 \omega^2 \right) \delta(u_0) + \left(-\frac{d(rM_r)}{dr} + M_\theta + rQ_r - \rho_2 r^2 \omega^2 \right) \delta(\phi_1) + \left(-\frac{d(rP_r)}{dr} + P_\theta + 3rR_r - \rho_3 r^2 \omega^2 \right) \delta(\phi_2) + \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{rN_r dw}{dr} \right) + \frac{d(rQ_r)}{dr} + r q_r \right) \delta(w) \right] dr = 0 \quad (50)$$

منته‌های تنش به صورت روابط (۵۱) تا (۵۳) تعریف می‌شوند.

$$(N_r, M_r, P_r) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(1, z, z^3) dz \quad (51)$$

$$N_\theta = \frac{-A^*}{2r^2 A_1} S(r) + \frac{1}{4} \rho_1 r^2 \omega^2 \left(\frac{3A_2}{A_1} - 2 \right) + \frac{\bar{A}}{2A_1} R(r) - 2B^* \frac{d}{dr}(\phi) + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2} \quad (38)$$

در روابط (۳۷) و (۳۸) متغیرها به صورت روابط (۳۹) تعریف می‌شوند.

$$R(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr, S(r) = \int_{r_0}^r r R(r) dr$$

$$\bar{A} = (A_1 - 2A_2), A^* = (\bar{A}^2 - A_1^2)$$

$$B^* = \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1)}{A_1} \quad (39)$$

با جایگزینی $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ بدست آمده در معادلات (۲۴) و (۲۵)، تابع M_r و M_θ می‌تواند بر حسب N_θ و N_r محاسبه کرد:

$$M_r = y_1 N_r + y_2 N_\theta + y_3 N^T + y_4 \kappa_1 + y_5 \kappa - M^T \quad (40)$$

$$M_\theta = y_1 N_\theta + y_2 N_r + y_3 N^T + y_4 \kappa_2 + y_5 \kappa_1 - M^T \quad (41)$$

که ضرایب y_1 و y_5 در پیوست ارائه شده است.

از جانشین کردن M_r و M_θ از معادلات (۴۰) و (۴۱) و Q_r از معادله (۲۶) در معادله (۳۵)، رابطه (۴۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dr}(rM_r) = y_1 r \frac{dN_r}{dr} + y_1 N_r + y_2 r \frac{dN_\theta}{dr} + y_2 N_\theta + y_5 \kappa_2 + y_5 r \frac{d\kappa_2}{dr} - M^T \quad (42)$$

حال با قرار دادن معادلات (۳۷) و (۳۸) در معادله (۴۲) و ساده‌سازی رابطه (۴۳) حاصل می‌شود:

$$u^* \frac{d}{dr} \left(\frac{d(r\phi)}{rdr} \right) + \frac{A^*}{2rA_1} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 y_2 + \frac{c_1 r_0^2}{2r^2} (y_1 + y_2) + r N_r \frac{dw}{dr} + J(r) + \rho_2 r^2 \omega^2 + c_3 r = 0 \quad (43)$$

در رابطه (۴۳)، u^* و c_3 عبارتند از:

$$u^* = -2B^* y_2 + y_4$$

$$c_3 = -\rho_1 \omega^2 y_1 + \rho_1 \omega^2 \left(\frac{2A_2}{A_1} - 1 \right) y_2 + \rho_3 \omega^2$$

از حل معادله (۴۳) و جایگذاری معادلات (۳۷) و (۳۸) معادله ϕ بدست می‌آید.

$$\phi = -\frac{1}{D} \frac{(H(r) + V(r))}{r} + \frac{(B_1 \rho_1 - A_2 \rho_2)}{8\bar{D} A_1} \omega^2 r + \frac{1}{2\bar{D}} \left(c_3 - \frac{B_1}{A_1} c_1 \right) r + \frac{1}{r\bar{D}} \left(c_4 - \frac{B_1}{A_1} c_2 \right) + \frac{c_2}{2} r + \frac{c_{22}}{r} \quad (44)$$

با جایگذاری مقدار ϕ از رابطه (۴۴) در معادله (۲۰) و Q_r از معادله (۳۶) انتگرال‌گیری معادله w بدست می‌آید:

$$w = \frac{G(r) + Y(r)}{\bar{D}r} - \frac{F(r) + L(r)}{kA_2} - \left(c_4 - \frac{B_1}{A_1} c_2 \right) \frac{\ln r}{D} - \frac{r^2}{4\bar{D}} \left(c_3 - \frac{B_1}{A_1} c_1 \right) + \frac{(B_1 \rho_1 - A_2 \rho_2) \omega^2 r^4}{32\bar{D} A_1} - c_{22} \ln r + c_3 \quad (45)$$

$$N_\theta = \frac{-A^*S(r)}{2r^2A_1} + \frac{\rho_1 r^2 \omega^2}{4} \left(\frac{3A_2}{A_1} - 2 \right) + \frac{\bar{A}R(r)}{2A_1} - 2B^* \frac{d(\varphi_1)}{dr} - 2E^* \frac{d(\varphi_2)}{dr} - \frac{c_{1j3}}{r^2} + c_{1j} \quad (65)$$

E^* در رابطه (65) عبارت است از:

$$E^* = (A_1 E_2 - A_2 E_1) / A_1$$

همچنین با جایگزینی $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ در معادلات (57) و (58) تابع M_θ و M_r می‌تواند بر حسب N_θ و N_r نوشته شود:

$$M_r = y_1 N_r + y_2 N_\theta + y_3 N^T + y_4 \kappa_1 + y_5 \kappa_2 + y_6 \kappa_3 + y_7 \kappa_4 - M^T \quad (66)$$

$$M_\theta = y_1 N_\theta + y_2 N_r + y_3 N^T + y_4 \kappa_2 + y_5 \kappa_1 + y_6 \kappa_4 + y_7 \kappa_3 - M^T \quad (67)$$

ضرایب y_1 و y_7 در پیوست ارائه شده است.

از جانشین کردن N_r و N_θ از معادلات (55) و (56) و قرار دادن در رابطه (61) و نوشتن $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ بر حسب u_0 از معادله (20) رابطه (68) نتیجه می‌شود:

$$A_1 \left(r \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{du_0}{dr} - \frac{u_0}{r} \right) + B_1 \left(r \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} + \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{\varphi_2}{r} \right) + E_1 \left(r \frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{\varphi_1}{r} \right) + A_1 \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + A_2 \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \rho_1 r^2 \omega^2 = 0 \quad (68)$$

از جانشین کردن M_θ و M_r از معادلات (57) و (58) و قرار دادن در رابطه (62) و نوشتن $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ بر حسب u_0 از معادله (20) رابطه (69) نتیجه می‌شود:

$$B_1 \left(r \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{du_0}{dr} - \frac{u_0}{r} \right) + D_1 \left(r \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} + \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{\varphi_2}{r} \right) + F_1 \left(r \frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{\varphi_1}{r} \right) + B_2 \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + B_1 \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} - rQ_r + \rho_2 r^2 \omega^2 = 0 \quad (69)$$

از جانشین کردن P_θ و P_r از معادلات (59) و (60) و قرار دادن در رابطه (63) و نوشتن $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ بر حسب u_0 بر اساس معادلات (20) رابطه (70) بدست می‌آید.

$$E_1 \left(r \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{du_0}{dr} - \frac{u_0}{r} \right) + F_1 \left(r \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} + \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{\varphi_2}{r} \right) + H_1 \left(r \frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{\varphi_1}{r} \right) + E_2 \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + E_1 \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} - 3rR_r + \rho_3 r^2 \omega^2 = 0 \quad (70)$$

از حل معادلات (68) و (69) و همچنین (68) و (70) و حذف متغیر u_0 همراه با ساده‌سازی روابط (71) بدست می‌آیند.

$$c\Delta\varphi_1 + d\Delta\varphi_2 - \frac{3rR_r}{E_1} + \left(\frac{\rho_3}{E_1} - \frac{\rho_1}{A_1} \right) r^2 \omega^2 = 0$$

$$a\Delta\varphi_1 + b\Delta\varphi_2 - \frac{rQ}{B_1} + \left(\frac{\rho_2}{B_1} - \frac{\rho_1}{A_1} \right) r^2 \omega^2 = 0 \quad (71)$$

ضرائب در روابط (71) عبارتند از:

$$(N_\theta, M_\theta, P_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta(1, z, z^3) dz \quad (52)$$

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(1, z, z^3) dz \quad (53)$$

با تعاریف رابطه (54) و با جایگذاری ε_r و ε_θ از معادلات (49) در معادلات (13) و قرار دادن σ_r و σ_θ در معادلات (51) و (52) و همچنین استفاده از روابط (20) منتهی به صورت روابط (55) تا (60) بیان می‌شوند.

$$\kappa_1 = \frac{d\varphi_1}{dr}, \kappa_2 = \frac{\varphi_1}{r}, \kappa_3 = \frac{d\varphi_2}{dr}, \kappa_4 = \frac{\varphi_2}{r} \quad (54)$$

$$N_r = A_1 \varepsilon_1^0 + (A_1 - 2A_2) \varepsilon_2^0 + B_1 \kappa_1 + E_1 \kappa_3 + (B_1 - 2B_2) \kappa_2 + (E_1 - 2E_2) \kappa_4 - N^T \quad (55)$$

$$N_\theta = A_1 \varepsilon_2^0 + (A_1 - 2A_2) \varepsilon_1^0 + B_1 \kappa_2 + E_1 \kappa_4 + (B_1 - 2B_2) \kappa_1 + (E_1 - 2E_2) \kappa_3 - N^T \quad (56)$$

$$M_r = B_1 \varepsilon_1^0 + (B_1 - 2B_2) \varepsilon_2^0 + D_1 \kappa_1 + F_1 \kappa_3 + (D_1 - 2D_2) \kappa_2 + (F_1 - 2F_2) \kappa_4 - M^T \quad (57)$$

$$M_\theta = B_1 \varepsilon_2^0 + (B_1 - 2B_2) \varepsilon_1^0 + D_1 \kappa_2 + F_1 \kappa_4 + (D_1 - 2D_2) \kappa_1 + (F_1 - 2F_2) \kappa_3 - M^T \quad (58)$$

$$P_r = E_1 \varepsilon_1^0 + (E_1 - 2E_2) \varepsilon_2^0 + F_1 \kappa_1 + H_1 \kappa_3 + (F_1 - 2F_2) \kappa_2 + (H_1 - 2H_2) \kappa_4 - P^T \quad (59)$$

$$P_\theta = E_1 \varepsilon_2^0 + (E_1 - 2E_2) \varepsilon_1^0 + F_1 \kappa_2 + H_1 \kappa_4 + (F_1 - 2F_2) \kappa_1 + (H_1 - 2H_2) \kappa_3 - P^T \quad (60)$$

ضرائب روابط (55) تا (60) عبارتند از:

$$(A_1, B_1, D_1, E_1, F_1, H_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$$

$$(A_2, B_2, D_2, E_2, F_2, H_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$$

$$(N^T, M^T, P^T) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{(1-\nu)} \alpha(Z) \Delta T(z) (1, z, z^3) dz$$

متطابق با تئوری برشی مرتبه سوم معادلات تعادل حاصل از رابطه (50) عبارتند از:

$$\frac{d(rN_r)}{dr} - N_\theta + \rho_1 r^2 \omega^2 = 0 \quad (61)$$

$$\frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta - rQ_r + \rho_2 r^2 \omega^2 = 0 \quad (62)$$

$$\frac{d(rP_r)}{dr} - P_\theta - 3rR_r + \rho_3 r^2 \omega^2 = 0 \quad (63)$$

$$\frac{d}{dr} (rN_r \frac{dw}{dr}) + \frac{d}{dr} (rQ_r) + rqr = 0 \quad (64)$$

در $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ از معادله (55) و (56) بدست آمده است، که با جایگذاری $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ در رابطه (21) و استفاده از معادله تعادل (61) و پس از انتگرال‌گیری N_r و N_θ بدست می‌آیند:

$$N_r = \frac{A^*}{2r^2 A_1} S(r) - \frac{1}{4} \rho_1 r^2 \omega^2 \left(2 - \frac{A_2}{A_1} \right) - \frac{2}{r} B^* \varphi_1 - \frac{2}{r} E^* \varphi_2 + \frac{c_{1j2}}{r^2} + c_{1j}$$

φ_2 از رابطه (۷۳) در معادله (۷۲) مقدار w بدست می‌آید.

$$dw = \frac{Q_r}{A_2} - \frac{3D_2\varphi_2}{A_2} - \varphi_1$$

$$w = \frac{-(L+F)}{A_2} + A_6Y + A_6G - \frac{A_7r^4w^2}{32} - \frac{c_2r^2}{4}$$

$$- A_5III + \frac{3D_2I}{A_2} - \frac{c_2}{4}r^2 - c_{22}\ln r + c_3 \quad (82)$$

با جایگذاری $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ در معادلات (۲۰) تا (۲۴) و استفاده از معادلات (۶۵)

تغییر مکان مقدار u_0 بدست می‌آید:

$$u_0 = \frac{-\rho_1\omega^2r^3}{8A_1} - \frac{A}{4A_1A_2} \frac{S_r}{r} - \frac{2A_2c_1r}{A} - \frac{2A_2rN^T}{A}$$

$$- \frac{rR_r}{2} - \frac{B_1\varphi_1}{A_1} - \frac{E_1\varphi_2}{A_1} - \frac{(B_1C_{22} + C_{12})}{r} \quad (83)$$

۲-۴- حل تحلیلی معادلات تعادل به روش اغتشاشات

در این بخش برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپل ترموالاستیک از روش اغتشاشات استفاده می‌شود. پارامتر مجهولی است که در انتهای مسأله بدست می‌آید:

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{h} w(r) |_{r=0} \quad (84)$$

برای بی بعد کردن مسائل از فرضیات رابطه (۸۵) استفاده می‌شود.

$$w_1(0) = 1 \quad w_1(R) = 0 \quad (85)$$

برای استفاده از این روش فرض می‌شود بار عمودی $q(r)$ به صورت مضربی از q_0 تعریف شده و به طور مشابه N^T و ω^2 بر اساس مضربی از q_0 هستند [۱۶]:

$$\omega^2 = \eta_1 q_0 = \eta_2 (q_{01} w_0^1 + q_{02} w_0^2 + q_{03} w_0^3)$$

$$N^T = \eta_2 q_0 = \eta_2 (q_{01} w_0^1 + q_{02} w_0^2 + q_{03} w_0^3)$$

$$q_0 = q_{01} w_0^1 + q_{02} w_0^2 + q_{03} w_0^3 \quad (86)$$

همچنین پارامترهای وابسته به $q(r)$ مانند $H(r)$ ، $F(r)$ و $G(r)$ را می‌توان مطابق رابطه (۸۷) بسط داد.

$$H(r) = q_0 H_1(r) = (q_{01} w_0^1 + q_{02} w_0^2 + q_{03} w_0^3) H_1(r)$$

$$F(r) = q_0 F_1(r) = (q_{01} w_0^1 + q_{02} w_0^2 + q_{03} w_0^3) F_1(r)$$

$$G(r) = q_0 G_1(r) = (q_{01} w_0^1 + q_{02} w_0^2 + q_{03} w_0^3) G_1(r) \quad (87)$$

همچنین معادلات $w(r)$ به صورت رابطه (۸۸) تعریف می‌شود.

$$w(r) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(r) \bar{w}_0^{-j} = w_1 w_0^1 + w_2 w_0^2 + \dots \quad (88)$$

برای بقیه پارامترها از قبیل N_r ، C_{1j} ، C_{2j} ، C_{3j} ، به طریق مشابه عمل می‌شود. با قرار دادن متغیرهای رابطه (۸۸) در معادلات تعادل و استفاده از شرایط مرزی و تعاریف (۸۹) کلیه ضرایب مجهول معادلات مشخص می‌شود:

$$N_r(r) = \sum_{j=1}^{\infty} N_{rj} \bar{w}_0^{-j} = N_{r1} w_0^1 + N_{r2} w_0^2 + \dots$$

$$C_1 = \sum_{j=1}^{\infty} C_{1j} \bar{w}_0^{-j} = C_{11} w_0^1 + C_{12} w_0^2 + C_{13} w_0^3 + \dots$$

$$C_2 = \sum_{j=1}^{\infty} C_{2j} \bar{w}_0^{-j} = C_{21} w_0^1 + C_{22} w_0^2 + C_{23} w_0^3 + \dots$$

$$C_3 = \sum_{j=1}^{\infty} C_{3j} \bar{w}_0^{-j} = C_{31} w_0^1 + C_{32} w_0^2 + C_{33} w_0^3 + \dots \quad (89)$$

$$\Delta = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} (r) \right) \right)$$

$$a = \left(\frac{D_1}{B_1} - \frac{B_1}{A_1} \right), b = \left(\frac{F_1}{B_1} - \frac{E_1}{A_1} \right)$$

$$c = \left(\frac{F_1}{E_1} - \frac{B_1}{A_1} \right), d = \left(\frac{H_1}{E_1} - \frac{E_1}{A_1} \right)$$

با حل معادلات (۷۱) و حذف متغیر φ_2 معادله به صورت رابطه (۷۲) حاصل می‌شود.

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} (r\varphi_1) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{(a-c)d} \left[\frac{Q_r}{B_1} - \frac{3bR_r}{E_1 d} + \left(\frac{\rho_3}{E_1} - \frac{\rho_1}{A_1} \right) \frac{br\omega^2}{d} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\rho_2}{B_1} - \frac{\rho_1}{A_1} \right) r\omega^2 \right] \quad (72)$$

با توجه به مرجع [۷]، φ_2 طبق رابطه (۷۳) تعریف می‌شود.

$$\varphi_2 = -\alpha z^3 \left(\varphi_1 + \frac{dw}{dr} \right) \quad (73)$$

با توجه به رابطه برآیند تنش‌ها و تغییر مکان‌ها توابع نیروهای برشی و محوری به صورت روابط (۷۴) و (۷۵) بدست می‌آیند.

$$Q_r = A_2 \left(\varphi_1 + \frac{dw}{dr} \right) + 3D_2 \varphi_2 \quad (74)$$

$$R_r = D_2 \left(\varphi_1 + \frac{dw}{dr} \right) + 3F_2 \varphi_2 \quad (75)$$

با ترکیب معادلات (۷۴) و (۷۵)، رابطه (۷۶) نتیجه می‌شود.

$$R_r = \frac{D_2}{A_2} Q_r + 3 \left(F_2 - \frac{D_2^2}{A_2} \right) \varphi_2 \quad (76)$$

معادله (۷۲) به کمک ضرایب A_6 ، A_5 و A_7 بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} (r\varphi_1) \right) \right) = A_6 Q_r + A_5 R_r + A_7 r \omega^2$$

$$= \frac{-3b}{E_1 d} \left[3 \left(F_2 - \frac{D_2^2}{A_2} \right) \right]$$

$$A_5 = \frac{1}{(a-c)d} \left[\frac{1}{B_1} - \frac{3b D_2}{E_1 d A_2} \right]$$

$$A_6 = \frac{b}{(a-c)d} \left[\frac{\rho_3}{E_1} - \frac{\rho_1}{A_1} \right] - \left(\frac{\rho_2}{B_1} - \frac{\rho_1}{A_1} \right)$$

$$A_7 = \frac{b}{(a-c)d} \left[\frac{\rho_3}{E_1} - \frac{\rho_1}{A_1} \right] - \left(\frac{\rho_2}{B_1} - \frac{\rho_1}{A_1} \right) \quad (77)$$

با جایگذاری R_r از معادله (۷۵) و همچنین Q_r از معادله تعادل (۶۴) در معادله (۷۷) و انتگرال‌گیری از معادله بالا رابطه φ_1 بدست می‌آید:

$$\varphi_1 = \frac{A_6 [V_r + H_r]}{r} + A_5 III + \frac{A_7 r^3 \omega^2}{8} + \frac{c_2 r}{2} + \frac{c_{22}}{r} \quad (78)$$

در رابطه بالا I, II, III به صورت روابط (۷۹) تا (۸۱) تعریف می‌شوند (پیوست ۳).

$$I = \int \varphi_2 dr \quad (79)$$

$$II = \frac{1}{r} \int r I dr \quad (80)$$

$$III = \int II dr \quad (81)$$

با ساده‌سازی رابطه (۷۴) و همچنین با قرار دادن مقدار φ_1 از رابطه (۷۸) و

در نرم‌افزار آباکوس مطابق پیوست ۲، از ۲۹ المان در جهت ضخامت و ۴۹ المان در جهت شعاعی و از نوع DCAX4 استفاده شده است همچنین برای اعمال تغییرات خواص در جهت ضخامت، قطعه به تعداد مناسب قسمت‌بندی شده و به هر قسمت با توجه به روابط مواد تابعی، خواص مشخصی ارجاع شده است.

برای بررسی دقت نتایج، نتایج حاصل از روش ارائه شده با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس و شبیه‌سازی عددی مقایسه می‌شود. دیسک توخالی با ضخامت $h=0.2$ شعاع داخلی $r_i=h$ و شعاع خارجی $r_o=5h$ در نظر گرفته شده است. خواص مواد مورد استفاده مطابق با جدول ۱ می‌باشد [۱۲]. دیسک تحت سرعت زاویه‌ای $\omega=1000 \text{ rad/s}$ و بار عمودی یکنواخت واحد بر سطح $q=0.14e9 \text{ GPa}$ و بار دمایی ناشی از $\Delta T=350^\circ\text{C}$ یا به عبارتی $T_c=370^\circ\text{C}$ و $T_m=20^\circ\text{C}$ در نظر گرفته شده است. کلیه نمودارها به صورت بی بعد رسم شده است و برای بی بعد نمودن از روابط (۹۱) استفاده شده است:

$$w_r' = \frac{w(r)}{h}, \quad \sigma_r' = \frac{\sigma r}{\rho_c r^2 \omega^2}, \quad N_r' = \frac{N r}{\rho_c h^2 \omega^2}$$

$$M_r' = \frac{M r}{(\pi r \omega^2 q)} \quad (91)$$

جدول ۱ خواص آلومینیم و زیرکونیا به عنوان مواد تشکیل دهنده تابعی

ماده	آلومینیم	زیرکونیا
مدول یانگ	۶۸/۹	۲۱۱
ضریب انبساط حرارتی ($1/^\circ\text{C}$)	23×10^{-6}	$2/93 \times 10^{-6}$
چگالی (kg/m^3)	۲۷۰۰	۴۰۰۰
ضریب هدایت گرمایی (W/mK)	۱۵۵	۱/۶۷

جدول ۲ مقایسه حداکثر جابجایی دیسک توخالی برای و به ازای $\omega=0$ $h/r=0.15$

	C-C		S-S		
تحقیق حاضر	مرجع [۱۵]	تحقیق حاضر	مرجع [۷]	مرجع [۱۵]	تحقیق حاضر
$n=0$	۲/۷۸۱	۲/۷۷۴	۲/۶۶۸	۱/۰۶۲۳	۱/۰۵۷۲
$n=2$	۱/۵۱۵	۱/۵۱۱	۱/۴۷۵	۵/۶۱۰	۵/۵۶۵
$n=4$	۱/۳۸۴	۱/۳۸۲	۱/۳۶۵	۵/۲۰۰	۵/۱۹۱

در ابتدا جهت بررسی دقت نتایج، نتایج حاصل از روش ارائه شده به ازای $\omega=0$ با نتایج مراجع [۷] و [۱۵] مقایسه شده است (جدول ۲).

شکل ۲ مقایسه توزیع تنش‌های شعاعی بی‌بعد را بین تئوری مرتبه اول با کرنش‌های خطی و غیرخطی و تئوری مرتبه سوم در یک دیسک دوار توخالی هدفمند در صفحه $z/h=0.25$ را بیان می‌کند. شکل ۳ مقایسه تغییرات جابجایی عمودی بی‌بعد را بین تئوری مرتبه اول با کرنش‌های خطی و غیرخطی و تئوری مرتبه سوم را بیان می‌کند. مشاهده می‌شود که اختلاف در مثال فوق برای حداکثر تغییر شکل عمودی بین کرنش‌های خطی و غیرخطی در حدود ۳۷ درصد و بین مرتبه اول و سوم حدود ۵ درصد می‌باشد که نشان دهنده اهمیت استفاده از کرنش‌های غیرخطی در تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ می‌باشد.

شکل ۴ مقایسه تغییرات جابجایی عمودی بی‌بعد را برای تئوری مرتبه سوم بیان می‌کند، مشاهده می‌شود که تغییرات جابجایی عمودی بیشترین مقدار را برای دیسک تمام فلز و کمترین مقدار را برای تمام سرامیک و برای دیسک‌های هدفمند این جابجایی‌ها بینابین اتفاق می‌افتد.

شکل‌های ۵ و ۶ توزیع تنش‌های شعاعی و نیروی شعاعی را برای تئوری مرتبه سوم بیان می‌کند.

با استفاده از شرایط مرزی، مقادیر مجهول C_{3i} ، C_{2i} ، C_{1i} محاسبه شده و با توجه به رابطه (۸۵) مقدار q_0 را یافته و در نهایت با استفاده از رابطه (۸۸) مقدار w_0 محاسبه می‌شود. برای کلیه حالات دیگر به همین ترتیب معادلات را بدست آمده و با اعمال شرایط مرزی ضرایب ثابت محاسبه می‌شود:

$$N_{rj} = \frac{A^* S_{1j}(r)}{2r^2 A_1} - \frac{1}{4} \rho_1 r^2 (\eta_1 q_{0j})^2 \left(2 - \frac{A_2}{A_1} \right) - \frac{2}{r} B^* \varphi_{1j} - \frac{2}{r} E^* \varphi_{2j} + \frac{c_{1j2}}{r^2} + c_{1j}$$

$$\varphi_{1j} = \frac{A_6}{r} [V_{rj} + q_{0j} H_1(r)] + \frac{A_7 (\eta_1 q_{j0})^2}{8} r^3 + \frac{c_{2j} r}{2} + \frac{c_{22j}}{r} + A_5 II_j$$

$$w_j = \frac{-(L_j + q_{0j} F_j(r))}{A_2} - \frac{A_7 r^4 (\eta_1 q_{j0})^2}{32} + A_6 q_{0j} G_j(r) + A_6 Y_j - \frac{c_{2j} r^2}{4} - A_5 III + \frac{3D_2 I_j}{A_2} - \frac{c_{2j} r^2}{4} - c_{22j} \ln r + c_{3j}$$

$$u_{0j} = \frac{-\rho_1 (\eta_1 q_{j0})^2 r^3}{8A_1} - \frac{A}{4A_1 A_2} \frac{S_{rj}}{r} - \frac{2A_2 c_{1j} r}{A} - \frac{2A_2 r N^T}{A} - \frac{r R_{rj}}{2} - \frac{B_1 \varphi_{1j}}{A_1} - \frac{E_1 \varphi_{2j}}{A_1} - \frac{(B_1 c_{22j} + c_{12j})}{A_1 + 2A_2}$$

$$(90)$$

۲-۵- شرایط مرزی

برای یک دیسک دایروی با یک تکیه‌گاه غلتکی که در جهت z در $r=r_o$ مفید شده است، شرایط مرزی مطابق زیر بدست می‌باشد:

الف) یک دیسک دایروی که در $r=r_o$ آزاد و به صورت گیردار در $r=r_i$ می‌باشد (c-f):

$$r=r_o \quad \sigma_r = N_r = M_r = Q_r = 0$$

$$r=r_i \quad \varphi = u_0 = w_r = 0$$

ب) یک دیسک دایروی با یک تکیه‌گاه مفصلی در $r=r_o$ و $r=r_i$ مفید شده است (s-s):

$$r=r_o \quad u_0 = w_r = M_r = 0$$

$$r=r_i \quad u_0 = w_r = M_r = 0$$

پ) یک دیسک دایروی که به صورت گیردار در $r=r_o$ و $r=r_i$ می‌باشد (c-c):

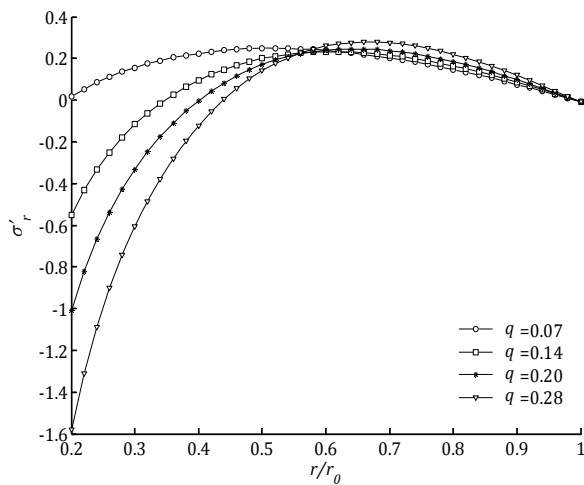
$$r=r_o \quad \varphi = u_0 = w_r = 0$$

$$r=r_i \quad \varphi = u_0 = w_r = 0$$

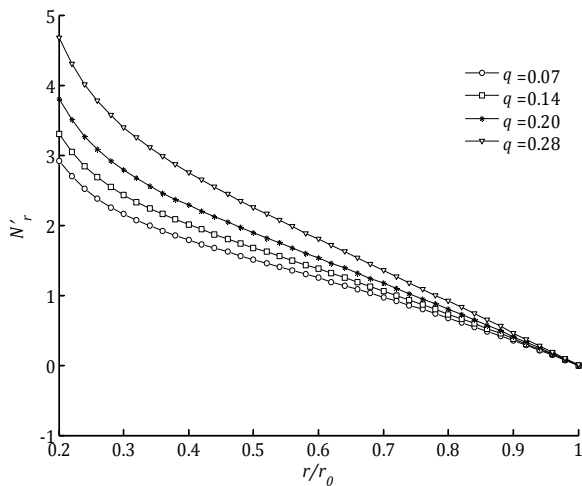
۳- نتایج عددی

برای حل معادلات از دو نرم‌افزار آباکوس و متلب استفاده شده است. در نرم‌افزار متلب معادلات دیفرانسیل (۶۸، ۶۹، ۷۰) که معادله‌هایی غیرخطی می‌باشند، با استفاده از مدل‌سازی در محیط شبیه‌سازی نرم‌افزار، مطابق با پیوست (۱)، با بکار بردن تحلیلگر ode113 از روش ادمس و با ایجاد شرایط مرزی، موارد مورد نظر تحلیل قرار گرفته است.

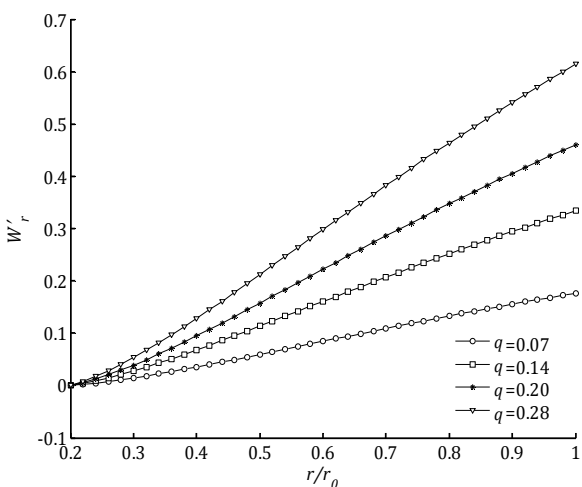
همچنین شکل ۷ توزیع تغییرات جابجایی عمودی را برای تئوری مرتبه سوم بیان می‌کند. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر چه میزان بار افزایش می‌یابد، مقدار تغییرات جابجایی عمودی بیشتر می‌شود.



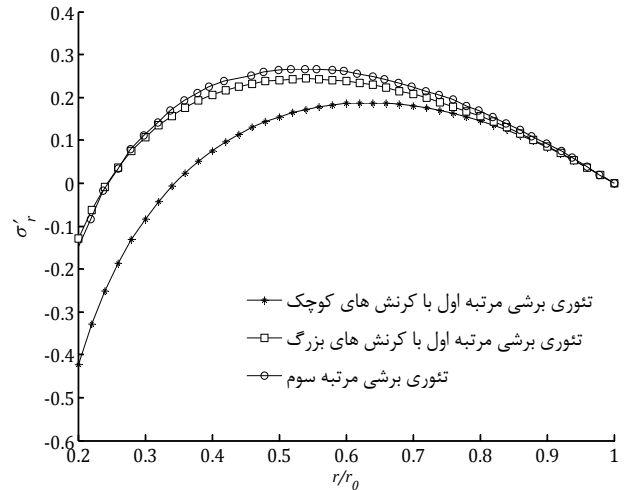
شکل ۴ نمودار تغییرات تنش شعاعی برای یک دیسک دوار در تئوری مرتبه سوم برای بارهای مختلف ($n=1, \omega=1000 \text{ rad/s}$)



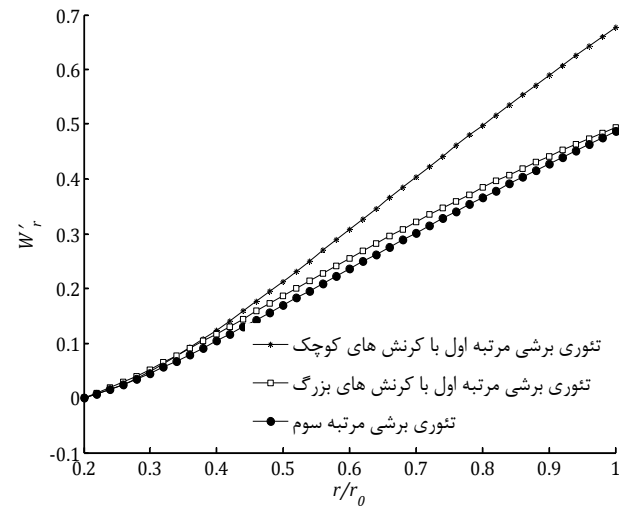
شکل ۵ تغییرات تنش N_r' برای یک دیسک دوار در تئوری مرتبه سوم برشی برای بارهای مختلف ($n=1, \omega=1000 \text{ rad/s}$)



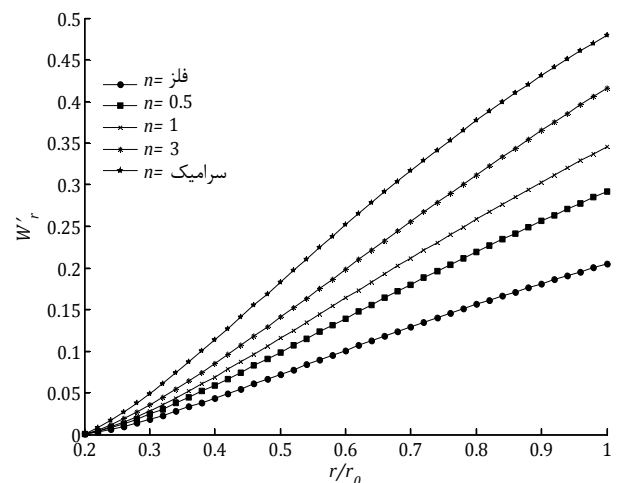
شکل ۶ تغییرات جابجایی عمودی w_r' برای یک دیسک دوار در تئوری مرتبه سوم برشی برای بارهای مختلف ($n=1, \omega=1000 \text{ rad/s}$)



شکل ۷ مقایسه تغییرات تنش شعاعی برای دیسک دوار توخالی بین تئوری مرتبه اول با کرنش‌های کوچک، بزرگ و تئوری مرتبه سوم برشی

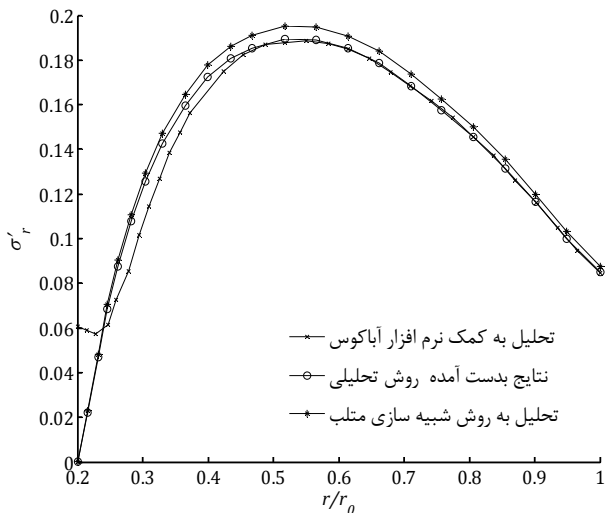


شکل ۸ مقایسه تغییرات جابجایی عمودی w_r' برای دیسک دوار توخالی در تئوری مرتبه اول با کرنش‌های کوچک، بزرگ و تئوری مرتبه سوم برشی

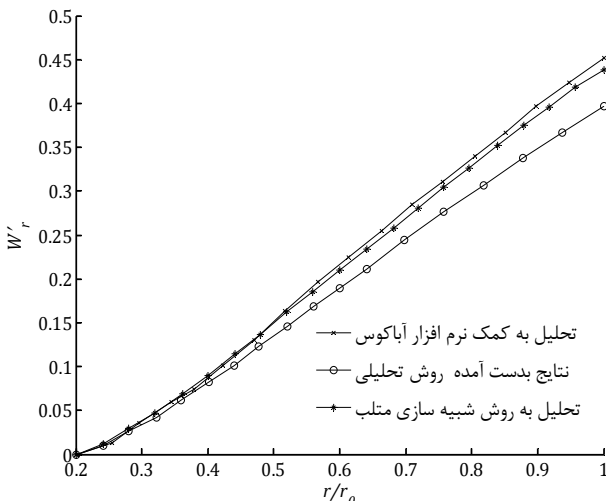


شکل ۹ نمودار تغییرات جابجایی عمودی w_r' دیسک دوار با مرتبه سوم

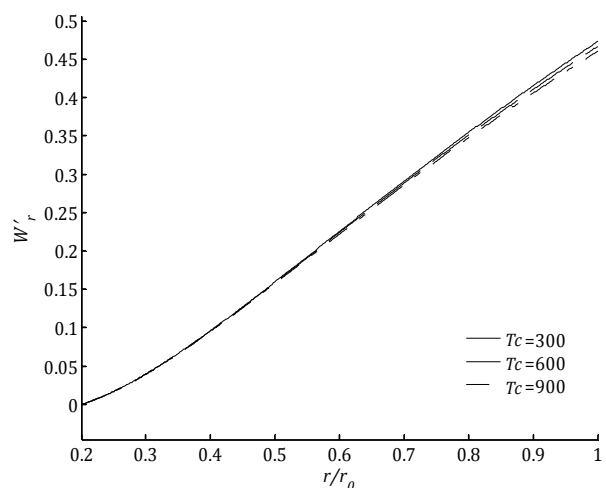
نمودارها برای $n=1$ با سرعت زاویه‌ای $\omega=1000 \text{ rad/s}$ برای بارهای مختلف ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر چه میزان بار افزایش می‌یابد، تنش‌های شعاعی و نیروی شعاعی با توجه به روابط (۱۳) بیشتر می‌شود.



شکل ۱۰ مقایسه نمودار تغییرات تنش شعاعی در سه روش در دیسک توخالی در تئوری تغییر شکل‌های برشی بزرگ برای $n=1$



شکل ۱۱ مقایسه نمودار تغییرات جابجایی عمودی در سه روش در دیسک توخالی در تئوری تغییر شکل‌های برشی بزرگ برای $n=1$



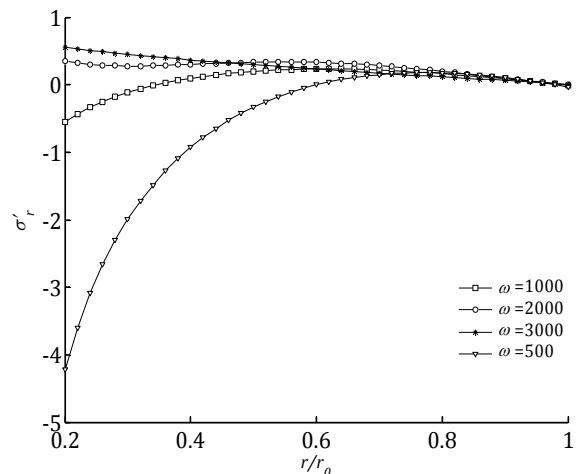
شکل ۱۲ نمودار تغییرات جابجایی عمودی w_r' برای دیسک توخالی به ازای دماهای مختلف سرامیک و دمای ثابت فلز و $n=1$

شکل ۱۳ توزیع تغییرات تنش σ_r برای یک دیسک توخالی در راستای شعاع برای تئوری برشی مرتبه اول به ازای دماهای مختلف سرامیک را نشان

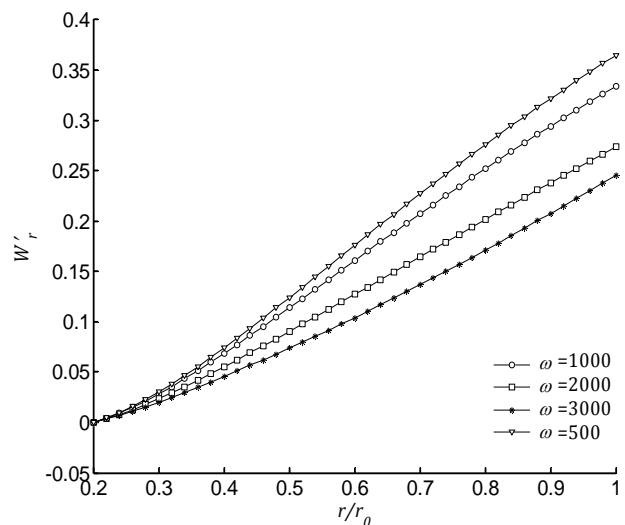
شکل ۸ توزیع تنش‌های شعاعی بی بعد را برای تئوری مرتبه سوم بیان می‌کند، نمودارها برای $n=1$ و بار ثابت برای سرعت زاویه‌ای‌های مختلف بیان شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت زاویه‌ای تنش‌های شعاعی افزایش می‌یابند که به علت افزایش شتاب‌های عمودی حاصل از دوران می‌باشد.

شکل ۹ توزیع تغییرات جابجایی عمودی را برای تئوری مرتبه سوم بیان می‌کند، نمودارها برای $n=1$ و بار ثابت برای سرعت زاویه‌ای‌های مختلف بیان شده است. با توجه به نمودارها هر چه سرعت زاویه‌ای افزایش می‌یابد، مقدار تغییر شکل عمودی کاهش می‌یابد.

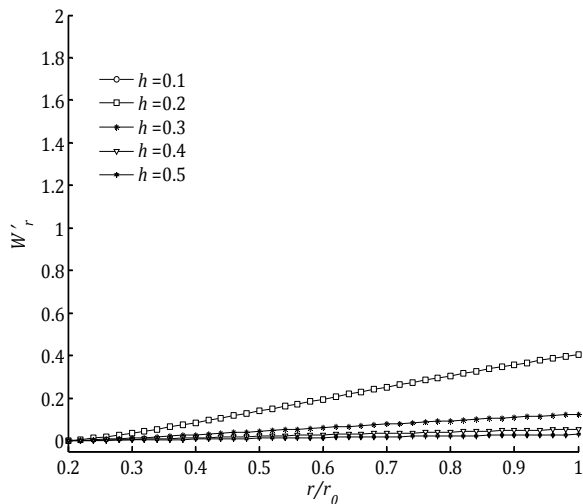
شکل ۱۰ مقایسه نمودار تغییرات تنش شعاعی برای هر سه روش اغتشاشات و سیمولینک و حل با نرم‌افزار آباکوس در دیسک توخالی برای تئوری تغییرشکل‌های بزرگ را بیان می‌کند. شکل ۱۱ مقایسه نمودار تغییرات جابجایی عمودی برای هر سه روش اغتشاشات و سیمولینک و حل با نرم‌افزار آباکوس در دیسک توخالی برای تئوری تغییرشکل‌های بزرگ را بیان می‌کند. شکل ۱۲ توزیع تغییرات جابجایی عمودی برای یک دیسک توخالی در راستای شعاع برای تئوری برشی مرتبه اول به ازای دماهای مختلف سرامیک را نشان می‌دهد. با افزایش دما در دیسک توخالی تغییر شکل عمودی افزایش می‌یابد.



شکل ۸ نمودار تغییرات تنش شعاعی برای دیسک دوار در تئوری سوم برشی برای سرعت زاویه‌ای مختلف ($n=1, q=0.14e9GPa$)



شکل ۹ تغییرات جابجایی عمودی w_r' برای یک دیسک دوار در تئوری مرتبه سوم برشی برای سرعت زاویه‌ای ($n=1, q=0.14e9GPa$)



شکل ۱۶ نمودار تغییرات w'_r برای دیسک دوار توخالی برای ضخامت‌های مختلف

شکل ۱۴ توزیع تغییرات تنش را برای شعاع داخلی مختلف در یک دیسک توخالی برای تئوری برشی مرتبه اول بیان می‌کند. مقدار تنش با افزایش شعاع داخلی با ثابت نگه داشتن شعاع خارجی، به علت کاهش نیروی اعمالی کاهش می‌یابد. شکل ۱۵ توزیع تغییرات جابجایی عمودی را برای شعاع داخلی مختلف در یک دیسک توخالی برای تئوری برشی مرتبه اول بیان می‌کند. بدیهی است که مقدار w'_r با افزایش قطر شعاع داخلی کاهش می‌یابد. شکل ۱۶ توزیع تغییرات جابجایی عمودی را برای ضخامت‌های مختلف در یک دیسک توخالی برای تئوری برشی مرتبه اول بیان می‌کند. همان‌طور که مشاهده می‌شود هرچه ضخامت افزایش می‌یابد، تغییرات جابجایی عمودی کمتر می‌شود.

۴- نتیجه گیری

در این تحقیق دیسک‌های دوار هدفمند توخالی تحت تأثیر بارگذاری مکانیکی و حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با کرنش‌های خطی و غیرخطی همچنین تئوری مرتبه سوم با فرضیات ون کارمن معادلات تعادل بدست آمده و از روش اغتشاشات و شبیه‌سازی نرم‌افزار متلب برای حل معادلات استفاده شده است. جهت اعتبارسنجی، نتایج حاصل از دو روش با یکدیگر و با نتایج حاصل از آباکوس نیز مقایسه شده‌اند. همچنین مشاهده می‌شود که توافق خوبی بین حل‌های عددی و همچنین حل با آباکوس می‌باشد. نمودارهای تغییرات جابجایی عمودی، تنش و گشتاور نسبت به شعاع برای یک دیسک توپر و توخالی بررسی شده است.

- با افزایش مرتبه تئوری و همچنین اعمال کرنش‌های غیرخطی در محاسبات که موجب حذف بیشتر اثر تغییر شکل‌های صلب گونه از محاسبات کرنش می‌شود، تغییر شکل عمودی کاهش یافته و تنش شعاعی نیز کاهش می‌یابد (به ازای سرعت زاویه‌ای ثابت).

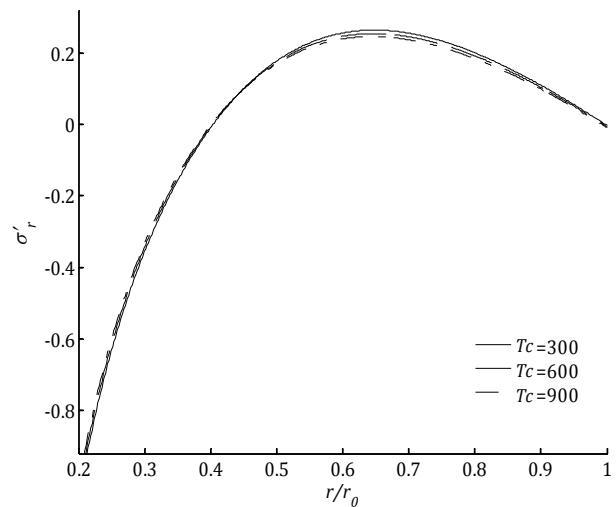
- با افزایش بارگذاری میزان اختلاف حاصل از کرنش‌های خطی و غیرخطی با یکدیگر بیشتر شده که نشان دهنده تأثیر عبارت‌های غیرخطی کرنش در تغییرشکل‌های بزرگ می‌باشد.

- در دیسک‌های دوار با افزایش سرعت زاویه‌ای، موجب افزایش سختی خمشی و کاهش تغییر شکل قائم دیسک می‌شود.

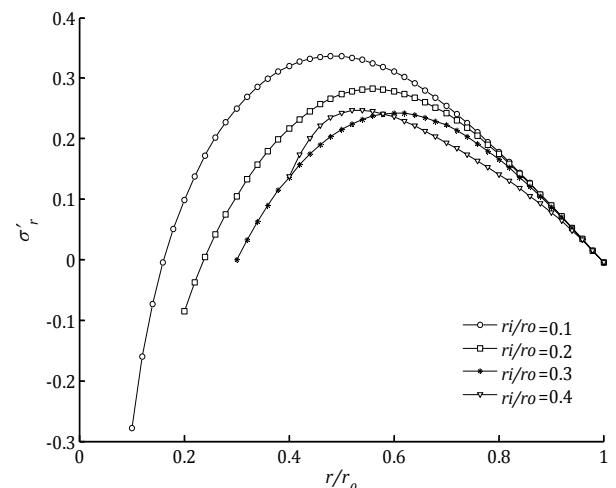
- همواره مقدار تغییر مکان دیسک هدفمند با درصد مواد متفاوت بین دو تغییر مکان دیسک‌های کاملاً فلز و دیسک‌های کاملاً سرامیک می‌باشد.

- در دیسک‌های دوار تو خالی با افزایش شعاع داخلی جابجایی عمودی و تنش‌ها کاهش می‌یابد.

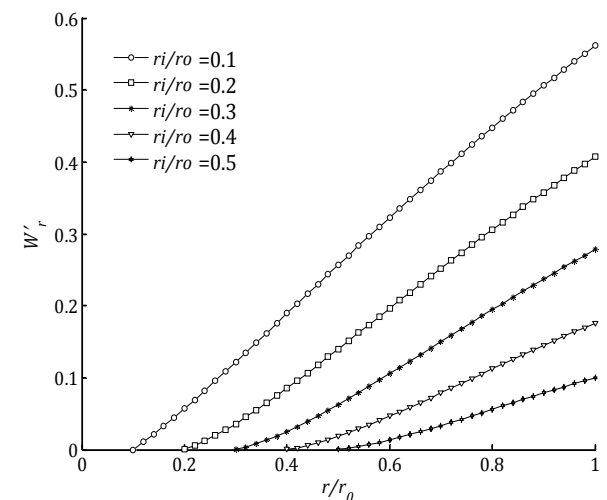
می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش دما با توجه به رابطه (۱۳) تنش کاهش می‌یابد.



شکل ۱۳ نمودار تغییرات تنش شعاعی برای دیسک دوار توخالی به ازاء دماهای مختلف سرامیک و دمای ثابت فلز و $n=1$



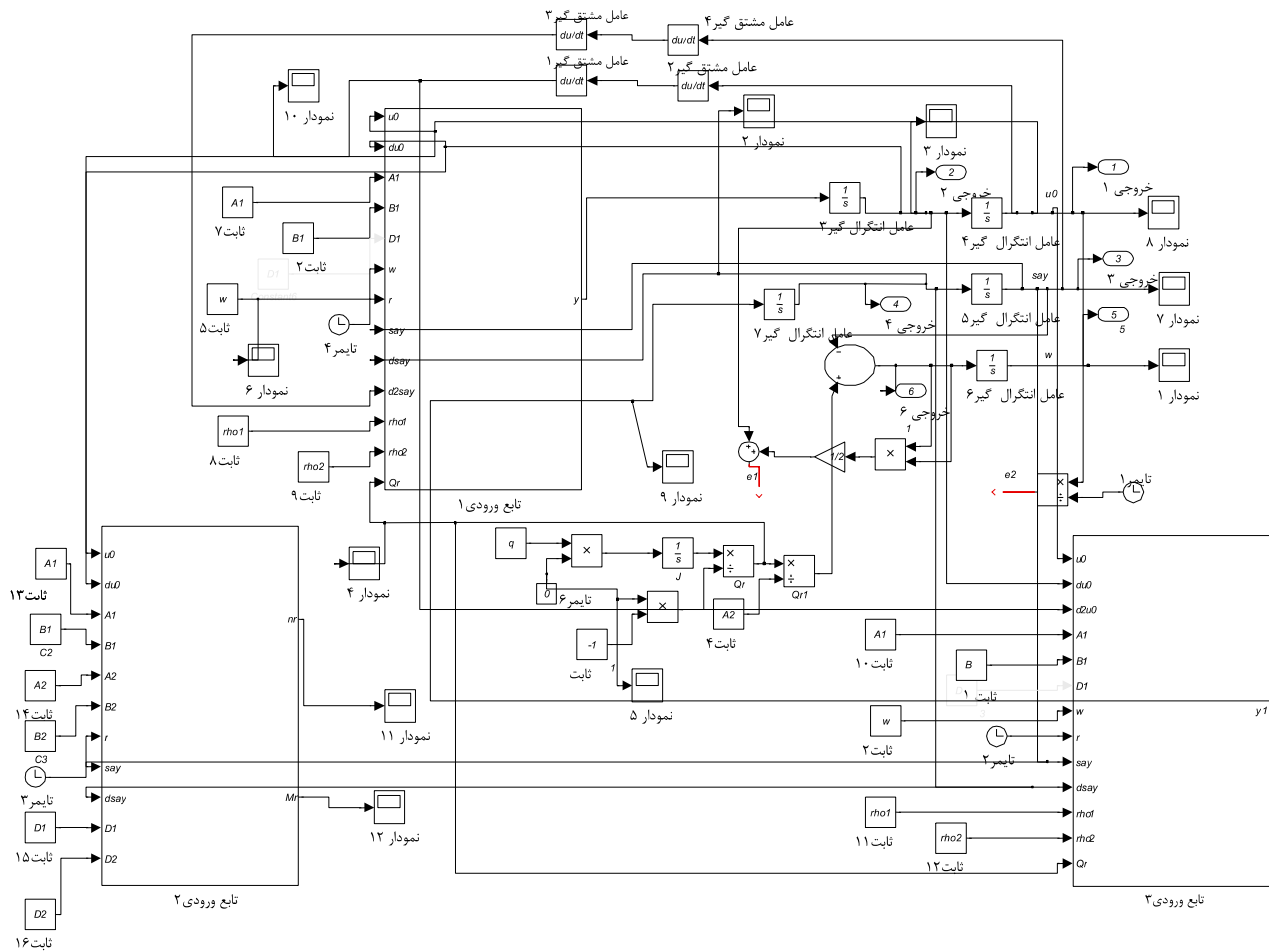
شکل ۱۴ نمودار تغییرات تنش شعاعی برای دیسک دوار توخالی برای شعاع‌های داخلی مختلف



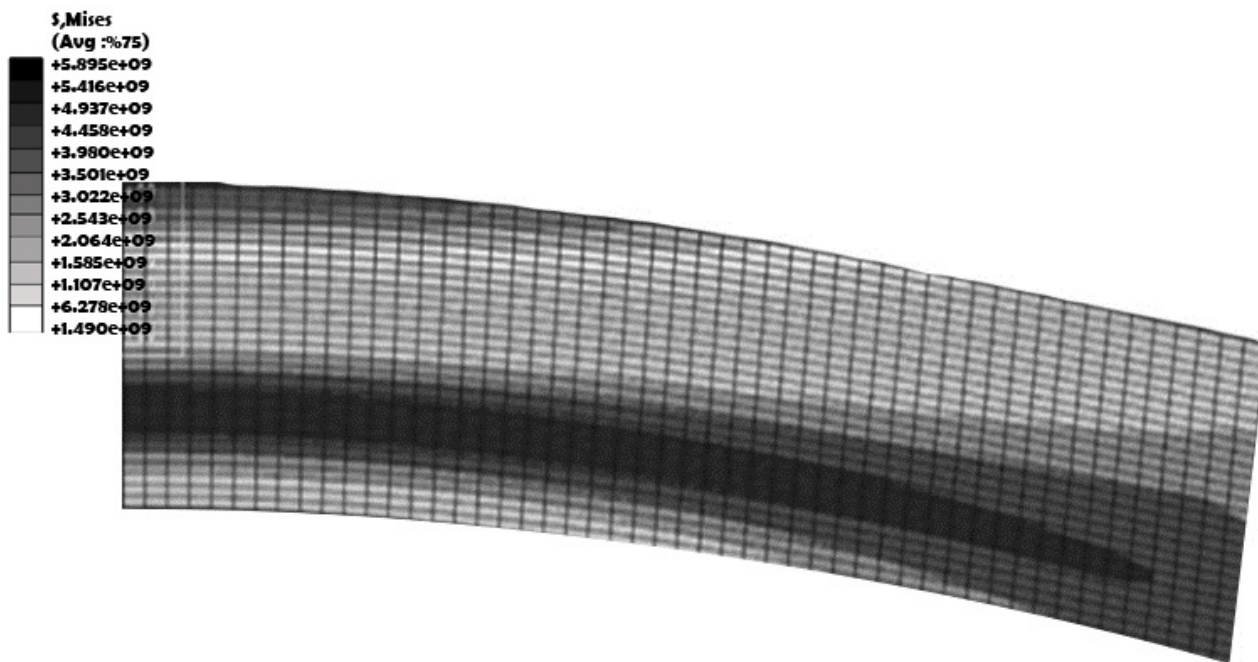
شکل ۱۵ نمودار تغییرات w'_r برای دیسک دوار توخالی برای شعاع‌های داخلی مختلف

۵- پیوست

۵-۱- دیاگرام حل به کمک نرم‌افزار سیمولینک



۵-۲- نمای سطح مقطع دیسک دوار توپر



شکل ۱۷ تحلیل ترموالاستیک دیسک دوار ساخته شده از مواد تابعی

۵-۳- اثبات روابط

(الف)

بنابراین در حالت کلی به ازای $j=1,2,3,\dots$ مقدار I به صورت رابطه (ب-۵) بدست می‌آید:

$$I = c_{e1}K_3 + c_{e2}K_2 + c_{e3}K_1 + \dots \quad (\text{ب-۵})$$

به طریق مشابه مقدار II محاسبه می‌شود:

$$O_1 = \frac{1}{r} \int r I_2 dr = \frac{-q_{01}H}{A_2 r}$$

$$O_2 = \frac{1}{r} \int r I_3 dr = \frac{-(V_2 + q_{02}H)}{A_2 r} - \frac{3D_2 c_{e1}}{A_2} O_1$$

$$O_3 = \frac{1}{r} \int r I_4 dr = \frac{-(V_3 + q_{03}H)}{A_2 r} - \frac{3D_2(c_{e1}O_2 + c_{e2}O_1)}{A_2} \quad (\text{ب-۶})$$

بنابراین در حالت کلی به ازای $j=1,2,3,\dots$ مقدار II به صورت رابطه (ب-۷) بدست می‌آید:

$$II_2 = c_{e1}O_1$$

$$II_3 = c_{e1}O_2 + c_{e2}O_1$$

$$II_4 = c_{e1}O_3 + c_{e2}O_2 + c_{e3}O_1 \quad (\text{ب-۷})$$

همچنین برای بدست آوردن III از روابط (ب-۹) استفاده می‌شود.

$$X_1 = \int O_1 dr = \frac{-q_{01}G}{A_2 r}$$

$$X_2 = \int O_2 dr = \frac{-(Y_2 + q_{02}G)}{A_2} - \frac{3D_2 c_{e1}}{A_2} X_1$$

$$X_3 = \int O_3 dr = \frac{-(Y_3 + q_{03}G)}{A_2} - \frac{3D_2(c_{e1}X_2 + c_{e2}X_1)}{A_2} \quad (\text{ب-۹})$$

بنابراین در حالت کلی به ازای $j=1,2,3,\dots$ مقدار III به صورت رابطه (ب-۱۰) بدست می‌آید:

$$III_2 = c_{e1}X_1$$

$$III_3 = c_{e1}X_2 + c_{e2}X_1$$

$$III_4 = c_{e1}X_3 + c_{e2}X_2 + c_{e3}X_1 \quad (\text{ب-۱۰})$$

۶- مراجع

[1] A. Nino, Recent development status of functionally gradient materials, *J. Thin Walled Structures*, Vol 30, No. 3, pp. 699-703, 1990.

[2] N. Noda, T. Tsuji, Steady thermal stresses in a plate of functionally gradient material with temperature-dependent properties, *Trans Jpn Soc Mech Eng SerA*, Vol 57, No. 4, pp. 625-31, 1991.

[3] Y. Obata, N. Noda, Steady thermal stresses in a functionally gradient material plate, *Trans Jpn Mech Eng*, Vol. 58, No. 5, pp. 1689-95, 1992.

[4] K. Tanaka, Y. Tanaka, Design of thermo elastic materials using direct sensitivity and optimization methods, *Compute Methods Appl Mech Eng*, Vol. 106, No. 1-2, pp. 271-84, 1993.

[5] K. Tanaka, Y. Tanaka, An improved solution to thermo elastic material design in functionally gradient materials, *Compute Methods Appl Mech Eng*, Vol. 109, No. 3-4, pp. 377-89, 1993.

[6] RW. Zimmerman, MP. Lutz, Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder, *J. Therm Stresses*, Vol. 22, No. 2, pp. 177-188, 1999.

[7] J. Reddy, Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 18, No. 2, pp. 185-99, 1999.

[8] J. Durodolaa, Deformation and stresses in functionally graded rotating disks, *Composites Science and Technology*, Vol. 60, No. 7, pp. 987-995, 1999.

[9] ZQ. Cheng, Non-linear bending of inhomogeneous plates, *Eng Struct*, Vol. 23, No. 10, pp. 1359-63, 2001.

[10] M. Jabbari, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, No. 7, pp. 493-497, 2002.

[11] A. Mosavi, Analyze stresses in a functionally graded cylinder with variable thickness, *Paper- aerospace*, Vol. 07, No. 3, pp. 276-282, 2004.

$$y_1 = \frac{2}{A^*} (2A_2 B_2 - A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

$$y_2 = \frac{2}{A^*} (A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

$$y_3 = \frac{4}{A^*} (A_2 B_2 - A_2 B_1)$$

$$y_4 = \frac{1}{A^*} (D_1 A^* + 4B_1^2 A_2 - 8A_2 B_1 B_2 + 4B_2^2 A_1)$$

$$y_5 = \frac{1}{A^*} [(D_1 - 2D_2) A^* + 4B_1^2 A_2 - 8A_2 B_1 B_2 + 8B_2^2 A_2 - 4B_2^2 A_1]$$

$$y_6 = \frac{1}{A^*} [F_1 A^* + 4E_1 B_1 A_2 - 4E_2 B_1 A_2 + 4E_2 B_2 A_1 - 4E_1 B_2 A_2]$$

$$y_7 = \frac{1}{A^*} [(F_1 - 2F_2) A^* + 4E_1 B_1 A_2 - 4A_2 B_1 E_2 - 4A_2 E_1 B_2 + 8A_2 B_2 E_2 - 4A_1 B_2 E_2]$$

(ب) محاسبه I, II, III

معادله (۷۴) به صورت ایندکسی بیان می‌شود:

$$Q_{rj} = A_2 (\varphi_{1j} + dw_{1j}) + 3D_2 \varphi_{2j} \rightarrow$$

$$\varphi_{1j} + dw_{1j} = \frac{Q_{rj}}{A_2} - \frac{3D_2 \varphi_{2j}}{A_2} \quad (\text{ب-۱})$$

به ازای $j=1,2,3,\dots$:

$$\varphi_{11} + dw_{11} = \frac{Q_{r1}}{A_2}$$

$$\varphi_{12} + dw_{12} = \frac{Q_{r2}}{A_2} - \frac{3D_2 \varphi_{2j}}{A_2}$$

$$= \frac{Q_{r2}}{A_2} - \frac{3D_2 c_{e1} (dw_{11} + \varphi_{11})}{A_2} = \frac{Q_{r2}}{A_2} - \frac{3D_2 c_{e1} Q_{r1}}{A_2}$$

$$\varphi_{13} + dw_{13} = \frac{Q_{r2}}{A_2} - \frac{3D_2 \varphi_{23}}{A_2} = \frac{Q_{r2}}{A_2} - \frac{3D_2}{A_2} [c_{e1} (dw_{12} + \varphi_{12}) + \frac{c_{e2} Q_{r1}}{A_2}]$$

از معادله تعادل (۶۴) رابطه (ب-۲) حاصل می‌شود:

$$\int Q_{rj} dr = -L_j - q_{0j} F$$

$$\int r \int Q_{rj} dr = -V_j - q_{0j} F \quad (\text{ب-۲})$$

$$K_1 = \int (\varphi_{11} + dw_{11}) dr = \frac{-q_{01} F}{A_2}$$

$$K_2 = \int (\varphi_{12} + dw_{12}) dr = \frac{(-L_2 - q_{02} F)}{A_2} - \frac{3D_2 c_{e1} K_1}{A_2}$$

$$K_3 = \int (\varphi_{13} + dw_{13}) dr = \frac{(-L_3 - q_{03} F_3)}{A_2} - \frac{3D_2 (c_{e1} K_2 + c_{e2} K_1)}{A_2} \quad (\text{ب-۳})$$

از طرفی با توجه به تعریف رابطه φ_{2j} بر حسب φ_{1j} و dw_{1j} روابط (ب-۳)، روابط (ب-۴) بدست می‌آید:

$$I_2 = \int \varphi_{22} dr = c_{e1} K_1$$

$$I_3 = c_{e1} K_2 + c_{e2} K_1$$

$$I_4 = c_{e1} K_3 + c_{e2} K_2 + c_{e3} K_1 \quad (\text{ب-۴})$$

- [15] M. Golmakani, Nonlinear bending analysis of annular FGM plates using higher-order shear deformation plate theories, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 973–982, 2011.
- [16] S. Mirzababaei, Non linear bending analysis of annular FGM plates using higher-order shear deformation plate theories, *European Journal of Mechanics*, Vol. 28, No. 5, pp. 248–256, 2009.
- [17] A. Allahverdizadeh, Vibration amplitude and thermal effects on the nonlinear behavior of thin circular functionally graded plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 3, pp. 445–454, 2008.
- [12] M. Bayat, Analysis of functionally graded rotating disks with variable thickness Original, *Research Article Research Communications*, Vol. 35, No. 3, pp 283-309, 2008.
- [13] A. Saidi, Axisymmetric bending and buckling analysis of functionally graded circular plates, *Composite Structures*, Vol. 89, No. 1, pp. 110–119, 2009.
- [14] M. Bayat, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, No. 6, pp. 357–372, 2009.