مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۶، ص‌ص ۱۷۵-۱۸۴

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مطالعه میکرومکانیکی رفتار الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های حاوی الیاف پیزوالکتریکی با استفاده از روش عددی بدون‌المان گلرکین

مهدی عین‌بیگی[1]، محمد محمدی‌اقدم[2*]

۱- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

* تهران، صندوق پستی ۴۴۱۳-۱۵۸۷۵، aghdam@aut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۲۲ دی ۱۳۹۲
پذیرش: ۰۷ اسفند ۱۳۹۲
ارائه در سایت: ۲۲ تیر ۱۳۹۳

کلید واژگان:
مدل میکرومکانیکی
روش بدون‌المان گلرکین
کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی
خواص الکترو- الاستیک

چکیده

یک مدل میکرومکانیکی دوبعدی، بر پایه فرضیات کرنش صفحه‌ای توسعه یافته برای مطالعه رفتار الکترو- الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی با پولاریزاسیون عرضی ارائه می‌شود. کوچک‌ترین عضو تکرار شونده از کامپوزیت به عنوان المان نماینده انتخاب می‌شود که ۱/۴ از سطح مقطع فایبر را با ماتریسی که آن را در برگرفته به نمایش می‌گذارد. این کامپوزیت، حاوی الیافی بلند و موازی از جنس مواد پیزوالکتریکی با خواص ایزوتروپیک عرضی است که فرض می‌شود این الیاف با آرایش مربعی درون زمینهٔ پلیمری با خواص ایزوتروپیک، در اتصال کامل می‌باشند. همچنین ماتریس از لحاظ پیزوالکتریسیته غیرفعال بوده و فرض می‌شود که اجزای کامپوزیت از رفتار الاستیسیته و الکتریسیته خطی تبعیت می‌کنند. در این پژوهش، روش عددی بدون‌المان گلرکین برای حل معادلات حاکم بر مسأله به کار گرفته می‌شود. در این روش، برای تقریب متغیر میدان از ساختار توابع شکل حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود. مقایسه نتایج حاضر با سایر تکنیک‌های موجود در مقالات چاپ شده، موافقت خوبی را به نمایش می‌گذارد. نتایج حاکی از این موضوع است که ضریب پیزوالکتریکی e_{31} در حالت پولاریزاسیون عرضی نسبت به همان ضریب در حالت ماده پیزو خالص، بهبود قابل ملاحظه‌ای را نشان می‌دهد. بررسی‌ها نشان‌می‌دهد که در حالت پولاریزاسیون عرضی، الیاف با سطح مقطع بیضوی، میزان حساسیت الکتریکی کامپوزیت را برای یک راستای خاص نسبت به نوع دایروی چندین برابر تقویت می‌کنند.

A micromechanical study on the electro-elastic behavior of piezoelectric fibrous composites using element free Galerkin method

Mahdi Eynbeygi, Mohammad Mohammadi Aghdam*

Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 15875-4413 Tehran, Iran, aghdam@aut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 12 January 2014
Accepted 26 February 2014
Available Online 13 July 2014

Keywords:
Micromechanical Model
Element Free Galerkin Method
Piezoelectric Fibrous Composites
Electro-Elastic Properties

ABSTRACT

A two dimensional generalized plane strain micromechanical model is developed to study electro-elastic behavior of piezoelectric fiber reinforced composites (PFRC) with transverse polarization. A small repeating area of the composite, representing a quarter of fiber surrounded by matrix is considered as representative volume element (RVE). The composite system consists of long parallel piezoelectric fibers with transversely isotropic properties and perfectly bounded to the isotropic matrix in a square array arrangement. In addition, the constituents are assumed to have both linear elastic and electrical behavior, whereas, the matrix is piezoelectrically passive. The element free Galerkin method is employed to obtain solution for the governing system of partial differential of equations. In this method, the Moving Least Square shape functionsare used to approximate the field variable at arbitrary point. Comparison of the presented results with other techniques available in the literature reveals good agreement. It is demonstrated that the piezoelectric coefficient "e_{31}" in the transverse polarization is considerably improved in comparison with corresponding coefficient of pure piezoelectric material. Furthermore, as a result, it is found that fibers with elliptical cross section may enhance the amount of electrical sensitivity of PFRC several times than circular fibers in a specific direction.

۱- مقدمه

در روش میکرومکانیک، مطالعه رفتار مواد به گونه‌ای است که اثر متقابل مواد تشکیل‌دهنده در مقیاس میکروسکوپیک بررسی می‌شود. در این روش‌ها از مدل‌هایی استفاده می‌شود که مشخصات ذاتی الیاف و زمینه را حفظ می‌کند و خواص کل ماده مرکب بر حسب خواص اجزای تشکیل‌دهنده، نسبت حجمی آن‌ها و قیدهای متقابل بین فازها، که مربوط به هندسه میکروساختاری است، تعیین می‌شود. خواص تک‌لایه‌های کامپوزیتی را می‌توان با استفاده از روش میکرومکانیکی پیش‌بینی کرد وسپس از این خواص در تحلیل‌های ماکرومکانیکی استفاده نمود. در این پژوهش، مطالعه میکرومکانیکی کامپوزیت‌هایی مورد بررسی قرار می‌گیرد که با الیاف

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Eynbeygi, M. Mohammadi Aghdam, A micromechanical study on the electro-elastic behavior of piezoelectric fibrous composites using element free Galerkin method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 175-184, 2014 (In Persian)

پیزوالکتریکی تقویت شده‌اند.

مواد پیزوالکتریک که به عنوان یکی از انواع مواد هوشمند شناخته می‌شوند، دارای یک ارتباط متقابل مکانیکی و الکتریکی هستند که در اثر اعمال بار مکانیکی، از خود خواص الکتریکی بروز داده و در مقابل بارگذاری‌های الکتریکی نیز، اثرات مکانیکی را به نمایش می‌گذارند. از آن‌جا که مواد پیزوالکتریک قادر به کوپل انرژی‌های مکانیکی و الکتریکی به یکدیگر هستند، لذا، از آن‌ها به عنوان یک انتخاب مناسب در عملگرها[1] و حسگرها[2] یاد می‌شود [۱]

تلاش‌های زیادی در جهت کشف خواص کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی تک‌جهته انجام شده که نتیجه آن، ارائه مطالعات متعددی با رویکرد میکرومکانیکی در بیان رفتارهای کلی و محلی آن‌هاست. در مقالات چاپ‌شده، روش‌های تحلیلی و عددی، مدل‌های گوناگونی را در بیان رفتار کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی تحت بارهای حرارتی، الکتریکی و مکانیکی مطرح کرده‌اند. اثر راستای پولاریزاسیون بر خواص کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی، موضوعی بود که در کارهای محققانی همچون، اُدگارد [۲]، گوپتا و همکارانش [۳] مالیک و رِی [۴]، رِی [۵]، کومار و چاکرابُرتی [۶] و لوپِز-لوپِز [۷] بررسی شد. در این بین، اُدگارد [۲] ضمن ارائه یک مدل تحلیلی که در واقع براساس تعمیمی از مدل‌های خودسازگار[3] و موری- تاناکا[4] بود، به تحلیل خواص مؤثر الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی با پولاریزاسیون محوری وکامپوزیت‌های پیزوالکتریکی ذره‌ای پرداخت. مدل اُدگارد، در حالی‌که به سادگی مدل موری- تاناکا بود، اما در بعضی موارد نتایج دقیق‌تری را پیش‌بینی می‌کرد.مالیک و رِی [۴] بر مبنای روش سلولی[5] و روش مقاومت مصالح[6] به پیش‌بینی ضرایب الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی در حالت پولاریزاسیون عرضی پرداختند. آن‌ها برای نخستین بار نشان دادند، هنگامی که الیاف پیزوالکتریکی به صورت عرضی قطبیده شوند، خواص مؤثر پیزوالکتریکی کامپوزیت براساس نتایج آن‌ها می‌بایست به طور قابل توجهی نسبت به همان ضرایب در حالت ماده پیزوالکتریک خالص تقویت شود. آن‌ها پیشنهاد کردند که به منظور اعمال میدان‌الکتریکی عرضی یکنواخت در راستای ضخامت الیاف، نیاز به صفحات الکترودی هست که درون کامپوزیت، به صورت موازی در بالا و پایین الیاف چیده شوند. همچنین، رِی [۵] روش مکانیک محیط‌های پیوسته را برای تحلیل این کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی به‌کار برد و نتایجی تقریباً منطبق بر روش مقاومت مصالح بدست آورد. اخیراً کومار و چاکرابُرتی [۶] بر پایه روش مقاومت مصالح، خواص کوپل‌شده حرارتی- الکتریکی- مکانیکی این کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی را مورد تحلیل قرار دادند. آن‌ها با توجه ویژه به بحث حرارتی این کامپوزیت‌ها، تغییرات ضرایب حرارتی[7] و پیروالکتریکی[8] مؤثر این کامپوزیت‌ها را نسبت به کسر حجمی‌های مختلف ارائه دادند. همچنین با بیان وابستگی بین مدول الاستیسیته زمینه پلیمری ایزوتروپ و خواص مؤثر حرارتی و الکتریکی این کامپوزیت‌ها، نشان دادند که استفاده از پلیمرهای نرم‌تر، می‌توانند عملکرد ضرایب حرارتی و الکتریکی کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی با پولاریزاسیون عرضی را بهبود بخشند.

با این که مدل‌های تحلیلی در دیدگاه میکرومکانیکی می‌توانند خواص کلی کامپوزیت‌ها را در بسیاری از شرایط درست پیش‌بینی کنند، اما لحاظ کردن رفتارهای موضعی تنش و کرنش در روش‌های عددی، می‌تواند پیش‌بینی جامع‌تری از مدل را مورد بررسی قرار دهد. برخی از پژوهشگران روش المان‌محدود را ، که یک ابزار عددی رایج و متداول حل مسائل فیزیکی است، برای بررسی اثر شکل فایبر در خواص الکترومکانیکی کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی به کاربستند [۹،۸]. گوپتا و وِن‌کاتِش [۹] یک مدل المان-محدود سه‌بعدی را برای مطالعه رفتار الکترومکانیکی ۵ نوع متفاوت از کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی به‌کار گرفتند که این ۵ نوع شامل: کامپوزیت-های ذره‌ای[9]، فایبر کوتاه[10]، فایبر طویل[11]، ورقه‌ای[12] و شبکه‌ای[13] بودند. علاوه براین، آن‌ها در [۸]، به کمک روش المان محدود، رفتار کلی کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی را در حالت فعال بودن هر دو جزء تشکیل‌دهنده کامپوزیت از لحاظ پیزوالکتریسیته، بررسی کردند. از دیگر کارهایی که در زمینه تحلیل رفتار کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی به کمک روش‌های عددی انجام شده است، می‌توان به پژوهش لی [۱۰] در خصوص بررسی اثر میکروحباب‌های موجود در زمینه‌های پلیمری و اثر آن بر رفتار ضرایب مؤثر الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی و پژوهش دای [۱۱] در بررسی اثر هسته‌های کربنی و نقش آن در تقویت الیاف پیزوالکتریکی و اثرات آن بر ضرایب مؤثر الکترو-الاستیک کامپوزیت اشاره کرد. آن‌ها بیان کردند که هدف از افزودن کربن به الیاف توخالی پیزوالکتریکی، جلوگیری از شکسته شدن این الیاف و به عبارتی مقابله با طبیعت ترد مواد پیزوالکتریکی بوده‌است.

در سال‌های اخیر روش‌های عددی بدون‌المان[14]، توجه ویژه‌ای را در حل و شبیه‌سازی مسائل فیزیکی به خود اختصاص داده‌اند [۱۲-۱۴]. فقدان قید المان در ساختار این روش‌های عددی، ویژگی منحصر به‌فرد و قابل ملاحظه‌ای را به آن‌ها بخشیده است؛ به‌گونه‌ای که بسیاری از مشکلات تولید المان در هندسه‌های پیچیده و یا در مسائلی که به دلیل تغییرشکل‌های بزرگ نیازمند تولید شبکه‌های متوالی در حین حل مسأله هستند، از بین می‌رود. اخیراً، احمدی [۱۶،۱۵]روش بدون المان مبتنی بر انتگرال موضعی را در تحلیل میکرومکانیکی بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی کامپوزیت الیافی، به‌کار گرفت.

در پژوهش حاضر، یک مدل میکرومکانیکی براساس روش عددی بدون-المان گلرکین[15]، برای تحلیل خواص الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی تک‌جهته مورد بررسی قرار گرفته است. روش بدون‌المان گلرکین نخستین بار در سال ۱۹۹۴ میلادی توسط بلیچکو و همکارانش [۱۷] ارائه شد. در میان روش‌های متعدد بدون‌المان، روش بدون‌المان گلرکین نرخ همگرایی بالا و نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهد [۱۷-۱۹]. دراین مطالعه، با کارگیری یک مدل عددی دقیق بر مبنای روش بدون المان گلرکین، سعی شده است تا با لحاظ کردن اثرات موضعی میدان‌های تنش، تحلیلی کامل‌تر و واقع‌گرایانه‌تری از رفتار میکرومکانیکی کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی نمایش داده‌شود که ضمن آن، اثر شکل الیاف، در رفتار کامپوزیت‌های الیافی پیزوالکتریکی بررسی و تحلیل خواهد شد.

۲- مدل میکرومکانیکی

در حالت کلی، توزیع الیاف در سطح مقطع کامپوزیت‌های الیافی، به‌صورت تصادفی می‌باشد؛ شکل ۱- الف. اما معمولاً در مدل‌سازی میکرومکانیکی فرض

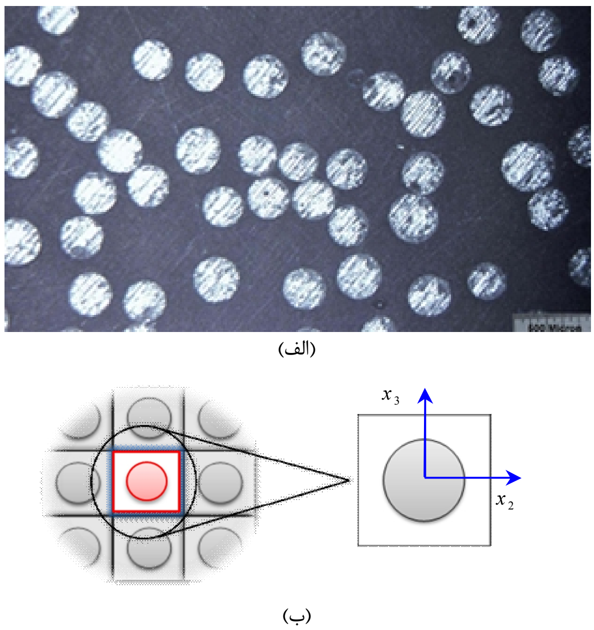
1- Actuator
2- Sensor
3- Self-consistent
4- Mori-Tanaka
5- Method of Cells (MOC)
6- Strength of Materials
7- Thermal Coefficient
8- Pyroelectric Coefficient

9- Particulate
10- Short-Fiber
11- Long-Fiber
12- Laminate
13- Networked
14- Mesh-Free Numerical Methods
15- Element Free Galerkin (EFG)

می‌شود که الیاف دارای شکل یکسان بوده و به‌صورت منظم در یک آرایش مربعی[1] و یا آرایش شش ضلعی[2] در کنار هم چیده شده‌اند [۲۰]. برای کاهش حجم محاسبات، کوچکترین جزء تکرار شونده از سطح مقطع کامپوزیت، متناسب با نوع بارگذاری و شرایط مرزی مسأله، به عنوان المان نماینده[3] کامپوزیت در نظر گرفته می‌شود که در تحلیل‌های میکرومکانیکی فرض می‌گردد، رفتار سازه با استفاده از مدل‌سازی صحیح المان نماینده قابل تعمیم، تحلیل و بررسی خواهد بود [۲۱،۲۰]. در این جزء نماینده، هم ماتریس و هم فایبر سهیم هستند و خواص آن‌ها متناسب با کسر حجمی‌شان، در خواص معادل کامپوزیت تأثیرگذار خواهد بود.

در پژوهش حاضر بر بارگذاری‌های نرمال و عکس‌العمل‌های نرمال، یعنی مُد نرمال سنسوری و عملگری[4]، کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی پرداخته می‌شود. در مُد نرمال سنسوری، ماده پیزوالکتریکی تحت یک بارگذاری نرمال و یا جابه‌جایی نرمال در هر یک از سه راستای مختصات اصلی ماده قرار داده می‌شود که باعث رخداد یک میدان الکتریکی در راستای پولاریزاسیون می‌گردد و در مُد نرمال عملگری، ماده پیزوالکتریکی تحت یک میدان الکتریکی در راستای محور پولاریزاسیون قرار می‌گیرد که نتیجتاً، ماده در هر یک از سه راستا از خود جابه‌جایی نرمال نشان می‌دهد [۲۴].

در این پژوهش، به منظور بررسی خواص مؤثر الکترو-الاستیک چندلایه حاوی الیاف پیزوالکتریکی، ترکیبی از بارگذاری الکتریکی در راستای محور پولاریزاسیون (راستای x_3) و بارگذاری‌های نرمال مکانیکی در هر یک از سه راستای مختصات اصلی ماده، برحسب این که محاسبه کدام ضریب مورد نظر است، انجام می‌شود. بنابراین منطقی است که در مُد نرمال برای کاهش حجم محاسبات و همچنین افزایش دقت حل مسأله، ربع (یک چهارم) المان نماینده نشان‌داده شده در شکل ۱-ب به عنوان ناحیه محاسباتی نهایی در نظر گرفته شود؛ به‌طوری که مبدأ محورهای مختصات در مرکز الیاف الصاق شده و خواص تقارن در مرزهای مورد نظر اعمال می‌گردد.



شکل ۱ الف- چینش واقعی الیاف در سطح مقطع کامپوزیت [۲۳] ب- مدل المان نماینده و تعمیم آن در فضای دوبعدی

1- Square Array
2- Hexagonal Array
3- Representative Element
4- Normal Mode Sensing and Actuation

در این تحلیل، یک دامنه دو بعدی در نظر گرفته می‌شود که در آن محور x_1 در راستای الیاف قرار گرفته و x_2 و x_3 محورهای صفحه‌ای عمود بر راستای الیاف هستند. پیرو فرض کرنش صفحه‌ای توسعه یافته[5] [۲۰،۱۶]، خواص کامپوزیت در راستای محور x_1 تغییر نمی‌کند و نسبت به صفحه x_2-x_3 دارای تقارن است. علاوه بر این، در فرض کرنش صفحه‌ای توسعه یافته، کرنش در راستای x_1، یعنی کرنش در راستای الیاف، یک مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شود.

بنابراین میدان جابه‌جایی، در فرض کرنش صفحه‌ای توسعه یافته و در حالت بارگذاری و عکس‌العمل نرمال، به صورت روابط (۱) ارائه می‌شود [۱۶]:

$$u_1=\varepsilon_0 x_1\,,\; u_2=u_2(x_2,x_3)\,,\; u_3=u_3(x_2,x_3) \tag{1}$$

که u_i مؤلفه جابه‌جایی مرتبط با مختصه x_i بوده و ε_0 معرف کرنش ثابت محوری می‌باشد. همچنین، روابط سینماتیک براساس میدان جابه‌جایی (۱)، بافرض الاستیسیته خطی به صورت روابط (۲) نوشته می‌شوند [۱۶]:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\varepsilon_0\,,\; \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,,\; \varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\varepsilon_{23}=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\,,\; \varepsilon_{13}=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0\,,\; \varepsilon_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0 \tag{2}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تحت شرایط کرنش صفحه‌ای توسعه یافته، کرنش‌های برشی برون صفحه‌ای صفر هستند.

در این پژوهش به تحلیل کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی زمینه پلیمری که در راستای عرضی (راستای ضخامت) x_3 پولاریزه شده‌اند، پرداخته می‌شوند. به دلیل این که این الیاف دارای ضخامت بسیار کوچکی هستند، می‌توان به طور قابل قبولی فرض کرد که یک میدان الکتریکی یکنواختی درون سلول واحد برقرار است [۶].

۳- حل مسأله

۳-۱- معادلات حاکم بر مواد پیزوالکتریکی

یک دامنه دو بعدی، Ω، را مطابق شکل ۱- ب در نظر بگیرید که در یک تعادل الکتریکی و مکانیکی قرار دارد. برای مواد پیزوالکتریکی در غیاب نیروهای حجمی، فرم تضعیف‌شده[6] معادله تعادل مکانیکی [۲۲،۱۹] به صورت صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega}\left(\delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\sigma\right)d\Omega+\int_{\Omega}\left(\delta\varepsilon_0\sigma_{\mathrm{axial}}\right)d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta u^{\mathrm{T}}\bar{t}\,d\Gamma-\int_{\Omega}\delta\varepsilon_0 t_{\mathrm{axial}}\,d\Omega=0 \tag{3}$$

که در رابطه بالا، Ω به‌عنوان دامنه مسأله در صفحه x_2-x_3 و ε، σ و $\bar{t}$ به ترتیب، بردار کرنش صفحه‌ای، بردار تنش صفحه‌ای و بردار ترکشن درون صفحه‌ای می‌باشند. علاوه براین، σ_{axial} و t_{axial} نیز به ترتیب بیان‌گر تنش محوری و ترکشن محوری می‌باشند. بنابراین با فرض کرنش صفحه‌ای توسعه-یافته، مسأله سه بعدی الاستیسیته به یک مسأله دوبعدی توسعه یافته تبدیل خواهد شد که هزینه‌های محاسباتی را بسیار کاهش خواهد داد.

حالت الکترواستاتیک مواد پیزوالکتریکی نیز دارای رفتاری مشابه رفتار مکانیکی هستند؛ از این نقطه نظر، فرم تضعیف‌شده معادله ماکسول[7] [۲۲] در در غیاب دانسیته بارالکتریکی حجمی به صورت رابطه (۴) نوشته می‌شود.

$$\int_{\Omega}\delta E_3 D_3\,d\Omega-\int_{\Omega'}\delta E_3 q_3\,d\Omega=0 \tag{4}$$

در رابطه (۴)، E_3، D_3 و q_3 به ترتیب، مؤلفه‌های میدان‌الکتریکی، جابه‌جایی الکتریکی و دانسیته بارالکتریکی در راستای پولاریزاسیون را نشان می‌دهند.

5- Generalize Plane Strain
6- Weak-Form
7- Maxwell

روابط متشکله برای مواد دارای خاصیت پیزوالکتریسیته که در راستای محور x_3 پولاریزه شده‌اند [۲۲]، با فرض کرنش صفحه‌ای توسعه یافته، الاستیسیته خطی و پیزوالکتریسیته خطیبه صورت روابط (۵) بیان می‌شوند.

$$\sigma = C\varepsilon + \widehat{C}\varepsilon_0 - \widehat{e}E_3 ,\ \sigma_{11} = \widehat{C}^{\mathrm{T}}\varepsilon + c_{11}\varepsilon_0 - e_{31}E_3$$

$$D_3 = \widehat{e}^{\mathrm{T}}\varepsilon + e_{31}\varepsilon_0 + \kappa_{33}E_3 \quad (۵)$$

در روابط (۵)، رابطه‌های (۶) برقرارند.

$$\sigma = \langle \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \rangle^{\mathrm{T}} ,\ \varepsilon = \langle \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \rangle^{\mathrm{T}}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{23} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} ,\ \widehat{C} = \langle c_{12} \quad c_{13} \quad 0 \rangle^{\mathrm{T}}$$

$$\widehat{e} = \langle e_{32} \quad e_{33} \quad 0 \rangle^{\mathrm{T}} \quad (۶)$$

در روابط (۶)، c_{ij} ، e_{ij} و κ_{ij} به ترتیب، ضرایب الاستیک، ضرایب پیزوالکتریک و دی‌الکتریک ماده را نشان می‌دهند.

۳-۲- روش عددی بدون المان گلرکین

روش المان‌محدود، به عنوان یکی از روش‌های عددی قدرتمند حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، در گستره وسیعی از مسائل خطی و غیرخطی به‌کار می‌رود. در دسترس بودن این روش در غالب بسته‌های نرم‌افزاری تجاری، کاربرهای بسیاری را در سراسر دنیا به خود جذب کرده است، اما با این حال، روش المان‌محدود محدودیت‌هایی را نیز به همراه دارد؛ هزینه بالا و صرف زمان‌های طولانی برای تولید شبکه[1] در مدل‌های پیچیده، یکی از معایب این روش است که در آنالیزهای هوشمندی که نیاز به تجدید شبکه در حین فرایند حل دارند، این مشکل خیلی برجسته خواهد شد [۱۹]. علاوه براین، مشتقات توابع شکل در مرز بین المان‌ها، عموماً، ناپیوستگی‌هایی را از خود به نمایش می‌گذارند [۲۴،۱۹]. بنابراین نیاز به یک پس‌پردازش همچون تصویرسازی برمبنای نُرم دوم برای نمایش کانتورهایی همچون کانتور تنش وجود دارد [۱۷].

مطابق با تعریف لیو و همکارانش [۱۹]، روش‌های عددی بدون‌المان، دستگاهی از معادلات گسسته‌شده را برای حل فیزیک حاکم بر مسأله ایجاد می‌کنند که دامنه این مسأله نیاز به هیچ‌گونه شبکه‌بندی ندارد و تنها توزیعی از گره‌های محاسباتی در دامنه مسأله و روی مرزها شکل داده می‌شود. هیچ‌گونه قیدی روی گره‌ها تحت عنوان المان وجود ندارد و به دلیل بهره‌گیری از توابع شکلی با پیوستگی‌های مرتبه بالا، کانتورهای تنش و کرنش بدون هیچ‌گونه پس‌پردازشی به نمایش گذاشته می‌شوند.

۳-۲-۱- ساختار توابع شکل حداقل مربعات متحرک[2]

متغیر $u(x)$، به عنوان مثال میدان جابه‌جایی در یک مسأله الاستیسیته، به عنوان تابع اسکالر و مجهول مسأله در نظر گرفته می‌شود که در دامنه Ω تعریف شده‌است. با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک، $u^{\mathrm{h}}(x)$ تقریبی از متغیر میدان $u(x)$ در مکان x خواهد بود که به صورت رابطه (۷) ارائه می‌شود [۱۷-۱۹].

$$u(x) \simeq u^{\mathrm{h}}(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)\cdot \mathrm{a}_i(x) = P^{\mathrm{T}}(x)\cdot a(x) \quad (۷)$$

که در رابطه بالا $P(x)$ بردار شامل تک‌جمله‌ای‌های پایه و m تعداد این تک جمله‌ای ها را نشان می‌دهد. همچنین $a(x)$ بردار ضرایب چندجمله‌ای بوده که تابعی از مختصات x است.

این ضرایب مجهول طوری محاسبه خواهند شد که مجموع مربعات خطای وزن‌دار، مینیمم شود. بنابراین، نرم دوم خطای وزن‌دار به صورت رابطه (۸) بیان می‌شود.

$$J = \sum_{i=1}^{n} \widehat{w}(x - x_i)\left(P^{\mathrm{T}}(x_i)a(x) - u_i\right)^2 \quad (۸)$$

به‌طوری که در عبارت بالا، n تعداد گره‌های درون دامنه موضعی x را نشان می‌دهد و $\widehat{w}(x-x_i)$ تابع وزن مسأله بوده که با فاصله نقطه x از گره واقع در محل x_i متناسب است. همچنین در رابطه بالا، u_i پارامترگره‌ای متغیر میدان را در محل گره iام، نشان می‌دهد.

توابع شکل حداقل مربعات متحرک درصورتی که توابع وزنی مناسبی انتخاب شوند، در کل دامنه پیوسته خواهند بود [۲۴]. مرتبه پیوستگی توابع شکل حداقل مربعات متحرک، ارتباط مستقیمی با مرتبه چندجمله‌ای‌های پایه و مرتبه توابع وزنی مورد استفاده دارد. در این پژوهش از توابع پایه خطی و منحنی مرتبه سوم به عنوان توابع وزنی استفاده شده‌است [۲۴]:

$$P^{T}(x) = \langle 1 \quad x \quad y \rangle$$

$$w(x - x_i) = w_i(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\overline{r}_i^2 + 4\overline{r}_i^3 & \overline{r}_i \le 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\overline{r}_i + 4\overline{r}_i^2 - \frac{4}{3}\overline{r}_i^3 & 0.5 \le \overline{r}_i \le 1 \\ 0 & \overline{r}_i > 1 \end{cases} \quad (۹)$$

در رابطه بالا $\overline{r}_i$ یک پارامتر بی‌بعد است که به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود.

$$\overline{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{\|x - x_i\|_2}{r_w} \quad (۱۰)$$

که r_w شعاع ناحیه پشتیبان موضعی نقطه x تعریف می‌شود. همچنین، $d_i = \|x - x_i\|_2$ نُرم دوم بردار $x - x_i$ بوده که بیان‌گر فاصله گره x_i تا نقطه x می‌باشد.

با مینیمایز کردن فانکشنال (۸)، ضرایب مجهول $a(x)$ محاسبه شده و با قرار دادن آن در رابطه (۷)، شکل دیگری از این رابطه، براساس توابع شکل حداقل مربعات متحرک، به صورت رابطه (۱۱) بیان می‌شود.

$$u^{\mathrm{h}}(x) = \Phi^{\mathrm{T}}(x)U_{\mathrm{s}} \quad (۱۱)$$

که U_{s} بردار پارامتر گره‌ای متغیر میدان و $\Phi(x)$ بردار توابع شکل حداقل مربعات متحرک بوده و به صورت رابطه (۱۲) نوشته می‌شود.

$$\Phi^{\mathrm{T}}(x) = \langle \phi_1(x) \ \ldots \ \phi_{\mathrm{n}}(x) \rangle = P^{\mathrm{T}}(x)\cdot A^{-1}(x)\cdot B(x) \quad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲)، ماتریس $A(x)$ و $B(x)$ مطابق زیر تعریف می‌گردند:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{w}(x - x_i)P(x_i)P^{T}(x_i) \quad (۱۳)$$

$$B(x) = \langle \widehat{w}(x - x_1)P(x_1) \ \ldots \ \widehat{w}(x - x_{\mathrm{n}})P(x_{\mathrm{n}}) \rangle \quad (۱۴)$$

یکی از ویژگی‌های حائز اهمیت توابع شکل حداقل مربعات متحرک، فقدان خاصیت دلتای کرانیکر است [۱۷]:

$$\phi_i(x_j) \ne \delta_{ij} \quad (۱۵)$$

در بیان ظاهری، خاصیت دلتای کرانیکر موجب می‌شود که تابع شکل هر گره در محل خود آن گره برابر مقدار واحد و در محل سایر گره‌های موجود در ناحیه پشتیبان، برابر صفر باشد. اما این خاصیت جلوه واقعی خود را در اعمال شرایط مرزی ضروری آشکار می‌کند؛ به‌طوری که در فقدان این خاصیت، شرایط مرزی ضروری به‌صورت مستقیم[3] قابل اعمال نبوده و تلاش مضاعفی را را می‌طلبد. از جمله رایج‌ترین این روش‌ها، روش پنالتی [۲۴،۱۹] و روش

1- Mesh Generation
2-Moving Least Square
3- Direct imposing Essential Boundary Conditions

ضرایب لاگرانژ [۱۸،۱۷] می‌باشد. روش‌های دیگر اعمال شرط مرزی ضروری در روش‌های بدون‌المان، در مقاله فِرناندِز- مِندِز و هِرتا [۲۵] ارائه شده است.

توابع شکل حداقل مربعات متحرک، به دلیل ماهیت برازشی[1] حاکم بر آن‌ها، حساسیتی نسبت به تعداد گره درون دامنه موضعی ندارند. علاوه بر این، دقت و سرعت همگرایی بسیار بالا با تعداد گره کم، از مزایایی است که این توابع شکل به روش‌های عددی بدون المان وابسته به آن‌ها می‌بخشند. از معایب این توابع شکل نیز، همان‌طور که قبلاً هم گفته شد، فقدان خاصیت دلتای کرانیکر است که در موضع اعمال شرایط مرزی ضروری اثر خود را آشکار می‌کنند و با روش‌هایی همچون روش پنالتی و یا ضرایب لاگرانژ قابل برطرف کردن می‌باشد. دقت بالا و سرعت همگرایی بالا مزایای هستند که می‌توانند اثر فقدان خاصیت دلتای کرانیکر را در روش‌هایی همچون روش بدون المان گلرکین کم‌رنگ کنند.

۳-۲-۲- گسسته سازی معادلات حاکم

براساس روش بدون‌المان گلرکین، فرم تضعیف‌شده معادلات تعادل (۳) و (۴)، براساس ساختار توابع شکل حداقل مربعات متحرک تقریب‌زده می‌شوند. میدان‌جابه‌جایی تقریب‌زده شده به صورت رابطه (۱۶) ارائه می‌شود [۱۹].

$$u^{\mathrm{h}}(x)=\begin{Bmatrix}u_2^{\mathrm{h}}\\u_3^{\mathrm{h}}\end{Bmatrix}=\sum_{I=1}^{n}\begin{pmatrix}\phi_I & 0\\0 & \phi_I\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}u_{2I}\\u_{3I}\end{Bmatrix}=\sum_{I=1}^{n}\tilde{\Phi}_I u_I \qquad (۱۶)$$

که در رابطه (۱۶)، $\tilde{\Phi}_I(x)$ ماتریسی قطری شامل تابع شکل گره Iاُم و u_I و $u_{\mathrm{h}}(x)$ به‌ترتیب، جابه‌جایی گره‌ای و جابه‌جایی تقریب‌زده شده در نقطه x را نشان می‌دهند. همچنین، n تعداد گره‌های درون ناحیه پشتیبان نقطه x است که در تقریب شرکت می‌کنند.

فرم گسسته‌شده معادله تعادل مکانیکی (۳) با در نظر گرفتن روابط متشکله و سینماتیک، به‌صورت رابطه (۱۷) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}&\sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{N}\delta u_I^T\left(\int_\Omega B_I^T C B_J d\Omega\right)u_J+\sum_{I=1}^{N}\delta u_I^T\left(\int_\Omega B_I^T\hat{C}d\Omega\right)\varepsilon_0\\&-\sum_{I=1}^{N}\delta u_I^T\left(\int_\Omega B_I^T\hat{e}d\Omega\right)E_3+\sum_{I=1}^{N}\delta\varepsilon_0\left(\int_\Omega\hat{C}^T B_I d\Omega\right)u_I\\&+\delta\varepsilon_0\left(\int_\Omega c_{11}d\Omega\right)\varepsilon_0-\delta\varepsilon_0\left(\int_\Omega e_{31}d\Omega\right)E_3\\&-\sum_{I=1}^{N}\delta u_I^T\left(\int_{\Gamma_t}\tilde{\Phi}_I^T\bar{t}d\Gamma\right)-\delta\varepsilon_0\left(\int_\Omega t_{\mathrm{axial}}d\Omega\right)=0\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که N معرف تعداد کل گره‌های درون دامنه مسأله بوده و ماتریس B_I به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B_I=\begin{pmatrix}\phi_{I,2} & 0\\0 & \phi_{I,3}\\\phi_{I,3} & \phi_{I,2}\end{pmatrix} \qquad (۱۸)$$

رابطه (۱۷) در شکل فشرده به صورت رابطه (۱۹) بازنویسی می‌شود.

$$\delta U^{\mathrm{T}}\left(KU+F_1\varepsilon_0-F_2E_3-f_{\mathrm{t}}\right)+\delta\varepsilon_0\left(F_1^{\mathrm{T}}U+X_1\varepsilon_0-X_2E_3-f_{axial}\right)=0 \qquad (۱۹)$$

که K، F_1، F_2، X_1، X_2، f_{t} و f_{axial} به مطابق زیر تعریف می‌شوند:

$$K_{IJ}=\int_\Omega B_I^T C B_J d\Omega\,,\ F_{1I}=\int_\Omega B_I^T\hat{C}d\Omega\,,\ F_{2I}=\int_\Omega B_I^T\hat{e}d\Omega$$
$$X_1=\int_\Omega c_{11}d\Omega\,,\ X_2=\int_\Omega e_{31}d\Omega\,,\ f_{tI}=\int_{\Gamma_t}\tilde{\Phi}_I^T\bar{t}d\Gamma$$
$$f_{\mathrm{axial}}=\int_\Omega t_{\mathrm{axial}}d\Omega \qquad (۲۰)$$

1- Curve-Fitting

فرم گسسته‌شده رابطه تعادل الکترواستاتیکی (۴) به صورت رابطه (۲۱) ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned}&\sum_{I=1}^{N}\delta E_3\left(\int_\Omega\hat{e}^{\mathrm{T}}B_I d\Omega\right)u_I+\delta E_3\left(\int_\Omega e_{31}d\Omega\right)\varepsilon_0\\&+\delta E_3\left(\int_\Omega\kappa_{33}d\Omega\right)E_3+\delta E_3\left(\int_\Omega q_3 d\Omega\right)=0\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

شکل فشرده رابطه (۲۱) مطابق رابطه (۲۲) بازنویسی می‌شود.

$$\delta E_3\left(F_2^{\mathrm{T}}U+X_2\varepsilon_0+X_3E_3+Q_3\right)=0 \qquad (۲۲)$$

که در رابطه (۲۲) روابط (۲۳) برقرارند.

$$X_3=\int_\Omega\kappa_{33}d\Omega\ ,\ \mathrm{Q}_3=\int_\Omega q_3 d\Omega \qquad (۲۳)$$

از آن‌جا که در رابطه (۱۹) و (۲۲)، δU، $\delta\varepsilon_0$ و δE_3 دلخواه هستند، عبارات داخل پرانتز می‌بایست برابر صفر باشند تا روابط همواره ارضا شوند. بنابراین، فرم نهایی سیستم معادلات خطی حاصل از منفصل‌سازی معادلات تعادل الکترو-الاستیک، به صورت رابطه (۲۴) ارائه می‌شود.

$$\begin{cases}KU+F_1\varepsilon_0-F_2E_3-f_{\mathrm{t}}=0\\F_1^{\mathrm{T}}U+X_1\varepsilon_0-X_2E_3-f_{\mathrm{axial}}=0\\F_2^{\mathrm{T}}U+X_2\varepsilon_0+X_3E_3+Q_3=0\end{cases} \qquad (۲۴)$$

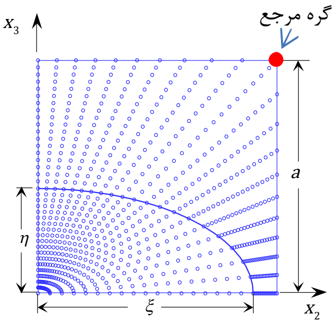
لازم به‌ذکر است که میدان‌الکتریکی ثابت E_3 و کرنش محوری ثابت ε_0 در کنار مؤلفه‌های جابه‌جایی گره‌ها، به عنوان مجهولات مسأله، محاسبه خواهند شد.

۳-۲-۳- اعمال شرایط مرزی

ملاحظات صحیح و درستی می‌بایست در مدل سلول‌واحد مسأله در نظر گرفته شود تا تقارن و تکرارپذیری[2] سلول‌واحد برای ایجاد شکل کلی کامپوزیت دچار خلل نگردد. بنابراین همان‌طور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود، یک گره مرجع به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که جابه‌جایی عمودی گره‌های واقع در وجه بالایی سلول‌واحد و جابه‌جایی افقی گره‌های واقع در وجه راست مدل، به‌ترتیب، مساوی با جابه‌جایی عمودی و افقی این گره مرجع در نظر گرفته می‌شوند تا مرزها دچار اعواج نشده و به حالت صاف[3] باقی بمانند. علاوه براین، برای وجوه پایین و چپ مدل شرایط تقارن در نظر گرفته می‌شود. مطالب ارائه شده در قالب روابط (۲۵) ارائه می‌شوند [۲۶].

$$u_2(0,x_3)=0\quad u_2(a,x_3)=a\bar{\varepsilon}_{22}\quad u_3(x_2,0)=0\quad u_3(x_2,a)=a\bar{\varepsilon}_{33} \qquad (۲۵)$$

به‌طوری که $\bar{\varepsilon}_{22}$ و $\bar{\varepsilon}_{33}$ کرنش‌های نرمال متوسط، به‌ترتیب، در راستای محورهای x_2 و x_3 هستند و پارامتر a معرف پهنای مدل المان نماینده می‌باشد (شکل ۲). به منظور اعمال این شرایط، روش ضرایب لاگرانژ، که یک روش دقیق در اعمال شرایط مرزی ضروری می‌باشد، به‌کار گرفته شد.



شکل ۲ مدل هندسی و توزیع گره در المان نماینده حجمی با الیاف بیضوی

2- Symmetry and Periodicity
3- Straight

جدول ۱ خواص الکترو-الاستیک اجزای کامپوزیت پیزوالکتریکی اپوکسی/PZT-7A [۴]

ثوابت ماده	PZT-7A	اپوکسی
C_{11},C_{22}(GPa)	۱۴۸	۳/۸۶
C_{12}(GPa)	۷۶/۲	۲/۵۷
C_{13},C_{23}(GPa)	۷۴/۲	۲/۵۷
C_{33}(GPa)	۱۳۱	۳/۸۶
C_{44},C_{55}(GPa)	۲۵/۴	۰/۶۴
C_{66}(GPa)	۳۵/۹	۰/۶۴
e_{31},e_{32}(C/m^2)	-۲/۱	۰
e_{33}(C/m^2)	۹/۵	۰
$\kappa_{33}\times10^9$(F/m)	۲/۰۷	۰/۰۷۹

در خصوص مرز مشترک فایبر- ماتریس ، فرض اتصال کامل[۱] برقرار می‌باشد که برای اعمال این شرط مرزی، از روش پنالتی[۲] که جزئیات و مراحل آن توسط لیو و یانگ در سال ۱۹۹۹ میلادی ارائه شد، استفاده شده است [۲۴].

برای اعمال شرایط پیوستگی، در ابتدا، یک محیط غیرهمگن که از دو ماده‌ی همگن تشکیل شده است در نظر گرفته می‌شود و روی مرز دو جسم همگن، مجموعه‌ای از گره‌ها تعریف می‌شود. برای دامنه‌های محلی، نقاطی که درون جسم A قرار گرفته‌اند، منحصراً، تحت تأثیر گره‌های درون جسم A و گره‌های روی مرز مشترک هستند. ارتباط بین ناحیه‌های مختلف با اعمال شرایط پیوستگی ایجاد می‌شود. اگر مرز دو ناحیه با Γ_c معرفی شود، شرایط پیوستگی مطابق رابطه (۲۶)، روی مرز اعمال می‌شود.

$$u^{\mathrm{f}}=u^{\mathrm{m}} \tag{۲۶}$$

که در رابطه (۲۶)، u^{f} و u^{m}، به‌ترتیب، پارامتر جابه‌جایی الیاف و ماتریس برای نقاط روی مرز هستند. فرم فانکشنال مرتبط با این شرط مرزی به صورت رابطه (۲۷) ارائه می‌شود [۲۴].

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_c}\left(u^{\mathrm{f}}-u^{\mathrm{m}}\right)^{\mathrm{T}}\alpha\left(u^{\mathrm{f}}-u^{\mathrm{m}}\right)d\Gamma \tag{۲۷}$$

که α یک ماتریس قطری از ضرایب پنالتی بوده و در مسائل دوبعدی از مرتبه ۲ می‌باشد. با اعمال فرم تضعیف‌شده فانکشنال (۲۷) به رابطه (۳)، اثر این شرط مرزی به صورت رابطه (۲۸) در معادله اول دستگاه معادلات (۲۴) گنجانده می‌شود.

$$(K+K^{\alpha})U+F_1\varepsilon_0-F_2E_3-f_{\mathrm{t}}=0 \tag{۲۸}$$

که K^{α} ماتریسی است که شرط مرزی اتصال کامل الیاف و زمینه را برقرار می‌کند و به صورت رابطه (۲۹) ارائه می‌شود [۲۴].

$$K_{IJ}^{\alpha}=\int_{\Gamma_c}\left[\tilde{\Phi}_I^{\mathrm{m}}-\tilde{\Phi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{f}}\right]^{\mathrm{T}}\alpha\left[\tilde{\Phi}_J^{\mathrm{m}}-\tilde{\Phi}_J^{\mathrm{f}}\right]d\Gamma \quad I\ ,J=1,\dots N \tag{۲۹}$$

در رابطه (۲۹) $\tilde{\Phi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{f}}$ و $\tilde{\Phi}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}}$، ماتریس‌هایی قطری از تابع شکل حداقل مربعات متحرک گره Iاُم، برای فایبر و ماتریس می‌باشند. به‌جز گره‌های روی مرز مشترک که ناحیه تأثیر آن‌ها هر دو فاز الیاف و زمینه را در برمی‌گیرد، گره‌های درون ماتریس بر نقاط درون ماتریس و گره‌های درون فایبر بر گره‌های درون فایبر تأثیرگذار خواهند بود.

۳-۲-۴- توزیع گره‌ها و نقاط انتگرال‌گیری در دامنه مسأله

در مدل حاضر از یک توزیع شعاعی برای گره‌های محاسباتی درون دامنه مسأله استفاده شده است. همان‌طور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود، توزیع یکنواخت و منظمی از گره‌های محاسباتی انتخاب شده است. علاوه بر این، روش بدون المان گلرکین در آزمایش‌های عددی توانایی چشمگیری را در همگرایی مسأله براساس توزیع دلخواه و نامنظم گره‌ها نشان می‌دهد. با این‌حال ایجاد یک توزیع منظم از گره‌ها به دقت مسأله بسیار کمک می‌کند؛ مخصوصاً هنگامی که مشتقات متغیر میدان، یعنی توزیع تنش و یا کرنش، مد نظر باشد.

روش بدون المان گلرکین بر اساس فرم تضعیف‌شده کلی[۳] به گسسته‌سازی معادلات می‌پردازد که برای حل انتگرال‌های موجود در مسأله، روش انتگرال‌گیری عددی گوس مربعی[۴] به کار گرفته شده است. بدین منظور، می‌بایست مجموعه‌ای از سلول‌های شبکهٔ گوسی درون دامنه مسأله چیده شوند. درون هر سلول، بسته به مرتبه انتگرال گوسی انتخاب شده، نقاط انتگرالی چیده می‌شوند. در این پژوهش، از انتگرال گوس مربعی مرتبه ۴اُم با ۱۶ نقطه گوسی درون هر سلول استفاده شده‌است. این نقاط گوسی، دقیقاً، از همان الگوی چینش گره‌ها پیروی می‌کنند. بنا به آزمایش‌های عددی لیو و همکارانش تعداد این نقاط گوسی می‌بایست حدود ۳ الی ۹ برابر تعداد گره‌ها موجود در دامنه باشد تا همگرایی مسأله تضمین شود [۱۹]. لازم به‌ذکر است که توزیع نقاط گوسی کاملاً مستقل از توزیع گره‌ها محاسباتی انجام می‌شود.

نهایتاً، با حل دستگاه معادلات خطی (۲۸) با استفاده از روش حذفی گوس[۵]، مقادیر جابه‌جایی گره‌ها (U)، کرنش محوری ثابت (ε_0) و میدان الکتریکی در راستای پولاریزاسیون (E_3) محاسبه می‌شوند. لازم به ذکر است که تمامی مراحل برنامه نویسی، تحت زبان فرترن ۹۰ در سیستم عامل لینوکس انجام شده است.

۴- نتایج و بحث

در این بخش، هدف بررسی خواص الکترو- الاستیک کامپوزیت‌های زمینه اپوکسی تقویت‌شده با الیاف بلند از جنس مواد پیزوالکتریک PZT-7A در حالت پولاریزاسیون عرضی است که بررسی این خواص در دو حالت الیاف با سطح مقطع دایروی و بیضوی با نسبت تناسب ۰/۵ انجام شده است. لازم به ذکر است که برای الیاف دایروی با آرایش منظم مربعی حداکثر کسر حجمی قابل دسترس حدود ۷۸/۵ ٪ می‌باشد که این مقدار برای الیاف بیضوی با نسبت تناسب ۰/۵، حدود ۳۹٪ است.

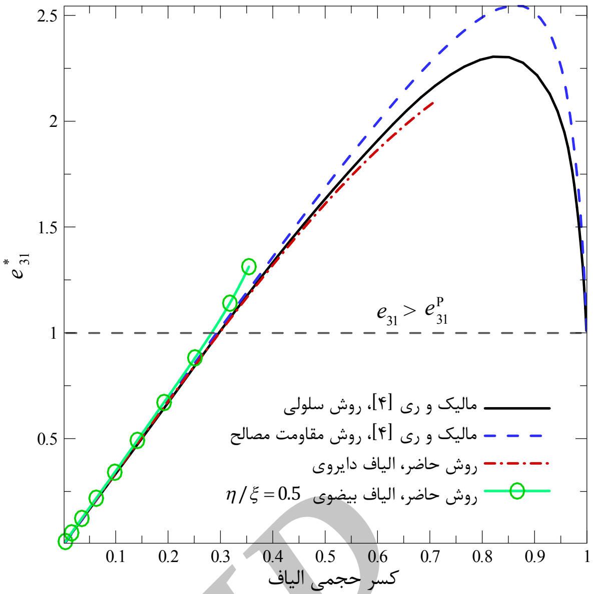
جزئیات اجزای تشکیل دهنده کامپوزیت در جدول ۱ لیست شده‌است که همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، اپوکسی از لحاظ پیزوالکتریکی خنثی می‌باشد. برای یکپارچه‌سازی در مقایسه نتایج، از شکل نرمالیزه یا بی‌بعدشده ضرایب الکترو- الاستیک، مطابق روابط (۳۰) استفاده می‌شود.

$$e_{ij}^{*}=\frac{e_{ij}}{e_{ij}^{P}}\ ,\ C_{ij}^{*}=\frac{C_{ij}}{C_{ij}^{\mathrm{P}}}\ ,\ \kappa_{33}^{*}=\frac{\kappa_{33}}{\kappa_0} \tag{۳۰}$$

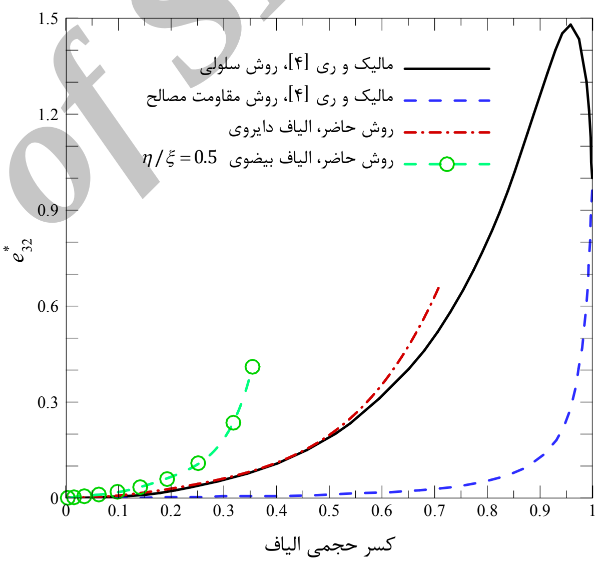
که κ_0، معرف ثابت گذردهی الکتریکی خلأ می‌باشد و برابر $8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ تعریف شده است [۲۷]. همچنین اندیس بالانویس p، نمایانگر خصوصیت مرتبط با ماده پیزوالکتریک خالص می‌باشد.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود پیش‌بینی حاضر در مورد ضرایب پیزوالکتریکی مؤثر کامپوزیت با الیاف دایروی، موافقت خوبی را با مدل‌های ارائه شده توسط مالیک و رِی [۴] در شکل‌های ۳ تا ۵ نشان می‌دهد. لازم به‌ذکر است که برای این پیش‌بینی، آن‌ها از دو مدل میکرومکانیکی، برپایه روش مقاومت مصالح و روش سلولی، استفاده کردند.

1- Perfectly or Fully Bounded
2- Penalty Method
3- Global Weak-Form
4- Gauss Quadrature
5- Gauss Elimination



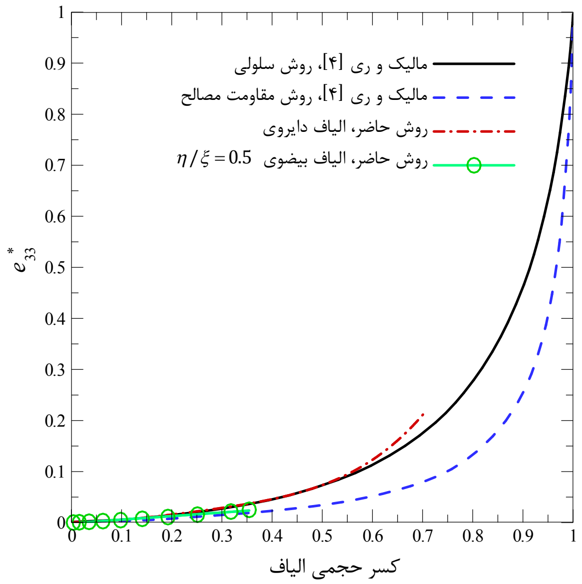
شکل ۳ تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه‌شده e^*_{31} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی



شکل ۴ تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه‌شده e^*_{32} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی

در کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی که راستای پولاریزاسیون آن‌ها عمود بر راستای الیاف باشد، خواصی متفاوت قابل مشاهده است؛ به‌طوری‌که منحنی ضریب مؤثر پیزوالکتریکی e_{31} به‌گونه‌ای است که اگر کسر حجمی الیاف از یک میزان مشخص افزایش یابد، مقدار این ضریب به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد؛ تا آن‌جا که ضریب پیزوالکتریکی مؤثر فوق‌الذکر برای کامپوزیت با الیاف دایروی، تا چند برابر همان ضریب در ماده پیزو الکتریک خالص پیش می‌رود، (شکل ۳).

از آن‌جا که ضرایب پیزوالکتریکی، در واقع، به عنوان واسطه تنش‌های مکانیکی و میدان الکتریکی هستند، تقویت آن‌ها، کنترل‌پذیری عملگرها و سنسورها را افزایش خواهد داد. لذا، همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در حالت پولاریزاسیون عرضی که میدان‌الکتریکی در راستای ضخامت کامپوزیت برقرار است، ضرایب پیزوالکتریکی مؤثر e_{31} کامپوزیت با الیاف دایروی در کسر حجمی ۷۰٪ تا حدود دو برابر حالت خالص رشد می‌کند، (شکل ۳).



شکل ۵ تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه‌شده e^*_{33} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی

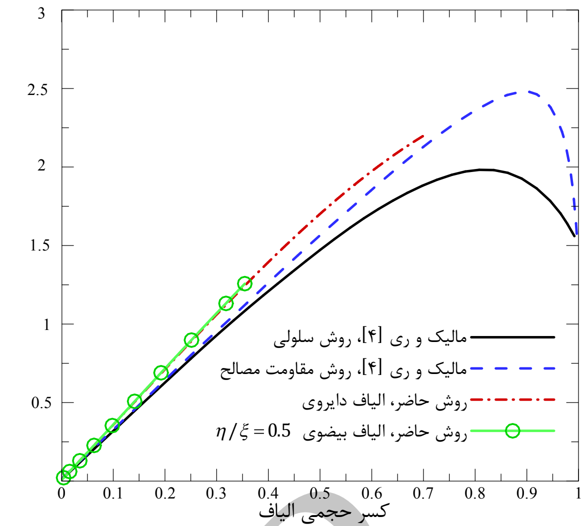
شکل ۴ تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه‌شده e^*_{32} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی را نسبت به کسر حجمی الیاف نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، به دلیل فرضیات ساده شونده موجود در مدل مقاومت مصالح [۴]، این مدل اختلاف بسیار زیادی را با مدل سلولی [۴] نشان می‌دهد. می‌توان ملاحظه کرد که پیش‌بینی حاضر در حالت الیاف دایروی، به دلیل این که اثرات موضعی میدان‌های تنش در آن لحاظ شده است، رفتار بسیار نزدیک‌تری را با روش سلولی نشان می‌دهد؛ چرا که در ماهیت روش سلولی نیز سلول واحد، به چند زیر بخش تقسیم می‌شود و مسأله جزئی‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه‌شده e^*_{33} در شکل ۵ نشان داده شده‌است. همان‌طور که در این شکل نیز دیده می‌شود، پیش‌بینی حاضر برای کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی که از الیاف دایروی تشکیل شده‌اند، موافقت بهتری را با روش سلولی نشان می‌دهد.

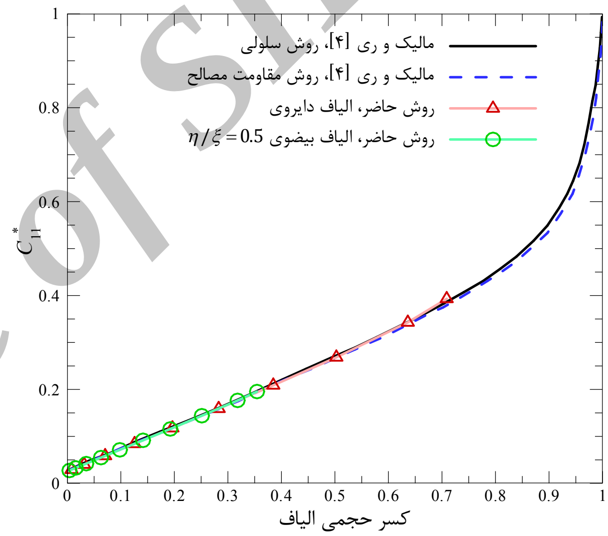
نتایج حاصل از پیش‌بینی حاضر، حاکی از این موضوع است که ضرایب پیزوالکتریکی نرمالیزه‌شده e^*_{31} و e^*_{33} تا کسر حجمی حدود ۳۵٪ نسبت به تغییر شکل حساسیتی اندکی از خود نشان می‌دهند، (شکل‌های ۳ و ۵). این در حالی است که e^*_{32} به شدت وابسته به شکل الیاف می‌باشد؛ به طوری که مقدار این ضریب در کسر حجمی ۳۵٪ ، برای الیاف بیضوی حدود ۴/۵ برابر الیاف دایروی است.

شکل ۶ تغییرات ضریب دی‌الکتریک نرمالیزه شده κ^*_{33} را نسبت به کسر حجمی الیاف نشان می‌دهد. مقایسه نتایج حاضر با نتایج مدل‌های ارائه شده در [۴] روند صحیحی را نشان می‌دهد با این حال، اختلاف‌های اندکی نیز قابل مشاهده است. علاوه براین، همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، اثر تغییر شکل الیاف بر رفتار ضریب دی‌الکتریک مؤثر κ_{33} تقریباً بی‌اثر می‌باشد.

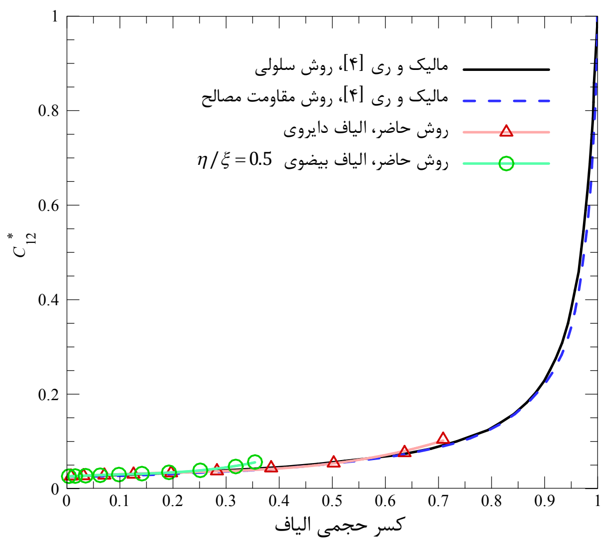
شکل ۷ تغییرات ضریب الاستیک نرمالیزه شده C^*_{11} کامپوزیت را در حالت پولاریزاسیون عرضی نشان می‌دهد. موافقت بسیار خوبی بین نتایج پیش‌بینی حاضر با مدل‌های ارائه شده در [۴] دیده می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این تغییر شکل الیاف بر رفتار این ضریب، که ارتباط بین تنش محوری و کرنش محوری را برقرار می‌کند، تأثیر نخواهد گذاشت.



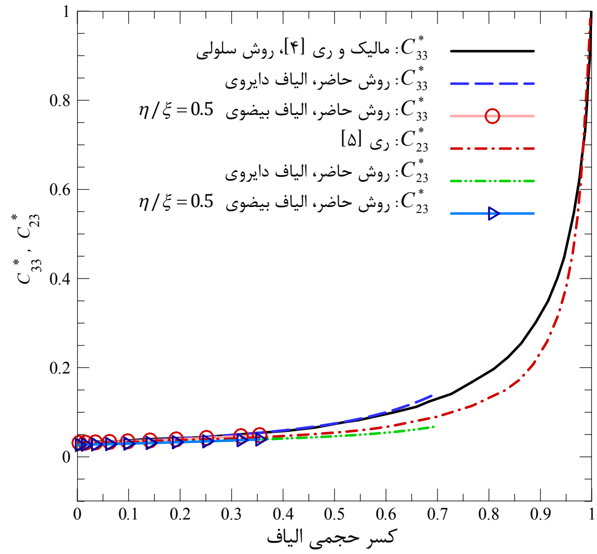
شکل ۶ تغییرات ضریب دی‌الکتریکی نرمالیزه شده κ_{33}^{*} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی



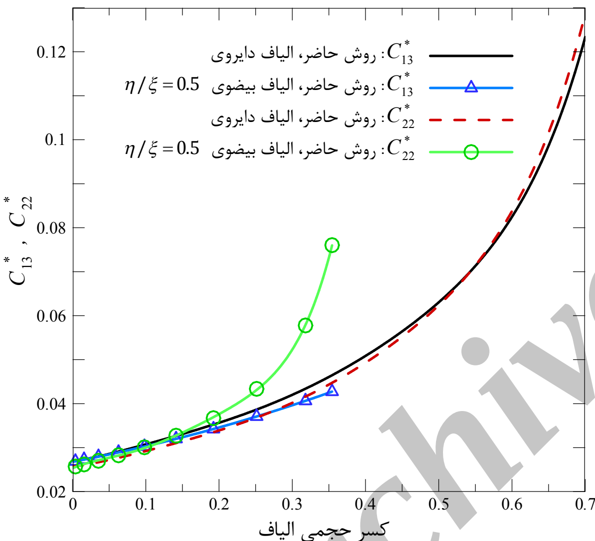
شکل ۷ تغییرات ضریب الاستیک نرمالیزه شده C_{11}^{*} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی



شکل ۸ تغییرات ضریب الاستیک نرمالیزه‌شده C_{12}^{*} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی



شکل ۹ تغییرات ضرایب الاستیک نرمالیزه‌شده C_{23}^{*} و C_{33}^{*} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی



شکل ۱۰ تغییرات ضرایب الاستیک نرمالیزه‌شده C_{13}^{*} و C_{22}^{*} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی

شکل ۸ رفتار ضریب الاستیک نرمالیزه شده C_{12}^{*} کامپوزیت را نسبت به کسر حجمی الیاف پیزوالکتریکی ترسیم می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این ضریب براساس تمامی مدل‌های ارائه شده در [۴] و پیش‌بینی حاضر، در ابتدا با افزایش کسر حجمی، تغییر ناچیزی از خود به نمایش می‌گذارد و به عبارتی، در کسر حجمی‌های پایین، نسبت به افزایش حجم الیاف درون زمینه، حساسیتی نشان نمی‌دهد. علاوه براین، تغییر شکل الیاف بر رفتار این ضریب تا کسر حجمی ۳۵٪ تأثیر گذاری اندکی را نشان می‌دهد.

در شکل ۹ منحنی تغییرات ضرایب الاستیک نرمالیزه شده C_{23}^{*} و C_{33}^{*} نسبت به کسر حجمی الیاف مشاهده می‌شود. این ضرایب، نسبت به میزان کسر حجمی الیاف پیزوالکتریک، از رفتاری مشابه با ضریب C_{12}^{*} برخوردار هستند؛ به‌گونه‌ای که پیش‌بینی‌ها حاکی از این است که شکل الیاف تأثیر ناچیزی بر رفتار این ضرایب خواهد گذاشت.

شکل ۱۰ تغییرات ثوابت الاستیک مؤثر نرمالیزه شده C_{13}^{*} و C_{22}^{*} کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی را نسبت به کسر حجمی الیاف ترسیم می‌کند.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، منحنی تغییرات C_{13}^{*} در مورد شکل بیضوی الیاف اندکی نسبت به الیاف دایروی از خود انحراف نشان می‌دهد. این در حالی است که پیش‌بینی‌ها بیان می‌کنند که ضریب نرمالیزه شده C_{22}^{*} وابسته به شکل الیاف می‌باشد؛ به‌طوری که در کسر حجمی ۳۵٪ مقدار این ضریب برای الیاف بیضوی ۱/۷۲ برابر الیاف دایروی می‌باشد.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر مطابق با رویکرد تحلیل میکرومکانیکی مواد مرکب، یک المان نماینده حجمی مناسب از کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی تک جهته، مطابق با شرایط بارگذاری مسأله انتخاب شد. آرایش مربعی از الیاف برای این المان نماینده در نظر گرفته شد و نهایتاً به دلیل این‌که شرایط بارگذاری نرمال در این مسأله مد نظر بود، از مدل ۱/۴ سلول واحد به دلیل تقارن هندسی استفاده گردید. در این سلول واحد، سرامیک‌های پیزوالکتریک با خواص ایزوتروپیک عرضی به شکل الیاف طویل و به صورت موازی و منظم، درون محیطی از اپوکسی با خواص ایزوتروپیک جای داده شدند و فرض شد که اتصال کامل بین الیاف و ماتریس برقرار است.

به منظور آنالیز و تحلیل این مسأله، از روش عددی بدون المان گلرکین استفاده شد. در این روش عددی با در نظر گرفتن اثرات میدان‌های موضعی تنش و کرنش اجزای تشکیل‌دهنده کامپوزیت، پیش‌بینی‌هایی از خواص الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی با پولاریزاسیون عرضی ارائه شد که در موافقت مناسبی با کارهای پیشین بودند.

نتایج حاکی از این موضوع است که هنگامی که میدان الکتریکی در راستای ضخامت کامپوزیت ثابت نگه داشته می‌شود، مقدار ضریب پیزوالکتریکی مؤثر e_{31} برای کامپوزیت پیزوالکتریکی که کسر حجمی الیاف آن از حدود ۳۰٪ فراتر می‌رود، از مقدار همان ضریب در حالت ماده خالص بیشتر می‌شود.

بررسی‌های انجام شده در خصوص تأثیر شکل فایبر بر نوع رفتار ضرایب الکترو-الاستیک نشان داد که در حالی که این تغییر شکل بر ضرایب مرتبط با راستاهای محوری تأثیر چندانی نمی‌گذارد اما می‌تواند ضرایب پیزوالکتریک و الاستیک مرتبط با راستای عرضی را تا حد مطلوبی تقویت کند؛ به گونه‌ای که ضریب الاستیک نرمالیزه شده C_{22}^{*} و ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه شده e_{32}^{*} به ترتیب، در مورد الیاف بیضوی تا حدود ۱/۷۲ و ۴/۵ برابر الیاف دایروی می‌باشد.

۶- فهرست علائم

a	اندازه ضلع سلول واحد مربعی
c_{ij}	ضرایب الاستیک
e_{ij}	ضرایب پیزوالکتریک
E_3	میدان الکتریکی در راستای پولاریزاسیون
D_3	جابه‌جایی الکتریکی در راستای پولاریزاسیون
q_3	دانسیته بارالکتریکی در راستای پولاریزاسیون
r_{w}	شعاع ناحیه موضعی
$\hat{w}$	تابع وزنی
N	تعداد کل گره‌های دامنه
t_{axial}	ترکشن محوری
$\bar{t}$	بردار ترکشن درون- صفحه‌ای
x_i	محورهای مختصات
u_i	مؤلفه‌های جابه‌جایی

علایم یونانی

$\Phi(x)$	بردار توابع شکل
σ_{axial}	تنش محوری
κ_{33}	ضریب دی‌الکتریک
ε_0	کرنش ثابت محوری
σ_{ij}	مؤلفه‌های تانسور تنش
ε_{ij}	مؤلفه‌های تانسور کرنش
ξ	نصف قطر بزرگ بیضی
η	نصف قطر کوچک بیضی

بالانویس‌ها

*	شکل بی‌بعد شده
p	ماده پیزوالکتریک خالص

۷- مراجع

[1] A. Safari, Development of piezoelectric composites for transducers, *J. Phys. III France,* Vol. 4, No. 7, pp. 1129-1149, 1994.

[2] G. M. Odegard, Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites, *Acta Materialia,* Vol. 52, No. 18, pp. 5315-5330, 10/18/, 2004.

[3] R. Kar-Gupta, T. A. Venkatesh, Electromechanical response of 1–3 piezoelectric composites: An analytical model, *Acta Materialia,* Vol. 55, No. 3, pp. 1093-1108, 2//, 2007.

[4] N. Mallik, M. C. Ray, Effective Coefficients of Piezoelectric Fiber-Reinforced Composites, *AIAA Journal,* Vol. 41, No. 4, pp. 704-710, 2003/04/01, 2003.

[5] M. Ray, Micromechanics of piezoelectric composites with improved effective piezoelectric constant, *International Journal of Mechanics and Materials in Design,* Vol. 3, No. 4, pp. 361-371, 2006/12/01, 2006. English

[6] A. Kumar, D. Chakraborty, Effective properties of thermo-electro-mechanically coupled piezoelectric fiber reinforced composites, *Materials & Design,* Vol. 30, No. 4, pp. 1216-1222, 4//, 2009.

[7] E. López-López, F. J. Sabina, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos, Effective permittivity of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents, *Journal of Electrostatics,* Vol. 71, No. 4, pp. 791-800, 8//, 2013.

[8] R. Kar-Gupta, C. Marcheselli, T. A. Venkatesh, Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: Effect of fiber shape, *Journal of Applied Physics,* Vol. 104, No. 2, pp. 024105-024105-17, 2008.

[9] R. Kar-Gupta, T. A. Venkatesh, Electromechanical response of piezoelectric composites: Effects of geometric connectivity and grain size, *Acta Materialia,* Vol. 56, No. 15, pp. 3810-3823, 9//, 2008.

[10] Z. Li, C. Wang, C. Chen, Effective electromechanical properties of transversely isotropic piezoelectric ceramics with microvoids, *Computational Materials Science,* Vol. 27, No. 3, pp. 381-392, 5//, 2003.

[11] Q. Dai, K. Ng, Investigation of electromechanical properties of piezoelectric structural fiber composites with micromechanics analysis and finite element modeling, *Mechanics of Materials,* Vol. 53, No. 0, pp. 29-46, 10//, 2012.

[12] C.-P. Wu, K.-H. Chiu, R.-Y. Jiang, A meshless collocation method for the coupled analysis of functionally graded piezo-thermo-elastic shells and plates under thermal loads, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 56, No. 0, pp. 29-48, 7//, 2012.

[13] B. Dai, B. Zheng, Q. Liang, L. Wang, Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov–Galerkin method, *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 219, No. 19, pp. 10044-10052, 6/1/, 2013.

[14] I. Ahmadi, N. Sheikhy, M. M. Aghdam, S. S. Nourazar, A new local meshless method for steady-state heat conduction in heterogeneous materials, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 34, No. 12, pp. 1105-1112, 12//, 2010.

[15] I. Ahmadi, M. M. Aghdam, Micromechanics of fibrous composites subjected to combined shear and thermal loading using a truly meshless method, *Computational Mechanics,* Vol. 46, No. 3, pp. 387-398, 2010/08/01, 2010. English

[16] I. Ahmadi, M. M. Aghdam, A truly generalized plane strain meshless method for combined normal and shear loading of fibrous composites, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 35, No. 3, pp. 395-403, 3//, 2011.

[17] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.

[18] J. Dolbow, T. Belytschko, An introduction to programming the meshless Element FreeGalerkin method, *Archives of Computational Methods in Engineering,* Vol. 5, No. 3, pp. 207-241, 1998/09/01, 1998. English

[19] G. R. Liu, Y. T. Gu, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*: Springer London, Limited, 2005.

[20] M. Bayat, M. M. Aghdam, A micromechanics-based analysis of effects of square and hexagonal fiber arrays in fibrous composites using DQEM, *European Journal of Mechanics - A/Solids,* Vol. 32, No. 0, pp. 32-40, 3//, 2012.

[21] M. Bayat, M. M. Aghdam, A micromechanics based analysis of hollow fiber composites using DQEM, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 43, No. 8, pp. 2921-2929, 12//, 2012.

[22] T. H. Brockmann, *Theory of Adaptive Fiber Composites*: Springer, 2009.

[23] S. Alkoy, C. Gol, Preparation of solid and hollow piezoelectric ceramic fibers and springs using a novel alginate gelation method, in *Proceeding of,* 1711-1714.

[24] G. R. Liu, *Mesh free methods : moving beyond the finite element method*, United States of America: CRC Press LLC, 2003.

[25] S. Fernández-Méndez, A. Huerta, Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 193, No. 12–14, pp. 1257-1275, 3/26/, 2004.

[26] M. M. Aghdam, M. J. Pavier, D. J. Smith, Micro-mechanics of off-axis loading of metal matrix composites using finite element analysis, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 38, No. 22–23, pp. 3905-3925, 5//, 2001.

[27] IEEE Standard on Piezoelectricity, *ANSI/IEEE Std 176-1987*, pp. 0_1, 1988.