



## طراحی مسیر بهینه یک کپسول فضایی با استفاده از روش‌های مستقیم چند بازه‌ای

علیرضا عالمی نائینی<sup>۱</sup>، جعفر روشنیان<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیر، تهران

۲- استاد، مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیر، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۸۳۹۱۱-۸۶۵۶۹، roshanian@kntu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: ۲۰ مرداد ۱۳۹۲  
پذیرش: ۳۰ آبان ۱۳۹۲  
ارائه در سایت: ۲۲ تیر ۱۳۹۳  
کلید واژگان:  
بازگشت به جو  
طراحی مسیر  
روش شبه طیفی  
روش پرتاب  
الگوریتم ژنتیک

### چکیده

در این مقاله، طراحی مسیر بازگشت به جو یک کپسول فضایی از لحظه خروج از مدار اولیه تا رسیدن به شرایط عملکرد سیستم بازایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور دو روش حل عددی مسائل کنترل بهینه با رویکرد چند بازه‌ای توسعه داده شده و مورد استفاده و مقایسه قرار گرفته است. روش اول در دسته روش‌های پرتاب (شوتینگ متد) قرار دارد که بهینه‌سازی در آن با استفاده از الگوریتم ژنتیک صورت می‌پذیرد. در این روش با بهره‌گیری از مدل جامعی برای توصیف تاریخچه کنترلی، به طور همزمان تعداد و چینش بازه‌ها و نوع تاریخچه کنترلی در هر بازه بهینه می‌شود. روش دوم موسوم به روش شبه طیفی می‌باشد که در آن متغیرهای حالت و کنترل برای ارضای همزمان قیود و شرایط بهینگی در نقاطی موسوم به گره‌ها تعیین می‌شوند. این روش هم با رویکرد چند بازه‌ای حل شده و با روش اول مقایسه گشته است. روش‌های توسعه داده شده که در انتها عملکرد آنها مورد مقایسه و تحلیل قرار گرفته، قابل استفاده برای حل کلیه مسائل کنترل بهینه و طراحی مسیر می‌باشند.

## Optimal trajectory design for a space capsule using of multiple interval direct methods

Ali Reza Alemi Naeni, Jafar Roshanian\*

Department of Aerospace Engineering, Khaje Nasir University of Technology, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 16569-83911 Tehran, Iran, roshanian@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 11 August 2013  
Accepted 21 November 2013  
Available Online 13 July 2014

#### Keywords:

Trajectory Planning  
Pseudospectral  
Shooting Method  
Genetic Algorithm  
Reentry

### ABSTRACT

This paper investigates the trajectory design for a conventional space capsule that initializes its path from a specified position and velocity corresponding to a selected de-orbit point, and it is desired to reach a specified point in the space, where the recovery system will be activated. Using two of the most important numerical methods of solving the optimal control problems developed for the best results, we search for a suitable number of sub-intervals resulting in the best and fast converging solution. For this sake, a kind of shooting methods utilizing the parameterized control command profile uses as the first method. Second method is one of direct methods of solving the optimal control problems named pseudospectral method which collocates the differential algebraic equations at a set of orthogonal points and transcribes the original problem into a nonlinear programming problem. Both of multi-interval developed methods which are compared in this study, are convenient for solving the optimal control or trajectory planning problems.

### ۱- مقدمه

روش‌های عددی کاربرد گسترده‌ای در این حوزه یافته‌اند. به طور کلی روش‌های عددی حل مسائل کنترل بهینه به دو دسته غیرمستقیم و مستقیم تقسیم می‌شوند. در روش غیرمستقیم [۱،۲]، حساب تغییرات برای استخراج شرایط لازم بهینگی به کار گرفته می‌شود. طبیعتاً به همین دلیل، بهینگی حل، تضمین شده و قطعی خواهد بود و این از امتیازات این روش می‌باشد. اما از طرفی اشکالاتی نیز متوجه این روش می‌باشد. از یک طرف استخراج شرایط مرتبه اول بهینگی همواره کار آسانی نبوده و در برخی موارد چالش برانگیز است؛ از طرف دیگر حدس اولیه پاسخ در این روش اهمیت زیادی دارد و کاملاً بر همگرا شدن فرایند تأثیرگذار است. این حدس اولیه شامل حدس شبه حالت‌ها که پارامترهایی غیر شهودی بوده و ماهیت فیزیکی ندارند نیز

یکی از مهم‌ترین مسائل در حوزه کنترل بهینه، هدایت اجسام بازگشت‌پذیر در جو می‌باشد. این فاز حرکتی اگرچه به لحاظ زمانی بخش بسیار کوتاهی از کل مدت زمان انجام مأموریت را در بر می‌گیرد، بدون شک، حساس‌ترین و پر اهمیت‌ترین بخش مأموریت می‌باشد. بارهای سازه‌ای و حرارتی بسیار بالا و الزامات و قیود متعدد از ویژگی‌های این بخش از حرکت می‌باشد. با در نظر گرفتن این ویژگی‌ها، اهمیت طراحی مسیر حرکتی بهینه در این فاز بیش از پیش روشن می‌شود. طراحی مسیر حرکتی یا هدایت بهینه، مستلزم حل نوعی مسأله کنترل بهینه است که در این بررسی نیز مورد نیاز بوده است. عموماً روش تحلیلی برای حل مسائل کنترل بهینه وجود نداشته و از این رو،

Please cite this article using:

A.R. Alemi Naeni, J. Roshanian, Optimal trajectory design for a space capsule using of multiple interval direct methods, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 63-71, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مرزی و تابع هدف بحث می‌شوند. در بخش بعد، کپسول فضایی مورد بررسی که موسوم به "ای آر دی" می‌باشد معرفی شده و مشخصه‌های آن مورد بحث قرار می‌گیرد. توضیحات مختصری در خصوص الگوریتم ژنتیک در ادامه ارائه شده که با معرفی و بحث و بررسی در خصوص روش شبه‌طیفی ادامه می‌یابد. در نهایت، نتایج هر دو روش در طراحی مسیر بهینه بازگشت به جو ارائه شده و مورد مقایسه قرار خواهد گرفت.

## ۲- بازگشت به جو

### ۲-۱- معادلات حرکت

دینامیک اجسام بازگشت‌پذیر، پارامترهای تأثیرگذار در این خصوص و مدل‌های مربوطه به طور مفصل در مرجع [۲۱] بیان شده است. معادلات حرکت کپسول فضایی در سیستم مختصات کروی به صورت بیان شده در رابطه (۱) می‌باشد [۲۲].

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \sin \gamma, \quad \theta = \frac{v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{v \cos \gamma \sin \psi}{r} \\ \dot{v} &= -D - g \sin \gamma + \omega^2 r \cos \phi (\sin \gamma \cos \phi - \cos \gamma \sin \psi \sin \phi) \\ \dot{\gamma} &= \frac{L \cos \sigma}{v} - \left( \frac{g}{v} - \frac{v}{r} \right) \cos \gamma + 2\omega \cos \psi \cos \phi \\ &+ \frac{\omega^2 r}{v} \cos \phi (\cos \gamma \cos \phi + \sin \gamma \sin \psi \sin \phi) \\ \dot{\psi} &= \frac{L \sin \sigma}{v \cos \gamma} - \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \psi \tan \phi + 2\omega (\tan \gamma \sin \psi \cos \phi \\ &- \sin \phi) - \frac{\omega^2 r}{v \cos \gamma} \cos \psi \sin \phi \cos \phi \end{aligned} \quad (1)$$

که  $r$  فاصله از مرکز گرانشی زمین،  $v$  سرعت نسبت به زمین،  $\theta$  طول جغرافیایی،  $\phi$  عرض جغرافیایی،  $\gamma$  زاویه مسیر حرکت با افق،  $\psi$  زاویه سمت و زاویه  $\sigma$  بنک می‌باشد. زاویه  $\sigma$  زاویه بین بردار برا و صفحه متشکل از بردارهای موقعیت و سرعت می‌باشد که در اینجا متغیر کنترلی محسوب می‌شود. در نهایت  $\omega$  سرعت دوران زمین و  $g = \mu/r^2$  اندازه شتاب گرانش می‌باشد که  $\mu$  پارامتر گرانشی زمین است. بردارهای برا و پسا نیز مطابق رابطه (۲) معرفی می‌شوند.

$$L = \frac{qSC_L}{m}, \quad D = \frac{qSC_D}{m} \quad (2)$$

در رابطه فوق  $q$  فشار دینامیکی است که متناسب با حاصل ضرب دانسیته آتمسفر در مجذور سرعت می‌باشد،  $C_L$  ضریب برا،  $C_D$  ضریب پسا،  $S$  سطح مرجع وسیله،  $m$  جرم وسیله و  $\rho$  چگالی آتمسفر است که در این بررسی مطابق با مدل استاندارد ۱۹۷۶ در نظر گرفته شده است.

### ۲-۲- قیود

در طی پرواز، قیود نامساوی در خصوص پارامترهای فشار دینامیکی، شتاب و نرخ انتقال حرارت بر اساس رابطه (۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$q \leq 15000 \text{ N/m}^2, \quad a \leq 4g, \quad \dot{Q} \leq 800 \text{ kW/m}^2 \quad (3)$$

### ۲-۳- شرایط مرزی

شرایط اولیه حرکتی کپسول فضایی مربوط به شرایط خروج از مدار اولیه بوده که به صورت رابطه (۴) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} r(t_0) &= 120 \text{ km}, \quad \theta(t_0) = 41/5^\circ, \quad \phi(t_0) = 40/5^\circ \\ v(t_0) &= 7500 \text{ m/s}, \quad \gamma(t_0) = -2^\circ, \quad \psi(t_0) = -45^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

شرایط نهایی نیز مربوط به نقطه فعال شدن سیستم بازیافت می‌باشد و به صورت رابطه (۵) در نظر گرفته شده است.

$$r(t_f) = 15 \text{ km}, \quad \theta(t_f) = 59/99^\circ, \quad \phi(t_f) = 22/98^\circ \quad (5)$$

سایر مشخصه‌ها از قبیل زمان و پارامترهای مربوط به سرعت به صورت آزاد در نظر گرفته شده است.

می‌باشد که این هم اشکال قابل توجهی است. در مقابل در روش مستقیم، تابعی پیوسته از زمان برای متغیرهای حالت یا کنترل و یا هر دو حدس زده می‌شود و مسأله کنترل بهینه به نوعی مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی با ابعاد محدود تبدیل می‌شود. چنین مسأله‌ای به راحتی با الگوریتم‌ها و نرم‌افزارهای توسعه یافته در این حوزه قابل حل خواهد بود. روش مستقیم وابستگی زیادی به حدس اولیه نداشته و اساساً حدس شبه حالت‌ها در آن مورد نیاز نمی‌باشد. از طرف دیگر استخراج شرایط بهینگی نیز مورد نیاز نیست. دو روش از نخستین روش‌های مستقیم توسعه یافته برای حل مسائل کنترل بهینه، روش پرتاب مستقیم و روش پرتاب مستقیم چندگانه می‌باشد [۳-۴]. در این دو روش، تنها تاریخچه متغیرهای کنترلی به صورت پارامتریک توصیف شده و متغیرهای حالت در هر اجرا با انتگرال‌گیری عددی از معادلات محاسبه می‌شود. مقدار مطلوب پارامترهای مورد استفاده برای تولید پروفیل کنترلی، در طی اجراهای متعدد با یکی از روش‌های بهینه‌سازی تعیین می‌شود. از جمله کاربردی‌ترین روش‌های بهینه‌سازی، الگوریتم ژنتیک است که کاربرد زیادی در حوزه‌های مختلف صنعتی و خصوصاً هوافضایی داشته است [۵-۹]. در دسته دیگری از روش‌های مستقیم، متغیرهای حالت و کنترل به طور همزمان و با استفاده از برخی توابع پایه به صورت پارامتریک بیان شده و مقداردهی می‌شوند. در این روش‌ها مجموعه‌ای از نقاط موسوم به گره‌ها انتخاب شده و در آنها معادلات دیفرانسیل مسیر به صورت قیود اعمال می‌شود [۱۰-۱۲]. حساسیت این روش‌ها به حدس اولیه تا حدود زیادی کمتر از روش‌های پرتاب مستقیم است. یکی از روش‌های شاخص توسعه یافته در این حوزه روش شبه طیفی است که در آن توابع پایه معمولاً چند جمله‌ای‌های لاگرانژ یا چپیشف بوده و انتخاب گره‌ها مبتنی بر قواعد انتگرال‌گیری عددی گاوسی با دقت بالا می‌باشد [۱۳-۱۵]. در روش‌های توسعه یافته اخیر در حوزه شبه طیفی، انتخاب توابع پایه و گره‌ها به گونه‌ای انجام می‌شود که مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی مربوطه در حالت گسسته دقیقاً معادل فرم گسسته مسأله کنترل بهینه اولیه باشد. به این ترتیب همگرایی مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی حاصل که سرعت بالایی نیز دارد منجر به جواب بهینه خواهد شد [۱۶-۱۷].

بررسی‌های زیادی در حوزه هدایت و طراحی مسیر اجسام بازگشت‌پذیر انجام شده است [۱۸-۲۰]. در این مقاله روش پرتاب با بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیک و بر اساس مدل جامعی برای بیان پارامتریک تاریخچه کنترلی مورد استفاده قرار گرفته است. در این مدل، مقدار بهینه تعداد بازه‌ها و نحوه توزیع آنها در کنار نوع تاریخچه کنترلی (درجه چند جمله‌ای) در هر بازه تعیین می‌شود. مدل یاد شده، توانایی پوشش دادن به طیف وسیعی از پروفیل‌ها را داشته و به طور همزمان بهینه‌سازی پارامترهای مهم و تأثیرگذار مربوطه را به انجام می‌رساند. متغیر شدن طول کروموزوم‌ها در الگوریتم ژنتیک از طریق تعریف ژن‌هایی به عنوان شاخص طول مؤثر کروموزوم انجام شده و به این ترتیب، امکان رسیدن به حل بهینه در مجموعه گسترده جواب‌ها فراهم شده است. در کنار روش معرفی شده، روش استفاده شده دیگر، روش شبه طیفی است که مسأله اولیه را به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کند. باز هم مسأله به فرم چندبازه‌ای حل شده و همزمان اثر چینش‌های متفاوت بازه‌ها نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این به معنای آن است که به نوعی، بهینه کردن روش حل مسأله بهینه‌سازی اولیه در دستور کار قرار می‌گیرد. بخش‌های بعدی مقاله به ترتیب زیر ارائه شده‌اند: در بخش اول مدل ریاضی مسأله بازگشت به جو یک کپسول فضایی مورد بحث قرار می‌گیرد. در این بخش معادلات حرکت، قیود مسیر، شرایط

## ۴-۲- تابع هزینه

هدف اصلی، به حداقل رساندن میزان حرارت جذب شده می‌باشد. این پارامتر با انتگرال‌گیری از نرخ انتقال حرارت در طول مدت زمان انجام ماموریت بر اساس رابطه (۶) محاسبه می‌شود.

$$J_Q = \int_{t_0}^{t_f} \dot{Q} dt \quad (6)$$

در رابطه (۶)، نرخ انتقال حرارت به صورت رابطه (۷) محاسبه می‌شود.

$$\dot{Q} = C v^N (\rho / R_{nose})^M \quad (7)$$

که  $\rho$  دانسیته اتمسفر است و سایر پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$C$	$1/83e-4$
$R_{nose}$	$2$
$N$	$3$
$M$	$0.5$

لازم به توضیح است که مبنای رابطه فوق، میزان انتقال حرارت در نقطه سکون می‌باشد که تابعی از هندسه وسیله است.

علاوه بر میزان حرارت جذب شده، کلیه قیود در شاخص عملکرد سیستم قرار داده شده‌اند. در واقع چنانچه قیود نقض شوند، مقدار آنها در تابع هزینه بر اساس رابطه (۸) لحاظ می‌شود.

$$J_{ci} = \begin{cases} 0 & p_i < p_{lim} \\ k_i \left(\frac{p_i}{p_n}\right)^2 & p_i \geq p_{lim} \end{cases} \quad (8)$$

و بر این اساس:

$$J_c = \sum J_{ci}$$

که در رابطه فوق،  $J_{ci}$  هزینه مربوط به قید  $i$ ام بوده و  $p_i$  و  $p_{lim}$  مقدار و حد پارامتر تحت بررسی می‌باشد. علاوه بر این،  $p_n$  برای بی بعد کردن در نظر گرفته شده و  $k_i$  نیز ضریب مربوطه می‌باشد.

با توجه به آنچه گفته شد تابع هزینه نهایی به صورت رابطه (۹) در نظر گرفته شده است:

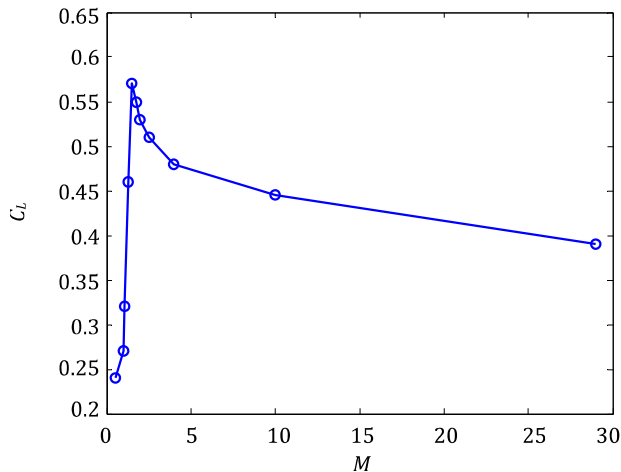
$$J = J_Q + J_c \quad (9)$$

## ۴-۲-۵- مدل فیزیکی وسیله

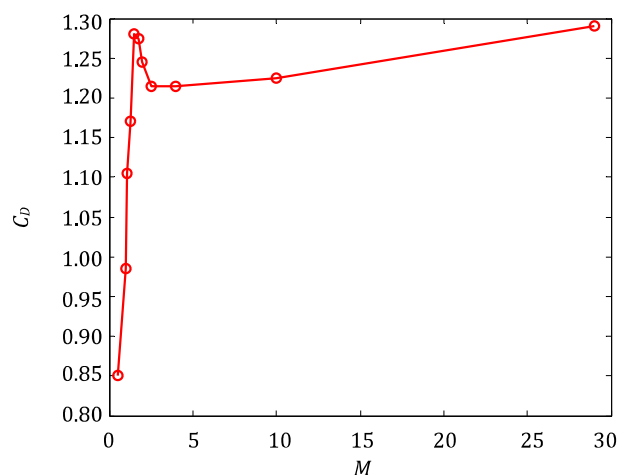
کپسول فضایی مورد استفاده در این بررسی، کپسولی موسوم به "ای آر دی" است که مخفف "اثبات کننده فناوری بازگشت به جو" می‌باشد. این کپسول توسط آژانس فضایی اروپایی در سال ۱۹۹۸ به طور موفقیت‌آمیز آزمایش شده است. این کپسول شبیه کپسول آپولو با نسبت ۷۹ درصد است و شکلی کروی-مخروطی دارد. بیشترین قطر آن ۲/۸ متر، طول آن ۲/۰۴ متر و جرم کلی آن ۲۸۰۰ کیلوگرم می‌باشد. (شکل ۱)



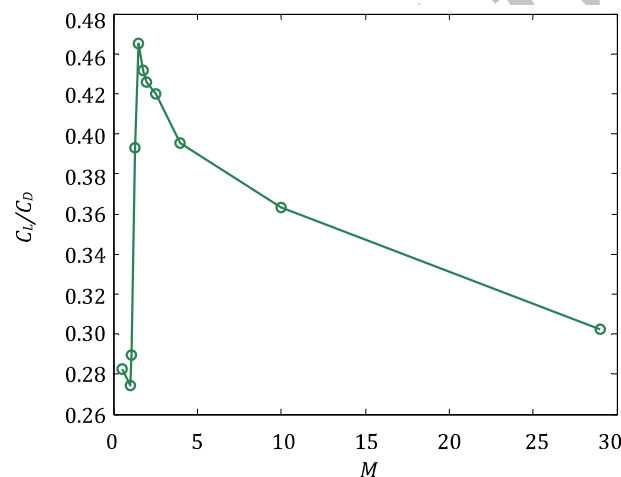
شکل ۱ شماتیک کپسول بازگشت‌پذیر بررسی شده



شکل ۲ پروفیل ضریب برای کپسول بازگشت‌پذیر [۲۳]



شکل ۳ پروفیل ضریب پسای کپسول بازگشت‌پذیر [۲۳]



شکل ۴ نسبت ضریب برا به پسای کپسول بازگشت‌پذیر [۲۳]

در طی فاز بازگشت به جو، جرم کپسول ثابت فرض می‌شود. بعلاوه فرض می‌شود زاویه حمله توسط سیستم کنترل در نزدیکی مقدار تعادلی آن نگاه داشته شود. در واقع به دلیل وجود میزان مشخصی عدم تقارن جرمی، همواره میزان مشخصی زاویه حمله وجود خواهد داشت که برای یک عدد ماخ معین، مقدار آن ثابت بوده و تابعی از هندسه و موقعیت مرکز ثقل است. با این فرض می‌توان ضرایب نیروی برا و پسا را منحصراً تابعی از عدد ماخ دانست. ضرایب یاد شده در شکل‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده‌اند.

## ۳- روش پرتاب مستقیم

## ۳-۱- مقدمه

همان‌گونه که پیشتر بیان شد، روش‌های پرتاب از طریق بیان تاریخچه کنترلی به صورت پارامتریک و انتگرال‌گیری عددی از معادلات، مسأله کنترل بهینه را حل می‌نمایند. بهینه‌سازی پارامترها با استفاده از روش‌های گرادیان پایه یا غیر وابسته به گرادیان انجام می‌گیرد. این کار در مقاله حاضر به وسیله الگوریتم ژنتیک [۵-۹] به انجام رسیده است. در ادامه، شرح مختصری از الگوریتم ژنتیک ارائه خواهد شد.

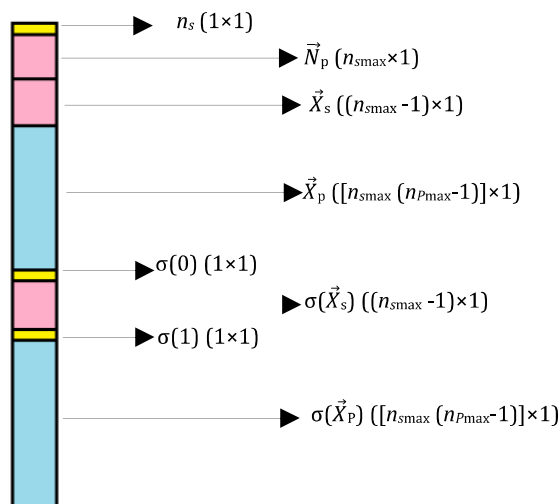
## ۳-۲- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک بر پایه اصول علم ژنتیک در طبیعت شکل گرفته است. عناصر اصلی ژنتیک طبیعی شامل تولید مثل، انتخاب و جهش می‌باشد که در فرایند جستجوی ژنتیک به کار گرفته می‌شود. اولین عملگر، انتخاب است که برای شکل‌دهی مجموعه‌ای از بهترین عناصر به کار گرفته می‌شود. بعد از آن، عملگر تولید مثل با هدف تولید عناصر جدید با تبادل اطلاعات میان بهترین‌های مرحله قبل به کار می‌رود. در نتیجه این عملگر، عناصری با کیفیت بالاتر در نسل‌های بعدی به وجود می‌آیند. نهایتاً عملگر جهش با هدف پیشگیری از همگرایی زودرس با یک درصد احتمال پایین به کار گرفته می‌شود.

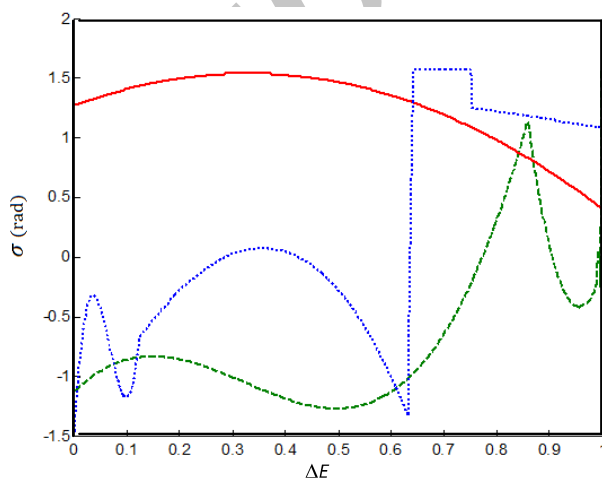
## ۳-۳- توصیف تاریخچه کنترلی به فرم پارامتریک

یکی از الزامات مهم در روش پرتاب مستقیم، استفاده از مدلی مناسب برای بیان پارامتریک تاریخچه کنترلی می‌باشد. با توجه به این که رویکرد مقاله حاضر چند بازه‌ای می‌باشد، مدل در نظر گرفته شده، امکان در نظر گرفتن چندین بازه با پروفیل‌های کنترلی متفاوت را فراهم می‌سازد. بنابراین پارامترها در این روش، شامل تعداد و موقعیت بازه‌ها و نوع تاریخچه کنترلی در هر بازه می‌باشد. در هر بازه با در نظر گرفتن تعداد مناسبی گره و مقدار فرمان کنترلی متناظر برای هر یک، نوع تاریخچه کنترلی تعیین می‌شود. تعداد گره‌ها متناسب با درجه چند جمله‌ای در نظر گرفته شده برای بازه مورد بررسی می‌باشد که این پارامتر نیز از مجموعه پارامترهای بهینه‌سازی است. بر این اساس، در این مدل، تعداد بازه‌ها ( $ns$ )، موقعیت آنها ( $Xs$ ) و درجه چند جمله‌ای در هر بازه ( $Np$ )، بهینه می‌شود. برای ایجاد یک چند جمله‌ای از درجه  $np_i$  به  $np_{i+1}$  نقطه مستقل نیاز است. با در نظر گرفتن این که نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ها در بردار  $Xs$  تعریف شده است، برای توصیف کامل هر بازه، بردار  $Xp$  با اندازه  $np_i-1$  مورد نیاز خواهد بود. از طرف دیگر، مقدار کنترل در کلیه نقاط  $Xs$  و  $Xp$  که  $\sigma(Xs)$ ،  $\sigma(Xp)$  نامیده می‌شود نیز جزء پارامترهای مورد نظر در بهینه‌سازی خواهد بود. در این بررسی، کلیه پارامترهای  $ns$ ،  $Np$ ،  $Xs$ ،  $Xp$ ،  $\sigma(Xp)$ ،  $\sigma(Xs)$  کدگذاری شده و رشته‌ای را تشکیل داده است که شاخص پروفیل کنترلی خواهد بود. با توجه به این که در نظر گرفتن مقادیر مختلفی برای  $ns$  و  $np$  منجر به تفاوت طول رشته‌ها در الگوریتم ژنتیک خواهد شد. این مشکل با در نظر گرفتن مقادیر ماکزیمم  $ns_{max}$  و  $np_{max}$  حل شده است. در واقع طول واقعی رشته‌ها برابر  $2ns_{max}np_{max}+ns_{max}+1$  می‌باشد اما طول مؤثر آن به وسیله ژنهای شاخص  $ns$  و  $Np$  تعیین می‌شود. شایان ذکر است کلیه اجزاء رشته کدگذاری به گونه‌ای بی بعد شده که مقدار آن در بازه [۰,۱] قرار دارد. اجزاء رشته کدگذاری پروفیل کنترلی به تفکیک نام و با قید اندازه در شکل ۵ نشان داده شده است.

پارامتر مستقل در نظر گرفته شده در این بررسی، میزان تغییر انرژی بی‌بعدسازی شده می‌باشد که با نماد  $\Delta E$  نمایش یافته و مقدار آن از ۰ شروع

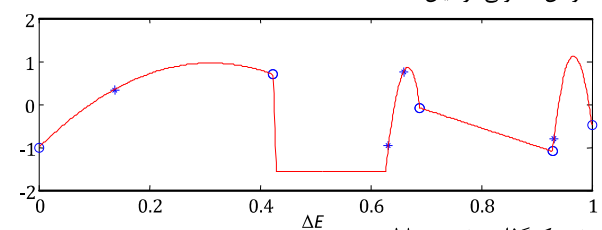


شکل ۵ اجزاء رشته کدگذاری پروفیل کنترلی

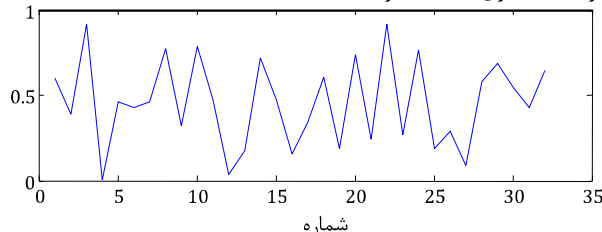


شکل ۶ برخی از پروفیل‌های کنترلی نمونه

فرمان کنترلی (رادیان)



رشته کدگذاری شده متناظر



شکل ۷ مقادیر یک رشته کدگذاری شده و پروفیل کنترلی متناظر با آن

ذکر این نکته هم ضروری است که برخی از وسایل بازگشت‌پذیر تنها با تغییر زاویه بنک کنترل می‌شوند در حالی که برخی دیگر ترکیبی از زاویه حمله و زاویه بنک را برای این منظور به کار می‌گیرند. در این مقاله فرض شده است که کپسول مورد بررسی از نوع اول بوده و تنها به وسیله تغییر در زاویه بنک کنترل می‌شود و زاویه حمله برابر مقدار تعادلی ذاتی آن می‌باشد.

$$w_i = \frac{1}{(1 - \tau_i)[\dot{P}_{N-1}(\tau_i)]^2}, 2 \leq i \leq N$$

$$w_1 = \frac{2}{N^2} \quad (18)$$

با استفاده از ضرایب فوق رابطه (۱۹) نتیجه می‌شود.

$$\int_{-1}^{+1} g(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N w_i g_i \quad (19)$$

نکته دیگر در روش شبه طیفی، نحوه میان‌یابی در این روش است که در واقع با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ انجام می‌گیرد. در این روش با در نظر گرفتن  $n$  نقطه  $(t_1, \dots, t_n)$  به عنوان نقاط پایه، یک چند جمله‌ای درجه  $n-1$  بر نقاط یاد شده برازش می‌شود. تقریب چندجمله‌ای لاگرانژ برای یک تابع  $f(t)$  به صورت رابطه (۲۰) بیان می‌شود.

$$\tilde{f}(t) \approx \sum_{i=1}^{n+1} f_i L_i(t),$$

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, (i = 1, \dots, n+1) \quad (20)$$

که در آن  $f_i = f(t_i)$  از مشخصه‌های چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، وقوع نوسانات شدید در بین نقاط پایه می‌باشد که این نوسانات با افزایش تعداد نقاط شدت می‌پذیرد. اما با انتخاب مجموعه نقاط لژاندر-گاوس این پدیده نیز منتفی شده و چنین مشکلی رخ نخواهد داد.

با تعریف چند جمله‌ای‌های لاگرانژ، بردار حالت به صورت رابطه (۲۱) تقریب زده می‌شود.

$$y(\tau) \approx \sum_{i=1}^{N+1} Y_i L_i(\tau) \quad (21)$$

که خطای تخمین فوق از رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود [۱۶].

$$e(\tau) = \frac{(t - t_1) \dots (t - t_N)}{N!} y^{(N)}(\zeta) \quad (22)$$

که  $y^{(N)}(\zeta)$  مشتق مرتبه  $N$  تابع  $y$  در نقطه دلخواه  $\zeta$  واقع در بازه  $[t_0, t_f]$  است. به این ترتیب رابطه (۲۳) حاصل خواهد شد.

$$\tilde{y}(\tau) \approx \sum_{i=1}^{N+1} Y_i \tilde{L}_i(\tau) \quad (23)$$

بنابراین قیود دیفرانسیلی را با ترکیب معادلات (۱۳) و (۲۳) و اعمال تغییر متغیر ارائه شده در رابطه (۱۷) می‌توان به صورت رابطه (۲۴) بیان نمود:

$$\sum_{i=1}^{N+1} Y_i \tilde{L}_i(\tau_k) = \frac{t_f - t_0}{2} f(Y_k, U_k, \tau), (k = 1, \dots, N) \quad (24)$$

تابع هزینه نیز با استفاده از قوانین انتگرال‌گیری عددی گاوس به صورت رابطه (۲۵) محاسبه می‌شود.

$$J = (Y(\tau_1), \tau_1, Y(\tau_{N+1}), \tau_{N+1}) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N w_k g(Y_k, U_k, \tau) \quad (25)$$

که تعریف ضرایب  $w_k$  در رابطه (۱۸) ارائه شده است.

با تبدیل ایجاد شده در قیود دیفرانسیلی، مسأله به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل شده است که با استفاده از نرم‌افزارهای تدوین شده در این حوزه قابل حل خواهد بود. هدف از این مسأله، مینیمم کردن تابع هزینه ارائه شده در رابطه (۲۵) با لحاظ کردن قیدهای دیفرانسیلی رابطه (۲۴) و نیز قیدهای مربوط به مسیر و شرایط مرزی می‌باشد. در واقع پارامترهای مجهول مسأله، مقادیر حالت‌ها و متغیرهای کنترلی در گره‌های انتخاب شده می‌باشند که با تعیین آنها پروفیل متغیرهای حالت و کنترل حاصل خواهد شد و محاسبه این پارامترها با کدهای آماده نوشته شده در این حوزه مانند اسنپت<sup>۱</sup>

شده و به ۱ ختم می‌شود. این پارامتر از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود.

$$\Delta E = \frac{E_0 - E}{E_0} \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)،  $E$  مقدار انرژی لحظه‌ای کپسول بر واحد جرم و  $E_0$  مقدار اولیه آن می‌باشد. مقدار این پارامتر با تعریف سطح صفر انرژی در نقطه بازایی، از رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود.

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r_f} \quad (11)$$

که  $v$  سرعت نسبت به زمین،  $r$  فاصله از مرکز گرانش،  $\mu$  ثابت گرانشی زمین و  $r_f$  فاصله نهایی مطلوب مربوط به نقطه بازایی می‌باشد.

با توجه به آنچه گفته شد، با تعیین  $n_{S_{max}}$  و  $n_{P_{max}}$  هر رشته متناظر با یک پروفیل کنترلی خواهد بود. برخی از پروفیل‌های نمونه ساخته شده بر اساس این روش کد گذاری در شکل ۶ نمایش یافته است. شکل ۷ نیز مقادیر یک رشته کد شده و پروفیل فرمان متناظر با آن را نشان می‌دهد.

#### ۴- روش شبه طیفی در حل مسائل کنترل بهینه

هدف یک مسأله کنترل بهینه در شکل کلی آن، مینیمم نمودن تابع هزینه‌ای به صورت کلی بیان شده در رابطه (۱۲) خواهد بود.

$$J = \Phi(y(t_0), t_0, y(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt \quad (12)$$

که به طور همزمان قیود دینامیکی، شرایط مرزی و قیود مسیر که با روابط (۱۳) تا (۱۵) توصیف می‌شود نیز باید ارضا شود.

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t) \quad (13)$$

$$(y(t_0), t_0, y(t_f), t_f) = 0 \quad (14)$$

$$C(y(t), u(t), t) \leq 0 \quad (15)$$

روش شبه طیفی، از جمله روش‌های عددی مستقیم برای حل مسأله فوق می‌باشد. در روش‌های مستقیم، توابعی مانند چندجمله‌ای‌ها برای بیان تاریخچه تغییرات متغیرهای حالت و کنترل استفاده می‌شود [۱۰]. مشخصه

روش شبه طیفی، استفاده از توابع پایه یا متعامد برای این منظور می‌باشد [۱۱، ۱۲]. برای این منظور، از نقاط مشخصی که اصطلاحاً گره نامیده می‌شود،

استفاده می‌شود. در روش شبه طیفی، گره‌ها از قوانین انتگرال‌گیری گاوس حاصل شده‌اند. در این بررسی، از مجموعه نقاط لژاندر-گاوس-رادو برای ارضاء

قیود دیفرانسیلی و نیز انتگرال‌گیری عددی تابع هزینه استفاده می‌شود [۱۳، ۱۴]. نشان داده شده است که معادلات مرتبط با مسأله برنامه‌ریزی

غیرخطی منتج از این روش در حالت گسسته، معادل فرم گسسته شرایط مرتبه اول بهینگی مسأله کنترل بهینه اصلی می‌باشد و لذا علاوه بر تضمین

بهینگی جواب، تخمین دقیق تری از شبه حالت‌ها نیز در این روش قابل حصول است [۱۵]. مجموعه نقاط لژاندر-گاوس-رادو، ریشه‌های حاصل جمع

چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه  $n$  و  $n-1$  می‌باشد [۱۶]. چندجمله‌ای لژاندر مرتبه  $n$  به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شود.

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\tau^n} [(\tau^2 - 1)^n] \quad (16)$$

این نقاط در بازه  $[-1, 1]$  تعریف شده‌اند. بنابراین لازم است بازه زمانی مسأله با تغییر متغیر مستقل، از  $[t_0, t_f]$  به  $[-1, 1]$  تبدیل شود که این کار با استفاده از تغییر متغیر رابطه (۱۷) به انجام می‌رسد.

$$t = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2} \quad (17)$$

با مشخص شدن مجموعه نقاط لژاندر-گاوس-رادو، انتگرال‌گیری عددی تابع هزینه در بازه زمانی مربوطه از طریق جمع وزن‌دهی شده مقادیر تابع هزینه

در نقاط یاد شده انجام می‌گیرد. پارامترهای وزن دهی به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود [۱۷].

[۲۴] امکان‌پذیر می‌باشد.

برای بررسی جامع‌تر مسأله، می‌توان آن را در چند بازه حل نمود. برای این منظور لازم است نقاط ابتدایی و انتهایی بازه‌ها در نظر گرفته شده و تعداد گره‌های هر بازه نیز معین شود. در هر یک از بازه‌ها با توجه به زمان‌های ابتدایی و انتهایی آن، ابتدا بر اساس رابطه (۲۶)، تغییر متغیر مستقل انجام شده و بازه مزبور به  $[۱۰-۱]$  تغییر می‌کند.

$$\tau = \frac{2t - (t_{k-1} + t_k)}{t_k - t_{k-1}} \quad (26)$$

به این ترتیب هزینه در بازه مورد نظر با انتگرال‌گیری عددی تابع هزینه محاسبه خواهد شد. هزینه کلی، مجموع هزینه در کلیه بازه‌ها خواهد بود و قیدهای مسیر در کلیه بازه‌ها در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی نیز مرتبط با بازه‌های ابتدایی و انتهایی خواهد بود. علاوه بر معادلات فوق که متناسب با افزایش تعداد بازه‌ها، تعداد آنها نیز افزایش می‌یابد، لازم است شرایط مربوط به نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ها نیز در نظر گرفته شود. در واقع شرایط انتهایی هر بازه، شرایط آغازین بازه بعدی می‌باشد که این امر نیز قیود یا معادلات اضافه‌ای را در بر خواهد داشت. به این ترتیب کلیت حل مسأله در چند بازه، مشابه حل در یک بازه بوده و تفاوت اصلی در افزایش تعداد معادلات خواهد بود.

## ۵- نتایج

نخست، نتایج روش پرتاب مستقیم در طراحی مسیر بهینه مورد بررسی قرار می‌گیرد. همان‌گونه که گفته شد، مدل پارامتریک تاریخچه کنترلی، امکان در نظر گرفتن انواع مختلفی از پروفیل‌ها را فراهم نمود. نمونه‌ای از این پروفیل‌ها در شکل‌های ۶ و ۷ ملاحظه گردید. با بهره‌گیری از مدل معرفی شده، بهینه‌سازی مسیر به وسیله الگوریتم ژنتیک صورت پذیرفت. با توجه به اینکه در این روش به طور اتوماتیک قیود دینامیکی ارضا می‌شوند، تابع هدف الگوریتم ژنتیک، مشابه با تابع هزینه مسأله کنترل بهینه متناظر می‌باشد. در این بخش، سه مجموعه پروفیل کنترلی متفاوت مورد بررسی قرار گرفت و در هر یک فرایند بهینه‌سازی انجام شد. مجموعه پروفیل اول شامل حداکثر ۵ بازه با درجه چند جمله‌ای حداکثر ۳ بود. مجموعه پروفیل دوم یک بازه با حداکثر درجه چندجمله‌ای ۱۵ بود. نهایتاً مجموعه پروفیل سوم متشکل از حداکثر ۱۲ بازه با چندجمله‌ای خطی بود. طراحی مسیر بهینه برای هر یک از سه پروفیل معرفی شده انجام پذیرفت. روند همگرایی و پروفیل‌های فرمان بهینه شده در شکل‌های ۸ الی ۱۰ نمایش یافته است. در هر وضعیت یک مسیر بهینه با ارضا قیود حاصل شده که بهترین مسیر از بهینه‌سازی در مجموعه پروفیل سوم حاصل شده است. مقایسه مسیرهای حرکت و مشخصه‌های عملکرد در شکل‌های ۱۱ تا ۱۶ انجام شده است. در ادامه، روش شبه‌طیفی برای طراحی مسیر بهینه مورد استفاده قرار گرفت. در بخش اول با در نظر گرفتن یک بازه و تغییر تعداد گره‌ها، عملکرد روش مورد بررسی قرار گرفت. جدول ۱ نتیجه این بررسی را با مقایسه مدت زمان نسبی بهینه‌سازی و مقدار تابع هزینه نهایی نشان می‌دهد. بر این اساس، افزایش گره‌ها به بیش از ۵۰ گره، اثر مثبتی بر کاهش هزینه ندارد اما بار محاسباتی و زمان اجرا را افزایش می‌دهد. در ادامه، اثر تعداد بازه‌ها مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور تعداد متفاوتی از بازه‌هایی متشکل از ۵ گره در نظر گرفته شده و بررسی گردید. نتیجه این بررسی در جدول ۲ نمایش یافته است. این بار ملاحظه می‌شود افزایش تعداد بازه‌ها به بیش از ۱۲ عدد، اثر نامطلوبی به لحاظ بار محاسباتی داشته و نتایج را بهبود نمی‌دهد. بررسی‌های انجام شده نشان

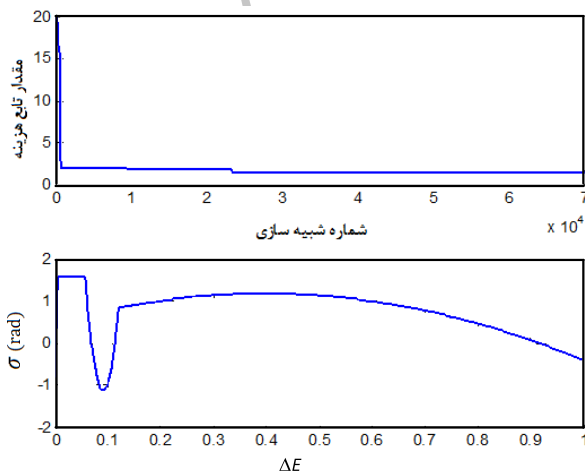
داد تعداد مطلوب گره بین ۵۰ تا ۶۰ عدد می‌باشد. حال به منظور بررسی دقیق‌تر اثر تعداد بازه‌ها، چینش‌های متفاوتی از ۶۰ گره مورد بررسی قرار گرفت. نتیجه این بررسی در جدول ۳ نمایش یافته است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود به لحاظ مقدار نهایی تابع هزینه، شرایط مشابهی وجود دارد اما بهترین وضعیت به لحاظ بار محاسباتی وضعیتی با ۱۰ بازه متشکل از ۶ گره برای هر بازه می‌باشد. نتایج حاصل از روش‌های پرتاب و شبه‌طیفی در شکل‌های ۱۷ تا ۲۲ مقایسه شده‌اند. بررسی انجام شده نشان داد مسیرهای طراحی شده از دو روش نزدیک به یکدیگر می‌باشند. به لحاظ مدت زمان حل مسأله، روش شبه‌طیفی شرایط مناسب‌تری داشته و در مدت زمان قابل قبولی حل را به انجام می‌رساند. از طرف دیگر، چنانچه حدس اولیه نامناسبی در روش شبه‌طیفی مورد استفاده قرار گیرد، امکان واگرا شدن وجود خواهد داشت. این در حالی است که روش پرتاب، علی‌رغم مدت زمان اجرای بالاتر، همواره بدون نیاز به حدس اولیه به سمت مسیر بهینه همگرا می‌شود. بر اساس آنچه گفته شد، روش پرتاب مناسب بررسی‌های جامع پیش از اجرای مأموریت می‌باشد و چنانچه حل حاصل از آن به عنوان حدس اولیه توسط روش شبه‌طیفی مورد استفاده قرار گیرد، بازدهی روش مزبور بهبود چشم‌گیری یافته و در کلیه موارد همگرایی به سمت حل بهینه حاصل خواهد شد.

جدول ۱ اثر تعداد گره‌ها بر کیفیت حل روش شبه‌طیفی تک بازه‌ای

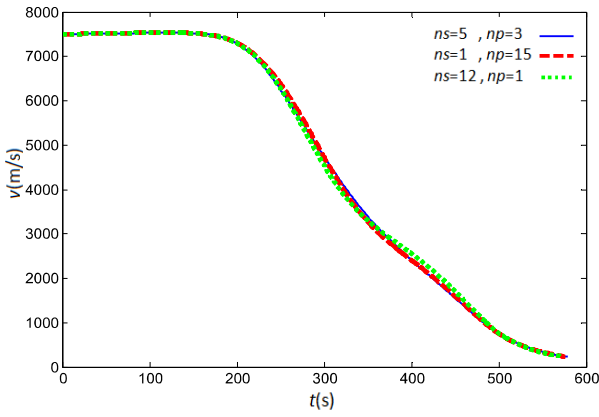
تعداد گره‌ها	مقدار نهایی تابع هزینه	زمان حل بی‌بعد سازی شده
۲۰	۴/۵۹	۰/۱۵۱
۳۰	۳/۱۶	۰/۲۸۶
۴۰	۲/۵۱	۰/۴۲۹
۵۰	۱/۴۸	۱
۶۰	۱/۴۸	۱/۲
۷۰	۱/۴۸	۱/۶۸۶

جدول ۲ اثر تعداد بازه‌های متشکل از ۵ گره بر کیفیت حل روش شبه‌طیفی چند بازه‌ای

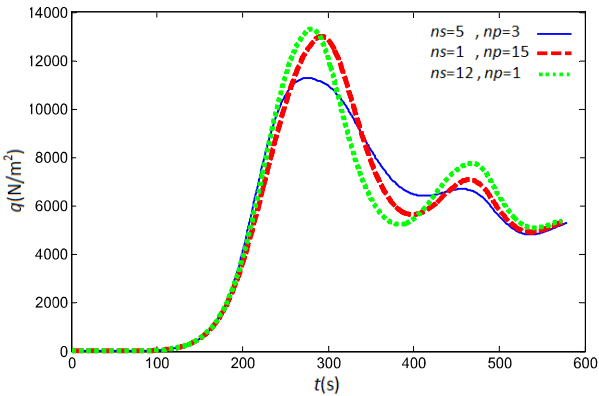
تعداد بازه‌ها	مقدار نهایی تابع هزینه	زمان حل بی‌بعد سازی شده
۴	۳/۶۲	۰/۴۷۱
۶	۲/۵۳	۰/۴۲۶
۸	۲/۴۸	۰/۵۲۷
۱۰	۱/۴۸	۱
۱۲	۱/۴۸	۰/۸۰۳
۱۴	۱/۴۸	۱/۱۸۹



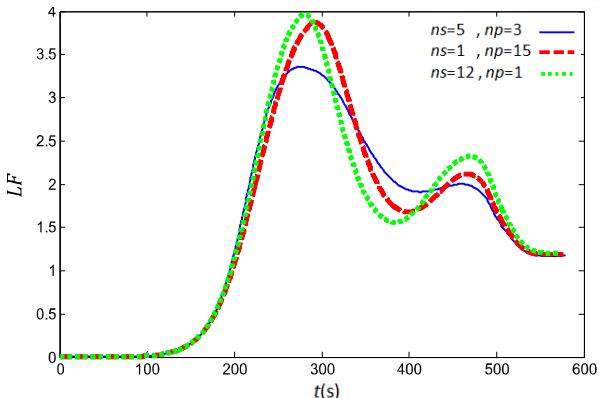
شکل ۸ نحوه همگرایی و پروفیل کنترلی بهینه ( $n_{smax}=5, n_{pmax}=3$ )



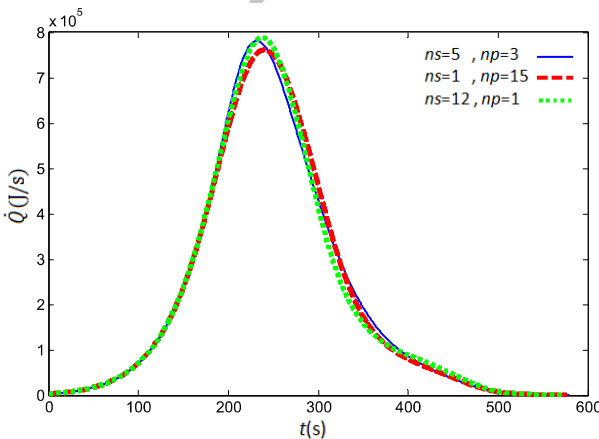
شکل ۱۲ نحوه تغییر سرعت در مسیرهای طراحی شده



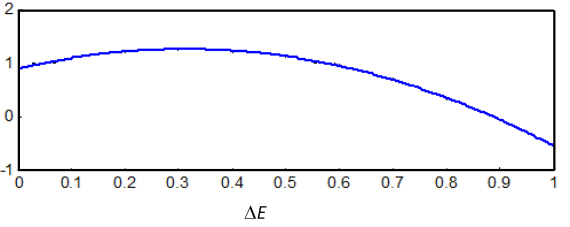
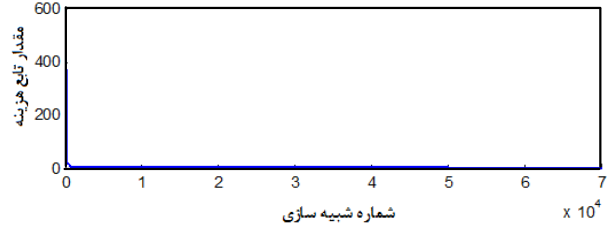
شکل ۱۳ نحوه تغییر فشار دینامیکی در مسیرهای طراحی شده



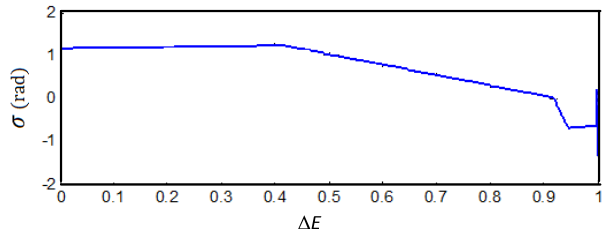
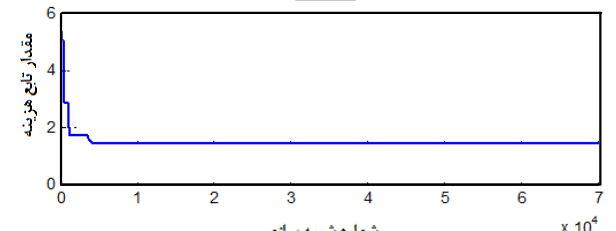
شکل ۱۴ نحوه تغییر ضریب بار در مسیرهای طراحی شده



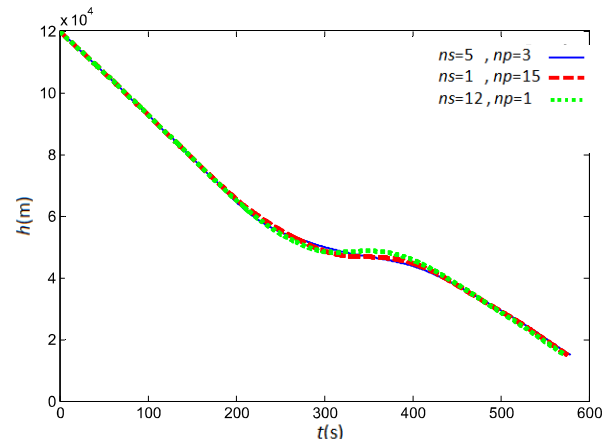
شکل ۱۵ نحوه تغییر نرخ انتقال حرارت در مسیرهای طراحی شده



شکل ۹ نحوه همگرایی و پروفیل کنترلی بهینه (nsmax=1, npmax=15)



شکل ۱۰ نحوه همگرایی و پروفیل کنترلی بهینه (nsmax=12, npmax=1)

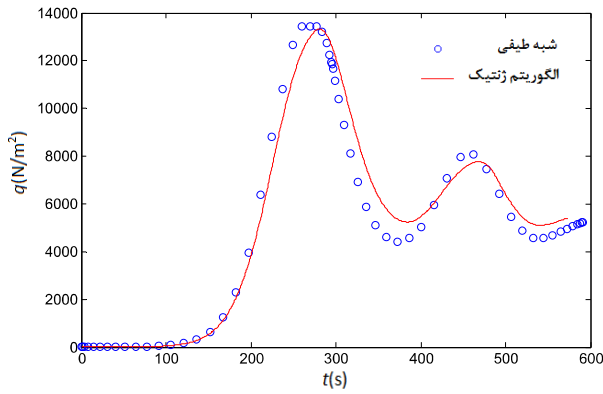


شکل ۱۱ نحوه تغییر ارتفاع در مسیرهای طراحی شده

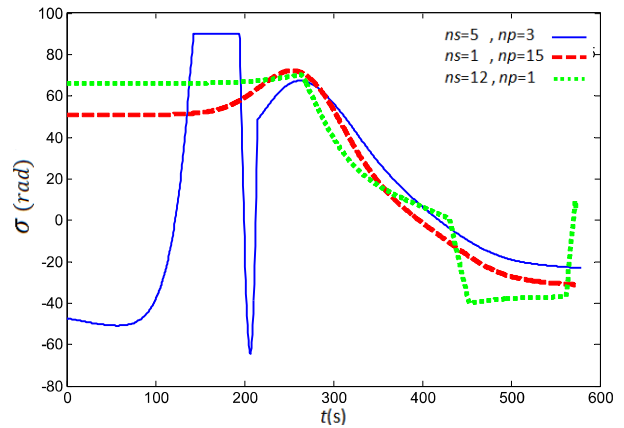
جدول ۳ اثر تغییر توزیع ۶۰ گره در تعداد بازه‌های مختلف بر کیفیت حل روش شبه

طیفی چند بازه‌ای

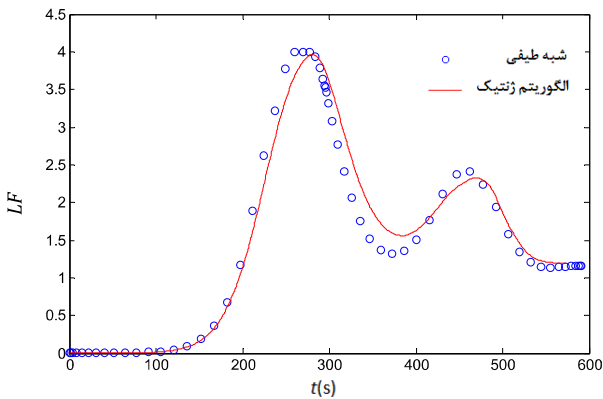
تعداد بازه‌ها	تعداد گره‌ها	مقدار نهایی تابع هزینه	زمان حل بی‌بعدسازی شده
۱	۶۰	۱/۴۸	۱/۸۱۰
۲	۳۰	۱/۴۸	۱/۷۷۹
۴	۱۵	۱/۴۸	۱/۲۲۶
۶	۱۰	۱/۴۸	۱/۴۱۰
۱۰	۶	۱/۴۸	۱
۱۲	۵	۱/۴۸	۱/۳۹۵



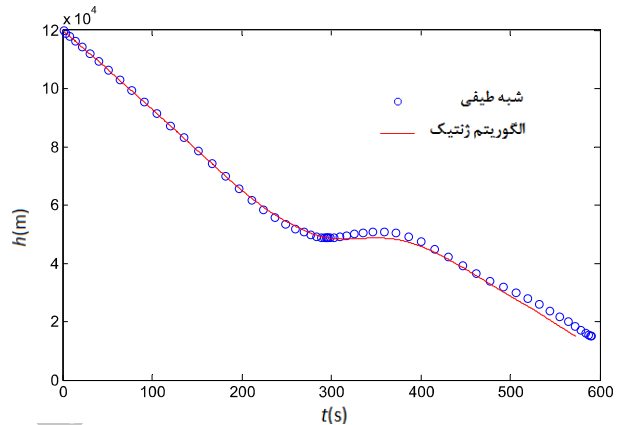
شکل ۲۰ مقایسه فشار دینامیکی مربوط به مسیرهای طراحی شده با روش‌های مستقیم



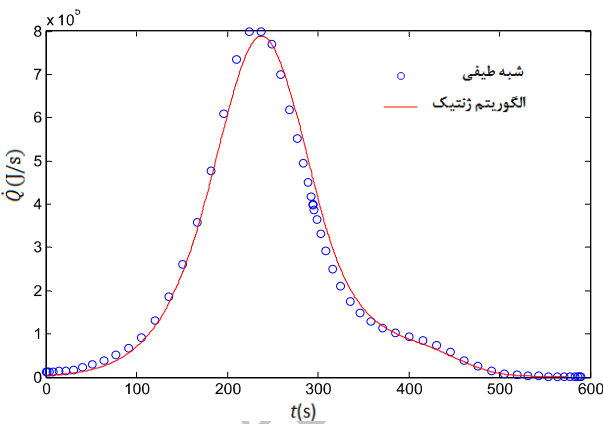
شکل ۱۶ مقایسه پروفیل‌های فرمان در مسیرهای طراحی شده



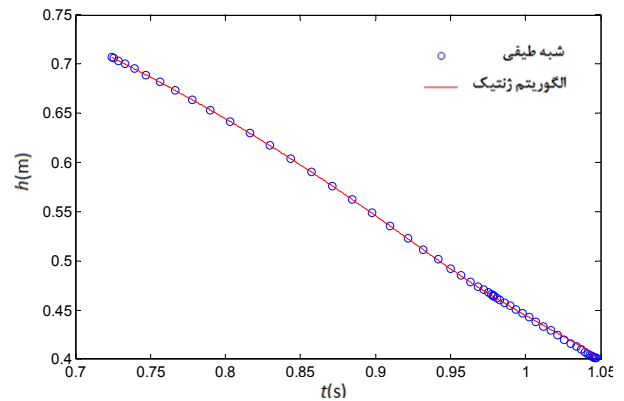
شکل ۲۱ مقایسه ضریب بار مربوط به مسیرهای طراحی شده با روش‌های مستقیم



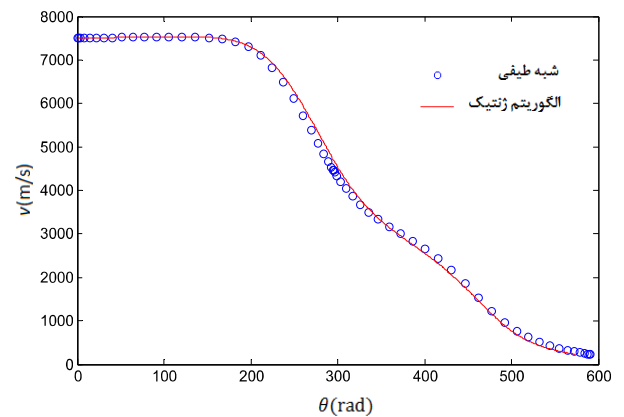
شکل ۱۷ مقایسه ارتفاع مربوط به مسیرهای طراحی شده با روش‌های مستقیم



شکل ۲۲ مقایسه نرخ انتقال حرارت مربوط به مسیرهای طراحی شده با روش‌های مستقیم



شکل ۱۸ مقایسه مسیرهای حرکتی طراحی شده با روش‌های مستقیم



شکل ۱۹ مقایسه سرعت مربوط به مسیرهای طراحی شده با روش‌های مستقیم

## ۶- جمع‌بندی

دو روش مختلف عددی برای حل مسأله طراحی مسیر بهینه بازگشت به جو یک کپسول فضایی به کار گرفته شد. روش اول که از خانواده پرتاب بود برای بهینه‌سازی به وسیله الگوریتم ژنتیک توسعه داده شد. ویژگی خاص روش توسعه داده شده، امکان بهینه‌سازی هم‌زمان تعداد و توزیع بازه‌های کنترلی در کنار نوع کنترل در هر بازه بود. روش دوم نیز روش شبه طیفی بود که باز هم به صورت چند بازه‌ای تحلیل مسأله و طراحی مسیر را به انجام رسانید. نتیجه بررسی، حاکی از نزدیکی نتایج حاصل از دو روش در خصوص مسیر طراحی شده بود. به لحاظ کاربرد، روش شبه طیفی با سرعت بالای حل، گزینه مناسبی برای کاربری‌های برخط تشخیص داده شد. البته برای این منظور بهینه‌سازی‌هایی مورد نیاز خواهد بود که در بررسی‌های آتی به طور مفصل تشریح خواهد شد. در مقابل بهترین کاربرد روش پرتاب توسعه داده شده که



- [6] F. Najafi, M. Karimi, M. Ghayour, Optimal Trajectory Planning and Obstacle Avoidance of a Manipulator in the Presence of Ellipsoidal Obstacles Using Genetic Algorithms, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 4, pp. 75-84, 2011. (In Persian)
- [7] M. T. Vakil-Baghmishheh, R. Hassannejad, M. Mirzaei, Application of Genetic Algorithms in Optimal Design of a Passive Suspension System a Vehicle Subjected to Random Excitations of Actual Road, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 4, pp. 1-12, 2011. (In Persian)
- [8] N. Yokoyama, S. Suzuki, Modified genetic algorithm for constrained trajectory optimization, *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 28, No. 1, pp. 139-144, 2005.
- [9] B. Mall and B. A. Conway, Near-optimal Low-thrust Earth-Mars trajectories via a genetic algorithm, *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 28, No. 5, September-October 2005, pp. 1027-1031.
- [10] O. Yakimenko, A. Oleg, Direct method for rapid prototyping of near-optimal aircraft trajectories, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 5, pp. 865-875, 2000.
- [11] D. A. Benson, G. T. Huntington, T. P. Thorvaldsen, and A. V. Rao, Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation via an Orthogonal Collocation Method, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 6, pp. 1435-1440, 2006.
- [12] F. Fahroo, & I. M. Ross, Pseudospectral methods for infinite-horizon nonlinear optimal control problems, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 4, pp. 927-936, 2008.
- [13] A. V. Rao, D. A. Benson, C. L. Darby, C. Franconin, M. A. Patterson, I. Sanders, and G. T. Huntington, Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using the Gauss Pseudospectral Method, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 37, No. 2, pp. 22-39, 2010.
- [14] D. A. Benson, G. T. Huntington, T. P. Thorvaldsen and A. V. Rao, Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation via an Orthogonal Collocation Method, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 6, pp. 1435-1440, 2006.
- [15] D. Garg, M. A. Patterson, C. L. Darby, C. Franconin, G. T. Huntington, W. Hager and A. V. Rao, Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation of Finite-Horizon and Infinite-Horizon Optimal Control Problems Using a Radau Pseudospectral Method, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 49, No. 2, pp. 335-358, 2011.
- [16] D. Garg, M. A. Patterson, W. Hager, A. V. Rao, D. A. Benson and G. T. Huntington, A Unified Framework for the Numerical Solution of Optimal Control Problems Using Pseudospectral Methods, *Automatica*, Vol. 46, No. 11, pp. 1843-1851, 2010.
- [17] D. Garg, W. Hager and A. V. Rao, Pseudospectral Methods for Solving Infinite-Horizon Optimal Control Problems, *Automatica*, Vol. 47, No. 4, pp. 829-837, 2011.
- [18] A. Naghash, R. Esmaelzadeh, M. Mortazavi, R. Jamilnia, Near optimal guidance law for descent to a point using inverse problem approach, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 12, No. 3, pp. 241-247, 2008.
- [19] G. Ning, S. Zhang, Z. Fang, Integrated Entry Guidance for Reusable Launch Vehicle, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 20, No. 1, pp. 1-8, 2007.
- [20] H. Li, R. Zhang, Z. Li, R. Zhang, Footprint Problem with Angle of Attack Optimization for High Lifting Reentry Vehicle, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 25, No. 2, pp. 243-251, 2012.
- [21] F. J. Regan and S. M. Anandakrishnan, *Dynamics of Atmospheric Re-Entry*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, D.C., 1993.
- [22] A. V. Rao, K. A. Clarke, Performance optimization of a maneuvering re-entry vehicle using a Legendre pseudospectral method, *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit 5-8 August 2002*, Monterey, California, AIAA 2002-4885.
- [23] M. Zerar, F. Cazaorang, A. Zolghadri, Coupled linear parameter varying and flatness-based approach for space re-entry vehicles guidance, *IET Control Theory Appl.*, Vol. 3, No. 8, pp. 1081-1092, 2009.
- [24] P. E. Gill, W. Murray and M. A. Saunders, User's Guide for SNOPT Version 7: Software for Large-Scale Nonlinear Programming, Report, University of California, San Diego, 24 April 2007.

نیازی به حدس اولیه نداشته و با دقت و جامعیت مناسب به حل مسأله می‌پردازد، در تعیین حدس یا پاسخ اولیه برای مسأله‌های کنترل بهینه می‌باشد. در نهایت لازم است به این نکته نیز اشاره شود که هر دو روش توسعه داده شده به دلیل جامعیت و عدم وابستگی به مسأله خاص بررسی شده، قابلیت حل انواع مسائل کنترل بهینه و طراحی مسیر را دارا هستند.

## ۷- فهرست علائم

$t$	زمان (s)
$r$	فاصله از مرکز گرانش (m)
$v$	سرعت ( $\text{ms}^{-1}$ )
$S$	سطح مرجع ( $\text{m}^2$ )
$q$	فشار دینامیکی ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$ )
$m$	جرم (kg)
$C_L$	ضریب برآ
$C_D$	ضریب پسا
$a$	شتاب عمودی ( $\text{ms}^{-2}$ )
$g$	شتاب گرانش ( $\text{ms}^{-2}$ )
$E$	اندازه انرژی لحظه‌ای بر واحد جرم ( $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ )

## علائم یونانی:

$\tau$	زمان بی‌بعد شده
$\theta$	طول جغرافیایی
$\phi$	عرض جغرافیایی
$\gamma$	زاویه بردار سرعت با افق
$\psi$	زاویه سمت بردار سرعت
$\sigma$	زاویه بردار برآ با صفحه حرکت (متغیر کنترلی)
$\mu$	ثابت گرانشی زمین ( $\text{m}^3\text{s}^{-2}$ )
$\omega$	سرعت زاویه ای دوران زمین
$\rho$	چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )

## ۸- مراجع

- [1] B. Steinfeldt, P. Tsotras, A State-Dependent Riccati Equation Approach to Atmospheric Entry Guidance, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2 - 5 August 2010, Toronto, Ontario Canada AIAA 2010-8310.
- [2] B. Tian, Q. Zong, Optimal guidance for reentry vehicles based on indirect Legendre pseudospectral method, *Acta Astronautica*, Vol. 68, No. 7, pp. 1176-1184, 2011.
- [3] R. Holsapple, R. Venkataraman, and D. Doman, A Modified Simple Shooting Method for Solving Two Point Boundary Value Problems, *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference*, Big Sky, MT, Vol. 6, IEEE, New York, NY 10016-5997, March 2003, pp. 2783-2790.
- [4] H. B. Keller, Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems, *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA., 1976, pp. 1-19.
- [5] S. Talebi, A. Ariaei, Vibration analysis of rotating tapered cantilever beams and crack detection using genetic algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 1-13, 2013. (In Persian)