



مدل سازی رتبه کاسته جریان های دوفازی غیردایم با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه

یونس شکاری^۱، ابراهیم حاجی دلو^{۲*}، مرتضی بهبهانی نژاد^۳، محسن شعبانی^۳

۱- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

۳- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

* اهواز، صندوق پستی ۶۱۳۵۵ scu.ac.ir hajidae@scu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۲ اردیبهشت ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۸ خرداد ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۰ فروردین ۱۳۹۳

کلید واژگان:

مدل دوسیالی

مدل چهار معادله ای

مدل سازی رتبه کاسته

تجزیه متعامد بهینه

تجزیه مقادیر تکین

در این مقاله، مدل سازی رتبه کاسته جریان های دوفازی غیردایم بر مبنای مدل های دوسیالی و روش تجزیه متعامد بهینه صورت پذیرفته است. مدل دوسیالی چهار معادله ای به عنوان مدل ریاضی جریان دوفازی انتخاب شده است. پس از بیان معادلات حاکم، حل عددی مستقیم مسئله با استفاده از روش تجزیه بالادست فرارفت ترکیبی ارائه و سپس، روش تجزیه متعامد بهینه به عنوان ابزاری برای کاهش زمان محاسباتی مسائل گذرا به کار رفته است. در تحقیق حاضر، از یک روش بدون معادله و تصویر گالری برای این منظور استفاده شده است. در این روش بردارهای پایه فضای رتبه کاسته از روش تجزیه مقادیر تکین محاسبه می شوند. نتایج به دست آمده برای حل جریان دوفازی برای یک لوله ضربه و همچنین مسئله جدایش آب و هوا، نشان می دهد که تکنیک رتبه کاسته به کار رفته، ضمن داشتن دقت مناسب، می تواند زمان محاسبات را تا حدود ۳۵ درصد کاهش دهد. کاهش زمان مناسب با شبکه به کار رفته بستگی دارد، به گونه ای که کارایی این روش بر روی شبکه های ریز بیشتر از شبکه های درشت است.

Reduced order modeling of unsteady two-phase flows using proper orthogonal decomposition method

Younes Shekari¹, Ebrahim Hajidavalloo^{2*}, Morteza Behbahani-Nejad², Mohsen Shabani³

1- Department of Mechanical Engineering, SCU. of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, SCU. of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

3- Department of Mechanical Engineering, SCU. of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

*P.O.B. 61355 Ahvaz, hajidae@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 22 April 2013
Accepted 08 June 2013
Available Online 09 April 2014

Keywords:

Two-Fluid Model
Four-Equation Model
Reduced Order Modeling
Proper Orthogonal Decomposition

ABSTRACT

In this paper; reduced order modeling (ROM) of unsteady two-phase flows is performed based upon two-fluid models and a proper-orthogonal decomposition (POD) method. The four-equation two-phase flow model is used as a mathematical model to describe physics of the problem. After presenting the governing equations, direct numerical solution of the problem is introduced using AUSMDV* method. Then, the POD method is introduced as a mathematical tool to reduce computational time of the transient problems. In the present research, an equation free/Galerkin free POD method is used for ROM of the unsteady two-phase flows. In this approach, the singular value decomposition (SVD) method is used to compute the base vectors of the reduced space. A shock tube and water-air separation two-phase problems are solved using the present ROM method. Results show that this approach can reduce computational time of unsteady simulations about 35%. Reduction of the computational time directly depends on the size of the computational grid. The results also indicate that application of POD method on the fine grids is more efficient than on the coarse grids.

۱- مقدمه

دایم یک سیستم مورد نظر باشد، نمایان تر می شود. در مقایسه با جریان تکفازی، مشکلات تحلیل جریان های دوفازی غیردایم بیشتر می باشد. علت این امر این است که تعداد متغیرهای یک جریان دوفازی بیشتر از متغیرهای جریان تکفازی می باشد. علاوه بر این در جریان دوفازی تراکم پذیر اندازه ماکزیمم مقادیر مشخصه سیستم بسیار بزرگ تر از ماکزیمم مقادیر مشخصه جریان های تکفازی تراکم پذیر است. بنابراین گام زمانی مورد نیاز برای پایدار ماندن حل بایستی بسیار کوچک تر از مقدار متناظر در جریان تکفاز باشد.

جریان های دوفازی غیردایم در بسیاری از فرآیندهای صنعتی مانند تولید و انتقال نفت و گاز، صنایع پتروشیمی و نیروگاهی کاربرد دارند. شبیه سازی و تحلیل عددی این جریان ها همواره با مشکلات متعددی مواجه بوده است. مشکلات تحلیل عددی جریان های گذرا حتی در جریان تکفاز، هنگامی که تعداد درجات آزادی مسئله زیاد شود، آشکار می شوند. این مسئله وقتی که بازه زمانی حل عددی طولانی باشد و یا هنگامی که رسیدن به حل حالت

Please cite this article using:

Younes Shekari, Ebrahim Hajidavalloo, Morteza Behbahani-Nejad, Mohsen Shabani, Reduced order modeling of unsteady two-phase flows using proper orthogonal decomposition method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 189-196, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

دوره ای نیستند جواب های رضایت بخشی ارائه نمی کند [۷]. علت این امر آن است که در روش ذکر شده، توابع متعامد بهینه با زمان تغییر نمی کنند، بنابراین قابلیت ردیابی دینامیک غیرخطی این گونه جریان ها را ندارد. برای برطرف نمودن این مشکل سیروساپ و همکاران [۱۰] روش جدیدی ارائه کردند که در آن توابع متعامد بهینه با زمان و ضمن فرآیند حل تغییر می کنند. در این روش معادلات حاکم بر روی توابع متعامد تصویر نمی شوند و برای یافتن متغیرهای جریان از یک روش انتگرال گیری بدون به کارگیری معادلات حاکم، استفاده می شود. آن ها این روش را تجزیه متعامد بهینه بدون تصویر گالرکین در یک چارچوب بدون معادله نامیدند. سیروساپ و همکاران [۱۱] جریان تراکم ناپذیر دوبعدی حول بالواره ناکا ۴۰۰۱۲ را با این روش تحلیل نمودند. آنان نشان دادند که نتایج تطابق خوبی با شبیه سازی عددی مستقیم معادلات دارد.

در کار حاضر از مدل سازی رتبه کاسته براساس تجزیه متعامد بهینه بدون تصویر گالرکین در یک چارچوب بدون معادله برای تحلیل جریان های دوفازی گذرای هم دما و تراکم پذیر استفاده می شود تا بتوان زمان و هزینه محاسبات این نوع جریان ها را کاهش داد. با بررسی های صورت گرفته، مشخص شده که تاکنون گزارشی مبنی بر مدل سازی رتبه کاسته جریان های دوفازی در منابع علمی آزاد ارائه نشده و این تحقیق برای اولین بار در این زمینه صورت می گیرد.

۲- معادلات حاکم

برای جریان دوفازی یک بعدی با فرض سیال هم دما و تراکم پذیر و با صرف نظر کردن از عبارات های اصطکاک دیواره و فصل مشترک، معادلات حاکم بر مدل پنج معادله ای را می توان به صورت زیر بیان کرد [۵]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f_c}{\partial x} + \frac{\partial f_p}{\partial x} + H \frac{\partial p_i}{\partial x} = S \quad (1)$$

که در رابطه بالا:

$$q = \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g \\ \alpha_l \rho_l \\ \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_l \rho_l u_l \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \\ \alpha_l \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S_g \\ S_l \end{pmatrix}, f_c = \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_g \rho_g u_g^2 \\ \alpha_l \rho_l u_l^2 \end{pmatrix}, f_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \Delta p \\ \alpha_l \Delta p \end{pmatrix} \quad (2)$$

در این روابط ρ_k چگالی، u_k سرعت، p_k فشار و p_{ik} فشار فاز k ام در روی فصل مشترک می باشد. همچنین، α_k کسر حجمی فاز k ام می باشد. بین کسر حجمی فازها رابطه زیر برقرار است:

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \quad (3)$$

که در این رابطه، α_g و α_l به ترتیب کسر حجمی فاز گاز و مایع می باشد. همچنین Δp عبارت تصحیح فشار می باشد و از رابطه زیر به دست می آید [۱۲]:

$$\Delta p_{ik} = p_k - p_{ik} = \gamma \frac{\alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g} (u_g - u_l)^2 \quad (4)$$

در رابطه بالا γ یک ضریب ثابت است و غالباً ۱/۲ فرض می شود. در این تحقیق هر دو فاز تراکم پذیر فرض می شوند و ارتباط میان چگالی و فشار با استفاده از معادله حالت زیر برقرار می شود:

$$\rho_k = \rho_{k,0} + \frac{p_k - p_{k,0}}{c_k^2} \quad (5)$$

که در رابطه بالا $\rho_{k,0}$ و $p_{k,0}$ به ترتیب چگالی و فشار در شرایط مرجع

این مشکلات باعث شده است تا در تحقیق حاضر برای کاهش زمان و هزینه محاسباتی جریان های دوفازی غیردایم از الگوهای رتبه کاسته استفاده شود.

برای مدل سازی جریان های دوفازی تراکم پذیر هم دما، از مدل دوسیالی چهار معادله ای، که یکی از دقیق ترین مدل های دوفازی موجود است، استفاده می شود. این مدل غالباً چهار مقدار ویژه حقیقی دارد و در صورتی که عبارت تصحیح فشار صفر نباشد، خوش رفتار می باشد. در این مدل، دو فاز تراکم پذیر فرض می شوند و از ترم دیفیوژن صرف نظر می شود. بنابراین، معادلات حاکم بر آن ماهیتی هذلولوی دارند. مشکل اساسی در حل عددی این معادلات حضور عبارت غیربخطی در معادله مومنتم فازها می باشد. این امر باعث می شود که شرط کلاسیک رنگین-هوگونویوت^۱ در محل ناپوستگی میدان جریان برقرار نباشد. بنابراین، استفاده از روش های کلاسیک حل معادلات هذلولوی با مشکل مواجه می شود. روش های گوناگونی برای حل این مشکل ارائه گردیده است [۱-۴]. در تحقیق حاضر از شیوه ارائه شده توسط اوجه و فلائن، برای گسسته سازی عبارت غیربخطی معادلات مومنتم فازها استفاده می شود [۵].

برای مدل سازی رتبه کاسته جریان های گذرا روش های گوناگونی وجود دارد که از جمله آن ها می توان به مدل سازی رتبه کاسته با استفاده از ساختار ویژه^۲ سیستم و تجزیه متعامد بهینه^۳ نام برد. هنگامی که از روش اول استفاده شود، می توان رفتار دینامیکی جریان را با استفاده از مقادیر ویژه خود سیستم تفسیر نمود. برای استفاده از این روش نیاز است که معادلات گسسته حاکم بر روش عددی به کار رفته، خطی سازی شوند. در صورتی که مدل خطی شده بتواند دینامیک جریان را ردیابی کند، این روش، روشی بسیار مناسب برای مدل سازی رتبه کاسته جریان های گذرا می باشد. بهیچانی^۳ و شکاری [۶] نشان دادند که این روش هنگامی که تعداد گره های محاسباتی افزایش می یابد به دلیل محاسبه بردار ویژه ماتریس های بزرگ دارای ضعف است. همچنین به ازای شرط اولیه صفر این روش جواب های قابل قبولی ارائه نمی دهد.

یکی دیگر از شیوه های مدل سازی رتبه کاسته روش تجزیه متعامد بهینه می باشد. مدل سازی رتبه کاسته با استفاده از تجزیه متعامد بهینه به دو دسته تقسیم می شود [۷]:

- مدل سازی رتبه کاسته با استفاده از تصویر روی توابع متعامد بهینه
 - مدل سازی رتبه کاسته با استفاده از توابع متعامد بهینه بدون تصویر گالرکین در یک چارچوب بدون معادله

در مدل سازی رتبه کاسته با تصویر گالرکین معادلات روی توابع متعامد، در ابتدا لازم است که معادلات توسط یک روش عددی، حل شده تا اطلاعات لازم برای تشکیل توابع متعامد مهیا گردد. پس از محاسبه توابع متعامد پایه، معادلات به صورت تحلیلی روی این توابع تصویر شده و معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می شوند. با در نظر گرفتن تعدادی از توابع پایه متعامد، می توان مدل رتبه کاسته را به دست آورد. این روش اغلب در مسائل کنترلی و جریان ترکم ناپذیر به کار رفته است [۸،۹]. اشرفی [۷] از این روش برای تحلیل جریان آب کم عمق دوبعدی استفاده نمود و نشان داد که نتایج به دست آمده از حل رتبه کاسته تطابق خوبی با نتایج عددی داشته و زمان محاسبات نیز نسبت به حل عددی مستقیم معادلات در حدود ۳۰ درصد کاهش یافته است. این روش، برای جریان هایی که با زمان دوره ای هستند، قابلیت بالایی دارد، اما برای جریان های گذرای که با زمان

1- Rankine-Hugoniot
 2- ROM based on the system eigen structure
 3- Proper Orthogonal Decomposition (POD)

در رابطه بالا \hat{c} سرعت صوت در مخلوط می باشد و به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\rho_l \alpha_g + \rho_g \alpha_l}{(\partial \rho_g / \partial p) \rho_l \alpha_g + (\partial \rho_l / \partial p) \rho_g \alpha_l}} \quad (10)$$

برای گسسته سازی شار مومنتم در روش AUSMDV* ابتدا بایستی شار مومنتم دو روش AUSMV* و AUSMD* معرفی شوند. در روش اول شار مومنتم به صورت زیر گسسته سازی می شود [5]:

$$(\alpha \rho u^2)_{j+1/2} = (\alpha \rho u)_L \tilde{V}^+(u_L, \hat{c}_{j+1/2}, \chi_L) + (\alpha \rho u)_R \tilde{V}^-(u_R, \hat{c}_{j+1/2}, \chi_R) \quad (11)$$

گسسته سازی شار مومنتم روش AUSMD* به صورت زیر می باشد [5]:

$$(\alpha \rho u^2)_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\alpha \rho u)_{j+1/2} (u_R + u_L) - \frac{1}{2} (\alpha \rho u)_{j+1/2} |u_L + u_R| (u_R - u_L) \quad (12)$$

که در روابط بالا:

$$\chi_L = (1 - \phi_L) \frac{2(\rho/\alpha)_L}{2(\rho/\alpha)_L + 2(\rho/\alpha)_R} + \phi_L \quad (13)$$

$$\chi_R = (1 - \phi_R) \frac{2(\rho/\alpha)_R}{2(\rho/\alpha)_L + 2(\rho/\alpha)_R} + \phi_R \quad (14)$$

در روابط (13) و (14)، L و R بیان گر حالت های سمت چپ و راست مرز یک سلول محاسباتی می باشند. علاوه بر این، در این روابط، ϕ یک تابع متقارن هموار می باشد و به گونه ای انتخاب می شود که برای نواحی شامل جریان های نزدیک تک فاز یک شود و در بقیه نواحی صفر باشد. رابطه زیر که در تحقیق حاضر از آن استفاده می شود این خاصیت را دارد [5]:

$$\phi = \frac{1}{e^{k\alpha_g}} + \frac{1}{e^{k(1-\alpha_g)}} \quad (15)$$

در این رابطه k نشان دهنده درجه همواری تابع ϕ می باشد و در تحقیق حاضر مقدار آن $k=200$ فرض می شود.

حال شار مومنتم روش AUSMDV* را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$f_c^{AUSMDV*} = s f_c^{AUSMV*} + (1-s) f_c^{AUSMD*} \quad (16)$$

که در این رابطه متغیر s را می توان با استفاده از توابع مختلفی به دست آورد. در تحقیق حاضر رابطه زیر به کار رفته است:

$$s = K + 0.5 \min(1, 10 \frac{|p_R - p_L|}{\min(p_L, p_R)}) \quad (17)$$

که در آن مقدار پارامتر K غالباً به صورت $0.7 \leq K \leq 1$ انتخاب می شود.

۳-۲- گسسته سازی شار فشاری

در روش AUSMDV* شار فشاری به صورت زیر گسسته سازی می شود:

$$(\alpha \Delta p)_{j+1/2} = P^+(u_j, \hat{c}_{j+1/2}) (\alpha \Delta p)_j + P^-(u_{j+1}, \hat{c}_{j+1/2}) (\alpha \Delta p)_{j+1} \quad (18)$$

که در آن

$$P^\pm(u, c) = V^\pm(u, c) \times \begin{cases} \pm \frac{1}{\hat{c}} \left(\pm 2 - \frac{u}{\hat{c}} \right)^2 & |u| \leq \hat{c} \\ \frac{1}{u} & |u| > \hat{c} \end{cases} \quad (19)$$

هستند و C_k سرعت صوت در فاز k ام می باشد. مقادیر چگالی و فشار مرجع مطابق جدول ۱ می باشند.

۳- روش حل عددی مستقیم

به منظور تعیین توابع متعامد پایه در روش رتبه کاسته، ابتدا لازم است که معادلات حاکم با استفاده از یک روش عددی مناسب حل شوند. دسته روش های تجزیه بالادست فرارفت^۱ از جمله روش هایی هستند که ضمن داشتن دقت عددی مناسب، با استفاده از تعداد سلول های محاسباتی اندکی می توانند مسائل دوفازی را به خوبی تحلیل کنند [5, 13, 14]. از میان نسخه های مختلف این روش، روش تجزیه بالادست فرارفت ترکیبی^۲، به دلیل قابلیت بسیار بالا در تحلیل جریان های نزدیک تک فاز و همچنین به دلیل دیفیوژن عددی کم آن، روشی بسیار مناسب برای تحلیل جریان های دوفازی است. این روش توسط محققان مختلفی برای حل عددی معادلات دوسیالی مورد استفاده قرار گرفته است [14, 13, 15].

در این روش ابتدا، همانند معادله (6)، عبارت های شار به دو بخش شار همرفتی و شار فشاری تجزیه می شوند. سپس معادلات حاکم به صورت زیر گسسته سازی می شوند [5]:

$$\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} = \frac{[f_c]_{j+1/2}^n - [f_c]_{j-1/2}^n}{\Delta x} + \frac{[f_p]_{j+1/2}^n - [f_p]_{j-1/2}^n}{\Delta x} + \left[H \frac{\partial p_i}{\partial x} \right]_j^n = S_j^n \quad (6)$$

جدول ۱ مقادیر مرجع و ثوابت مورد استفاده در معادله حالت [۱۳]

متغیر	مابع	گاز
$\rho_{k,0}$ (kg/m ³)	۱۰۰۰	.
$p_{k,0}$ (kPa)	۱۰۰	.
c_k (m/s)	۱۰۰۰	$\sqrt{1.5}$

هر یک از عبارت های رابطه (6) به طور جداگانه گسسته سازی می شوند که در ادامه چگونگی گسسته سازی آن ها بیان می شود.

۳-۱- گسسته سازی شار همرفتی

شار همرفت از دو بخش شار مومنتم و شار جرمی تشکیل شده است. شار جرمی به صورت زیر گسسته سازی می شود [5]:

$$(\alpha \rho u)_{j+1/2} = (\alpha \rho)_L \tilde{V}^+(u_L, \hat{c}_{j+1/2}, \chi_L) + (\alpha \rho)_R \tilde{V}^-(u_R, \hat{c}_{j+1/2}, \chi_R) \quad (7)$$

که در رابطه بالا:

$$\tilde{V}^\pm(u_L, \hat{c}_{j+1/2}, \chi_L) = \begin{cases} \chi V^\pm(u, c) + (1 - \chi) \frac{u + |u|}{2} & |u| \leq \hat{c} \\ \frac{1}{2} (u \pm |u|) & |u| > \hat{c} \end{cases} \quad (8)$$

که در آن:

$$V^\pm(u, c) = \begin{cases} \pm \frac{1}{4\hat{c}} (u \pm \hat{c})^2 & |u| \leq \hat{c} \\ \frac{1}{2} (u \pm |u|) & |u| > \hat{c} \end{cases} \quad (9)$$

1- Advection upstream splitting method (AUSM)

۲- AUSMDV* (شایان ذکر است که روش AUSMDV ترکیب دو روش AUSMD و AUSMV می باشد. AUSMV از دسته روش های تجزیه بردار شار Flux Vector Splitting می باشد، بنابراین به روش AUSM حرف V اضافه شده است. روش AUSMD از جمله روش های تجزیه تفاضلی شار Flux difference splitting می باشد، بنابراین حرف D به انتهای AUSM اضافه شده است.)

۳-۳- گسسته سازی عبارت ناپایستار

عبارت ناپایستار را می توان به صورت زیر گسسته سازی کرد [۵]:

$$\left[\alpha \frac{\partial p^i}{\partial x} \right]_j = \frac{1}{\Delta x} (\bar{\alpha}_{j-1/2} P^+ (u_j, \hat{c}_{j-1/2}) p_j^i + \bar{\alpha}_{j+1/2} P^- (u_{j+1}, \hat{c}_{j+1/2}) p_{j+1}^i) - \frac{1}{\Delta x} (\bar{\alpha}_{j-1/2} P^+ (u_{j-1}, \hat{c}_{j-1/2}) p_{j-1}^i + \bar{\alpha}_{j+1/2} P^- (u_j, \hat{c}_{j+1/2}) p_j^i) \quad (20)$$

۴-۴- مدل سازی رتبه کاسته بدون تصویر گالرکین در یک چارچوب

بدون معادله

در مدل سازی رتبه کاسته بدون تصویر گالرکین، ایده اصلی استفاده از توابع متعامد بهینه ای می باشد که با زمان تغییر می کنند. در این صورت مودهای متعامد بهینه تغییرات آرام جریان را دنبال می کنند و چون با زمان متغیر هستند، تاثیر مودهای حذف شده با حل مدل اصلی جریان در فواصل زمانی مختلف جبران می شوند. در این روش، هر گام زمانی به دو بخش کلی تقسیم می شود. در بخش اول، شبیه سازی عددی مستقیم مسئله صورت گرفته و نمایه ها ذخیره شده و توابع متعامد تشکیل می شوند. در بخش دوم با استفاده از این توابع و حل های زمان های گذشته ضرایب توابع متعامد به دست می آیند. در نهایت این ضرایب در باقی مانده گام زمانی انتگرال گیری شده و متغیرهای وابسته در انتهای آن گام زمانی از توابع متعامد و ضرایب آن ها محاسبه می شوند. پس مدل سازی رتبه کاسته با استفاده از این روش شامل مراحل زیر می باشد [۷]:

۴-۱- شبیه سازی عددی در بازه زمانی Δt_f

شبیه سازی در زمان t^n شروع می شود و n_f گام با اندازه گام زمانی Δt به پیش می رود و نمایه های لازم در زمان $\Delta t_f = n_f \Delta t$ ذخیره می گردند. در تحقیق حاضر با استفاده از روش AUSMDV* معادلات حاکم به صورت عددی حل می شوند و نمایه های مورد نیاز به دست می آیند.

۴-۲- محاسبه توابع متعامد بهینه

روش های متفاوتی برای تشکیل توابع متعامد وجود دارد که از جمله آن ها می توان به روش ماتریس همبستگی و روش تجزیه مقدار تکین اشاره کرد. در این تحقیق از روش دوم برای محاسبه این توابع استفاده می شود. بدین ترتیب که پس از محاسبه ماتریس نمایه ها، با محاسبه حاصل ضرب ماتریس نمایه ها در ترانهاده آن، ماتریس جدیدی به دست می آید. توابع متعامد بهینه از حاصل ضرب مقادیر ویژه این ماتریس در ماتریس نمایه ها محاسبه می شوند.

۴-۳- بسط متغیرهای وابسته برحسب توابع متعامد و محاسبه

ضرایب مودهای متعامد بهینه

بدین منظور متغیرهای وابسته به صورت زیر بر روی توابع پایه متعامد بهینه تصویر می شوند:

$$U(x, t) = \mathcal{P}\bar{a}(t) = \sum_{k=1}^R a_k(t) \Phi_k(x) \quad (21)$$

در معادله بالا \bar{a} بردار a_k ها می باشد و عملگر \mathcal{P} به صورت تبدیل کننده ضرایب توابع متعامد بهینه به متغیرهای وابسته تعریف می شود. ضرب داخلی معادله (۲۱) و تابع Φ_k نتیجه زیر را می دهد.

$$\bar{a}(t) = QU \equiv \{(U(x, t), \Phi_k(x)), \forall k\} \quad (22)$$

در معادله بالا Q عملگری می باشد که بردار متغیرهای وابسته فیزیکی را به

ضرایب متعامد بهینه تبدیل می کند. از آنجا که \mathcal{P} و Q خطی می باشند، لذا این دو عملگر خواص زیر را دارند:

$$\mathcal{P}QU = Q\mathcal{P}\bar{a} = \bar{a} \quad (23)$$

همچنین، بسط با تعداد محدودی از توابع متعامد به صورت زیر تعریف می شود.

$$U_R(x, t) = \mathcal{P}_R \bar{a}(t) = \sum_{k=1}^R a_k(t) \Phi_k(x) \quad (24)$$

و

$$\bar{a}(t) = Q_R U \equiv \{(U(x, t), \Phi_k(x)), k=1, 2, \dots, R\} \quad (25)$$

در این صورت عملگرهای \mathcal{P}_R و Q_R عملگرهای بریده شده نامیده می شوند، به طوری که:

$$\mathcal{P}_R Q_R = U_R \quad (26)$$

۴-۴- انتگرال گیری در یک چارچوب بدون معادله از ضرایب توابع

متعامد بهینه با گام زمانی $\Delta t_c = n_c \Delta t$

هرچند در این مرحله می توان از تصویر گالرکین معادلات حاکم برای انتگرال گیری ضرایب استفاده نمود، ولی در اینجا برای کاهش زمان محاسبات از انتگرال گیری در یک چارچوب بدون معادله استفاده می شود. زیرا روش تصویر گالرکین نمی تواند دینامیک غیرخطی طولانی مدت جریان های گذرای غیر دوره ای با زمان را به خوبی مدل سازی نماید. در این روش از تصویر معادلات دیفرانسیل حاکم بر روی توابع پایه متعامد برای محاسبه ضرایب آنها استفاده نمی شود، بلکه با استفاده از ضرایب گام های زمانی قبل که در هنگام نمایه برداری محاسبه شده اند برای تشکیل یک معادله دیفرانسیل معمولی برای این ضرایب استفاده می شود. بدین سبب همواره گفته می شود که در این روش ضرایب توابع متعامد در یک چارچوب بدون معادله و بدون تصویر گالرکین محاسبه می شوند.

انتگرال گیری مدل عددی تا زمان $t_c^n = t_f^n + \Delta t_f$ داده های لازم را برای تشکیل توابع پایه متعامد و ضرایب آن ها فراهم می کند. با استفاده از این داده ها می توان ضرایب را در هر زمان دلخواه در فاصله زمانی Δt_f محاسبه نمود. بنابراین، با داشتن این ضرایب، روش انتگرال گیری در یک چارچوب بدون معادله شامل مراحل زیر می باشد.

الف) محاسبه ضرایب توابع پایه متعامد به صورت $a_k(t) = (U(x), \Phi_k)$ برای $t^n \leq t \leq t^n + \Delta t_f$

ب) تخمین طرف راست $da_k(t)/dt$ در زمان t_c به صورت [۱۰]:

$$\frac{da_k}{dt} = O(\delta t^{1/r}) = \sum_{j=0}^{n_c} \beta_j a_k(t_j) = g_k(t_c^n) \quad (27)$$

که $t_j = t_c^n - j\delta t, 1 \leq n_c \leq n_f$ و J_f مشخص کننده مرتبه تخمین تفاضل متناهی پس رو می باشد، همچنین β_j ها ضرایب مربوط به این تخمین می باشند که در جدول ۲ داده شده اند.

جدول ۲ ضرایب ثابت β_j برای مرتبه های مختلف تقریب تفاضل متناهی پس رو [۷]

β_r	β_k	β_l	β_s	n_c	J_f
-	-	$-\frac{1}{\delta t}$	$\frac{1}{\delta t}$	۱	۱
-	$\frac{1}{2\delta t}$	$-\frac{4}{2\delta t}$	$\frac{3}{2\delta t}$	۲	۲
$\frac{9}{6\delta t}$	$\frac{9}{6\delta t}$	$-\frac{18}{6\delta t}$	$\frac{11}{6\delta t}$	۳	۳

$$q_L = \begin{pmatrix} p(\text{kPa}) \\ \alpha_g \\ u_g(\text{m/s}) \\ u_l(\text{m/s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265 \\ 0/3 \\ 65 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad q_R = \begin{pmatrix} p(\text{kPa}) \\ \alpha_g \\ u_g(\text{m/s}) \\ u_l(\text{m/s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265 \\ 0/9 \\ 50 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (29)$$

در شکل ۳ کسر حجمی فاز گاز با استفاده از روش مستقیم و روش رتبه کاسته با استفاده از تعداد سلول های محاسباتی مختلف با نتایج مرجع [۳] مقایسه شده است. ملاحظه می شود که مدل رتبه کاسته به خوبی و با دقت مناسب نتایج روش مستقیم را پیش بینی می کند.

در شکل ۴ توزیع سرعت فاز گاز در امتداد لوله در زمان ۰/۱ ثانیه نشان داده شده است. ملاحظه می شود که سرعت فاز گاز در میانه لوله افزایش یافته است. علت این امر این است که سرعت اولیه فاز مایع در سمت راست دیافراگم بیشتر از مقدار اولیه آن در سمت چپ می باشد. با پاره شدن دیافراگم، بخشی از مایع ناحیه نزدیک به دیافراگم را ترک می کند و گاز جای آن را می گیرد که باعث افزایش کسر حجمی فاز گاز و در نتیجه کاهش فشار مخلوط می گردد. کاهش فشار مخلوط به افزایش سرعت فاز گاز منتهی گردیده است. علاوه بر این، در حدود $x=85 \text{ m}$ خطایی میان حل مرجع و حل مستقیم مشاهده می شود، که علت آن ۱TVD نبودن روش حل مستقیم مسئله می باشد. در شکل ۵، سرعت فاز مایع و در شکل ۶ فشار فازها با استفاده از دو روش به کار رفته بر روی شبکه های محاسباتی با اندازه های مختلف ارائه شده است. ملاحظه می شود که نتایج روش رتبه کاسته به خوبی با نتایج حل مستقیم مطابقت دارد. برای حل جریان با استفاده از تجزیه متعامد بهینه، یک گام زمانی به دو بخش تقسیم می شود. ابتدا ۱۰ نمایه از حل مستقیم برداشت شده و پس از تعیین توابع و ضرایب روش تجزیه متعامد بهینه، با استفاده از گام زمانی به اندازه ۱۲ برابر آخرین گام زمانی حل مستقیم، شبیه سازی جریان صورت پذیرفته است. مطابق جدول ۳، این تعداد نمایه برداری بدین سبب انتخاب شده است که ضمن داشتن دقت عددی مناسب، بیشترین کاهش زمان محاسبات را در پی داشته است.

مقایسه زمان محاسباتی دو روش نشان می دهد که مقدار کاهش زمان محاسباتی به شبکه به کار رفته بستگی دارد. همان گونه که از جدول ۴ معلوم است، با افزایش تعداد سلول های محاسباتی، کارایی روش رتبه کاسته در کاهش زمان محاسباتی افزایش می یابد. نتایج به دست آمده نشان می دهد که مدل رتبه کاسته تا حدود ۴۵ درصد زمان محاسبات را کاهش داده است. شایان ذکر است که محاسبات مربوطه با استفاده از یک رایانه شخصی با واحد پردازنده مرکزی با مشخصات Intel-R- Core™2Duo CPU 2.5 GHz صورت پذیرفته است.

جدول ۳ زمان محاسباتی و مقیاس خطای مدل رتبه کاسته بر روی یک شبکه ۱۰۰۰ سلولی

تعداد نمایه	گام زمانی Δt_c	زمان محاسباتی (ثانیه)	مقیاس مرتبه اول خطا
۱۰	$8 \Delta t$	۱۰/۳۴	$7/03 \times 10^{-2}$
۱۰	$10 \Delta t$	۹/۲۶	$3/5 \times 10^{-2}$
۱۰	$12 \Delta t$	۸/۰۸	$2/1 \times 10^{-2}$
۱۰	$14 \Delta t$	۸/۶۷	$4/3 \times 10^{-2}$
۲۰	$20 \Delta t$	۱۰/۴۷	$2/41 \times 10^{-2}$
۲۰	$18 \Delta t$	۱۰/۹۷	$2/47 \times 10^{-2}$
۲۰	$24 \Delta t$	۹/۹۹	$3/77 \times 10^{-2}$

1- Total Variation Diminishing

با توجه به اینکه طرف راست معادله (۲۷) از تقریب عددی به دست آمده است، می توان این معادله را با استفاده از یک روش انتگرال گیری استاندارد مانند روش اویلر مرتبه اول به صورت زیر حل نمود [۱۰].

$$a_k(t^{n+1}) = a_k(t^n) + \Delta t_c g_k(t^n) + O(\Delta t_c^2) \quad (28)$$

پ) در رابطه بالا J_c مرتبه تقریب می باشد. مشتق های مرتبه بزرگ تر مانند $g_k(t^n)$ مرتبه اول آن با استفاده از تقریب تفاضل پس رو قابل محاسبه می باشند [۷].

ت) محاسبه متغیرهای وابسته از ضرایب توابع متعامد بهینه در زمان

$$t^{n+1} = t_c^n + t_f^n + \Delta t_f$$

ث) تکرار از مرحله اول تا اینکه زمان مورد نظر به پایان برسد.

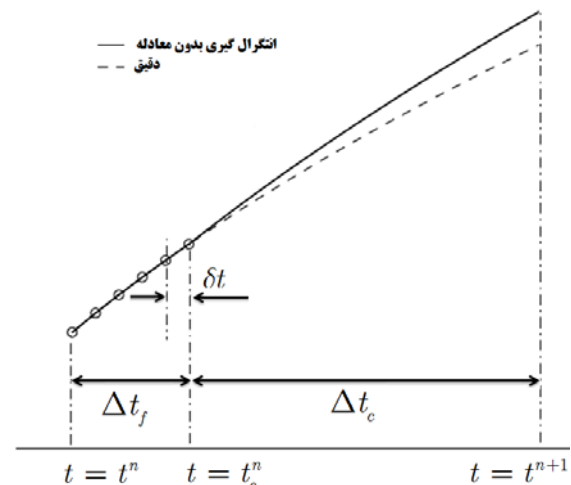
نمایش تصویری این مراحل در ۱ نشان داده شده است.

۵- نتایج

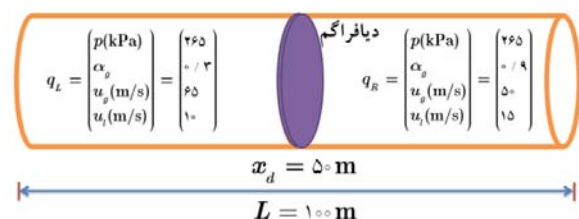
در این بخش دو مسئله استاندارد دوفازی با استفاده از روش حل عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته متناظر مورد بررسی قرار می گیرد. در مسئله اول یک لوله ضربه دوفازی و در مسئله دوم پدیده جدایش آب و هوا در یک لوله عمودی بررسی می شود. در این تحقیق هدف آن است که کارایی مدل رتبه کاسته در پیش بینی جریان های دوفازی و همچنین میزان کاهش نسبی زمان محاسبات مورد بررسی قرار گیرد.

۵-۱- مسئله لوله ضربه با سرعت نسبی بزرگ اصلاح شده

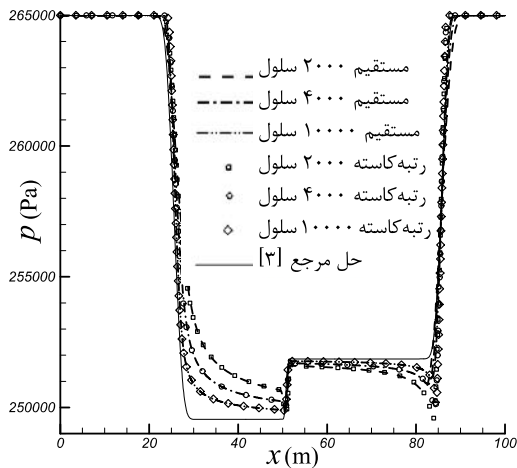
در این مسئله، مطابق شکل ۲، یک لوله افقی به طول ۱۰۰ متر با یک دیافراگم در مکان ۵۰ متری در نظر گرفته می شود. شرایط اولیه جریان در سمت چپ و راست جریان در رابطه ذکر شده است. در لحظه صفر دیافراگم پاره می شود و فازهای دو طرف تحت تاثیر همدیگر قرار می گیرند.



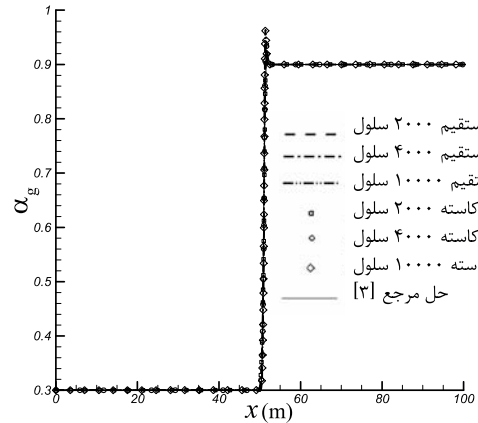
شکل ۱ مراحل مختلف مدل سازی رتبه کاسته با استفاده از توابع تجزیه متعامد بهینه بدون تصویر گالری در یک چارچوب بدون معادله [۱۰]



شکل ۲ شماتیک لوله ضربه دوفازی



شکل ۳ فشار جریان در امتداد لوله برای مسئله لوله ضربه اصلاح شده در زمان ۰/۱ ثانیه



شکل ۴ توزیع کسر حجمی فاز گاز در زمان ۰/۱ ثانیه در امتداد لوله برای مسئله لوله ضربه اصلاح شده

۵-۲- مسئله جدایش آب و هوا

این مسئله شامل یک لوله قائم به ارتفاع ۷/۵ متر می باشد که از بالا و پایین بسته می باشد. در لحظه صفر در این لوله فشار یکنواخت ۱۰۰ کیلوپاسکال و کسر حجمی $\alpha_g = 0/5$ در کل لوله برقرار است. سپس، با گذشت زمان، آب و هوا تحت تاثیر جاذبه شروع به جدا شدن می کنند. این مسئله اولین بار توسط کوکول مطرح شد [۱۵] و از دو جنبه زیر قابل توجه است.

۱- حضور گرادیان های شدید

۲- وجود نواحی از جریان که در آنها کسر حجمی یکی از فازها بسیار نزدیک صفر و یا بسیار نزدیک به یک می باشد. در اصطلاح به این نوع جریان های دوفازی، جریان های نزدیک تک فاز گفته می شود.

برای کسر حجمی و سرعت فاز مایع روابط تحلیلی تقریبی زیر موجود است.

$$\alpha_g = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2}gt^2 \\ 0.5 & \frac{1}{2}gt^2 \leq x \leq L - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 & L - \frac{1}{2}gt^2 < x \end{cases} \quad (30)$$

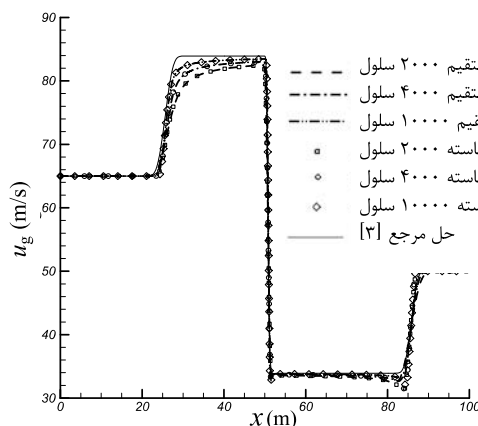
$$u_l(x,t) = \begin{cases} \sqrt{2gx} & \text{for } x < \frac{1}{2}gt^2 \\ gt & \text{for } \frac{1}{2}gt^2 \leq x \leq L - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 & \text{for } L - \frac{1}{2}gt^2 < x \end{cases} \quad (31)$$

در مسئله جدایش آب و هوا، اگر جریان بدون ترم تنش فصل مشترک در نظر گرفته شود، سرعت فاز گاز در انتهای لوله به چندین هزار متر بر ثانیه می رسد و مشکلات ناپایداری ایجاد می کند. این مشکل توسط اوجه و فلاتن [۵] با در نظر گرفتن عبارت تنش فصل مشترک به صورت زیر حل گردید.

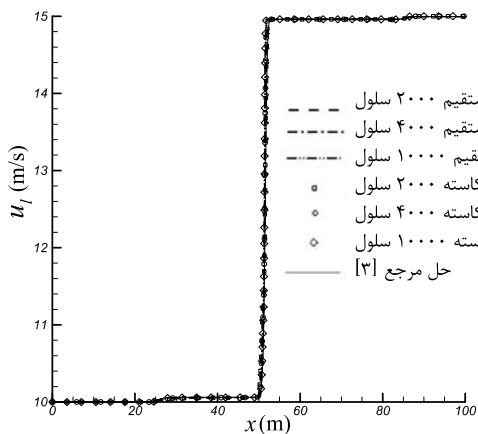
$$F_g^d = -C e^{-k\alpha_g} \alpha_g \alpha_l \rho_g (u_g - u_l) \quad (32)$$

در رابطه بالا $C = 5 \times 10^{-2} (s^{-1})$ و $k = 50$ انتخاب می شوند.

در شکل های ۷ تا ۹ نتایج به دست آمده از حل مستقیم مسئله با استفاده از روش عددی AUSMDV* و نتایج حل مدل رتبه کاسته با استفاده از تجزیه متعامد بهینه بر روی شبکه های محاسباتی گوناگون ارائه شده است. در شکل ۷ کسر حجمی فاز گاز نشان داده شده و ملاحظه می شود که روش رتبه کاسته با دقت بسیار خوبی نتایج روش عددی مستقیم را پیش بینی کرده



شکل ۵ سرعت فاز گاز در امتداد لوله برای مسئله لوله ضربه اصلاح شده در زمان ۰/۱ ثانیه



شکل ۶ سرعت فاز مایع در امتداد لوله در زمان ۰/۱ ثانیه برای مسئله لوله ضربه اصلاح شده

جدول ۴ زمان محاسبات و درصد کاهش نسبی با استفاده از روش رتبه کاسته برای لوله ضربه

درصد کاهش	زمان محاسباتی (ثانیه)		تعداد سلول
	روش مستقیم	روش رتبه کاسته	
۲۵	۰/۱۲۴۸	۰/۰۹۳۶	۱۰۰
۲۵/۷	۱/۰۸۸	۸/۰۸	۱۰۰۰
۳۷/۱	۵۱/۹۸	۳۲/۶۶	۲۰۰۰
۳۷/۳	۲۰۸	۱۳۰/۳۷	۴۰۰۰
۴۴/۹	۸۷۳/۷۳	۴۸۱	۱۰۰۰۰

۶- نتیجه گیری و جمع بندی

با توجه به حجم زیاد محاسبات مورد نیاز در جریان های دوفازی غیردایم استفاده از روش های سریع تر در این جریان ها از اهمیت زیادی برخوردار است. در تحقیق حاضر، مدل سازی رتبه کاسته جریان های دوفازی براساس تجزیه متعامد بهینه صورت پذیرفت. مدل دوسیالی چهار معادله ای به عنوان مدل ریاضی مسئله انتخاب شد. حل عددی مستقیم مسئله با استفاده از روش بقای در امتداد مسیر AUSMDV ارائه گردید. در ادامه روش تجزیه متعامد بهینه در یک چارچوب بدون معادله و بدون تصویر گالریکین به عنوان روشی برای مدل سازی رتبه کاسته مسئله بیان شد. به کارگیری روش AUSMDV* نمایه های مورد نیاز برای تشکیل توابع متعامد بهینه استخراج گردید. این توابع بهینه با استفاده از روش تجزیه مقدار تکین محاسبه شدند. در ادامه، به منظور کاهش زمان محاسباتی، روش انتگرال گیری در یک چارچوب بدون معادله ارائه گردید. یک مسئله لوله ضربه دوفازی و همچنین مسئله جدایش آب و هوا، که یکی از پیچیده ترین مسائل دوفازی است، با استفاده از مدل رتبه کاسته حاضر حل شد و نتایج به دست آمده با نتایج حل مستقیم مقایسه شد. نتایج به دست آمده نشان دهنده توانایی بالای روش رتبه کاسته در تحلیل جریان های دوفازی است. مقایسه زمان محاسباتی مدل رتبه کاسته با روش مستقیم بیانگر آن است که مدل رتبه کاسته بر روی شبکه های ریز کارایی بالاتری دارد. همچنین، مدل رتبه کاسته بر روی شبکه های ریز می تواند تا حدود ۳۵ درصد زمان محاسبات را کاهش دهد.

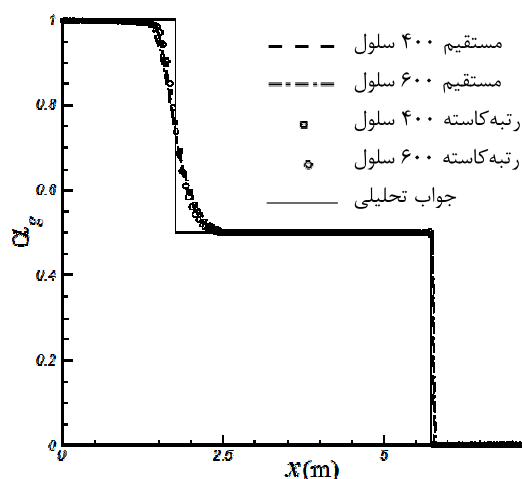
در مسائل بررسی شده در این تحقیق، گرادیان های شدید سرعت، فشار و کسر حجمی وجود داشت که مدل رتبه کاسته به کار رفته به خوبی توانست این گرادیان ها را ردگیری نماید و تا حدود ۳۵ درصد زمان محاسبات را کاهش دهد. در مسائل کاربردی غالباً، سرعت و فشار و سایر متغیرهای جریان توزیع همواری دارند. بنابراین، انتظار می رود که بتوان در چنین مسائلی زمان محاسباتی را با استفاده از مدل رتبه کاسته براساس تجزیه متعامد بهینه به مقدار بیشتری کاهش داد.

۷- مراجع

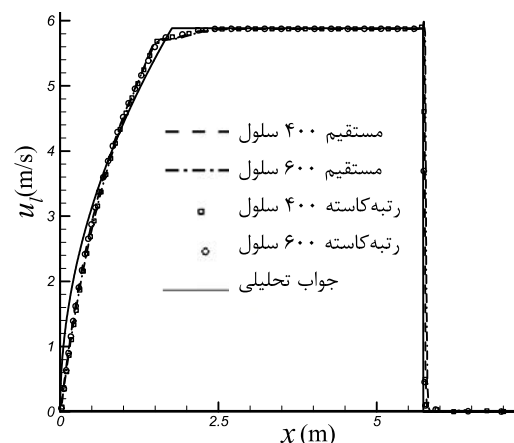
- [1] P. Loilier, Numerical Simulation of Two-Phase Gas-Liquid Flows in Inclined and Vertical Pipelines, PhD Thesis, Cranfield University, school of engineering, London, 2006.
- [2] S. T. Munkejord, Analysis of the Two-Fluid Model and the Drift-Flux Model for Numerical Calculation of Two-Phase Flow, PhD thesis, Department of Energy and Process Engineering, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2005.
- [3] S. T. Munkejord, Comparison of Roe-type methods for solving the two-fluid model with and without pressure relaxation, *Computer and fluids*, Vol. 36, pp. 1061-1080, 2007.
- [4] C. Omgba-Essama, Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows (Application to Stratified and Slug Flow Regimes), PhD Thesis, School of engineering, Cranfield University, London, 2004.
- [5] S. Evje, T. Flatten, Hybrid flux-splitting schemes for a common two-fluid model, *Journal of Computational Physics*, Vol. 192, pp. 175-210, 2003.
- [6] M. Behbahani-Nejad, Y. Shekari, The accuracy and efficiency of a reduced-order model for transient flow analysis in gas pipelines, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 73, pp. 13-19, 2010.
- [7] K. Ashrafi, Reduced Order Modeling of Unsteady Shallow Water Equations using Proper Orthogonal Decomposition, PhD Thesis, University of Tehran, Mechanical engineering department, Tehran, 2006 (In Persian).
- [8] S. S. Ravindran, A reduced-order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 34, pp. 425-448, 2000.
- [9] K. Ito, S. S. Ravindran, A reduced-order method for simulation and control of fluid flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 143, pp. 403-425, 1998.
- [10] S. S. Srisup, et al., Equation free/ Galerkin- free POD- assisted computation of incompressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 207, pp. 568-587, 2005.

است. همچنین توزیع سرعت فاز مایع را می توان در شکل ۸ مشاهده نمود. همان گونه که در این شکل نشان داده شده، مدل رتبه کاسته به خوبی و با دقت بسیار بالایی توانسته است نتایج حل مستقیم بر روی شبکه متناظر را تولید نماید. برای مدل سازی رتبه کاسته در هر مرحله ۱۰ نمایه برداشت شده و پس از تعیین توابع و ضرایب روش تجزیه متعامد بهینه، با استفاده از گام زمانی به اندازه ۱۲ برابر آخرین گام زمانی حل مستقیم، شبیه سازی جریان با استفاده از تجزیه متعامد بهینه صورت پذیرفته است.

در جدول ۵ مقایسه زمان محاسباتی روش رتبه کاسته با روش مستقیم صورت پذیرفته است، ملاحظه می شود که در این مسئله نیز روش رتبه کاسته بر روی شبکه های ریزتر کارایی بهتری دارد و توانسته است تا حدود ۳۵ درصد زمان محاسبات را کاهش دهد.



شکل ۷ کسر حجمی فاز گاز در امتداد لوله برای مسئله جدایش آب و هوا در زمان ۰/۶ ثانیه



شکل ۸ سرعت فاز مایع در امتداد لوله برای مسئله جدایش آب و هوا در زمان ۰/۶ ثانیه

جدول ۵ زمان محاسبات و درصد کاهش نسبی آن با استفاده از روش رتبه کاسته

درصد کاهش	زمان محاسباتی (ثانیه)		تعداد سلول
	روش مستقیم	روش رتبه کاسته	
۲۶/۹	۷/۵۶	۱۰/۳۵	۱۰۰
۲۸/۶	۲۹/۴	۴۱/۱۸	۲۰۰
۲۹/۷	۱۱۷	۱۶۶/۴۶	۴۰۰
۳۵/۲	۲۴۵	۳۷۸/۲۳	۶۰۰

- [14] M. R. Ansari, A. Daramizadeh, Numerical modeling of two-phase slug flow in horizontal and inclined channels using hyperbolic two-fluid model, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 12, pp. 34-47, 2012. (in Persian)
- [15] F. Coquel, et al, A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, pp. 272-288, 1997.
- [11] S. Sirisup, M. Maleewong, Online projective integral with proper orthogonal decomposition for incompressible flows past NACA0012 airfoil, *Modelling and Simulation in Engineering*, Vol. 2012, pp. 1-17, 2012.
- [12] D. Bestion, The physical closure laws in the CATHARE code, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 124, pp. 229-245, 1990.
- [13] M. R. Ansari, A. Daramizadeh, Slug type hydrodynamic instability analysis using a five equations hyperbolic two-pressure, two-fluid model, *Ocean Engineering*, Vol. 52, pp. 1-12, 2012.