

طراحی بهینه فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞ با استفاده از روش بهینه‌سازی چند هدفیمجتبی معصوم نژاد^۱، علی معافی^۲، علی جمالی^{۳*}، نادر نریمان‌زاده^۴

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۳- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۴- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

* رشت صندوق پستی ۳۷۵۶، ali.jamali@guilan.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۳ فروردین ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۷ تیر ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۳۱ فروردین ۱۳۹۳

کلید واژگان:

فیلتر کالمن

فیلتر H_∞ فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞

تخمین متغیرهای حالت سیستم

بهینه‌سازی چند هدفی

در چند دهه گذشته، شناسایی متغیرهای حالت و پارامترهای یک مدل دینامیکی از روی داده‌های اندازه‌گیری شده ناقص و مخدوش با نویز مورد توجه محققان قرار گرفته است. فیلترهای کالمن و H_∞ از معروف‌ترین روش‌های شناسایی مدل و پالایش داده‌های مخدوش هستند. فیلتر کالمن در صورت وجود اطلاعات کافی در مورد نویزهای فرایند دارای عملکرد مناسبی است به‌گونه‌ای که میانگین مجذور خطای تخمین را حداقل می‌کند. همچنین فیلتر H_∞ مستقل از اطلاعات نویزهای فرایند، به‌وسیله یک حد بالای محدود کننده تخمینی ارائه می‌دهد که در مقابل اغشاشات مدل مقاوم است. در این مقاله فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞ ارائه شده است که به‌وسیله آن محدوده اجرایی فیلتر H_∞ درحالی بکار برده خواهد شد که به طور هم‌زمان محدوده اجرایی فیلتر کالمن که همان حداقل کردن میانگین مجذور خطای تخمین است، برآورده شود. با استفاده از روش بهینه‌سازی چند هدفی نقاط پارتو غیر برتر طراحی از دید دو تابع میانگین مجذور خطا و حد بالای فیلتر H_∞ برای دو مورد مطالعاتی ارائه شده است. شبیه‌سازی برای دو مورد مطالعاتی نشان دهنده عملکرد مقاوم و کمینه بودن میانگین مجذور خطاها برای نقطه مصالحه طراحی است.

Optimal design of mixed Kalman- H_∞ filter using multi objective optimization method

Mojtaba Masoumnezhad, Ali Moafi, Ali Jamali*, Nader Nariman-zadeh

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran.

* P. O. B. 3756 Rasht, Iran. ali.jamali@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 March 2013
Accepted 08 July 2013
Available Online 20 April 2014

Keywords:

Kalman Filter
 H_∞ Filter
Mixed Kalman- H_∞ Filter
State Estimation
Multi Objective Optimization

ABSTRACT

Dynamic model identification and state variables estimation from the corrupted measurement data have been attracted much research efforts during the recent years. In this way, Kalman and H-infinity filters have been increasingly used to estimate the parameters individually. In this paper, a mixed kalman- H_∞ filter is designed in an innovative approach using a multi-objective optimization method. It is desired to simultaneously employ the advantages of both filters to minimize both the root-mean squared errors and the upper bounds limit of estimation errors associated with Kalman and H-infinity filters, respectively. Some Pareto optimum design points are presented for two case studies from which trade-off optimum design points can be simply selected.

۱- مقدمه

آن در سایر موارد صنعتی نیز شد. این کاربرد گسترده در صنعت، سبب توجه به عدم عملکرد مناسب فیلتر کالمن در مسائل تخمین پارامتر موجود در صنعت به دلیل موجود نبودن اطلاعات دقیق در مورد کوواریانس نویزهای فرایند و مشاهده‌گر شد [۳-۵].

فیلتر H_∞ به طور مشخص برای مقاوم‌سازی تخمین در مقابل تغییرات کوواریانس نویزهای فرایند و مشاهده‌گر طراحی شده است [۶]. برخلاف فیلتر کالمن که برای تخمین پارامترهای سیستم از مشخصات آماری نویزهای سیستم استفاده می‌کند، فیلتر H_∞ مستقل از کوواریانس نویزهای فرایند و مشاهده‌گر از یک محدوده طراحی برای این کار بهره می‌گیرد. در سال‌های

فیلتر کالمن ابزاری مؤثر برای تخمین پارامترها و متغیرهای مخدوش با نویز برای یک سیستم دینامیکی است [۱]. این فیلتر با استفاده از مقادیر اندازه‌گیری شده‌ای که توسط مشاهده‌گر دارای نویز یا عدم دقت در طی زمان ثبت شده است، متغیرهای حالت سیستم را تا حد امکان نزدیک به مقدار متغیرهای عاری از نویز فرایند تخمین می‌زند. فیلتر کالمن از یک سری مجموعه محاسبات برگشتی براساس حداقل کردن میانگین مجذور خطای تخمین برای تخمین بهینه متغیرها و پارامترهای سیستم استفاده می‌کند [۲]. موفقیت‌های این روش در ابتدا در کاربردهای صنعت هوافضا باعث کاربرد

Please cite this article using:

M. Masoumnezhad, A. Moafi, A. Jamali, N. Nariman-zadeh, Optimal design of mixed Kalman- H_∞ filter using multi objective optimization method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 2, pp. 128-132, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

$$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T] \quad (7)$$

به‌روزرسانی مقادیر میانگین و کوواریانس بر پایه مقادیر تخمین زده شده در گام قبل به صورت معادلات (۸) و (۹) انجام می‌شود.

$$\hat{x}_{k+1}^- = F\hat{x}_k^+ + G_u u_k \quad (8)$$

$$P_{k+1}^- = FP_k^+ F^T + Q_k \quad (9)$$

به‌روزرسانی مقادیر میانگین و کوواریانس بر پایه مقادیر داده‌های اندازه‌گیری شده به صورت معادلات (۱۰) تا (۱۲) انجام می‌شود.

$$K_k = P_{k+1}^- H_k^T (H_k P_{k+1}^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (10)$$

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k+1}^-) \quad (11)$$

$$P_{k+1}^+ = (I - K_k H_k) P_{k+1}^- \quad (12)$$

فیلتر کالمن می‌تواند تخمین مناسبی از متغیرهای حالت سیستم ارائه کند در صورتی که شرایط خاصی فراهم باشد [۱۰، ۹].

۱- اطلاعات آماری دقیقی در مورد کوواریانس‌های نویزهای فرایند و مشاهده‌گر یعنی Q_k و R_k در هر مرحله زمانی باید در دسترس باشند.

۲- تابع هدف فیلتر کالمن، حداقل کردن میانگین مجذور خطاهای برآورد در طی فرایند است. چنانچه تابع هدف دیگری مدنظر طراح باشد فیلتر کالمن همواره نمی‌تواند عملکرد قابل قبولی داشته باشد.

۳- نیاز به شناختن توابع و ماتریس‌های مدل دینامیکی سیستم یعنی F و H دارد.

۳- فیلتر H_∞

فیلتر H_∞ برای تخمین متغیرهای حالت فرایند، مستقل از کوواریانس‌های نویزهای سیستم عمل می‌کند و جهت مقاوم بودن تخمین در مقابل نویزهای فرایند و مشاهده‌گر از یک حد بالای انرژی استفاده می‌کند که توسط طراح انتخاب می‌شود. در نتیجه در صنعت و پروژه‌های مهندسی به دلیل عدم نیاز به شناخت دقیق مدل و نویزهای آن کاربرد وسیع‌تری نسبت به فیلتر کالمن دارد [۱۴، ۱۴]. این فیلتر در مقایسه با فیلتر کالمن از محافظه‌کاری بسیار بالاتری برخوردار است.

الگوریتم عملکردی فیلتر H_∞ برای مدل دینامیکی خطی زمان گسسته نشان داده شده در معادلات (۱) و (۲) به‌گونه‌ای است که تابع هدف نشان داده شده در معادله (۱۳) را کمینه کند.

$$J_\infty = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \|x_k - \hat{x}_k\|_{S_k}^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|w_k\|_{Q_k}^2 + \|v_k\|_{R_k}^2)} < \frac{1}{\theta} \quad (13)$$

که در آن P_0, Q_k, R_k, S_k ماتریس‌های مثبت معین متقارن می‌باشند که توسط مهندس طراح تحت شرایط خاص مسأله انتخاب می‌شوند و قید θ^{-1} حد بالای انرژی تابع هدف فیلتر H_∞ است که با افزایش مقدار پارامتر θ میزان وابستگی تخمین فیلتر H_∞ به مشخصات آماری نویزهای سیستم کاهش می‌یابد.

همچنین معادلات بروزرسانی متغیرهای حالت این فیلتر به صورت معادلات (۱۴) تا (۱۷) است [۱۱].

$$\bar{S}_k = L_k^T S_k L_k \quad (14)$$

$$K_k = P_k [I - \theta \bar{S}_k P_k + H_k^T R_k^{-1} H_k P_k]^{-1} H_k^T R_k^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_k + F_k K_k (y_k - H_k \hat{x}_k) \quad (16)$$

$$P_{k+1} = F_k P_k [I - \theta \bar{S}_k P_k + H_k^T R_k^{-1} H_k P_k]^{-1} F_k^T + Q_k \quad (17)$$

که در هر مرحله زمانی برای دستیابی به تخمین مناسب باید معادله (۱۸) برقرار شود.

$$P_k^{-1} - \theta \bar{S}_k + H_k^T R_k^{-1} H_k > 0 \quad (18)$$

اخیر فیلتر H_∞ توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است که این امر منجر به کاربردهای گسترده این فیلتر در مسائل مهندسی شده است [۷-۹]. این فیلتر بعد از فیلتر کالمن ارائه شده است، بنابراین از لحاظ بلوغ و توسعه یافتگی نسبت به فیلتر کالمن بهبود یافته است. از این رو فضای مناسب‌تری برای کارهای بیشتر در زمینه فیلتر H_∞ در قیاس با فیلتر کالمن وجود دارد. اما معمولاً در صورت وجود اطلاعات دقیق از کوواریانس نویزها، دقت تخمین و همچنین مقدار میانگین مجذور خطای تخمین در فیلتر کالمن از فیلتر H_∞ بهتر است [۱۰]. برای دستیابی به فیلتری با دقت تخمینی مشابه فیلتر کالمن و همچنین مقاوم بودن در مقابل کوواریانس نویزهای فرایند (مشابه فیلتر H_∞)، فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞ ارائه شده است [۱۲، ۱۱]. فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞ در مسایل فیلترینگ سیستم‌های خطی و غیرخطی بدون در نظر گرفتن بهینه‌سازی چند هدفی به دفعات توسط محققان مورد استفاده قرار گرفته است [۱۳، ۱۴]. در همه این موارد، ترکیب فیلتر کالمن با فیلتر H_∞ سبب بدست آمدن نتایج دقیق‌تری در تخمین پارامترها و متغیرهای حالت شده است [۱۵، ۱۶]. عملکرد مناسب فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞ وابسته به نحوه انتخاب حد بالای طراحی فیلتر H_∞ توسط طراح است [۱۷، ۱۸]. در این مقاله با بهره‌گیری از بهینه‌سازی چند هدفی طراحی بهینه‌ای هم‌زمان میانگین مجذور خطا و حد بالای فیلتر H_∞ مدنظر می‌باشد. الگوریتم فیلتر ترکیبی بر روی دو سیستم خطی زمان گسسته مورد استفاده قرار گرفته و نقاط پارتو بهینه غیر برتر استخراج و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که نقطه مصالحه طراحی از دید هر دو فیلتر دارای عملکرد مناسبی است. این نقطه علاوه بر مقاوم بودن دارای میانگین مجذور خطای تخمین مناسبی نیز می‌باشد.

۲- فیلتر کالمن

چارچوب اصلی مدل فضای حالت دینامیکی برای یک سیستم خطی زمان گسسته در معادلات (۱) و (۲) نشان داده شده است [۱۰].

$$x_{k+1} = Fx_k + G_u u_k + w_k \quad (1)$$

$$y_{k+1} = Hx_k + v_k \quad (2)$$

که در آن x_k بیانگر متغیرهای حالت نامعلوم سیستم، u_k بیانگر ورودی خارجی معلوم و y_k نیز بیانگر سیگنال قابل اندازه‌گیری است. نویز فرایند w_k از دینامیک سیستم ناشی شده و نویز مشاهده‌گر v_k ناشی از عدم قطعیت داده‌های ثبت شده توسط مشاهده‌گر است. نویزهای فرایند و مشاهده‌گر هر دو گوسی سفید بوده و دارای کوواریانس‌های به ترتیب R_k و Q_k می‌باشند. همچنین هر دو نویز معلوم فرض شده‌اند.

$$E(w_k w_j^T) = Q_k \delta_{k-j} \quad (3)$$

$$E(v_k v_j^T) = R_k \delta_{k-j} \quad (4)$$

ماتریس‌های مدل دینامیکی سیستم F, H و G معلوم فرض شده‌اند. هدف استفاده از فیلتر کالمن این است که متغیرهای حالت سیستم در لحظه $k+1$ (\hat{x}_{k+1}) براساس مقادیر معلوم در لحظه k (x_k) به گونه‌ای تخمین زده شود که تابع هدف نشان داده شده در معادله (۵) حداقل شود.

$$J_2 = \sum_{k=0}^N E(\|x_k - \hat{x}_k\|_2) \quad (5)$$

الگوریتم عملکردی فیلتر کالمن شامل ۳ مرحله است که عبارتند از:

مقادیر اولیه متغیرهای حالت سیستم (\hat{x}_0^+) و کوواریانس خطای سیستم (P_0^+) به صورت معادلات (۶) و (۷) فرض می‌شوند.

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0) \quad (6)$$

۴- فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞

این فیلتر ترکیبی از فیلترهای کالمن و H_∞ است که در آن سعی شده است تخمین متغیرهای حالت مدل دینامیکی خطی به‌گونه‌ای انجام پذیرد که توابع هدف فیلترهای کالمن و H_∞ نشان داده شده در معادلات (۱۹) و (۲۰) به طور هم‌زمان کمینه شوند.

$$J_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n E(\|x_k - \hat{x}_k\|_2) \quad (19)$$

$$J_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x_0} \frac{\sum_{k=0}^n \|x_k - \hat{x}_k\|_2^2}{\|x(0) - \hat{x}_0\|_{P_0}^2 + \sum_{k=0}^n (\|w_k\|_{Q_k}^2 + \|v_k\|_{R_k}^2)} \quad (20)$$

در بیان ساده‌تر فیلتر کالمن میانگین مجذور خطای تصادفی را کمینه می‌کند و فیلتر H_∞ خطای بدترین حالت را کمینه می‌کند.

هدف فیلتر ترکیبی ارائه شده، مشخص کردن یک تخمین‌زننده با فرم معادله (۲۱) است [۱۰]:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{F}x_k + Gu_k + Ky_k \quad (21)$$

که در آن، ماتریس \hat{F} یک ماتریس پایدار است.

برای تعیین \hat{F} در الگوریتم فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞ ماتریس مثبت نیمه معین P به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که معادله ریکاتی نشان داده شده در معادله (۲۲) برآورده شود.

$$P = FPF^T + Q + FP \left(\frac{I}{\theta^2} - P \right)^{-1} PF^T - P_a V^{-1} P_a^T \quad (22)$$

که در آن P_a و V به صورت معادلات (۲۳) و (۲۴) تعریف شده‌اند.

$$P_a = FPH^T + FP \left(\frac{I}{\theta^2} - P \right)^{-1} PH^T \quad (23)$$

$$V = R + HPH^T + HP \left(\frac{I}{\theta^2} - P \right)^{-1} PH^T \quad (24)$$

در نتیجه مقادیر ماتریس های K و \hat{F} در معادله (۲۱) بصورت معادلات (۲۵) و (۲۶) تعیین می‌شود.

$$K = P_a V^{-1} \quad (25)$$

$$\hat{F} = F - KH \quad (26)$$

۵- فیلتر ترکیبی بهینه کالمن و H_∞

این فیلتر از نظر ساختار مشابه فیلتر ترکیبی کالمن و H_∞ ارائه شده در مراجع [۱۳، ۱۲] است و در نظر دارد کمترین مقدار تخمین را به طور هم‌زمان با شرط مستقل بودن از مقادیر کوواریانس های نویزهای فرایند و مشاهده‌گر برآورد کند. برای دست‌یابی به این هدف استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفی پیشنهاد شده است. توابع هدف در الگوریتم پیشنهادی، همان توابع هدف فیلترهای کالمن و H_∞ ارائه شده در معادلات (۱۹) و (۲۰) می‌باشند و متغیر طراحی پارامتر حد بالای تابع H_∞ یعنی θ است. با توجه به روابط (۱۹) و (۲۰) مشاهده می‌گردد که با افزایش مقدار پارامتر θ به سمت بینهایت، توابع هدف فیلترهای کالمن و H_∞ یکسان می‌گردند و این منجر به وابستگی تخمین به مقادیر نویزهای فرایند و مشاهده‌گر می‌شود. از طرف دیگر، با کاهش مقدار پارامتر θ مقدار مجذور میانگین خطای برآورد (تابع هدف فیلتر کالمن) افزایش می‌یابد در حالی که تخمین ارائه شده دارای مقاومت بیشتری در مقایسه با نویزهای فرایند و مشاهده‌گر است. هدف الگوریتم پیشنهادی، تعیین مقدار پارامتر طراحی θ است به‌گونه‌ای که بین توابع هدف فیلترهای کالمن و H_∞ یک مصالحه طراحی برقرار شود.

۶- نتایج شبیه سازی

در این بخش، برای نشان دادن عملکرد قابل قبول و مقاوم فیلتر ترکیبی در مقایسه با فیلترهای کالمن و H_∞ از دو مدل سیستم دینامیکی خطی بهره

برده شده است. همچنین با استفاده از الگوریتم NSGA II نرم‌افزار متلب و بهینه‌سازی چند هدفی، رفتار فیلتر ترکیبی پیشنهادی به ازای مقادیر مختلف پارامتر حد بالای انرژی فیلتر H_∞ یعنی θ برای دو مدل مذکور مورد بررسی قرار گرفته است.

مثال اول: سیستم موقعیت‌یابی زاویه‌ای

مدل دینامیکی یک سیستم موقعیت‌یابی زاویه‌ای که بصورت یک موتور فرض شده است به صورت معادله (۲۷) است.

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = cu + w \quad (27)$$

که در آن، پارامترها و مقادیر به این صورت فرض شده‌اند [۱۰]:

$$J \text{ ممان اینرسی موتور و بار آن (10 kg.m}^2\text{)}$$

$$u \text{ ولتاژ اعمالی به موتور (0 V)}$$

$$B \text{ ضریب اصطکاکی ویسکوز (40)}$$

$$c \text{ ثابت موتور که ولتاژ کاری را به گشتاور مربوط می‌سازد (5)}$$

مدل فضای حالت زمان گسسته موقعیت‌یاب زاویه‌ای که با دوره تناوب $T=0.05$ s گسسته‌سازی شده است به صورت معادلات (۲۸) تا (۳۳) خواهد بود.

$$x_{k+1} = Fx_k + G_u u_k + G_w w_k \quad (28)$$

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (29)$$

$$H = [1 \ 0] \quad (30)$$

$$F = \exp(AT) \quad (31)$$

$$G_u = \frac{c}{B} \left[T - \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha T}}{\alpha}, 1 - e^{-\alpha T} \right]^T \quad (32)$$

$$G_w = \frac{1}{B} \left[T - \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha T}}{\alpha}, 1 - e^{-\alpha T} \right]^T \quad (33)$$

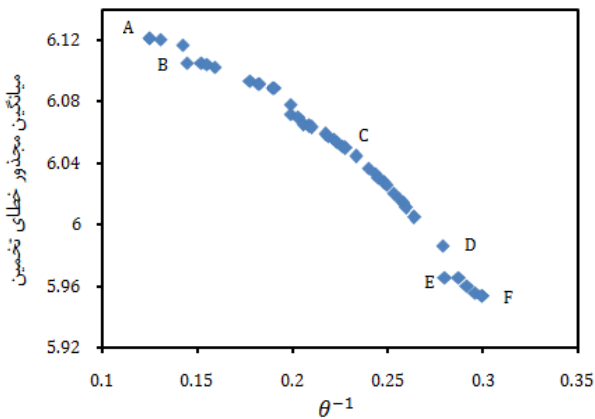
که در آن، θ زاویه شافت موتور و $\dot{\theta}$ سرعت زاویه‌ای شافت، متغیرهای بردار حالت می‌باشند.

نویزهای فرایند w و مشاهده‌گر v دارای کوواریانس‌های به ترتیب $Q = 0.05 \times \text{diag}(1,1)$ و $R = 0.5$ هستند. همچنین $\alpha = BJ^{-1}$ در نظر گرفته شده است [۱۰].

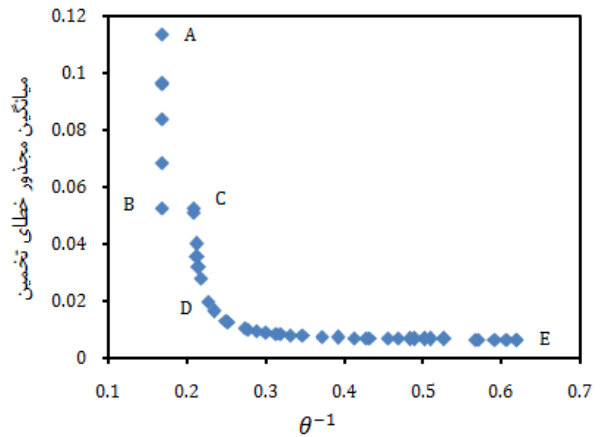
نمودار پارتو تغییرات توابع هدف فیلترهای کالمن و H_∞ به ازای تغییرات پارامتر حد بالای انرژی فیلتر H_∞ یعنی θ با استفاده از الگوریتم NSGA II جعبه ابزار بهینه‌سازی نرم‌افزار متلب با جمعیت ۸۰، تعداد نسل ۴۰۰، ضریب تقاطع و جهش به ترتیب ۰/۸ و ۰/۱ در شکل ۱ ترسیم شده است. نقاط A و E به ترتیب نشانگر بهترین عملکرد فیلترهای H_∞ و کالمن می‌باشند و نقطه طراحی D، به عنوان نقطه مصالحه طراحی بین فیلترهای کالمن و H_∞ منظور شده است.

همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، نقطه D نسبت به هر یک از نقاط بهینه تک هدفی A و E به ترتیب بیشترین تغییرات را نسبت به یک تابع هدف با کمترین تغییرات در مقدار تابع هدف دیگر دارد. به عبارتی با مصالحه کردن یکی از توابع هدف به مقدار ناچیز می‌توان شاهد تغییرات و بهبود چشمگیری در تابع هدف دیگر بود. به‌گونه‌ای که با مقایسه نقاط D و E مشاهده می‌شود که تابع هدف اول حدود ۶۶ درصد کاهش یافته است در حالی که تابع هدف دوم به اندازه بسیار ناچیزی افزایش یافته است و مشابه این موضوع برای مقایسه نقاط A و D نیز حاکم است.

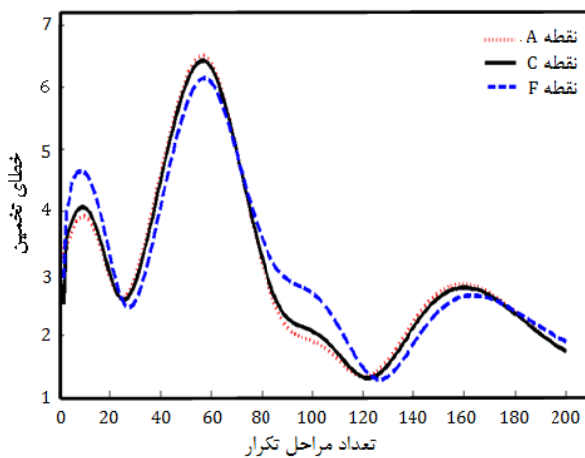
در شکل ۲ منحنی تغییرات لگاریتمی خطای سه نقطه طراحی A، D و E در طول زمان نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود منحنی تغییرات لگاریتمی خطای نقطه E واقع در نمودار پارتو دارای کمترین مقادیر در طی زمان انجام فرایند در مقایسه با دو نقطه دیگر طراحی (نقاط A و D) می‌باشد و مقادیر روی محور عمودی شکل ۱ نیز تأییدی بر این موضوع است.



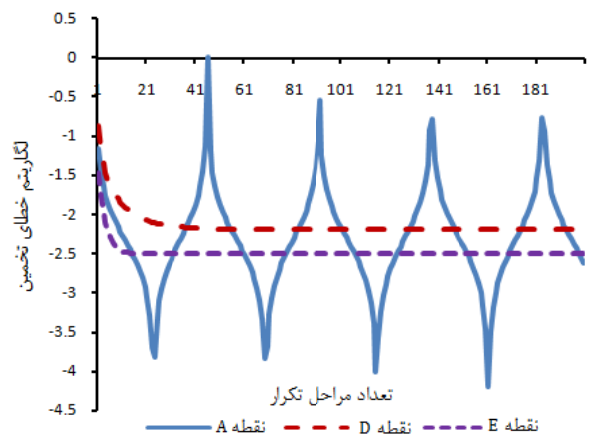
شکل ۳ نمودار پارتو یک آونگ وارون



شکل ۴ نمودار پارتو سیستم موقعیت‌یابی زاویه‌ای



شکل ۵ منحنی تغییرات خطای نقاط پارتو انتخابی در طول زمان برای یک آونگ وارون



شکل ۶ منحنی تغییرات لگاریتمی خطای نقاط پارتو انتخابی در طول زمان برای سیستم موقعیت‌یابی زاویه‌ای

$$H = [1; 0; 1; 0] \quad (38)$$

که در آن x بردار فضای حالت است و متغیرهای فضای حالت به ترتیب عبارتند از: موقعیت و سرعت گاری و زاویه و سرعت زاویه‌ای آونگ یعنی $x = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T$ همچنین مشخصات فیزیکی مدل نشان داده شده به صورت زیر است [۱۰]:

m جرم آونگ (0.2 kg)

M جرم گاری (1 kg)

l طول آونگ (1 m)

g شتاب گرانش زمین (ms^{-2})

و جرم آونگ بر روی انتهای آن متمرکز شده است. نویزهای فرایند w و مشاهده‌گر v دارای کوواریانس‌های به ترتیب $Q = 0.045 \times \text{diag}(1,1,1,1)$ و $R = 0.5 \times \text{diag}(1,1)$ هستند.

نمودار پارتو توابع هدف فیلتر کالمن و H_{∞} برای آونگ وارون به ازای تغییرات پارامتر طراحی فیلتر H_{∞} یعنی θ در شکل ۳ نمایش داده شده است. جهت ترسیم نمودار پارتو از الگوریتم NSGA II با مشخصاتی مشابه مثال سیستم موقعیت‌یابی زاویه‌ای استفاده شده است. نقاط A و F به ترتیب نشان دهنده کمترین مقدار توابع هدف فیلترهای H_{∞} و کالمن می باشند. نقطه C به عنوان نقطه مصالحه طراحی بین دو تابع هدف مذکور در نمودار پارتو منظور شده است.

منحنی تغییرات خطای نقاط A، C و F مربوط به پارتو شکل ۳، در شکل ۴ نمایش داده شده است.

همچنین تغییرات مقدار خطای تخمین از نقطه A تا نقطه E سیر نزولی داشته است که نشانگر عملکرد بهتر فیلتر کالمن در صورت فراهم بودن اطلاعات آماری دقیق در مورد کوواریانس نویزهای فرایند و مشاهده‌گر است.

همچنین در جدول ۱ رفتار و تغییرات میانگین مجذور خطای تخمین در نقاط A تا E به ازای نویزهای مدل و مشاهده‌گر بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نقطه A یعنی نقطه‌ای که فیلتر H_{∞} بهترین عملکرد را دارد، کمترین واریانس خطا وجود دارد و در نقطه E یعنی نقطه‌ای که فیلتر کالمن بهترین عملکرد را دارد بیشترین واریانس خطا روی می‌دهد که این تأییدی بر مستقل بودن فیلتر H_{∞} از کوواریانس نویزهای فرایند و مشاهده‌گر و وابستگی فیلتر کالمن بر میزان کوواریانس‌های مذکور است.

مثال دوم: مدل دینامیکی آونگ وارون
معادلات دینامیکی خطی زمان گسسته یک آونگ وارون به صورت معادلات (۳۴) تا (۳۸) است.

$$x_{k+1} = Fx_k + G_u u_k + w_k \quad (34)$$

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (35)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B}{l} & \frac{(M+m)g}{l} & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$G_u = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (37)$$

جدول ۱ مقادیر خطای سیستم به ازای اغتشاشات ورودی مختلف برای پارتنو انتخابی سیستم موقعیت‌یابی زاویه‌ای

نقطه	پارامتر طراحی	σ_w :						
		۰/۰۱۵	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۵۵	۰/۰۷	۰/۰۸
A	۵/۹۹۸۴	۰/۸۹۶۴	۱/۷۱۶۱	۱/۰۱۳۹	۰/۸۹۷۱	۰/۶۹۱۶	۰/۸۴۳۹	۱/۶۳۲۸
B	۵/۹۸۶	۰/۸۸۴۳	۰/۸۷۶۹	۲/۰۲۱۳	۱/۱۹۵۸	۰/۷۷۹۲	۱/۴۵۶۹	۱/۳۵۸۶
C	۴/۷۹۴۱	۰/۴۵۰۱	۱/۵۴۸۵	۱/۰۷۲۳	۱/۵۱۰۹	۰/۰۶۳۳	۱/۱۵۶۶	۱/۷۲۷۴
D	۴/۴۰۶۲	۰/۴۰۴۱	۱/۴۰۶۲	۳/۳۷۲۳	۱/۳۳۵۷	۰/۶۳۶۱	۱/۱۴۸۶	۱/۱۳۸۳
E	۱/۶۱۴۷	۰/۲۷۰۲	۰/۶۵۱۴	۱/۰۵۱۶	۱/۸۹۶۸	۳/۰۳۱۳	۵/۷۸۵۴	۴/۱۰۵۸

جدول ۲ مقادیر خطای سیستم به ازای اغتشاشات ورودی مختلف برای نقاط پارتنو انتخابی یک آونگ وارون

نقطه	پارامتر طراحی	σ_v :						
		۰/۰۱۵	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۵۵	۰/۰۷	۰/۰۸
A	۷/۹۹۹۹	۳/۰۰۱۶	۲/۹۷۹۴	۲/۹۷۵۶	۲/۹۸۰۸	۲/۹۸۶۶	۳/۰۱۵۱	۳/۰۰۰۲۳۷
B	۶/۹۱۴۵	۳/۰۱۶۸	۲/۹۸۱۴	۲/۹۷۶۸	۲/۹۸۱۷	۲/۹۸۷۵	۳/۰۱۶۷	۳/۰۰۰۳۳۷
C	۴/۴۷۶۱	۳/۰۹۶۸	۲/۹۷۰۵	۲/۹۸۵۸	۲/۹۸۷۲	۲/۹۹۲۲	۳/۰۲۰۲	۳/۰۰۲۱۲
D	۳/۵۸۰۳	۲/۹۸۷۱	۳/۱۵۷۷	۲/۹۷۰۲	۲/۹۹۹۹	۳/۰۱۱۲	۳/۰۲۵۴	۳/۰۰۴۶۴
E	۳/۵۶۶۹	۳/۱۸۷۱	۳/۱۶۲۱	۳/۱۳۴۱	۲/۹۹۵۱	۲/۹۹۸۱	۳/۰۲۳۹	۳/۰۰۵۷۶
F	۳/۳۳۵۴	۳/۲۲۵۶	۳/۰۰۵۶	۳/۰۹۰۱	۲/۹۹۴۹	۲/۹۹۷۹	۳/۰۲۳۸	۳/۰۰۸۱۲

[4] A. E. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, Second ed., MIT Press, Cambridge, MA, 1974.

[5] P. S. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation and Control*, first ed., pp. 444, New York San Francisco London: Academic Press, 1979.

[6] R. N. Banavar, *A game theoretic approach to linear dynamic estimation*, PhD. Thesis, University of Texas, Austin, 1992.

[7] H. Vikalo, B. Hassibi, A. T. Erdogan, T. Kailath, On robust signal reconstruction in noisy filter banks, *Signal Processing*, Vol. 85, No. 1, pp. 1-14, 2005.

[8] D. Labarre, E. Grivel, M. Najim, N. Christov, Dual H_{∞} -infinity Algorithms for Signal Processing-Application to Speech Enhancement, *Signal Processing, IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No. 11, pp. 5195-5208, 2007.

[9] A. Nemra, N. Aouf, Robust Airborne 3D Visual Simultaneous Localization and Mapping with Observability and Consistency Analysis, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 55, No. 4-5, pp. 345-376, 2009. English

[10] D. Simon, *Optimal State Estimation, Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches*: John Wiley & Sons, INC, 2006.

[11] G. Huijun, J. Lam, X. Lihua, W. Changhong, New approach to mixed H_2/H_{∞} -infinity filtering for polytopic discrete-time systems, *Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol. 53, No. 8, pp. 3183-3192, 2005.

[12] M. Masoumnezhad, A. Moafi, N. Nariman-Zadeh, *Optimal State Estimation of Inverted pendulum using Unscented H-infinity*, in 21st Annual International Conference on Mechanical Engineering, K.N.Toosi University of Technology, Tehran, 2013. (In Persian)

[13] Y. Fuwen, W. Zidong, Y. S. Hung, S. Huisheng, Mixed H_2/H_{∞} -infinity filtering for uncertain systems with regional pole assignment, *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, Vol. 41, No. 2, pp. 438-448, 2005.

[14] M. D. S. Aliyu, E. K. Boukas, *Discrete-time mixed H_2/H_{∞} -infinity nonlinear filtering*, in Proceeding of American Control Conference, Seattle, WA, pp. 5230-5235, 2008.

[15] W. Li, Y. Jia, H_{∞} -infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform, *Signal Processing*, Vol. 90, No. 12, pp. 3301-3307, 2010.

[16] H. Jwu-Sheng, Y. Chia-Hsing, Second-Order Extended H_{∞} -infinity Filter for Nonlinear Discrete-Time Systems Using Quadratic Error Matrix Approximation, *Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol. 59, No. 7, pp. 3110-3119, 2011.

[17] W. Jun-hou, S. Chun-lei, Y. Xing-tai, C. Jia-bin, *Sigma point H-infinity filter for initial alignment in marine strapdown inertial navigation system*, in Proceeding of 2nd International Conference on Signal Processing Systems (ICSPS), Vol. 1, pp. 580-584, 2010.

[18] P. Ni, S. Li, *Unscented H-infinity filter based simultaneous localization and mapping*, in Proceeding of the 30th Chinese Control Conference, pp. 3942-3946, 2011.

در جدول ۲، مقادیر میانگین مجذور خطای تخمین به ازای اغتشاشات ورودی مختلف برای نقاط A تا F ارائه شده است. کمترین مقدار واریانس خطا به ازای تغییرات نویزهای مدل و مشاهده‌گر در نقطه A و بیشترین مقدار واریانس خطا در نقطه F مشاهده می‌شود. با توجه به جدول ۲ می‌توان نتیجه گرفت در نقطه‌ای که فیلتر کالمن بهترین عملکرد در تخمین متغیرها را دارد (F)، با تغییر کوواریانس‌های فرایند و مشاهده‌گر نوسانات قابل ملاحظه‌ای در مقدار میانگین مجذور خطا وجود دارد. در حالی که مقدار میانگین مجذور خطا در نقطه A (نقطه بهینه عملکرد فیلتر H_{∞}) تغییر چشم‌گیری مشاهده نمی‌شود.

۷- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله برای تخمین متغیرهای حالت یک مدل دینامیکی خطی زمان گسسته از فیلتر ترکیبی کالمن و H_{∞} استفاده شده است. همچنین برای بهبود عملکرد فیلتر ترکیبی ارائه شده از بهینه‌سازی چند هدفی بهره گرفته شده است. با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفی NSGA II، نمودار پارتنو نقاط غیر برتر توابع هدف فیلترهای کالمن و H_{∞} بر اساس تغییرات پارامتر طراحی فیلتر H_{∞} برای دو مورد مطالعاتی بدست آمده‌اند و نقطه مصالحه طراحی از دید هر دو تابع هدف جهت تخمین و پالایش متغیرهای حالت مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که الگوریتم ترکیبی پیشنهادی در مقابل تغییرات نویزهای فرایند و مشاهده‌گر مقاوم بوده و تخمین مناسبی از متغیرهای حالت عاری از نویز مدل دینامیکی ارائه می‌دهد و این به آن معنی است که می‌توان دقت تخمین فیلتر کالمن و مستقل از کوواریانس نویزهای فرایند و مشاهده‌گر بودن فیلتر H_{∞} را هم‌زمان در مقادیر تخمین زده شده مشاهده کرد.

۸- مراجع

[1] R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *ASME Journal of Basic Engineering*, pp. 35-45, 1960.

[2] A. T. Nelson, *Nonlinear Estimation and Modeling of Noisy Time-Series by Dual Kalman Filtering Methods*, PhD Thesis, Dept. of Electrical and Computer Engineering, Oregon Graduate Institute of Science & Technology, 2000.

[3] S. Schmidt, *Applications of state-space methods to navigation problems*, New York: Academic Press, 1966.