



مطالعه تحلیلی تغییر شکل الاستیک- پلاستیک استوانه مرتبه‌ای هدفمند توخالی دوار

مهدی سلمانی‌تهرانی^{۱*}، محمدرضا همتی^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
 ۲- دانش‌آموخته کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
 * tehrani@cc.iut.ac.ir، ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱، صندوق پستی

اطلاعات مقاله

چکیده

مقاله پژوهشی کامل
 دریافت: ۲۹ مرداد ۱۳۹۲
 پذیرش: ۰۸ مهر ۱۳۹۲
 ارائه در سایت: ۳۱ خرداد ۱۳۹۳
 کلید واژگان:
 مواد مرتبه‌ای هدفمند
 استوانه توخالی دوار
 تغییر شکل الاستیک- پلاستیک ایده‌آل
 پلاستیسیته وابسته ترسکا

مقاله حاضر به مطالعه تحلیلی تغییر شکل الاستیک- پلاستیک استوانه مرتبه‌ای هدفمند دوار می‌پردازد. تحلیل بر پایه نظریه تغییر شکل‌های کوچک و برای حالت کرنش-صفحه‌ای انجام شده است. مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم به صورت تابع‌های توانی از مختصات شعاعی فرض شده‌اند. از پلاستیسیته ایده‌آل وابسته به معیار تسلیم ترسکا برای تحلیل تغییر شکل پلاستیک استفاده شده است. برای ارزیابی و اعتبارسنجی تحلیل‌ها، نتایج عددی با نتایج مشابه مربوط به حالت‌های خاص (استوانه همگن و استوانه هدفمند با چگالی و تنش تسلیم ثابت) که در مراجع پیشین موجود هستند، مقایسه و اعتبار نتایج نشان داده شده است. آن‌گاه اثر تغییر چگالی و تنش تسلیم، که در پژوهش‌های پیشین از آن چشم‌پوشی شده، بر تغییر شکل الاستیک- پلاستیک استوانه هدفمند دوار بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد چشم‌پوشی از تغییر چگالی و تنش تسلیم، نه تنها می‌تواند در اندازه جابه‌جایی شعاعی و مؤلفه‌های تنش و کرنش محاسبه شده، بلکه حتی در پیش‌بینی مکان آغاز تسلیم و روند گسترش ناحیه‌ی تغییر شکل پلاستیک نیز خطای قابل توجهی را به همراه داشته باشد.

Analytical study of elastic- plastic deformation of a rotating hollow FGM cylinder

Mehdi Salmani Tehrani^{1*}, MohammadReza Hemati²

1- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran
 2- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran
 * P.O.B 84156-83111, Isfahan, Iran, tehrani@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 20 August 2013
 Accepted 30 September 2013
 Available Online 21 June 2014

Keywords:
 Functionally Graded Material
 Rotating Hollow Cylinder
 Elastic-Fully Plastic Deformation
 Tresca Associated Plasticity

ABSTRACT

In this paper, elastic- plastic deformation of a rotating hollow FGM cylinder is analytically studied based on small strain theory and for plane-strain state. Variation of elasticity modulus, density and yield stress are assumed to obey power-law functions of radial coordinate. Material was assumed to obey Tresca yield criterion and its associated flow rule. To evaluate and validate the presented analysis, numerical results were compared with previously published results for homogeneous and also FGM cylinder with constant density and yield stress, as two special cases. Then the effect of density and yield stress variation, which was not considered in the previous researches, was investigated on the elastic-plastic deformation of the FGM rotating cylinder. The results show that when the variation of density and yield stress is ignored, considerable differences may arise not only in the magnitude of computed radial displacement and stress and strain components, but also in predicting the pattern of yield initiation and also plastic zone development.

۱- مقدمه

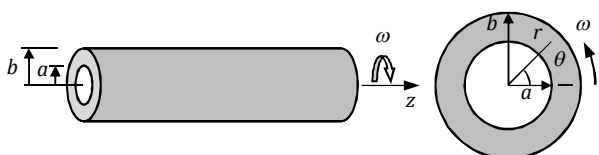
ژاپنی ساخته و معرفی شد [۱]. این مواد ابتدا برای کاربردهای هوا- فضا طراحی و ساخته شده بود، ولی در حال حاضر کاربردهای دیگری مانند سپرهای گرمایی، پوشش توربین گاز برای کاهش تورق و افزایش طول عمر، پوشش حرارتی در موتورهای بنزینی برای افزایش تراکم و راندمان، اجزای مبدل‌های گرمایی و روکش‌های پلاسما برای راکتورهای گداخت هسته‌ای را می‌توان برای مواد هدفمند برشمرد [۱].

با توجه به کاربرد روبه گسترش مواد هدفمند، پژوهش‌های متفاوتی بر رفتار این مواد صورت گرفته است. در زمینه تحلیل رفتار الاستیک مخازن تحت فشار، فوکویی و یاماناکا [۲] و توتونکو و اوزتورک [۳] رفتار الاستیک

ماده مرتبه‌ای هدفمند^۱ یا ماده هدفمند، ماده‌ای مرکب است که از دو جنس متفاوت تشکیل شده است. به‌گونه‌ای که از یک سطح به سطح دیگر، ماده به تدریج از یک جنس به جنس دیگر تغییر می‌کند. در نتیجه بر خلاف مواد مرکب لایه‌ای متداول، خواص فیزیکی ماده هدفمند به صورت پیوسته تغییر می‌کنند. ترکیب سرامیک و فلز، یکی از رایج‌ترین شکل‌های مواد هدفمند است.

مواد هدفمند برای نخستین بار در سال ۱۹۸۴ به وسیله پژوهش‌گران

1- Functionally graded material



شکل ۱ نمایش طرح‌واره هندسه و پارامترهای اصلی مسأله

اراسلان و اکیس [۱۷] رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ای هدفمند دوار را بر اساس رفتار الاستیک-پلاستیک کامل وابسته به معیار ترسکا، تحلیل کرده‌اند. آن‌ها از تابع توانی برای تغییرات مدول الاستیسیته استفاده کرده، از اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند بر اساس فرضیاتشان، بسته به پارامتر توان مدول الاستیسیته، تسلیم می‌تواند از داخل، خارج یا هم‌زمان از داخل و خارج شروع شود.

در زمینه تحلیل رفتار الاستیک و الاستیک-پلاستیک استوانه‌ای هدفمند، پژوهش‌هایی نیز در داخل کشور صورت گرفته است. طهانی و طالبیان [۱۸] به تحلیل رفتار الاستیک-گرمایی مخزن‌های استوانه‌ای هدفمند پرداخته‌اند. حیدری و کاظمی [۱۹] رفتار الاستیک-پلاستیک مخازن جداره-ضخیم هدفمند تحت فشار داخلی را تحلیل کرده‌اند. آن‌ها رفتار سازه را بر اساس مدل پلاستیک ایده‌آل وابسته به معیار تسلیم ترسکا تحلیل و نتایج را برای جنس AIA359/SiCp بررسی کرده‌اند. آنگاه نشان داده‌اند به‌کارگیری مخازن هدفمند به‌جای مخازن همگن، می‌تواند تحمل فشار داخلی را افزایش دهد. قاجار و مهربانی [۲۰] رفتار الاستیک-گرمایی استوانه‌های جداره-ضخیم هدفمند را با در نظر گرفتن تنش‌های پس‌ماند گرمایی تحلیل و توزیع تنش‌های پس‌ماند گرمایی را به‌دست آورده‌اند.

مهدوی و همکارانش [۲۱] رفتار الاستیک-گرمایی دیسک هدفمند دوار را با فرض ضخامت متغیر و توزیع غیریکنواخت شعاعی میدان دما تحلیل کرده‌اند. بر اساس جستجوی نگارندگان، تا کنون اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم بر رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ای هدفمند دوار، بررسی نشده است. هدف اصلی این مقاله، تحلیل رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ای هدفمند دوار، با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم است. شکل ۱ به‌صورت طرح‌واره، هندسه مسأله مورد بررسی و پارامترهای اصلی هندسی و بارگذاری را نشان می‌دهد.

۲- معادلات حاکم

با توجه به هندسه مسأله، فرمول‌بندی و بررسی نتایج در دستگاه استوانه‌ای (r, θ, z) انجام و ارائه می‌شود (شکل ۱). در این مقاله مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم، به‌صورت تابع‌های توانی (۱) از مختصات شعاعی فرض می‌شوند.

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{n_E} \\ \rho(r) &= \rho_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{n_\rho} \\ \sigma(r) &= \sigma_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{n_\sigma} \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه‌های (۱) E_0 ، ρ_0 و σ_0 به‌ترتیب مقادیر مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم در شعاع خارجی، $r = b$ هستند. در این مقاله از تغییرات ضریب پواسون، چشم‌پوشی می‌شود [۲۲].

اگر در رابطه‌های (۱) خصوصیت مادی به‌صورت کلی با P و مقدار آن در شعاع خارجی با P_0 نشان داده شود، آن‌گاه چگونگی روند تغییرات خصوصیت مادی بی‌بعد $\bar{P} = P/P_0$ به‌ازای نسبت شعاعی $(a/b) = 0.5$ و چند مقدار مختلف توان در بازه $2 \leq n_p \leq 2$ ، در شکل ۲ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود به‌ازای مقدار منفی توان، روند تابع نزولی و به‌ازای مقدار مثبت توان، روند تابع صعودی است.

استوانه جداره-ضخیم هدفمند تحت فشار داخلی را با فرض مدول الاستیسیته متغیر تحلیل کرده‌اند. یو و یانگ [۴] به بررسی رفتار الاستیک کره هدفمند تحت فشار داخلی با فرض مدول الاستیسیته متغیر، در دو نوع مخزن ساندویچی با لایه میانی هدفمند و لایه‌های داخلی و خارجی همگن و نیز مخزن به‌صورت کاملاً هدفمند، پرداخته‌اند. دای، فو و دونگ [۵] رفتار الاستیک-مغناطیسی^۱ مخزن استوانه‌ای و کروی هدفمند تحت فشار داخلی و میدان مغناطیسی را با فرض تابع توانی برای مدول الاستیسیته و ضریب نفوذپذیری مغناطیسی^۲ مطالعه کرده و نشان داده‌اند که این متغیرها اثر زیادی بر تنش الاستیک-مغناطیس و آشفستگی میدان جریان مغناطیس دارند. اراسلان و اکیس [۶] رفتار الاستیک کره هدفمند جداره-ضخیم تحت فشار داخلی را با فرض تغییرات خطی و نمایی مدول الاستیسیته تحلیل و نتایج دو حالت را مقایسه کرده‌اند. جباری و همکارانش [۷] با فرض تغییرات مدول الاستیسیته، به تحلیلی رفتار الاستیک-گرمایی استوانه‌ای هدفمند در اثر بارگذاری شعاعی متقارن پرداخته‌اند.

در زمینه تحلیل رفتار الاستیک-پلاستیک مخازن استوانه‌ای و کروی هدفمند، اراسلان و اکیس [۸] با فرض تابع توانی برای تغییرات مدول الاستیسیته و تنش تسلیم، رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه‌ای هدفمند تحت فشار داخلی را تحلیل و نتایج را با نتایج ماده همگن مقایسه کرده‌اند. استوانه‌ای دوار در بسیاری از مسائل صنعتی مانند سانتریفیوژها و موتورهای الکتریکی کاربرد اساسی دارند. در زمینه تحلیل رفتار الاستیک و الاستیک-پلاستیک استوانه و دیسک همگن دوار، پژوهش‌های زیادی انجام شده است. از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به کارهای مندلسون [۹]، تیموشنکو و گودیر [۱۰] و چاکراباتی [۱۱] اشاره کرد.

با توجه به ویژگی‌های مواد هدفمند و خواسته‌های مورد انتظار از استوانه‌های دوار، استوانه‌های هدفمند دوار کاربرد روبه‌افزایشی در صنایع مختلف پیدا کرده‌اند، که می‌توان به مواردی مانند موتورهای الکتریکی، ژنراتورهای برق، راکتورها، سانتریفیوژهای سرعت دورانی بالا، موتورهای سرمایی، پمپ‌های سرعت دورانی بالا، یاتاقان‌های ضد سایش و مقاوم در برابر مواد شیمیایی، توربین‌های گاز و ساخت دیواره موشک‌ها اشاره کرد [۱].

با توجه به گسترش کاربرد استوانه و دیسک هدفمند دوار، پژوهش‌های مختلفی در این زمینه انجام شده است. اراسلان و اکیس [۱۲] رفتار الاستیک استوانه و دیسک هدفمند دوار را با فرض حالت کرنش-صفحه‌ای و تنش-صفحه‌ای، در دو حالت تابع توانی و نمایی برای تغییرات مدول الاستیسیته تحلیل و نتایج دو حالت را با هم مقایسه کرده‌اند. کردخیلی و نقدآبادی [۱۳] رفتار الاستیک-گرمایی دیسک و استوانه هدفمند توخالی و توپر دوار را با فرض تابع توانی برای مدول الاستیسیته و ضریب هدایت گرمایی به‌صورت نیمه-تحلیلی بررسی و نتایج را با ماده همگن مقایسه کرده‌اند. یو و همکارانش [۱۴] با انتخاب تابع‌های توانی برای تغییرات مدول الاستیسیته، ضریب انبساط گرمایی و چگالی، تغییرشکل الاستیک-گرمایی دیسک هدفمند دوار تحت بارگذاری گرمایی را به‌صورت تحلیلی، مطالعه کرده‌اند.

پنگ و لی [۱۵] دیسک توخالی هدفمند ارتوتروپیک^۳ دوار را با فرض تابع‌های توانی متفاوت در جهت‌های شعاعی و محیطی برای مدول الاستیسیته، بررسی کرده‌اند. زمانی‌نژاد و رحیمی [۱۶] با فرض تابع توانی برای تغییر مدول الاستیسیته و چگالی، رفتار الاستیک استوانه‌ای هدفمند دوار و تحت فشار داخلی و خارجی ثابت را تحلیل کرده‌اند.

1- Magneto elasticity
2- Magnetic permeability
3- Orthotropic

ثابت‌های بی‌بعد k و A_1 نیز در رابطه (۵) از رابطه‌های (۷) به‌دست می‌آیند.

$$k = \frac{\sqrt{n_E^2(v^2 - 2v + 1) + n_E(v^2 - 4v) + 4 - 8v + 4v^2}}{(1-v)(2v^2 + v - 1)}$$

$$A_1 = \frac{v(4 + n_\rho)(n_\rho - n_E + 2) - n_\rho^2 + n_\rho(n_E - 6) - 8 + 3n_E}{[v(C_1\bar{r}^{m_1} + C_2\bar{r}^{m_2} - A_1\bar{\omega}^2\bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)})]} \quad (7)$$

مؤلفه‌های بی‌بعد شده تنش بر اساس رابطه (۸) تعریف می‌شوند.

$$\bar{\sigma}_i = \left(\frac{\sigma_i}{E_0}\right) \quad (8)$$

با جایگذاری جابه‌جایی شعاعی (۵) در رابطه‌های تنش بر حسب جابه‌جایی شعاعی، تنش‌های بی‌بعد به‌صورت رابطه‌های (۹) به‌دست می‌آیند.

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{(1+v)(1-2v)} \times \bar{r}^{n_E} \times \{v(C_1\bar{r}^{m_1} + C_2\bar{r}^{m_2} - A_1\bar{\omega}^2\bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)}) - A_1(3 + n_\rho - n_E)\bar{\omega}^2\bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)}\}$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{1}{(1+v)(1-2v)} \times \bar{r}^{n_E} \times \{(1-v)(C_1\bar{r}^{m_1} + C_2\bar{r}^{m_2} - A_1\bar{\omega}^2\bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)}) - A_1(3 + n_\rho - n_E)\bar{\omega}^2\bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)}\}$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{(1+v)(1-2v)} \times \bar{r}^{n_E} \times \{C_1m_3\bar{r}^{m_1} + C_2m_4\bar{r}^{m_2} - A_1(4 + n_\rho - n_E)\bar{\omega}^2\bar{r}^{(2+n_\rho-n_E)}\} \quad (9)$$

ثابت‌های m_1, m_2, m_3, m_4 در رابطه‌های (۹) از رابطه‌های (۱۰) محاسبه می‌شوند.

$$m_1 = \frac{(-n_E - k - 2)}{2}$$

$$m_2 = \frac{(-n_E + k - 2)}{2}$$

$$m_3 = \frac{(-n_E - k + 2)}{2}$$

$$m_4 = \frac{(-n_E + k + 2)}{2} \quad (10)$$

شرایط مرزی مسئله عبارتند از شرایط مرزی بدون تنش روی سطوح داخلی و خارجی استوانه که به‌صورت رابطه‌های (۱۱) بیان می‌شوند.

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r} = \frac{a}{b}) = 0$$

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r} = 1) = 0 \quad (11)$$

با استفاده از شرایط مرزی (۱۱)، ثابت‌های بی‌بعد انتگرال‌گیری C_1 و C_2 در رابطه (۵)، به‌صورت رابطه‌های (۱۲) به‌دست می‌آیند.

$$C_1 = -2 \times A_1 \times A_2 \times \bar{\omega}^2 \times \frac{1}{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2}\right]} \times \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{(-n_\rho-k)} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_1}\right]$$

$$C_2 = -2 \times A_1 \times A_3 \times \bar{\omega}^2 \times \frac{1}{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2}\right]} \times \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{(-n_\rho-k)} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2}\right] \quad (12)$$

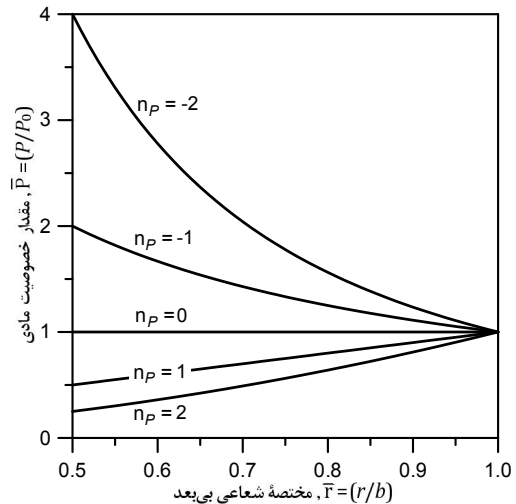
ثابت‌های A_2 و A_3 در رابطه (۱۲) از رابطه‌های (۱۳) محاسبه می‌شوند.

$$A_2 = \frac{3 - vn_\rho + vn_E - 2v + n_\rho - n_E}{2v - n_E - k + vn_E + vk}$$

$$A_3 = \frac{3 - vn_\rho + vn_E - 2v + n_\rho - n_E}{-2v - vn_E - k + n_E + vk} \quad (13)$$

۲-۲- بررسی شروع تسلیم و تعیین سرعت دورانی استوانه تسلیم

برای به‌دست آوردن سرعت زاویه‌ای متناظر با آستانه تسلیم و بررسی شرایط تسلیم، از معیار تسلیم ترسکا استفاده شده است. به‌کارگیری معیار ترسکا مستلزم مشخص شدن ترتیب تنش‌های اصلی است. از طرفی ترتیب تنش‌های اصلی ($\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$) در این مسئله، به مقدار عددی پارامترهای توان n_ρ, n_E و (n_σ) ، نسبت شعاع‌ها، (b/a) ، و ضریب پواسون، ν ، وابسته است. بررسی انجام



شکل ۲ نمودار تغییر خصوصیات مادی بی‌بعد دلخواه \bar{P} برای مدل توانی

۱-۲- تحلیل رفتار الاستیک

معادله حرکت استوانه دوار به‌صورت معادله (۲) بیان می‌شود.

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta = -\rho r^2 \omega^2 \quad (2)$$

معادله حرکت (۲) که در اصطلاح معادله تعادل نیز گفته می‌شود، کلی و مستقل از همگن بودن و هم‌چنین الاستیک یا الاستیک-پلاستیک بودن رفتار ماده است.

با استفاده از نظریه تغییر شکل‌های کوچک و با توجه به تقارن محوری مسئله، رابطه‌های کرنش-جابه‌جایی شعاعی برای حالت کرنش صفحه‌ای (طول بسیار بزرگ برای استوانه) به‌صورت رابطه‌های (۳) است.

$$\varepsilon_r = \frac{du(r)}{dr}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u(r)}{r}$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (3)$$

در رابطه‌های (۳) $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی، محیطی و محوری کرنش هستند و u جابه‌جایی شعاعی است.

با استفاده از قانون هوک و جایگذاری رابطه‌های کرنش-جابه‌جایی شعاعی (۳)، رابطه‌های تنش بر حسب جابه‌جایی شعاعی به‌صورت رابطه‌های (۴) به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \left((1-v) \frac{du(r)}{dr} + v \frac{u(r)}{r} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \left((1-v) \frac{u(r)}{r} + v \frac{du(r)}{dr} \right)$$

$$\sigma_z = v(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (4)$$

در رابطه‌های (۴) $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی، محیطی و محوری تنش هستند. با قرار دادن مؤلفه‌های تنش بر حسب جابه‌جایی شعاعی، در معادله تعادل، معادله تعادل بر حسب جابه‌جایی شعاعی به‌دست خواهد آمد. حل تحلیلی معادله دیفرانسیل تعدادی بر حسب جابه‌جایی به‌صورت بی‌بعد شده (۵) به‌دست می‌آید.

$$\bar{u}(\bar{r}) = C_1\bar{r}^{\left(\frac{-n_E-k}{2}\right)} + C_2\bar{r}^{\left(\frac{-n_E+k}{2}\right)} - A_1\bar{\omega}^2\bar{r}^{(n_\rho-n_E+3)} \quad (5)$$

در رابطه (۵) C_1 و C_2 ثابت‌های بی‌بعد انتگرال‌گیری هستند. هم‌چنین پارامترهای بی‌بعد \bar{u} و $\bar{\omega}^2$ بر اساس رابطه‌های (۶) تعریف می‌شوند.

$$\bar{r} = \frac{r}{b}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{b}$$

$$\bar{\omega}^2 = \left(\frac{\rho_0 \omega^2 b^2}{E_0}\right) \quad (6)$$

شده در مرجع [۲۳]، نشان می‌دهد به‌ازای مقادیر عددی مورد بررسی در این مقاله، ترتیب مؤلفه‌های تنش همواره به‌صورت $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ است. بنابراین معیار تسلیم ترسکای بی‌بعدشده، به‌صورت رابطه (۱۴) تبدیل خواهد شد.

تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، بر اساس رابطه (۱۵) معرفی می‌شود.

$$\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r = \left(\frac{\sigma_\theta}{E_0}\right) \bar{r}^{n_\sigma} = \bar{\sigma}_0 \bar{r}^{n_\sigma} \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}_{Tresca} = \frac{(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r)}{\bar{\sigma}_0} - \bar{r}^{n_\sigma} \quad (15)$$

با جایگذاری تنش‌های بی‌بعد در رابطه (۱۵)، صورت بسط داده شده تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، استخراج می‌شود. پس از جایگذاری عبارت‌ها و ساده‌سازی، نتیجه به‌صورت رابطه (۱۶) به‌دست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_{Tresca} = \left(\frac{1}{1+\nu}\right) \left(\frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\sigma}_0}\right) A_1 \bar{r}^{n_E} \times \left\{ \frac{2}{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2}} \times \left[m_1 A_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{(-n_\rho-4)} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} \right] \bar{r}^{m_1} + m_2 A_3 \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{(-n_\rho-4)} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2}\right] \bar{r}^{m_2} \right\} + (2 - n_E + n_\rho) \times \bar{r}^{(2-n_E+n_\rho)} - \bar{r}^{n_\sigma} \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)، کسر $(\bar{\omega}/\sqrt{\bar{\sigma}_0})$ ، پارامتر بی‌بعدی است که اندازه بارگذاری را نشان می‌دهد. به‌گونه‌ای که با افزایش سرعت زاویه‌ای، این پارامتر بی‌بعد نیز بزرگتر خواهد شد. با توجه به نقش این پارامتر در بررسی و تحلیل نتایج، پارامتر بی‌بعد بارگذاری بر اساس رابطه (۱۷) تعریف می‌شود.

$$\Omega = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\bar{\sigma}_0}} \quad (17)$$

در شروع بارگذاری و به‌ازای سرعت‌های زاویه‌ای کوچک، تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ بر حسب \bar{r} متغیر است. اما در سرتاسر ناحیه $1 \leq \bar{r} \leq (a/b)$ منفی خواهد بود. به‌تدریج با افزایش سرعت زاویه‌ای و در نتیجه افزایش پارامتر Ω ، به‌ازای یک سرعت زاویه‌ای خاص، که متناظر با پارامتر بی‌بعد بارگذاری آستانه تسلیم است و با Ω_y نشان داده می‌شود، در یک مقدار مشخص از \bar{r} ، تنش بی‌بعد ترسکا، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، برابر صفر خواهد شد. بنابراین شروع تسلیم لحظه‌ای است که تنش $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، برای نخستین بار برابر صفر می‌شود.

برای تعیین سرعت زاویه‌ای متناظر با شروع تسلیم، به‌ازای مقدار مشخصی برای نسبت (b/a) ، توان‌های n_ρ ، n_σ و ضریب پواسون، ν ، طی یک فرآیند سعی و خطا و با افزایش تدریجی پارامتر بی‌بعد بارگذاری، Ω ، تابع $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ رسم می‌شود. به‌گونه‌ای که پارامتر بی‌بعد بارگذاری آستانه تسلیم، Ω_y ، که به‌ازای آن نخستین بار $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ برابر صفر می‌شود و همچنین موقعیت شروع تسلیم، مشخص شود.

۲-۳- تحلیل رفتار الاستیک-پلاستیک

در تحلیل رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه هدفمند دوار، بسته به مقدار پارامترهای توان، تسلیم ممکن است از داخل، خارج یا هم‌زمان از داخل و خارج شروع شود. در ادامه ابتدا روند و معادلات کلی حل ارائه می‌شود. سپس برای سه حالت شروع تسلیم از داخل، شروع تسلیم از خارج و شروع هم‌زمان تسلیم از داخل و خارج، حل مسأله به‌صورت جداگانه ارائه خواهد شد. در این مقاله، نتایج عددی با فرض ضریب پواسون $\nu = 0.3$ ، پارامترهای توان در محدوده $2 \leq n_i \leq 2$ و نسبت شعاع‌ها $(a/b) = 0.5$ و $(a/b) = 0.55$ ارائه می‌شوند. این مقادارها، انتخاب‌های متداولی هستند که در مراجع دیگر مانند [۵] و [۱۷] نیز استفاده شده‌اند.

۲-۳-۱- توزیع تنش در ناحیه‌های الاستیک و پلاستیک

با رشد ناحیه پلاستیک، نسبت شعاع داخلی به خارجی ناحیه الاستیک

$$\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(\bar{r}) \quad (18)$$

با رشد ناحیه پلاستیک، بخشی از مقطع استوانه همچنان در حالت الاستیک باقی می‌ماند. با انتگرال‌گیری از رابطه تعادل (معادله (۲))، که مستقل از رفتار الاستیک و پلاستیک است، و نیز استفاده از رابطه تسلیم ترسکا (۱۸)، تنش شعاعی ایجاد شده در ناحیه پلاستیک به‌صورت بی‌بعدشده (۱۹) به‌دست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\bar{\sigma}_0}{n_\sigma} \bar{r}^{n_\sigma} - \frac{\bar{\omega}^2}{(n_\rho + 2)} \bar{r}^{(n_\rho+2)} + C_3 \quad (19)$$

تنش محیطی با استفاده از رابطه تنش تسلیم ترسکا و تنش شعاعی و تنش طولی با توجه به صفر بودن کرنش طولی کل و نیز بخش‌های الاستیک و پلاستیک کرنش طولی، بر اساس رابطه‌های (۲۰) محاسبه می‌شوند.

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_r(\bar{r}) \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_z = \nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta)$$

۲-۳-۲- حالت اول؛ شروع تسلیم از شعاع داخلی استوانه

در شرایطی که تسلیم از شعاع داخلی شروع شود، شکل ۳، ثابت C_3 در رابطه (۱۹) با استفاده از شرط مرزی (۲۱) محاسبه می‌شود.

$$\bar{\sigma}_r \left(\bar{r} = \frac{a}{b} \right) = 0 \quad (21)$$

با جایگذاری ثابت C_3 ، مؤلفه‌های بی‌بعد تنش، مطابق رابطه‌های (۲۲) به‌دست خواهند آمد.

$$\bar{\sigma}_r = \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{n_\sigma}\right) \left[\bar{r}^{n_\sigma} - \left(\frac{a}{b}\right)^{n_\sigma}\right] + \frac{\bar{\omega}^2}{(n_\rho + 2)} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{(n_\rho+2)} - \bar{r}^{(n_\rho+2)}\right]$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{n_\sigma}\right) \left[(1 + n_\rho)\bar{r}^{n_\sigma} - \left(\frac{a}{b}\right)^{n_\sigma}\right] + \frac{\bar{\omega}^2}{(n_\rho + 2)} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{(n_\rho+2)} - \bar{r}^{(n_\rho+2)}\right]$$

$$\bar{\sigma}_z = \nu \left[\left(\frac{\bar{\sigma}_0}{n_\sigma}\right) \left(-2\left(\frac{a}{b}\right)^{n_\sigma} + (n_\rho + 2)\bar{r}^{n_\sigma}\right) + 2\frac{\bar{\omega}^2}{(n_\rho + 2)} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{(n_\rho+2)} - \bar{r}^{(n_\rho+2)}\right]\right] \quad (22)$$

به‌ازای دو مقدار ۲- و ۰ برای n_σ ، که رابطه‌های (۲۲) مبهم می‌شوند، مؤلفه‌های تنش با حد گرفتن از رابطه‌های (۲۲) به‌دست می‌آیند. برای مثال به‌ازای $n_\sigma = 0$ ، مؤلفه‌های تنش به‌صورت رابطه‌های (۲۳) نتیجه می‌شوند.

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \bar{r}^2 \right] + \bar{\sigma}_0 \left[\ln(\bar{r}) - \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right]$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \bar{r}^2 \right] + \bar{\sigma}_0 \left[\ln(\bar{r}) - \ln\left(\frac{a}{b}\right) + 1 \right]$$

$$\bar{\sigma}_z = \nu \left(\bar{\omega}^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \bar{r}^2 \right] + 2\bar{\sigma}_0 \left[\ln(\bar{r}) - \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right] \right) \quad (23)$$

رابطه‌های (۲۳) همان نتایج مرجع [۱۷] است که در آن از تغییرات تنش تسلیم چشم‌پوشی و $n_\sigma = 0$ فرض شده است.

ثابت‌های C_1 و C_2 مربوط به تنش‌های ناحیه الاستیک، که از قانون هوک پیروی می‌کنند، با استفاده از شرایط مرزی پیوستگی تنش در مرز ناحیه الاستیک و ناحیه پلاستیک، رابطه (۲۴) محاسبه می‌شوند.

$$\bar{\sigma}_r|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep}) = \bar{\sigma}_r|_{\text{plastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep}) \quad (24)$$

$$\bar{\sigma}_r|_{\text{elastic}}(\bar{r} = 1) = 0$$

در رابطه‌های (۲۴)، \bar{r}_{ep} شعاع مرز ناحیه الاستیک-پلاستیک است که بر اساس رابطه (۲۵) تعریف می‌شود.

پس از جایگذاری ثابت C_3 ، تنش‌ها مطابق رابطه‌های (۲۸) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{\bar{\sigma}_0}{n_\sigma} (\bar{r}^{n_\sigma} - 1) + \frac{\bar{\omega}^2}{(n_\rho + 2)} [1 - \bar{r}^{(n_\rho+2)}] \\ \bar{\sigma}_\theta &= \frac{\bar{\sigma}_0}{n_\sigma} [(1 + n_\sigma)\bar{r}^{n_\sigma} - 1] + \frac{\bar{\omega}^2}{(n_\rho + 2)} [1 - \bar{r}^{(n_\rho+2)}] \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{v\bar{\sigma}_0}{n_\sigma} [(2 + n_\sigma)\bar{r}^{n_\sigma} - 2] + \frac{2v\bar{\omega}^2}{(n_\rho + 2)} [1 - \bar{r}^{(n_\rho+2)}] \end{aligned} \quad (28)$$

در این حالت نیز به‌ازای دو مقدار -2 و 0 برای n_σ ، که رابطه‌های (۲۸) مبهم می‌شوند، مؤلفه‌های تنش با حد گرفتن از رابطه‌های (۲۸) به دست می‌آیند. به‌ازای $n_\sigma = 0$ مؤلفه‌های تنش به صورت رابطه‌های (۲۹) نتیجه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \left(\frac{\bar{\omega}^2}{2}\right) [1 - \bar{r}^2] + \bar{\sigma}_0 \left[\ln(\bar{r}) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right] \\ \bar{\sigma}_\theta &= \left(\frac{\bar{\omega}^2}{2}\right) [1 - \bar{r}^2] + \bar{\sigma}_0 \left[\ln(\bar{r}) - \ln\left(\frac{a}{b}\right) + 1\right] \\ \bar{\sigma}_z &= v \left(\bar{\omega}^2 [1 - \bar{r}^2] + 2\bar{\sigma}_0 \left[\ln(\bar{r}) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right]\right) \end{aligned} \quad (29)$$

۲-۳-۴- حالت سوم: شروع هم‌زمان تسلیم از شعاع داخلی و خارجی استوانه
در حالتی که تسلیم هم‌زمان از شعاع داخلی و خارجی آغاز شود، شکل ۵، لازم است به‌ازای سرعت زاویه‌ای معین، شش مجهول محاسبه شوند که عبارتند از دو ثابت جابه‌جایی ناحیه الاستیک (C_1 و C_2 در معادله (۳۶))، دو ثابت مربوط به جابه‌جایی در ناحیه‌های پلاستیک (C_4 در معادله (۳۶)) (ادامه) و هم‌چنین شعاع‌های مرزی \bar{r}_{ep1} و \bar{r}_{ep2} (شکل ۵). این شش مجهول از شش شرط مرزی (۳۰) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep1}) &= \bar{\sigma}_r|_{\text{plastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep1}) \\ \bar{u}|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep1}) &= \bar{u}|_{\text{plastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep1}) \\ \bar{\sigma}_\theta|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep1}) - \bar{\sigma}_r|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep1}) &= \bar{\sigma}_v \\ \bar{\sigma}_r|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep2}) &= \bar{\sigma}_r|_{\text{plastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep2}) \\ \bar{u}|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep2}) &= \bar{u}|_{\text{plastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep2}) \\ \bar{\sigma}_\theta|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep2}) - \bar{\sigma}_r|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep2}) &= \bar{\sigma}_v \end{aligned} \quad (30)$$

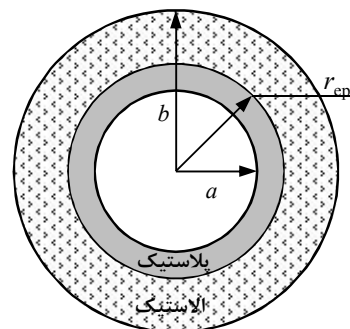
برای حل دستگاه شش معادله، شش مجهول (۳۰)، با فرض آن که تغییر شکل پلاستیک هم‌زمان از داخل و خارج پیشروی کرده باشد، یک مقدار برای \bar{r}_{ep1} در بازه $1 \leq \bar{r}_{ep1} \leq (a/b)$ انتخاب و سپس مجهول‌های دیگر محاسبه می‌شوند. آن‌گاه اگر برای سرعت زاویه‌ای یک مقدار حقیقی به دست آید و به علاوه شعاع مرزی \bar{r}_{ep2} در محدوده $1 \leq \bar{r}_{ep2} \leq \bar{r}_{ep1}$ باشد، فرض شروع و پیشروی هم‌زمان تغییر شکل پلاستیک از داخل و خارج صحیح بوده است. در غیر این صورت پیشروی هم‌زمان تغییر شکل پلاستیک از داخل و خارج برای مسأله مورد بررسی و به‌ازای انتخابی، امکان پذیر نبوده است. نتایج عددی مربوط به بررسی چگونگی پیشروی ناحیه‌ی پلاستیک از داخل و خارج استوانه در شکل‌های ۵، ۶ و ۷، در بخش نتایج و بحث، ارائه شده است.

۲-۳-۵- توزیع جابه‌جایی و کرنش در ناحیه‌های الاستیک و پلاستیک
پیشتر بیان شد که در محدوده مورد بررسی، ترتیب تنش‌ها همواره به صورت $\sigma_r > \sigma_\theta > \sigma_z$ است. در نتیجه بر اساس قانون جریان وابسته به معیار ترسکا، رابطه‌های (۳۱) برای مؤلفه‌های کرنش پلاستیک نتیجه می‌شود.

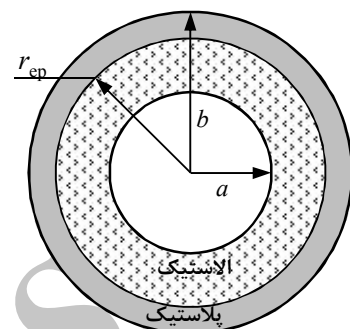
$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta^p &= -\varepsilon_r^p \\ \varepsilon_z^p &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

رابطه کرنش کل شعاعی و محیطی با جابه‌جایی شعاعی به صورت رابطه (۳۲) است.

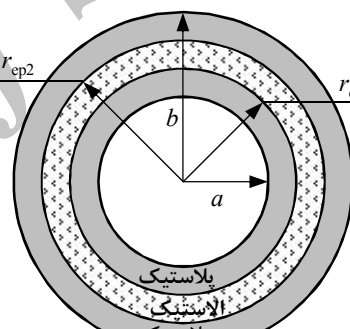
$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \left(\frac{du}{dr}\right) = \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{r}}\right) \\ \varepsilon_\theta &= \left(\frac{u}{r}\right) = \left(\frac{\bar{u}}{\bar{r}}\right) \end{aligned} \quad (32)$$



شکل ۳ شروع تغییر شکل پلاستیک از شعاع داخلی



شکل ۴ شروع تغییر شکل پلاستیک از شعاع خارجی



شکل ۵ شروع هم‌زمان تغییر شکل پلاستیک از شعاع داخلی و شعاع خارجی

$$\bar{r}_{ep} = \left(\frac{r_{ep}}{b}\right) \quad (25)$$

شرایط مرزی (۲۴) پس از بسط دادن، به رابطه‌های (۲۶) تبدیل می‌شوند.

$$\begin{aligned} v(C_1 + C_2 - A_1\bar{\omega}^2) + (1-v) \left[C_1 \frac{(-n_E - k)}{2} + C_2 \frac{(-n_E + k)}{2} - A_1\bar{\omega}^2(3 + n_\rho - n_E) \right] &= 0 \\ \frac{\bar{\sigma}_0}{n_\sigma} \left[\bar{r}^{n_\sigma} - \left(\frac{a}{b}\right)^{n_\sigma} \right] + \frac{\bar{\omega}^2}{(n_\rho + 2)} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{(n_\rho+2)} - \bar{r}^{(n_\rho+2)} \right] &= \frac{E_0 \bar{r}^{n_E}}{(1+v)(1-2v)} v [C_1 \bar{r}_{ep}^{m_1} + C_2 \bar{r}_{ep}^{m_2} - A_1 \bar{\omega}^2 \bar{r}_{ep}^{(2+n_\rho-n_E)}] + \frac{(1-v)}{2} [C_1 (-n_E - k) \bar{r}_{ep}^{m_1} + C_2 (-n_E + k) \bar{r}_{ep}^{m_2} - 2A_1(3 + n_\rho - n_E) \bar{\omega}^2 \bar{r}_{ep}^{(2+n_\rho-n_E)}] \end{aligned} \quad (26)$$

با حل هم‌زمان دو رابطه (۲۶)، ثابت‌های C_1 و C_2 و آن‌گاه بر اساس روابط قانون هوک (۴)، تنش‌های ناحیه الاستیک تعیین می‌شوند.

۲-۳-۳- حالت دوم: شروع تسلیم از شعاع خارجی استوانه

در صورتی که تسلیم از شعاع خارجی شروع شود، شکل ۴، از شرط مرزی (۲۷) جهت محاسبه‌ی ثابت C_3 استفاده می‌شود.

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r} = 1) = 0 \quad (27)$$

با استفاده از روابط‌های (۳۲) و با توجه به صفر بودن جمع مؤلفه‌های کرنش پلاستیک (رابطه (۳۱))، معادله (۳۳) به دست می‌آید.

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = (\varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p) + (\varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p) = \varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e = \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \quad (33)$$

که با انویس‌های e و p به ترتیب بیان‌گر بخش‌های الاستیک و پلاستیک کرنش هستند. به این ترتیب با استفاده از قانون هوک، نتیج به صورت معادله (۳۴) به دست می‌آید.

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}n_E} [(1-v)(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta) - 2v\bar{\sigma}_z] \quad (34)$$

با استفاده از رابطه تسلیم ترسکا و اینکه بخش‌های الاستیک و پلاستیک کرنش طولی صفر است، رابطه (۳۴) به صورت رابطه (۳۵) بر حسب تنش شعاعی بسط داده می‌شود.

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}n_E} (1-v-v^2)(2\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\sigma) \quad (35)$$

با جایگذاری تنش شعاعی به دست آمده در ناحیه پلاستیک از رابطه (۱۹) در معادله (۳۵)، معادله دیفرانسیل حاکم بر جابه‌جایی شعاعی مربوط به ناحیه پلاستیک به دست می‌آید. از حل این معادله دیفرانسیل، جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده در ناحیه پلاستیک به صورت رابطه (۳۶) به دست می‌آید.

$$\frac{\bar{u}(\bar{r})}{\bar{r}} = \frac{(1-v-2v^2)}{(n_p+2)} \times \frac{2}{(-n_E+2)n_\sigma} \times \left\{ \frac{1}{\bar{r}n_E} \left[(n_p+2)\bar{\sigma}_0 \left(\frac{a}{b}\right)^{n_\sigma} - \bar{\omega}^2 n_\sigma \left(\frac{a}{b}\right)^{(n_p+2)} \right] - \frac{2\bar{\omega}^2 \bar{r}^{-(n_E+n_p+2)}}{(n_E-n_p-4)} + \frac{\bar{\sigma}_0(n_\sigma n_p + 2n_\sigma + 2n_p + 4)\bar{r}^{(n_\sigma-n_E)}}{n_\sigma(n_E-n_\sigma-2)} + \frac{C_4}{\bar{r}^2} \right\} \quad (36)$$

ثابت C_4 در رابطه (۳۶)، با استفاده از شرط پیوستگی جابه‌جایی شعاعی در مرز ناحیه الاستیک و پلاستیک (رابطه (۳۷))، محاسبه می‌شود.

$$\bar{u}|_{\text{elastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep}) = \bar{u}|_{\text{plastic}}(\bar{r} = \bar{r}_{ep}) \quad (37)$$

پس از تعیین ثابت C_4 و محاسبه جابه‌جایی شعاعی، با استفاده از روابط (۳۲) کرنش‌های شعاعی و محیطی کل محاسبه خواهند شد. در نهایت بخش الاستیک کرنش با استفاده از قانون هوک و بخش پلاستیک کرنش، از تفاضل کرنش کل و کرنش الاستیک محاسبه خواهند شد.

۳-۲- نتایج عددی و بحث

بررسی عددی نتایج، مستلزم انتخاب مقدار عددی مشخص برای ضریب پواسون و نسبت‌های شعاعی (a/b) است. قبلاً اشاره شد در مرجع [۱۷] با چشم‌پوشی از اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم، رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه هدفمند دوار بررسی شده است. برای نشان دادن اهمیت اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم بر رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه هدفمند دوار و مقایسه نتایج با نتایج مشابه مرجع [۱۷]، همانند مقادیر این مرجع، $v=0/3$ و $(a/b)=0/5$ و $(a/b)=0/55$ انتخاب شده‌اند. همچنین پارامترهای توان در بازه $-2 \leq n_i \leq 2$ در نظر گرفته شده که مشابه انتخاب مراجع [۵] و [۱۷] است. در مرجع [۲۳] نشان داده شده است به ازای بازه $0/5 \leq (a/b) \leq 1$ برای نسبت شعاعی و نیز به ازای پارامترهای توان در بازه $-2 \leq n_i \leq 2$ ترتیب مؤلفه‌های تنش به صورت $\sigma_r > \sigma_z > \sigma_\theta$ است. در نتیجه شکل رابطه تسلیم ترسکا به صورت رابطه (۱۸) باقی خواهد ماند.

۳-۱- ارزیابی و اعتبارسنجی

برای ارزیابی و اعتبارسنجی روابط و تحلیل ارائه شده، ابتدا با استفاده از روابط ارائه شده در بخش قبل، سرعت زاویه‌ای استوانه تسلیم برای استوانه همگن دوار استخراج و با نتایج مراجع پیشین مقایسه می‌شود. با قرار دادن

$$\Omega_y = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\bar{\sigma}_0}} = 2 \left(\frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{(1-v)}{(1-2v) + (3-2v)\left(\frac{b}{a}\right)^2}} \quad (38)$$

هم‌چنین در ادامه و هنگام بررسی اثر پارامترهای توان، نتایج تحلیل این مقاله در حالت $n_p=n_\sigma=0$ با نتایج مشابه مرجع [۱۷] که در آن از تغییرات چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی شده، مقایسه و اعتبار نتایج تحلیل ارائه شده در این مقاله نشان داده می‌شود.

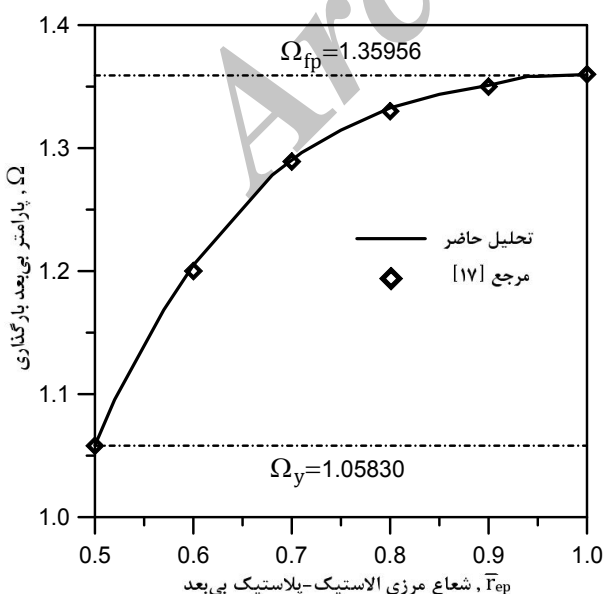
۳-۲- پیشروی ناحیه‌ی پلاستیک

با افزایش سرعت زاویه‌ای از مقدار متناظر با شروع تسلیم، ناحیه تغییر شکل پلاستیک در استوانه گسترش می‌یابد. در این قسمت، روند رشد مرز ناحیه‌های الاستیک و پلاستیک با افزایش سرعت زاویه‌ای، بررسی می‌شود.

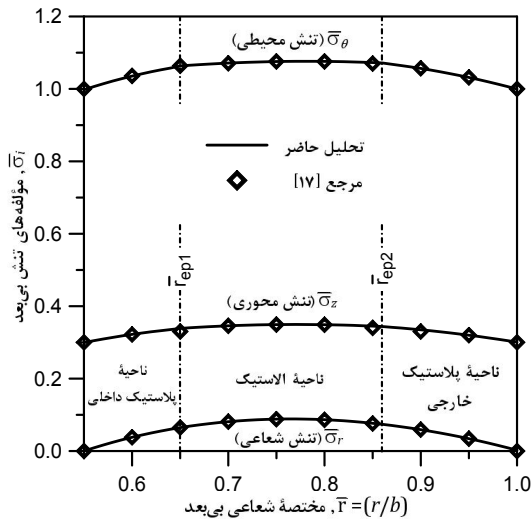
ابتدا نتایج مربوط به ماده همگن بررسی می‌شود. در شکل ۶ پیشرفت ناحیه‌ی پلاستیک با افزایش پارامتر بارگذاری نشان داده شده است. در این شکل Ω_y نشانگر پارامتر بارگذاری متناظر با شروع تسلیم و Ω_{fp} نشانگر پارامتر بارگذاری است که در آن استوانه به صورت کامل پلاستیک شده است. انطباق نتایج تحلیل این مقاله با نتایج مشابه مرجع [۱۷] نشان‌گر اعتبار تحلیل این مقاله است.

همان‌گونه که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، برای استوانه همگن، با افزایش سرعت زاویه‌ای، تسلیم از داخل شروع و ناحیه پلاستیک از شعاع داخلی رشد کرده و به سمت شعاع خارجی استوانه گسترش می‌یابد. به ازای $v=0/3$ و $(a/b)=0/5$ ، پارامتر بارگذاری بیشینه که باعث پلاستیک کامل شدن استوانه می‌شود برابر با $\Omega_{fp}=1/35956$ است که منطبق بر نتیجه مرجع [۱۷] است.

در ادامه، پیشروی ناحیه‌ی پلاستیک برای استوانه‌ی هدفمند دوار، در حالی که تنها مدول الاستیسیته متغیر باشد، $(n_p=n_\sigma=0)$ ، بررسی می‌شود.



شکل ۶ پیشروی مرز ناحیه‌های الاستیک و پلاستیک با افزایش پارامتر بارگذاری، برای استوانه دوار همگن، به ازای $v=0/3$ و $(a/b)=0/5$



شکل ۱۰ مؤلفه‌های تنش به‌ازای Ω $1/3 \cdot 0.7$ و $(n_p = n_\sigma = 0)$ $n_E = 1/3 \cdot 826$ ، $(a/b) = 0.55$ ، گسترش تسلیم از داخل و خارج =

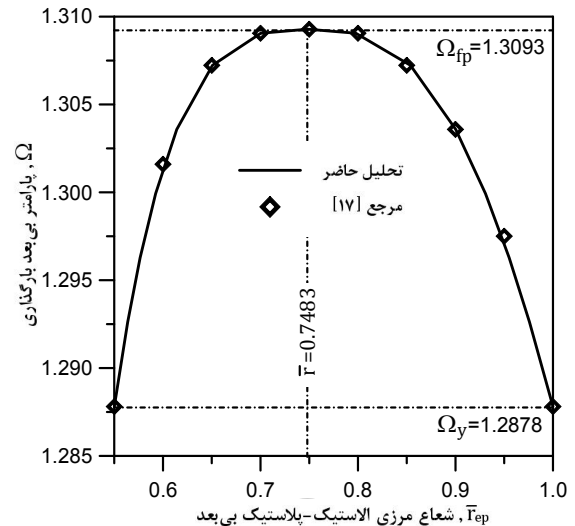
شکل ۷ پیشروی ناحیه پلاستیک را برای استوانه هدفمند دوار، به‌ازای پارامتر توان $n_E = 1/3 \cdot 826$ ، $(n_p = n_\sigma = 0)$ ، و نسبت شعاعی $(a/b) = 0.55$ ، نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که برای این حالت، تسلیم هم‌زمان از داخل و خارج و به‌ازای $\Omega_{fp} = 1/2 \cdot 878$ شروع می‌شود. در ادامه و با افزایش سرعت زاویه‌ای، ناحیه پلاستیک هم‌زمان از داخل و خارج گسترش یافته و در سرعت $\Omega_{fp} = 1/3 \cdot 93$ در شعاع بی‌بعد $\bar{r} = 0.7483$ دو ناحیه پلاستیک داخلی و خارجی به هم می‌رسند. در این حالت نیز نتایج این مقاله منطبق بر نتایج مرجع [۱۷] است.

اکنون برای بررسی اثر و اهمیت در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم، پیشروی ناحیه پلاستیک برای استوانه هدفمند دوار، به‌ازای مقادیرهای مساوی پارامتر توان $(n_E = n_p = n_\sigma)$ بررسی می‌شود. شکل ۸، نمودار پیشروی ناحیه پلاستیک را به‌ازای نسبت شعاعی $(a/b) = 0.5$ و پنج مقدار $n_i = 2, 1, 0, -1, -2$ ، و ۱ و ۲ برای پارامترهای توان، نشان می‌دهد.

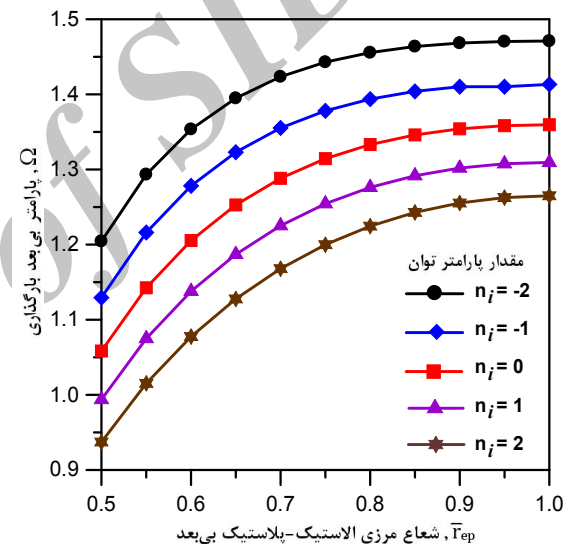
مشاهده می‌شود در حالتی که هر سه پارامتر توان مساوی باشند، تسلیم همواره از داخل شروع و ناحیه پلاستیک به سمت شعاع بیرونی گسترش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار پارامتر توان، روند شروع تسلیم تا گسترش کامل ناحیه پلاستیک در کل مقطع، در سرعت‌های زاویه‌ای کوچکتری رخ می‌دهد. این موضوع به‌صورت جداگانه در شکل ۹ نیز نشان داده شده است. دلیل روند کاهشی سرعت زاویه‌ای آستانه‌ی تسلیم و پلاستیک کامل، Ω_y و Ω_{fp} در شکل ۹ این است که با افزایش پارامتر توان، مشخصات مادی (مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم) در شعاع داخلی و در نتیجه مقدار متوسط مشخصات مادی در مقطع کاهش می‌یابد. بنابراین مقاومت استوانه کمتر می‌شود. مقایسه نتایج شکل‌های ۷ و ۸ نشان می‌دهند چشم‌پوشی از تغییرات چگالی و تنش تسلیم، نه‌تنها در تعیین اندازه Ω_y و Ω_{fp} ، بلکه در تعیین مکان شروع تسلیم نیز می‌تواند خطای قابل توجهی به‌همراه داشته باشد.

۳-۳- توزیع مؤلفه‌های تنش

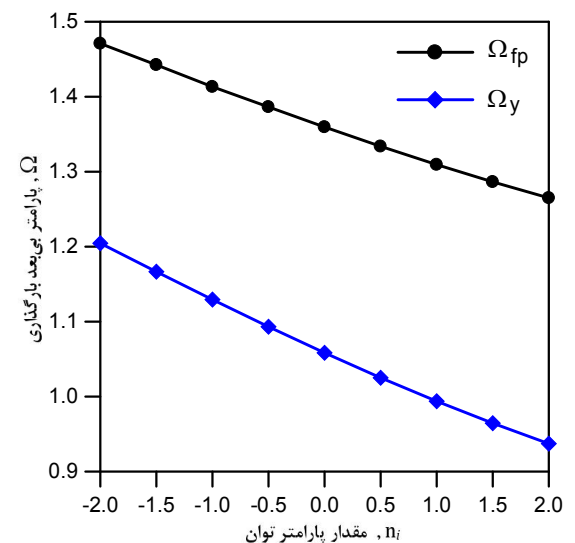
به‌عنوان جنبه‌ای دیگر از تغییر شکل، اثر در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم بر توزیع تنش بررسی می‌شود. شکل ۱۰ توزیع مؤلفه‌های تنش را برای نسبت شعاعی $(a/b) = 0.55$ ، پارامتر توان $n_E = 1/3 \cdot 826$ ، $(n_p = n_\sigma = 0)$ و پارامتر بارگذاری $\Omega = 1/3 \cdot 0.7$ نشان می‌دهد. انطباق نتایج به‌دست آمده با نتایج مشابه مرجع [۱۷]، اعتبار تحلیل این مقاله را نشان می‌دهد. به‌علاوه مشاهده



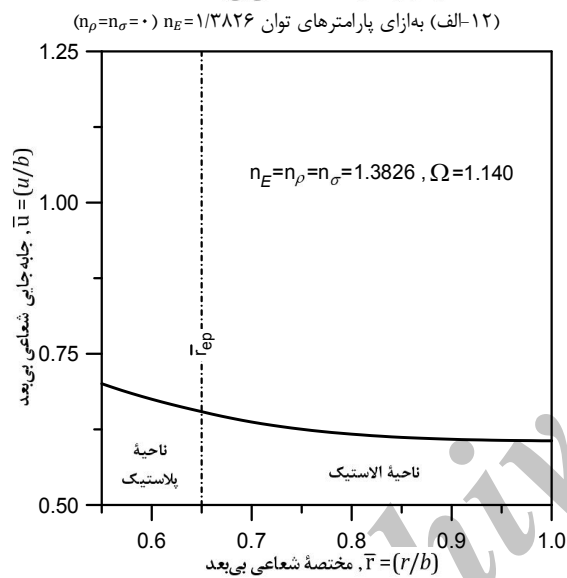
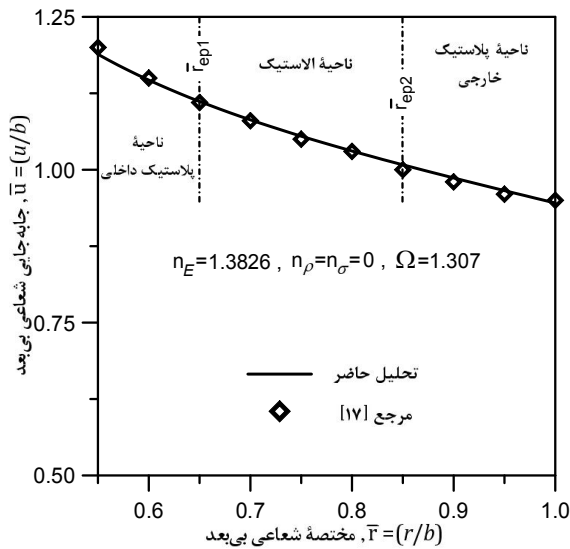
شکل ۷ پیشروی ناحیه پلاستیک هم‌زمان از شعاع داخلی و خارجی به‌ازای $\Omega_{fp} = 1.3093$ ، $\bar{r}_{ep} = 0.7483$ ، $(a/b) = 0.55$ ، $n_p = n_\sigma = 0$ و $n_E = 1/3 \cdot 826$



شکل ۸ پیشروی مرز الاستیک-پلاستیک با افزایش پارامتر بارگذاری، با در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم



شکل ۹ نمودار Ω_y و Ω_{fp} بر حسب مقدار پارامتر توان، با در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم، به‌ازای $(a/b) = 0.5$



شکل ۱۲ اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم بر جابه‌جایی شعاعی

۳-۵- توزیع مؤلفه‌های کرنش پلاستیک

ابتدا توزیع کرنش‌های پلاستیک شعاعی و محیطی، برای حالتی که تنها مدول الاستیسیته متغیر باشد، بررسی می‌شوند.

نتایج این حالت را می‌توان با نتایج مشابه مرجع [۱۷] مقایسه و ارزیابی نمود. نمودارهای شکل ۱۳ توزیع کرنش‌های پلاستیک شعاعی و محیطی را به‌ازای نسبت شعاعی $(a/b)=0/55$ ، پارامتر توان $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ و پارامتر بارگذاری $\Omega=1/307$ ، که فراتر از بارگذاری تسلیم اولیه است، نشان می‌دهند. پیشتر نیز اشاره شد که در این حالت تسلیم هم‌زمان از داخل و خارج استوانه آغاز می‌شود.

نمودارهای شکل ۱۳ نشان می‌دهند برای این حالت از پارامترها، تسلیم از داخل تا شعاع $\bar{r}_{ep1}=0/65$ و از خارج تا شعاع $\bar{r}_{ep2}=0/86$ به سمت قسمت میانی مقطع گسترش یافته است. همان‌گونه که از قانون جریان نیز انتظار می‌رود، کرنش‌های شعاعی و محیطی پلاستیک قرینه یکدیگر و جمع آن‌ها برابر صفر است. در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود کرنش‌های پلاستیک در شعاع داخلی، از نظر قدر مطلق، بزرگترین مقدار خود را دارند و با نزدیک شدن به مرز ناحیه پلاستیک، اندازه قدر مطلق کرنش‌های پلاستیک کاهش می‌یابد.

می‌شود برای این حالت، که از تغییرات چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی شده، ناحیه پلاستیک داخلی تا شعاع بی‌بعد $\bar{r}_{ep1}=0/65$ و ناحیه پلاستیک خارجی تا شعاع $\bar{r}_{ep2}=0/86$ به سمت قسمت میانی مقطع گسترش یافته‌اند.

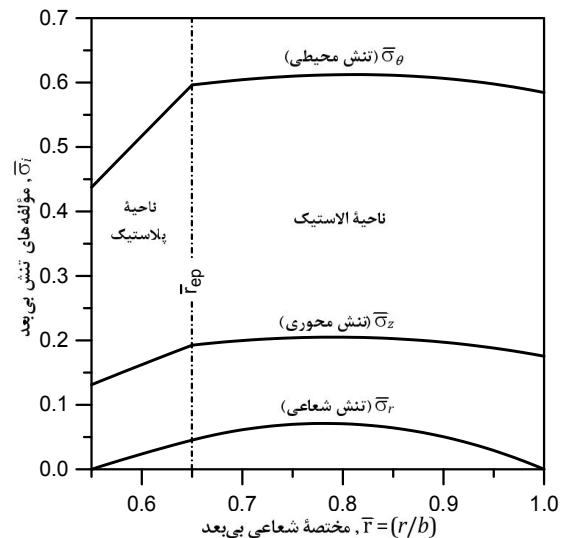
برای بررسی اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم، مؤلفه‌های تنش به‌ازای $(n_E=n_\rho=n_\sigma)$ بررسی می‌شوند. شکل ۱۱ توزیع مؤلفه‌های تنش به‌ازای $(a/b)=0/55$ و پارامترهای توان $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ در وضعیت گسترش ناحیه پلاستیک تا شعاع $\bar{r}_{ep}=0/65$ (بارگذاری $\Omega=1/1999$) نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود همانند شکل ۹، در شکل ۱۱ همه‌جا تنش محیطی بزرگترین و تنش شعاعی کوچکترین مؤلفه تنش است. اما برخلاف شکل ۱۰، تسلیم از داخل شروع و ناحیه پلاستیک از داخل به سمت بیرون گسترش یافته است. اختلاف قابل توجه در نتایج شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نیز ناشی از در نظر نگرفتن تغییر چگالی و تنش تسلیم در شکل ۱۰ است.

۳-۴- توزیع جابه‌جایی شعاعی

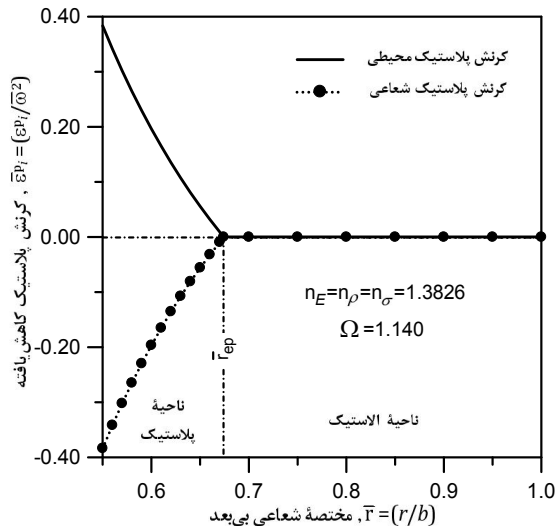
نتایج جابه‌جایی شعاعی، مربوط به دو حالت مختلف، به‌ازای بارگذاری فراتر از تسلیم اولیه، در شکل ۱۲ نشان داده شده است. در نمودار شکل ۱۲-الف، تنها مدول الاستیسیته متغیر فرض شده و پارامتر توان $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ انتخاب شده است. در نمودار شکل ۱۲-ب، علاوه بر مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم نیز متغیر شده است. در این حالت، مقدار یکسان $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ برای پارامترهای توان انتخاب شده‌اند.

انطباق نمودار جابه‌جایی شکل ۱۲-الف با نتایج مشابه مرجع [۱۷]، تأیید دیگری بر اعتبار نتایج به‌دست آمده از تحلیل انجام شده در این مقاله است. مقایسه نمودارهای ۱۲-الف و ۱۲-ب نشان می‌دهد در حالتی که چگالی و تنش تسلیم نیز متغیر و پارامترهای توان مساوی انتخاب شوند، بر خلاف حالتی که تنها مدول الاستیسیته متغیر باشد، تسلیم از داخل شروع و به سمت بیرون گسترش می‌یابد.

به‌علاوه در حالتی که از تغییر چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی شود، جابه‌جایی شعاعی بزرگتر از حالتی که تغییر چگالی و تنش تسلیم نیز منظور شود، به‌دست می‌آید. این موضوع به‌روشنی اهمیت در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم را در تعیین و محاسبه جابه‌جایی شعاعی، در تغییر شکل الاستیک-پلاستیک استوانه هدفمند دوار نشان می‌دهد.



شکل ۱۱ توزیع مؤلفه‌های تنش به‌ازای $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ ، $(a/b)=0/55$ و $\bar{r}_{ep}=0/65$ ($\Omega=1/1999$)، تسلیم از شعاع داخلی



شکل ۱۴ کرنش پلاستیک شعاعی و محیطی کاهش یافته، به‌ازای $\Omega=1/140$ و $(a/b)=0/55$ ، $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله تغییر شکل الاستیک-پلاستیک استوانه هدفمند دوار، بر پایه نظریه تغییر شکل‌های کوچک و در حالت کرنش-صفحه‌ای، به‌صورت تحلیلی مطالعه شد. مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم به‌صورت تابع‌های توانی از مختصه شعاعی فرض و از معیار تسلیم ترسکا و قانون جریان وابسته به آن استفاده شد.

برای ارزیابی تحلیل‌ها، نتایج عددی به‌ازای مقدار صفر برای پارامترهای توان، با نتایج مشابه در مرجع [۱۷] برای استوانه همگن و استوانه هدفمند با چگالی و تنش تسلیم ثابت، مقایسه و درستی و اعتبار نتایج به‌دست آمده، نشان داده شد.

در بررسی‌ها به‌ویژه اثر تغییر چگالی و تنش تسلیم بر رفتار الاستیک-پلاستیک استوانه هدفمند دوار، که در پژوهش‌های پیشین از آن چشم‌پوشی شده، مورد توجه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد چشم‌پوشی از تغییر چگالی و تنش تسلیم نه‌تنها می‌تواند سبب بروز اختلاف قابل توجه در محاسبه جابه‌جایی شعاعی و مؤلفه‌های تنش و کرنش شود. بلکه حتی می‌تواند به پیش‌بینی نادرست از الگوی شروع تسلیم و پیشروی ناحیه پلاستیک منجر شود. برای مثال به‌ازای $(a/b)=0/55$ برای نسبت شعاعی، اگر از تغییر چگالی و تنش تسلیم چشم‌پوشی شود، به‌ازای پارامتر توان $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ ($n_\rho=n_\sigma=0$) پیش‌بینی می‌شود تسلیم هم‌زمان از شعاع داخلی و خارجی آغاز شود. در حالی که با در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم در حالت $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ پیش‌بینی می‌شود تسلیم از شعاع داخلی آغاز و به سمت شعاع خارجی گسترش یابد. هم‌چنین برای همین حالت، نتایج نشان می‌دهد محاسبه مؤلفه‌های تنش، کرنش و جابه‌جایی شعاعی به‌ترتیب با حدود ۸۰٪، ۷۰٪ و ۷۰٪ خطا همراه خواهد بود. نتایج به‌دست آمده به‌روشنی اهمیت در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم را در تحلیل تغییر شکل الاستیک-پلاستیک استوانه هدفمند دوار نشان می‌دهند.

۵- فهرست نمادها و نشانه‌ها

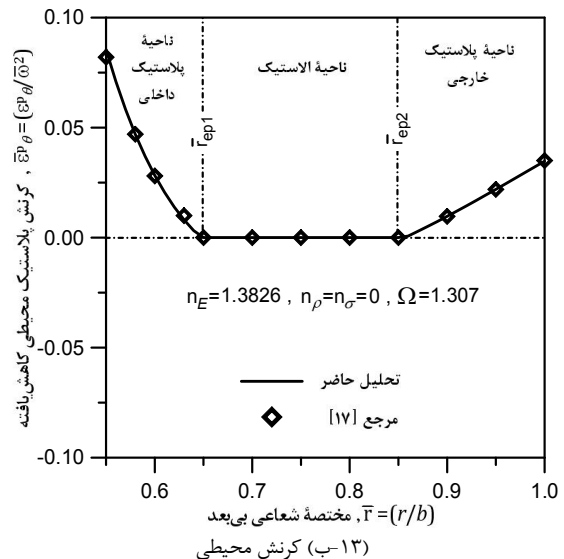
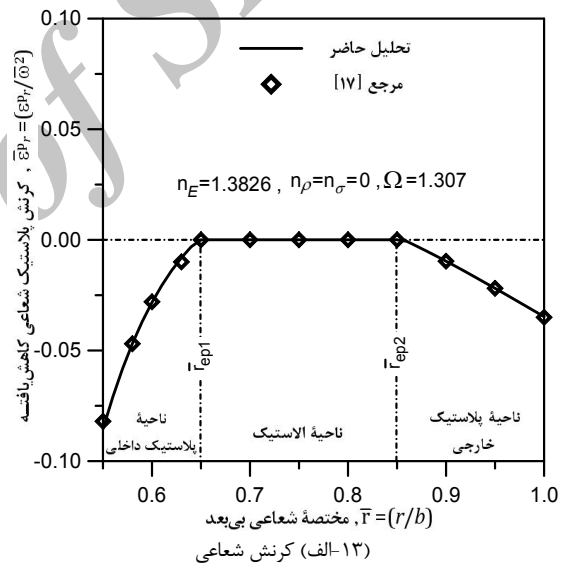
a, b	شعاع داخلی و خارجی استوانه (m)
A_i, m_i, k	ثابت‌های بی‌بعد
C_i	ثابت‌های بی‌بعد انتگرال‌گیری

نمودارهای شکل ۱۳ با نتایج مشابه به‌دست آمده در مرجع [۱۷] یکسان هستند.

اکنون به‌منظور بررسی اثر در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم، نمودارهای کرنش پلاستیک شعاعی و محیطی برای حالت $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ و $(a/b)=0/55$ در شکل ۱۴ نشان داده می‌شوند. مقایسه نتایج شکل‌های ۱۳ و ۱۴ به‌روشنی نشان‌دهنده تأثیر قابل توجه تغییرات چگالی و تنش تسلیم بر توزیع کرنش‌های پلاستیک شعاعی و محیطی است.

همان‌گونه که پیشتر در نتایج مربوط به شروع و پیشروی ناحیه‌ی پلاستیک در حالت متغیر بودن مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم مشاهده شد، تسلیم از شعاع داخلی شروع شده است. به‌ازای پارامتر بارگذاری داده شده، تسلیم تا شعاع بی‌بعد $\bar{r}_{EP}=0/67$ گسترش یافته است.

در نمودارهای کرنش شکل ۱۴ نیز، هم‌چنان که از قانون جریان وابسته به معیار ترسکا انتظار می‌رود، مجموع کرنش‌های پلاستیک شعاعی و محیطی برابر با صفر است. هم‌چنین بیشینه قدر مطلق هر یک از این دو کرنش پلاستیک در شعاع داخلی رخ می‌دهد و با افزایش شعاع، اندازه‌ی کرنش‌های پلاستیک کاهش می‌یابد.



شکل ۱۳ کرنش پلاستیک کاهش یافته، به‌ازای $n_E=n_\rho=n_\sigma=1/3826$ و $\Omega=1/307$

- [9] A. Mendelson, *Plasticity: Theory and Application*, New York: MacMillan, 1968.
- [10] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., New York: McGraw-Hill, 1970.
- [11] J. Chakrabarty, *Theory of Plasticity*, 2nd Ed., Oxford: Elsevier, 2005.
- [12] A. N. Eraslan, T. Akis, On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems, *ActaMechanica*, Vol. 181, No. 1-2, p.p. 43-63, 2006.
- [13] S. A. HosseiniKordkheili, R. Naghdabadi, Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk, *Composite Structures*, Vol. 79, No. 4, p.p. 508-516, 2006.
- [14] L. H. You, X. Y. You, J. J. Zhang, J. Li, On rotating circular disks with varying material properties, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 58, No. 6, p.p. 1068-1084, 2007.
- [15] X. L. Peng, X. F. Li, Elastic analysis of rotating functionally graded polar orthotropic disks, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 60, No. 1, p.p. 84-91, 2012.
- [16] M. ZamaniNejad, G. Rahimi, Elastic analysis of FGM rotating cylindrical pressure vessels, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, Vol. 33, No. 4, pp.525-530, 2010.
- [17] T. Akis, A. N. Eraslan, Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 77, No. 10, p.p. 745-765, 2007.
- [18] M. Tahani, T. Talebian, Analysis of functionally graded cylindrical vessels under mechanical and thermal loads, *Amirkabir Journal Mechanical Engineering*, Vol. 41, No. 1, p.p. 49-58, 2009. (In Persian)
- [19] A. Heidari, M. Kazemi, Elastic-plastic analysis of thick-walled FGM vessels under internal pressure, *Majlesi Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 3, No. 1, p.p. 11-18, 2009. (In Persian)
- [20] R. Ghajar, S. Mehrabiani, Thermo-mechanical analysis of thick-walled cylinder with internal FGM coating, considering thermal residual stresses, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 40, No. 2, p.p. 57-66, 2010. (In Persian)
- [21] A. Mahdavi, M. Hojati, R. Alashti, Thermo-elastic analysis of a rotating FGM disk, with variable thickness, in *ISME Conference*, Birjand, I.R. IRAN, 2010. (In Persian)
- [22] M. Bayat, B. B. Sahari, M. Saleem, A. M. S. Hamouda, J. N. Reddy, Thermo elastic analysis of functionally graded rotating disks with temperature-dependent material properties: uniform and variable thickness, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 5, No. 3, p.p. 263-279, 2009.
- [23] M. Salmani Tehrani, M. Hemati, Investigating the maximum allowed angular velocity for a rotating FGM cylinder, considering density and yield stress variation, *Sharif Journal of Mechanical Engineering*, (Article in Press). (In Persian)
- [24] W. Mack, Rotating elastic-plastic tube with free ends, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 27, No. 11, p.p. 1461-1476, 1991.
- مدول الاستیسیته (مدول الاستیسیته در شعاع خارجی) (Pa) $E (E_0)$
- پارامترهای توان ماده هدفمند (به ترتیب توان تابع مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم) n_E, n_ρ, n_σ
- مختصات در دستگاه استوانه‌ای (به ترتیب مختصه شعاعی، محیطی و محوری) r, θ, z
- جابجایی شعاعی (m) (جابجایی شعاعی بی‌بعد) $u_i (\bar{u}_i)$
- مؤلفه‌های کرنش (کرنش کاهش‌یافته) $\varepsilon_i (\bar{\varepsilon}_i)$
- ضریب پواسون ν
- چگالی (چگالی در شعاع خارجی) (kg/m^3) $\rho (\rho_0)$
- تابع تنش تسلیم (تنش تسلیم در شعاع خارجی) (Pa) $\sigma_Y (\sigma_0)$
- مؤلفه‌های تنش (تنش بی‌بعد) (Pa) $\sigma_i (\bar{\sigma}_i)$
- سرعت زاویه‌ای (rad/sec) (سرعت زاویه‌ای بی‌بعد) $\omega (\bar{\omega})$
- پارامتر بی‌بعد بارگذاری (متناظر با آستانه تسلیم و متناظر با پلاستیک کامل) $\Omega (\Omega_y, \Omega_{fp})$

۶- مراجع

- [1] R. M. Mahamood, E. T. Akinlabi, Functionally graded material: an overview, in *The World Congress on Engineering*, Vol. III, London, U.K., 2012.
- [2] Y. Fukui, N. Yamanaka, Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure, *JSME International Journal*, Vol. 35, No. 4, p.p. 379-385, 1991.
- [3] N. Tutunku, M. Ozturk, Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Composites: Part B: Engineering*, Vol. 32, No. 8, p.p. 683-686, 2001.
- [4] L. H. You, J. J. Zhang, X. Y. You, Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 5, p.p. 347-354, 2005.
- [5] H. L. Dai, Y. M. Fu, Z. M. Dong, Exact solutions for functionally graded pressure vessels in a uniform magnetic field, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No.18-19, p.p. 5570-5580, 2006.
- [6] A. N. Eraslan, T. Akis, Exact elasticity solutions for thick-walled FG spherical pressure vessels with linearly and exponentially varying properties, *IJE Transactions A: Basics*, Vol. 22, No. 4, p.p. 405-416, 2009.
- [7] M. Jabbari, S. Sohrabpour, M. R. Eslami, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, No.7, p.p. 493-497, 2002.
- [8] A. N. Eraslan, T. Akis, Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 83, No.9, p.p. 635-644, 2006.