مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۷، ص‌ص ۱۲۲-۱۳۰

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل دقیق ارتعاشات آزاد نانو صفحه‌های مستطیل شکل با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی غیر محلی

رضا ناظم‌نژاد[۱]، شاهرخ حسینی هاشمی[۲*]، مهدی کرماجانی[۳]، شهرام امیرعبداللهیان[۴]

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۲- استاد دانشکده مهندسی مکانیک و راه‌آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۳- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۴- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سمنان، سمنان
* تهران، صندوق پستی ۱۶۷۶۵-۱۶۳، shh@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۱۵ مرداد ۱۳۹۲
پذیرش: ۱۹ مهر ۱۳۹۲
ارائه در سایت: ۲۵ مرداد ۱۳۹۳

کلید واژگان:
نانو صفحه
حل تحلیلی دقیق
ارتعاشات آزاد
الاستیسیته غیر محلی
تئوری صفحه ردی

چکیده

در این مقاله، اثرات مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد نانو صفحات مستطیلی، بر اساس تئوری غیر محلی تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی و با استفاده از یک روش دقیق تحلیلی بررسی شده است. به منظور حل دقیق معادلات حرکت، ابتدا معادلات بی‌بعد شده و با استفاده از تابع کمکی از یکدیگر دی‌کوپله شده‌اند. نهایتاً، معادلات جدیدی بر حسب یکسری توابع پتانسیل بدست آمده که بصورت دقیق و تحلیلی قابل حل می‌باشند و به این ترتیب فرکانس‌های طبیعی برای مسأله بدست می‌آید. در حل معادلات فوق، از شرایط مرزی لوی استفاده شده که بر اساس آن، دو لبه نانو صفحه دارای شرایط مرزی ساده و دو لبه دیگر می‌تواند ترکیبی از شرایط مرزی ساده، گیردار یا آزاد باشد. به منظور تأیید صحت روش حل حاضر، نتایج بدست آمده با دیگر روش‌های عددی و تقریبی مقایسه شده است. برای ارائه نتایج بیشتر، اثرات شرایط مرزی، مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی، نسبت طول به عرض و نسبت ضخامت به طول بر نسبت فرکانسی نانوورق بررسی شده است. مطالعه حاضر می‌تواند به منظور تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌های صفحه مانند ضخیم در مقیاس نانو، مانند گرافن چند لایه و گرافیت بصورت سازه‌های کامپوزیتی یا ساندویچی، مفید باشد.

Exact solutions for free vibration of lévy-type rectangular nanoplates via nonlocal third-order plate theory

Reza Nazemnezhad[1], Shahrokh Hosseini-Hashemi[2*], Mehdi Kermajani[1], Shahram Amirabdollahian[3]

1- School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
2- School of Mechanical Engineering and Center of Excellence in Railway Transportation, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
3- Mechanical Engineering Department, Islamic Azad University, Semnan Branch, Semnan, Iran
* P.O.B. 16765-163 Tehran, Iran, shh@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 06 August 2013
Accepted 11 October 2013
Available Online 16 August 2014

Keywords:
Exact Analytical Solution
Free Vibration
Nonlocal Elasticity
Reddy Plate Theory

ABSTRACT

In this paper, exact closed-form solutions in explicit forms are presented to investigate small scale effects on the transverse vibration behavior of Lévy-type rectangular nanoplates based on the Reddy's nonlocal third-order shear deformation plate theory. Two other edges may be restrained by different combinations of free, simply supported, or clamped boundary conditions. Hamilton's principle is used to derive the nonlocal equations of motion and natural boundary conditions of the nanoplate. Two comparison studies with analytical and numerical techniques reported in literature are carried out to demonstrate the high accuracy of the present new formulation. Comprehensive benchmark results with considering the small scale effects on frequency ratios and non-dimensional fundamental natural frequencies of rectangular nanoplates with different combinations of boundary conditions are tabulated for various values of nonlocal parameters, aspect ratios and thickness to length ratios. Due to the inherent features of the present exact closed-form solution, the present findings will be a useful benchmark for evaluating the accuracy of other analytical and numerical methods, which will be developed by researchers in the future. Also, the present study may be useful for static and dynamic analysis of thicker nano scale plate-like structures, multi-layer graphene and graphite as composite or sandwich structures.

۱- مقدمه

گرافن (گرافیت)، نازک‌ترین سازه دوبعدی [۱]، به دلیل داشتن خواص منحصر بفرد الکتریکی [۲]، مکانیکی [۳]، اپتیکی [۴] و حرارتی [۵] مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. آزمایش‌های مکانیکی اخیر نشان

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
R. Nazemnezhad, Sh. Hosseini-Hashemi, M. Kermajani, Sh. Amirabdollahian, Exact solutions for free vibration of lévy-type rectangular nanoplates via nonlocal third-order plate theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 122-130, 2014 (In Persian)

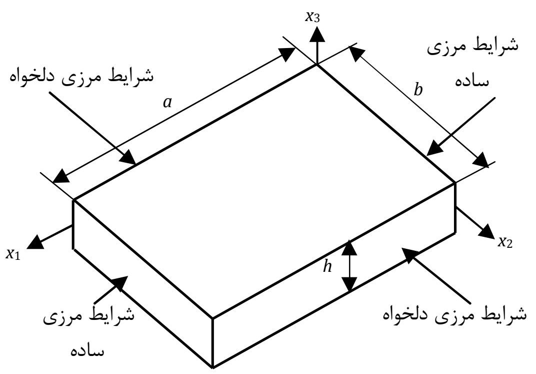
دادند که گرافن با داشتن مدول الاستیسیته‌ای برابر با ۱ تراپاسکال [۶]، مستحکم‌ترین ماده‌ای است که تاکنون شناخته شده است. گرافن بهترین گزینه برای طراحی و توسعه سیستم‌های نانو-الکترو-مکانیکی مانند ترانزیستورهای سرعت بالا [۷]، سلول‌های خورشیدی [۸]، سنسورهای فشار [۹] و باتری‌ها [۱۰] می‌باشد.

گرافن می‌تواند بصورت یک لایه منفرد یا بصورت چندلایه وجود داشته باشد. در گرافن‌های چندلایه، نیروی ضعیف واندروالسی بین لایه‌های گرافن وجود داشته و این نیروی ضعیف سبب در کنار یکدیگر قرار گرفتن آنها می‌شود. در تحلیل‌های دینامیکی و استاتیکی گرافن‌های چندلایه، اثر پیوندهای واندروالسی بین لایه‌های گرافن به دو صورت مورد توجه قرار گرفته است. در حالت اول، فرض شده است که لایه‌های گرافن نسبت به یکدیگر صرفاً جابجایی عرضی نسبی داشته و بر اساس آن پیوندهای واندروالسی بصورت اثر فشاری-کششی مدل شده و اثر آن در معادلات حرکت لحاظ شده است [۱۱-۱۴]. در حالت دوم فرض شده است که لایه‌های گرافن همواره در فاصله عرضی نسبی ثابتی از یکدیگر قرار داشته و فقط قابلیت جابجایی نسبی درون صفحه‌ای دارند. در این حالت به دلیل جابجایی درون صفحه‌ای نسبی لایه‌های گرافن و لغزش آنها بر روی یکدیگر، پیوندهای واندروالسی بصورت مولفه برش مدل شده و اثر آن در معادلات حرکت در نظر گرفته شده است [۱۵].

در بیشتر مراجع، برای تحلیل گرافن‌ها (تک لایه و چندلایه) از تئوری الاستیسیته غیر محلی [۱۷،۱۶] استفاده شده است. در این تئوری، که توسط ارینگن پیشنهاد شده، تنش در یک نقطه از جسم به عنوان تابعی از میدان کرنش در تمام نقاط جسم در نظر گرفته می‌شود. از پژوهش‌های انجام گرفته در این زمینه می‌توان به بررسی ارتعاشات گرافن‌های چندلایه تحت شرایط مرزی مختلف توسط انصاری و همکاران [۱۱] اشاره نمود. در این پژوهش، هر لایه گرافن بر اساس تئوری میندلین مدل شده و اثر پیوندهای واندروالسی بصورت ترم فشاری-کششی در معادلات حرکت لحاظ شده است. نهایتاً معادلات حرکت به روش عددی مربعات دیفرانسیلی توسعه یافته[1] حل شده و فرکانس‌های طبیعی استخراج شده‌اند. در پژوهش مشابه دیگری [۱۸] فرکانس‌های طبیعی گرافن‌های چندلایه توسط روش اجزاء محدود بدست آمده است. معدود مقالاتی یافت می‌شود که به منظور تحلیل گرافن‌ها از تئوری مرتبه بالاتر (تئوری مرتبه سوم برشی) استفاده شده باشد. بررسی اثرات پارامتر غیرمحلی روی فرکانس‌های طبیعی نانو صفحه مستطیلی با شرایط مرزی ساده توسط ردی و آقابابایی [۱۹] و بررسی کمانش ورق گرافن تک لایه با استفاده از روش ناویر توسط پرادهان [۲۰] از پژوهش‌های انجام گرفته بر اساس تئوری مرتبه سوم برشی می‌باشد. از ادبیات تحقیق مشخص است که برای استخراج نتایج از روش‌های عددی مانند روش المان محدود [۱۸]، روش تفاضل محدود [۲۱]، روش گالرکین [۲۲] و روش دی.کیو.ام [۲۴،۲۳] استفاده شده است. هم‌چنین شرایط مرزی مورد مطالعه در مراجع، شرایط مرزی ساده بوده و در اندک مواردی ترکیبی از شرایط مرزی ساده و گیردار [۲۵،۲۴] مشاهده می‌شود.

شاید یکی از دلایل توجه اندک پژوهشگران به استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی برای تحلیل گرافن‌ها، نازک بودن آن‌ها می‌باشد. اما وقتی گرافن چندلایه مدنظر باشد می‌توان آنها را از دیدگاه سازه‌های کامپوزیتی مورد نظر قرار داد و با در نظر گرفتن خواص معادل، بصورت یک سازه همگن آن را تحلیل نمود.

1. Generalized Differential Quadrature Method (GDQ)



شکل ۱ شماتیک صفحه مستطیل شکل با شرایط مرزی لوی

حال، گرافن چندلایه، بصورت ماده همگن و با خواص معادل است که برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی آن، استفاده از تئوری‌های مرتبه بالاتر ناگزیر می‌باشد. ایده بیان شده، توسط چاندرا و همکارانش [۱۳] مورد استفاده قرار گرفته است که در آن، گرافن‌های دولایه، بصورت تیر همگن و با خواص معادل مدل شده و مورد تحلیل قرار گرفته‌اند و نتایج قابل قبولی حاصل شده است.

هدف اصلی مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد نانو ورق‌های مستطیل شکل بر اساس تئوری غیرمحلی تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی می‌باشد که بدین منظور از روش حل تحلیلی دقیق ارائه شده برای صفحات ماکرو توسط نویسنده [۲۶-۲۸] استفاده شده است. معادلات حرکت و شرایط مرزی طبیعی، با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده و نانو ورق، دارای شرایط مرزی لوی می‌باشند. این مطالعه، بررسی اثر مقیاس کوچک و تنش برشی در ضخامت نانو صفحه را امکان‌پذیر می‌سازد. برای ارائه نتایج بیشتر، اثرات شرایط مرزی، مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی، نسبت طول به عرض و نسبت ضخامت به طول بر فرکانس طبیعی نانوورق بررسی شده است.

۲- شرح مسأله

۲-۱- هندسه مسأله

نانو صفحه مستطیلی ضخیم، همسانگرد و مسطح به طول a، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته شده است (شکل ۱). برای دو لبه روبرو در امتداد محور x_2 (در امتداد لبه‌های $x_1 = 0$ و $x_1 = a$) شرایط تکیه‌گاهی ساده در نظر گرفته شده، و دو لبه دیگر می‌تواند ترکیبی از شرایط مرزی آزاد، ساده یا گیردار داشته باشد. دستگاه مختصات دکارتی (x_1، x_2، x_3) برای دست‌یابی به روابط ریاضی، به صورتی در نظر گرفته شده است که محورهای x_1 و x_2، در وسط ضخامت نانو صفحه (تار خنثی) قبل از تغییر شکل قرار گرفته باشد.

۲-۲- فرضیات تئوری مرتبه سوم برشی

میدان‌های جابه‌جایی نانو صفحه در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم، تابعی درجه سوم از ضخامت و تغییر شکل عرضی می‌باشد و بصورت روابط (۱) تعریف می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
u_1(x_1,x_2,x_3,t) &= u(x_1,x_2,t) + x_3\psi_1(x_1,x_2,t) \\
&\quad -\frac{4x_3^3}{3h^2}\left(\psi_1(x_1,x_2,t)+\frac{\partial w(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}\right) \\
u_2(x_1,x_2,x_3,t) &= v(x_1,x_2,t) + x_3\psi_1(x_1,x_2,t) \\
&\quad -\frac{4x_3^3}{3h^2}\left(\psi_2(x_1,x_2,t)+\frac{\partial w(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}\right) \\
u_3(x_1,x_2,x_3,t) &= w(x_1,x_2,t) \qquad (۱)
\end{aligned}
$$

که در آن u، v و w به ترتیب جابجایی وسط صفحه در راستای محورهای x_1، x_2 و x_3، ψ_1 و ψ_2 به ترتیب نشان‌دهنده چرخش نرمال عمود بر وسط صفحه حول محورهای x_2 و x_1 و t زمان می‌باشد. بر مبنای قانون هوک، روابط جابجایی-تنش بصورت رابطه (۲) تعریف می‌شوند.

$$\left\{\begin{matrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\end{matrix}\right\}^{\text{محلی}} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left\{\left\{\begin{matrix}u_{,1}+\upsilon v_{,2}\\ v_{,1}+\upsilon u_{,1}\\ \frac{1-\upsilon}{2}(u_{,2}+v_{,1})\\ \frac{1-\upsilon}{2}(\psi_2+w_{,2})\\ \frac{1-\upsilon}{2}(\psi_1+w_{,1})\end{matrix}\right\} + x_3\left\{\begin{matrix}\psi_{1,1}+\upsilon\psi_{2,2}\\ \psi_{2,2}+\upsilon\psi_{1,1}\\ \frac{1-\upsilon}{2}(\psi_{1,2}+\upsilon\psi_{2,1})\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\} - \frac{4x_3^2}{h^2}\left\{\begin{matrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1-\upsilon}{2}(\psi_2+w_{,2})\\ \frac{1-\upsilon}{2}(\psi_1+w_{,1})\end{matrix}\right\} - \frac{4x_3^3}{h^2}\left\{\begin{matrix}(\psi_{1,1}+w_{,11})+\upsilon(\psi_{2,2}+w_{,22})\\ (\psi_{2,2}+w_{,22})+\upsilon(\psi_{1,1}+w_{,11})\\ \frac{1-\upsilon}{2}(\psi_{1,2}+\psi_{2,1}+2w_{,12})\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\}\right\} \quad (۲)$$

در معادله (۲)، E مدول یانگ الاستیسیته و υ نسبت پواسون می‌باشد.

۲-۳- معادلات حرکت

با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکت غیرمحلی (روابط ۳) بر اساس روش مورد استفاده در مرجع [۱۹] بدست آمده است.

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_6}{\partial x_2}=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(I_1\ddot{u}+I_2\psi_1-\frac{4I_4}{3h^2}\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x_1}\right) \quad \text{(۳-الف)}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+\frac{\partial N_6}{\partial x_1}=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(I_1\ddot{v}+\bar{I}_2\psi_2-\frac{4I_4}{3h^2}\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x_2}\right) \quad \text{(۳-ب)}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}-\frac{4}{h^2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x_1}+\frac{\partial R_2}{\partial x_2}\right)+\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 p_6}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2}\right)$$
$$=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left[I_1\ddot{w}-\frac{16I_7}{9h^4}\left(\frac{\partial^2\ddot{w}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}}{\partial x_2^2}\right)+\frac{4I_4}{3h^2}\left(\frac{\partial\ddot{u}}{\partial x_1}+\frac{\partial\ddot{v}}{\partial x_2}\right)+\frac{4\bar{I}_5}{3h^2}\left(\frac{\partial\ddot{\psi}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\right] \quad \text{(۳-ج)}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial M_6}{\partial x_2}-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_6}{\partial x_2}\right)-Q_1+\frac{4R_1}{h^2}=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(\bar{I}_2\ddot{u}+\bar{I}_3\ddot{\psi}_1-\frac{4}{3h^2}\bar{I}_5\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x_1}\right) \quad \text{(۳-د)}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2}+\frac{\partial M_6}{\partial x_1}-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_6}{\partial x_1}\right)-Q_2+\frac{4R_2}{h^2}=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(\bar{I}_2\ddot{v}+\bar{I}_3\ddot{\psi}_2-\frac{4\bar{I}_5}{3h^2}\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x_2}\right) \quad \text{(۳-ه)}$$

متغیرهای N_i، M_i، P_i، Q_i، R_i و اینرسی I_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) بصورت روابط (۴) و (۵) تعریف شده‌اند:

$$\left(I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_7\right)=\int_{-0.5h}^{0.5h}\rho\left(1,x_3,x_3^2,x_3^3,x_3^4,x_3^6\right)dx_3;$$
$$\bar{I}_2=I_2-\frac{4}{3h^2}I_4;\bar{I}_5=I_5-\frac{4}{3h^2}I_7;\bar{I}_3=I_3-\frac{8}{3h^2}I_5+\frac{16}{9h^4}I_7 \quad (۴)$$

$$(N_i,M_i,P_i)=\int_{-0.5b}^{0.5b}\sigma_i(1,x_3,x_3^3)dx_3;\ (i=1,\ 2,\ 6)$$
$$(Q_1,R_1)=\int_{-0.5h}^{+0.5h}\sigma_5(1,x_3^2)dx_3,\ \ (Q_2,R_2)=\int_{-0.5h}^{+0.5h}\sigma_4(1,x_3^2)dx_3,$$
$$\sigma_{11}=\sigma_1;\sigma_{22}=\sigma_2;\sigma_{23}=\sigma_4;\sigma_{13}=\sigma_5;\sigma_{12}=\sigma_6 \quad (۵)$$

همان طور که از معادله‌های (۳) مشخص است پارامتر غیرمحلی (μ) در معادلات حرکت ظاهر شده است. مقدار پارامتر غیرمحلی، یک عدد ثابت و مشخصی نبوده و به شرایط تکیه‌گاهی، عدد مد، تعداد دیواره‌ها و لایه‌ها، و همچنین به ماهیت حرکت بستگی دارد. تا به امروز، منابع اندکی وجود دارد که مقدار دقیق این پارامتر را گزارش کرده باشد [۲۳،۲۹-۳۱]. منابع موجود در این زمینه برای بدست آوردن این پارامتر پیشنهاد می‌کنند تا منحنی‌های انتشار[1] مکانیک محیط پیوسته غیرمحلی و دینامیک شبکه[2] برای ساختارهای کریستالی نانومواد با یکدیگر مقایسه شوند. هم‌چنین نشان داده شده است که مقدار قابل قبول و منطقی برای پارامتر غیرمحلی، بین بازه ۰ تا ۴ نانومترمربع می‌باشد. به همین دلیل در این پژوهش، مقدار این پارامتر در این باز در نظر گرفته شده است [۲۳،۲۹-۳۱].

شرایط مرزی برای لبه‌های موازی با محور x_1، به صورت معادلات (۶) تعریف شده‌اند.

$$\psi_2=0 \quad \text{یا} \quad M_6-\frac{4}{3h^2}P_6=0,$$
$$\psi_2=0 \quad \text{یا} \quad M_2-\frac{4}{3h^2}P_2=0,$$
$$w_{,2}=0, \quad \text{یا} \quad P_2=0$$
$$w=0 \quad \text{یا} \quad Q_2-\frac{4}{h^2}R_2+\frac{4}{3h^2}\left(2\frac{\partial P_6}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}\right)-\frac{4}{315}\rho h^3\ddot{\psi}_2+\frac{1}{252}\rho h^3\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x_2}=0 \quad (۶)$$

از آنجا که در این مقاله، ارتعاشات آزاد خارج از صفحه نانو صفحه مستطیلی بررسی می‌شود از جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای اولیه u و v در رابطه (۱) صرف‌نظر شده است. از طرفی، رابطه بین معادلات (۳- الف) و (۳- ب) با معادلات (۳- ج تا ه) با فرض $I_2=\bar{I}_2=I_4=0$ از بین می‌رود. در نتیجه، با جایگذاری روابط (۴) و (۵) در رابطه (۳- ج تا ه) و با استفاده از قانون هوک، معادلات حرکت (۷) بدست می‌آیند.

$$D\left[\frac{68(1-\nu)}{210}\nabla^2\psi_1+\frac{68(1+\nu)}{210}\left(\psi_{1,11}+\psi_{2,12}\right)-\frac{16}{105}\nabla^2 w_{,1}-\frac{16(1+\nu)}{5h^2}\left(\psi_1+w_{,1}\right)\right]=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(\bar{I}_3\ddot{\psi}_1-\frac{4}{3h^2}\bar{I}_5\ddot{w}_{,1}\right)$$

1. Dispersion curves
2. Lattice dynamics

$$D\left[\frac{68(1-\nu)}{210}\nabla^2\psi_2-\frac{16(1-\nu)}{5h^2}\left(\psi_2+w_{,2}\right)-\frac{16}{105}\nabla^2 w_{,2}+\frac{68}{210}(1+\nu)\left(\psi_{1,11}+\psi_{2,12}\right)\right]=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(\bar{I}_3\ddot{\psi}_2-\frac{4}{3h^2}\bar{I}_5\ddot{w}_{,2}\right)$$

$$D\left[\frac{16}{105}\nabla^2\left(\psi_{1,1}+\psi_{2,2}\right)+\frac{16(1-\nu)}{5h^2}\left(\psi_{1,1}+\psi_{2,2}+\nabla^2 w\right)-\frac{\nabla^4 w}{21}\right]=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(I_1\ddot{w}-\frac{4I_7}{3h^2}\nabla^2\ddot{w}+\frac{4\bar{I}_5}{3h^2}\left(\ddot{\psi}_{1,1}+\ddot{\psi}_{2,2}\right)\right) \quad (۷)$$

که ∇^2 نشان‌دهنده عملگر لاپلاس بوده و بصورت معادله (۸) مشخص می‌شود.

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2};\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+\frac{2\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (۸)$$

$D=Eh^3/12(1-\upsilon^2)$ سختی خمشی می‌باشد. کاما پس از ۱، ۲ یا ۳ به ترتیب مشتق نسبت به x_1، x_2 و x_3 را نشان می‌دهد. برای سهولت و جامعیت بیشتر، متغیرهای بدون بعدی بصورت روابط (۹) معرفی شده‌اند.

$$X_1=\frac{x_1}{a};X_2=\frac{x_2}{a};\eta=\frac{b}{a};\tau=\frac{h}{a};\bar{\psi}_1=\psi_1;\bar{\psi}_2=\psi_2;$$

$$\xi^2=\frac{\mu}{a^2};\bar{w}=\frac{w}{a} \quad (۹)$$

برای تحلیل ارتعاشات آزاد نانو ورق، فرض می‌شود که متغیرهای $\bar{w}$، $\bar{\psi}_1$ و $\bar{\psi}_2$، بصورت هارمونیک نسبت به زمان تغییر نمایند.

$$\bar{\psi}_1(X_1,X_2,t)=\tilde{\psi}_1(x_1,x_2)e^{i\omega t};\bar{\psi}_2(x_1,x_2,t)=\tilde{\psi}_2(x_1,x_2)e^{i\omega t}$$

$$\bar{w}(x_1,x_2,t)=\frac{\tilde{w}(x_1,x_2)}{a}e^{i\omega t}$$

نهایتاً، سه معادله حرکت بدون بعد نانو صفحه ضخیم در فضای الاستیسیته غیرمحلی به صورت معادلات (۱۰) بدست می‌آیند.

$$\left(\frac{68(1-\nu)}{210}-\frac{17\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2\tilde{\psi}_1-\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}\left(\tilde{\psi}_1+\tilde{w}_{,1}\right)+\frac{68(1+\nu)}{210}\left(\tilde{\psi}_{1,11}+\tilde{\psi}_{2,12}\right)-\left(\frac{16}{105}-\frac{4\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2\tilde{w}_{,1}=-\frac{17}{315}\tau^2\beta^2\tilde{\psi}_1+\frac{4}{315}\tau^2\beta^2\tilde{w}_{,1} \quad (۱۰\text{-الف})$$

$$\left(\frac{68(1-\nu)}{210}-\frac{17\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2\tilde{\psi}_2-\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}\left(\tilde{\psi}_2+\tilde{w}_{,2}\right)+\frac{68(1+\nu)}{210}\left(\tilde{\psi}_{2,22}+\tilde{\psi}_{1,12}\right)-\left(\frac{16}{105}-\frac{4\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2\tilde{w}_{,2}=-\frac{17}{315}\tau^2\beta^2\tilde{\psi}_2+\frac{4}{315}\tau^2\beta^2\tilde{w}_{,2} \quad (۱۰\text{-ب})$$

$$\left(\frac{16}{105}-\frac{4\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2\left(\tilde{\psi}_{1,1}+\tilde{\psi}_{2,2}\right)-\left(\frac{\xi^2}{21}+\frac{\tau^2\beta^2}{252}\right)\nabla^4\tilde{w}+\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}\left(\tilde{\psi}_{1,1}+\tilde{\psi}_{2,2}\right)+\left(\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}-\xi^2\beta^2\right)\nabla^2\tilde{w}=-\beta^2\tilde{w}+\frac{\tau^2\beta^2}{252}\nabla^2\tilde{w}-\frac{4\tau^2\beta^2}{315}\left(\tilde{\psi}_{1,1}+\tilde{\psi}_{2,2}\right) \quad (۱۰\text{-ج})$$

۲-۴- روش حل دقیق

با مشتق گرفتن از معادلات (۱۰-الف) و (۱۰-ب) به ترتیب نسبت به x_1 و x_2، و سپس ترکیب آنها، معادله جدیدی بصورت معادله (۱۱) حاصل می‌شود.

$$\left(\frac{68}{105}-\frac{17\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2\left(\tilde{\psi}_{1,1}+\tilde{\psi}_{2,2}\right)-\frac{16}{105}\nabla^4\tilde{w}+\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}\left(\tilde{\psi}_{1,1}+\tilde{\psi}_{2,2}+\nabla^2\tilde{w}\right)-\left(\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}-\frac{4\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2\tilde{w}=-\frac{17\tau^2\beta^2}{315}\left(\tilde{\psi}_{1,1}+\tilde{\psi}_{2,2}\right)+\frac{4\tau^2\beta^2}{315}\nabla^2\tilde{w} \quad (۱۱)$$

حال، تابع پتانسیل φ و دو اپراتور لاپلاس L_1 و L_2 بصورت روابط (۱۲) تعریف می‌شوند.

$$\phi=\tilde{\psi}_{1,1}+\tilde{\psi}_{2,2} \quad (۱۲\text{-الف})$$

$$L_1=\left(\frac{68}{105}-\frac{17\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2-\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}+\frac{17\tau^2\beta^2}{315} \quad (۱۲\text{-ب})$$

$$L_2=\left(\frac{16}{105}-\frac{4\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2+\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}+\frac{4\tau^2\beta^2}{315} \quad (۱۲\text{-ج})$$

با جایگذاری معادلات (۱۲) در معادلات (۱۰-ج) و (۱۱)، معادلات (۱۲-ب) و (۱۲-ج) را می‌توان بصورت معادلات (۱۳) بازنویسی نمود.

$$L_1(\mathrm{f})=\left(\frac{16}{105}-\frac{4\xi^2\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^4\tilde{w}-\left(\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}-\frac{4\tau^2\beta^2}{315}\right)\nabla^2\tilde{w} \quad (۱۳\text{-الف})$$

$$L_2(\mathrm{f})=\left(\frac{1}{21}+\frac{\xi^2\tau^2\beta^2}{252}\right)\nabla^4\tilde{w}-\beta^2\tilde{w}-\left(\frac{16(1-\nu)}{5\tau^2}-\xi^2\beta^2+\frac{\tau^2\beta^2}{252}\right)\nabla^2\tilde{w} \quad (۱۳\text{-ب})$$

و با جایگذاری معادله (۱۳- الف) در معادله (۱۳- ب)، تابع پتانسیل φ بصورت معادله (۱۴) بدست می‌آید.

$$\phi=e_1\nabla^4\tilde{w}+e_2\nabla^2\tilde{w}+e_3\tilde{w} \quad (۱۴)$$

که:

$$e_1=\left(\frac{\tau^2}{4032}\right)\left(\frac{-12+\beta^2\xi^2\tau^2}{\upsilon-1}\right);\qquad e_3=\frac{85\beta^2\tau^2}{336(\upsilon-1)};$$

$$e_2=\frac{4032(\upsilon-1)+1020\tau^2\beta^2\xi^2+\beta^2\tau^4}{4032(1-\upsilon)}$$

پس از انجام یکسری عملیات ریاضی، معادله (۱۵) با استفاده از روابط (۱۳-الف)، (۱۳-ب) و (۱۴) بدست می‌آید.

$$\nabla^6\tilde{w}+a_1\nabla^4\tilde{w}+a_2\nabla^2\tilde{w}+a_3\tilde{w}=0 \quad (۱۵)$$

که ضرایب a_1، a_2 و a_3 عبارتند از:

$$a_1=\frac{2\left(2520(\upsilon-1)+\beta^2\tau^2\left(510\xi^2+\tau^2\right)\right)}{\tau^2\left(12+\beta^2\xi^2\tau^2\right)}$$

$$a_2=\frac{-\beta^2}{\tau^2(\beta^2\xi^2\tau^2-12)\left(12+\beta^2\xi^2\tau^2\right)}\times\left[120\xi^2\left(504(\upsilon-1)+17\beta^2\tau^4\right)+\tau^2\left(-17280+504\upsilon+\beta^2\tau^4\right)\right]$$

$$a_3=\frac{-60\beta^2\left(1008(\upsilon-1)+17\beta^2\tau^4\right)}{\tau^2\left(-12+\beta^2\xi^2\tau^2\right)}$$

برای حل معادله (۱۵)، رابطه (۱۶) تعریف شده است.

$$\tilde{w} = W_1 + W_2 + W_3 \qquad (۱۶)$$

که در آن روابط (۱۷) برقرارند.

$$\nabla^2 W_1 + \alpha_1^2 W_1 = 0,\ \nabla^2 W_2 + \alpha_2^2 W_2 = 0,$$
$$\nabla^2 W_3 + \alpha_3^2 W_3 = 0, \qquad (۱۷)$$

α_1^2، α_2^2 و α_3^2 ریشه‌های معادله (۱۸) بوده و بصورت روابط زیر داده می‌شوند:

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \qquad (۱۸)$$

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{6A}\left(2\times 2^{\frac{1}{3}}\left(a_1^2 - 3a_2\right) - 2a_1 A + 2^{\frac{2}{3}} A^2\right)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{12A}\left(2\sqrt{2}i\left(i+\sqrt{3}\right)\left(a_1^2 - 3a_2\right) - 4a_1 A - 2^{\frac{2}{3}}\left(1+i\sqrt{3}\right)A^2\right)$$

$$\alpha_3^2 = \frac{1}{12A}\left(-2i\sqrt{2}\left(-i+\sqrt{3}\right)\left(a_1^2 - 3a_2\right) - 4a_1 A + i2^{\frac{2}{3}}\left(1+i\sqrt{3}\right)A^2\right)$$

$$A = \left[9a_1a_2 - 2a_1^3 - 27a_3 + \sqrt{(2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3)^2 - 4(a_1^2 - 3a_2)^3}\right]^{1/3}$$

با جایگذاری معادلات (۱۴) و (۱۶) در معادلات (۱۰)، متغیرهای $\tilde{\psi}_1$ و $\tilde{\psi}_2$ بصورت معادلات (۱۹) بیان می‌شوند.

$$\tilde{\psi}_1 = C_1 W_{1,1} + C_2 W_{2,1} + C_3 W_{3,1} + W_{4,2} \qquad (۱۹\text{-الف})$$

$$\tilde{\psi}_2 = C_1 W_{1,2} + C_2 W_{2,2} + C_3 W_{3,2} - W_{4,1} \qquad (۱۹\text{-ب})$$

که در آن روابط زیر برقرارند:

$$C_i = \frac{2\tau^2\left(2\beta^2\tau^2 - B_i + 2\alpha_i^4\beta^2\xi^2\tau^2 - 24\alpha_i^2 - 504(\upsilon-1)/\tau^2\right)}{\left(6\upsilon\left(168 + 17\alpha_i^2\tau^2\left(-6+\beta^2\xi^2\tau^2\right)\right) - 1008 + 17\beta^2\tau^4\right)}$$

$$B_i = \frac{17(1+\upsilon)}{1344(\upsilon-1)}\Big[1020\beta^2\tau^4 + \alpha_i^4\tau^2\left(-12+\beta^2\xi^2\tau^2\right)$$
$$+\alpha_i^2\left(4032(\upsilon-1) + 1020\tau^2\beta^2\xi^2 + \beta^2\tau^4\right)\Big]$$

و i=1,2,3. هم‌چنین:

$$\nabla^2 W_4 + \alpha_4^2 W_4 = 0; \qquad \alpha_4^2 = \frac{17\beta^2\tau^4 - 1008(1-\upsilon)}{102(1-\upsilon)\tau^2} \qquad (۲۰)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، یک مجموعه جواب برای معادلات (۱۶) و (۱۹) به صورت معادلات (۲۱) بدست می‌آید.

$$W_1 = [A_1\mathrm{Sinh}(\xi_1 X_2) + A_2\mathrm{Cosh}(\xi_1 X_2)]\times\mathrm{Sin}(\theta_1 X_1)$$
$$+[B_1\mathrm{Sinh}(\xi_1 X_2) + B_2\mathrm{Cosh}(\xi_1 X_2)]\times\mathrm{Cos}(\theta_1 X_1);$$
$$W_2 = [A_3\mathrm{Sinh}(\xi_2 X_2) + A_4\mathrm{Cosh}(\xi_2 X_2)]\times\mathrm{Sin}(\theta_2 X_1)$$
$$+[B_3\mathrm{Sinh}(\xi_2 X_2) + B_4\mathrm{Cosh}(\xi_2 X_2)]\times\mathrm{Cos}(\theta_2 X_1);$$
$$W_3 = [A_5\mathrm{Sin}(\xi_3 X_2) + A_6\mathrm{Cos}(\xi_3 X_2)]\mathrm{Sin}(\theta_3 X_1)$$
$$+[B_5\mathrm{Sin}(\xi_3 X_2) + B_6\mathrm{Cos}(\xi_3 X_2)]\mathrm{Cos}(\theta_3 X_1);$$
$$W_4 = [A_7\mathrm{Sinh}(\xi_4 X_2) + A_8\mathrm{Cosh}(\xi_4 X_2)]\times\mathrm{Sin}(\theta_4 X_1)$$
$$+[B_7\mathrm{Sinh}(\xi_4 X_2) + B_8\mathrm{Cosh}(\xi_4 X_2)]\times\mathrm{Cos}(\theta_4 X_1); \qquad (۲۱)$$

که:

$$\alpha_1^2 = \xi_1^2 + \theta_1^2; \xi_1^2 < 0, \theta_1^2 > 0 \qquad \alpha_2^2 = \xi_2^2 + \theta_2^2; \xi_2^2 < 0, \theta_2^2 > 0$$
$$\alpha_3^2 = \xi_3^2 + \theta_3^2; \xi_3^2 < 0, \theta_3^2 > 0 \qquad \alpha_4^2 = \xi_4^2 + \theta_4^2; \xi_4^2 < 0, \theta_4^2 > 0$$

بر اساس تئوری مرتبه سوم برشی غیرمحلی صفحات، شرایط مرزی را می‌توان برای یک لبه، به عنوان مثال برای محور x_1، به صورت معادلات بدون بعد (۲۲) به دست آورد:

- ساده

$$\tilde{w} = 0,\ \tilde{\psi}_1 = 0,\ \tilde{M}_2 = 0,\ \tilde{P}_2 = 0 \qquad (۲۲\text{-الف})$$

- گیردار

$$\tilde{w} = 0,\ \tilde{\psi}_1 = 0,\ \tilde{w}_{,2} = 0,\ \tilde{\psi}_2 = 0 \qquad (۲۲\text{-ب})$$

- آزاد

$$\tilde{M}_2 = 0;\ \ \tilde{P}_2 = 0;\ \ \tilde{M}_6 - \frac{4}{3}\tilde{P}_6 = 0;$$

$$\tilde{Q}_2 - 4\tilde{R}_2 + \frac{8\tau^2}{3(1-v)}\left(\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial x_2}\right) + \frac{8\tau^2}{3}\frac{\partial\tilde{p}_6}{\partial x_1} + \frac{\beta^2\tau^4}{6(1-v)}$$
$$+\left(\frac{4}{315}\tilde{\psi}_2 - \frac{1}{252}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_2}\right) = 0 \qquad (۲۲\text{-ج})$$

در روابط (۲۲)، رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\tilde{M}_1 = \frac{aM_1}{12D};\ \tilde{M}_2 = \frac{aM_2}{12D};\ \tilde{M}_6 = \frac{aM_6}{Gh^3};\ \tilde{Q}_1 = \frac{Q_1}{Gh};\ \tilde{Q}_2 = \frac{Q_2}{Gh}$$

$$\tilde{P}_1 = \frac{aP_1}{12h^2D^1};\ \tilde{P}_2 = \frac{aP_2}{12h^2D};\ \tilde{P}_6 = \frac{aP_6}{Gh^5};\ \tilde{R}_1 = \frac{R_1}{Gh^3};\ \tilde{R}_2 = \frac{R_2}{Gh^3}$$

$G = E/2(1+\upsilon)$ مدول برشی است.

۲-۵- حل نوع لوی

همان‌طور که پیشتر بیان شد اگر دو لبه مقابل در یک صفحه، دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده باشند، صفحه از نوع لوی نامیده می‌شود. با تغییر اندیس‌های ۱ و ۲ در معادلات (۲۱)، شرایط مرزی مختلف برای لبه‌های x_1=0 و x_1=1 به دست می‌آید.

با توجه به شکل ۱، که شرایط مرزی نانو صفحه در راستای x_1=0 وx_1=1 به صورت ساده در نظر گرفته شده است و اعمال آن بر معادلات ۲۱، روابط ساده شده (۲۳) بدست می‌آیند.

$$W_1 = [A_1\mathrm{Sinh}(\xi_1 X_2) + A_2\mathrm{Cosh}(\xi_1 X_2)]\times\mathrm{Sin}(\theta_1 X_1);$$
$$W_2 = [A_3\mathrm{Sinh}(\xi_2 X_2) + A_4\mathrm{Cosh}(\xi_2 X_2)]\times\mathrm{Sin}(\theta_2 X_1);$$
$$W_3 = [A_5\mathrm{Sin}(\xi_3 X_2) + A_6\mathrm{Cos}(\xi_3 X_2)]\times\mathrm{Sin}(\theta_3 X_1);$$
$$W_4 = [A_7\mathrm{Sinh}(\xi_4 X_2) + A_8\mathrm{Cosh}(\xi_4 X_2)]\times\mathrm{Sin}(\theta_4 X_1);$$
$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = m\pi; \qquad m = 1,2,3,\ldots \qquad (۲۳)$$

با جایگذاری روابط (۲۳) در سه شرط مرزی (روابط ۲۲) در امتداد لبه‌های x_2=0 و x_2=η دترمینان مشخصه مرتبه هشت به ازای هر m بدست می‌آید. پس از بسط و ساده‌سازی دترمینان ضرایب، فرم تحلیلی معادلات مشخصه برای هر یک از شرایط مرزی به صراحت به دست می‌آید.

۳- تحلیل نتایج

از آنجا که روش مورد استفاده در این مقاله یک روش تحلیلی دقیق می‌باشد، محاسبه دقیق فرکانس طبیعی نانو صفحات مستطیلی لوی با شرایط مرزی مختلف، آزاد (F)، ساده (S) و گیردار (C) به آسانی امکان‌پذیر است. در این بخش، نتایج به ازای مقادیر مختلف نسبت ابعاد (a/b)، نسبت ضخامت به طول (h/L) و پارامتر غیر محلی (μ) و بصورت فرکانس طبیعی بی‌بعد و نسبت فرکانس طبیعی ارائه شده‌اند. پارامتر فرکانس بدون بعد به صورت $\beta = \omega a^2\sqrt{\rho h/D}$ و نسبت فرکانس طبیعی توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\text{نسبت فرکانس}(FR)=\frac{\text{پارامتر فرکانس غیرمحلی}}{\text{پارامتر فرکانس محلی}}=\frac{\beta^{\mathrm{nl}}}{\beta^{\mathrm{cl}}}$$

برای اختصار و به عنوان مثال، SCSF نشان دهنده نانو صفحه‌ای است که لبه‌های $x_2=x_1=0$، $x_1=a$ و $x_1=b$ آن به ترتیب دارای شرایط مرزی ساده، گیردار، ساده و آزاد می‌باشد.

۳-۱- اعتبارسنجی نتایج

در این بخش، به منظور تأیید نتایج بدست آمده از روش حل دقیق، نتایج حاضر با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. همان‌طور که پیشتر در مقدمه ذکر شد، مراجع کمی برای تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات نانو بر اساس تئوری‌های مختلف صفحه وجود دارد. اشاره به این نکته نیز ضروری است که در بسیاری از این منابع به تحلیل صفحات نانو با شرایط مرزی ناویر که در آن تمام لبه‌ها دارای شرایط مرزی ساده می‌باشند توجه شده است، در حالی که در تعداد کمی از موارد، ترکیبی از شرایط مرزی گیردار و ساده مشاهده شده است.

پارامترهای فرکانس و نسبت فرکانسی نانو صفحه مربعی با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، در جداول ۱ و ۲ به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی، نسبت ابعاد (a/b=۰/۵، ۱/۰) و نسبت ضخامت به طول (h/a=۰/۱۰، ۰/۰۵) داده شده است. باید توجه داشت که نتایج گزارش شده در مراجع [۳۲،۲۴،۱۹] توسط حل ناویر یک نانو صفحه و به ترتیب مبتنی بر روش‌ها و تئوری‌های مرتبه سوم برشی، دی.کیو.ام و گالرکین بدست آمده است. از جداول ۱ و ۲ مطابقت بسیار خوبی را می‌توان بین نتایج بدست آمده با روش حل دقیق و نتایج گزارش شده در مراجع [۳۲،۲۴،۱۹] مشاهده نمود. از جداول فوق، به نکات زیر می‌توان اشاره نمود:

الف) برای تمام مقادیر نسبت ضخامت به طول (h/a)، نسبت ابعاد (b/a) و پارامتر غیرمحلی، نتایج به دست آمده توسط حل دقیق ارائه شده بر مبنای تئوری مرتبه سوم برشی، کمتر از مقادیر به دست آمده توسط حل ناویر تئوری مرتبه سوم برشی [۱۹] می‌باشد (جدول ۱).

ب) نتایج دقیق بدست آمده بر مبنای تئوری مرتبه سوم برشی، کمتر از مقادیر گزارش شده توسط مرجع [۲۴] (روش دی.کیو.ام) (جدول ۲) و مرجع [۳۲] (روش گالرکین) (جدول ۲) به ترتیب به ازای تمام مقادیر پارامتر غیرمحلی و به ازای پارامتر غیرمحلی با مقادیر کوچک‌تر می‌باشد. از طرفی، به ازای پارامتر غیرمحلی با مقادیر بیشتر، نتایج دقیق ارائه شده با نتایج روش گالرکین (جدول ۲) یکسان هستند.

۳-۲- نتایج معیار

پس از تایید صحت و دقت بالای حل دقیق ارائه شده، نتایج جدید زیر برای تحلیل ارتعاشات آزاد نانو صفحات ضخیم مستطیل شکل نوع لوی را می‌توان به عنوان یک معیار برای تحقیقات آینده مورد استفاده قرار داد.

در شکل ۲، تغییرات نسبت فرکانسی با پارامتر غیرمحلی برای شرایط مرزی مختلف نانوصفحه رسم شده است. از شکل ۲ مشخص است که پارامتر غیرمحلی، اثری کاهشی بر روی نسبت فرکانسی دارد و این بدان معنی است که اثرات غیرمحلی، سازه‌ها را انعطاف‌پذیرتر می‌کنند. از طرفی این اثر کاهشی، برای نانوصفحه‌هایی که دارای شرایط مرزی مقیدتر باشند بیشتر است. به عبارت دیگر، کمترین و بیشترین اثر کاهشی پارامتر غیرمحلی، به ترتیب برای نانوصفحه با شرایط مرزی SFSF و SCSC می‌باشد.

در شکل ۳، تغییرات نسبت فرکانسی نانوصفحه دارای شرایط مرزی SCSC با پارامتر غیرمحلی بی‌بعد و به ازای مودهای مختلف رسم شده است. از شکل ۳ مشخص است که اثر کاهشی پارامتر غیرمحلی، در مودهای بالاتر بیشتر می‌شود و نرخ تاثیر آن با افزایش مود کاهش می‌یابد.

تغییرات نسبت فرکانسی با پارامتر غیرمحلی بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف نسبت ابعاد در شکل ۴ رسم شده است. از این شکل نیز مشخص است که با افزایش نسبت ابعاد، اثر کاهشی پارامتر غیرمحلی بر روی نسبت فرکانسی بیشتر می‌شود و نرخ تاثیر آن با افزایش نسبت ابعاد، کم‌تر می‌شود.

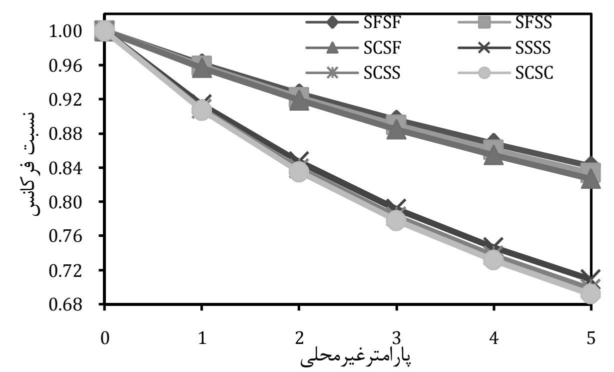
در شکل ۵، تغییرات نسبت فرکانسی نانوصفحه SCSC با نسبت ضخامت به طول و به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی بی‌بعد نشان داده شده است. از شکل ۵ می‌توان نتیجه‌گیری نمود که اثر پارامتر غیرمحلی روی نسبت فرکانسی، مستقل از نسبت ضخامت به طول (h/L) نانوصفحه می‌باشد.

جدول ۱ فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد ($\beta=\omega a^2\sqrt{\rho h/D}$) نانو صفحه SSSS (a=10(nm), E=30×10^6 (Pa), ν=0.3).

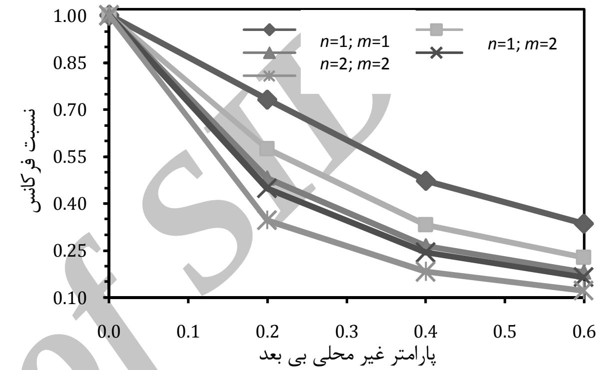
a/b	h/a	μ	روش حل	فرکانس	خطا (٪)
۱/۰	۰/۱۰	۰	ناویر [۱۹]	۱۹/۱۶۷۸	۰/۵۳
			دقیق	۱۹/۰۶۵۳	
		۱	ناویر [۱۹]	۱۷/۵۰۷۳	۰/۴۸
			دقیق	۱۷/۴۲۳۱	
		۲	ناویر [۱۹]	۱۶/۲۱۵۷	۰/۴۵
			دقیق	۱۶/۱۴۳۲	
		۳	ناویر [۱۹]	۱۵/۱۹۰۷	۰/۵۴
			دقیق	۱۵/۱۰۹۴	
	۰/۰۵	۰	ناویر [۱۹]	۱۹/۶۶۹۵	۰/۵۵
			دقیق	۱۹/۵۶۲۵	
		۱	ناویر [۱۹]	۱۷/۹۴۱۲	۰/۳۶
			دقیق	۱۷/۸۷۷۴	
		۲	ناویر [۱۹]	۱۶/۶۲۴۴	۰/۳۶
			دقیق	۱۶/۵۶۴۲	
		۳	ناویر [۱۹]	۱۵/۵۵۴۵	۰/۳۳
			دقیق	۱۵/۵۰۳۴	
۰/۵	۰/۱۰	۰	ناویر [۱۹]	۱۲/۱۱۵۷	۰/۴۰
			دقیق	۱۲/۰۶۷۵	
		۱	ناویر [۱۹]	۱۱/۴۱۸۷	۰/۳۰
			دقیق	۱۱/۳۸۵۶	
		۲	ناویر [۱۹]	۱۰/۸۴۴۷	۰/۳۰
			دقیق	۱۰/۸۰۷۶	
		۳	ناویر [۱۹]	۱۰/۳۵۲۶	۰/۴۲
			دقیق	۱۰/۳۰۹۵	
	۰/۰۵	۰	ناویر [۱۹]	۱۲/۳۴۴۵	۰/۶۳
			دقیق	۱۲/۲۶۷۵	
		۱	ناویر [۱۹]	۱۱/۶۰۴۲	۰/۲۶
			دقیق	۱۱/۵۷۴۳	
		۲	ناویر [۱۹]	۱۱/۰۲۸۱	۰/۳۸
			دقیق	۱۰/۹۸۶۷	
		۳	ناویر [۱۹]	۱۰/۵۳۴۳	۰/۵۳
			دقیق	۱۰/۴۸۰۴	

جدول ۲ نسبت فرکانس صفحه نانو *SSSS* برای پارامترهای غیرمحلی مختلف.

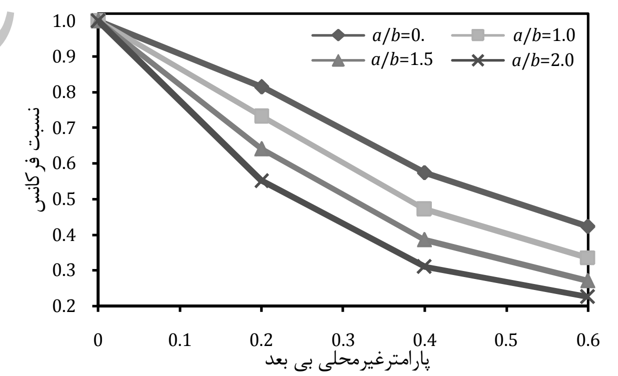
μ (nm)^2	دی.کیو.ام [۲۴]	گالرکین [۳۲]	دقیق
۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
۱	۰/۹۱۳۹	۰/۹۱۳۹	۰/۹۱۳۸
۲	۰/۸۴۶۸	۰/۸۴۶۷	۰/۸۴۶۷
۳	۰/۷۹۲۶	۰/۷۹۲۵	۰/۷۹۲۵



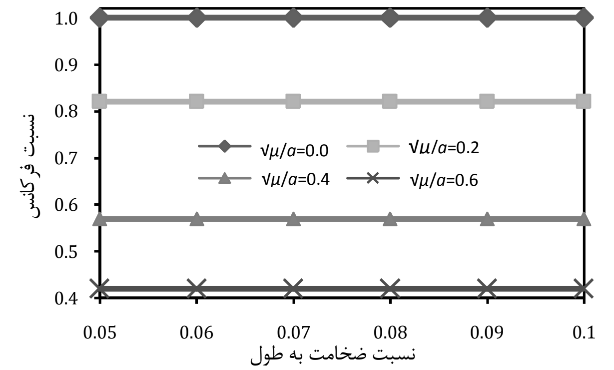
شکل ۲ تغییرات نسبت فرکانسی با پارامتر غیرمحلی (μ) برای شرایط مرزی مختلف ($\eta = 1$ ،$\tau = 0.1$).



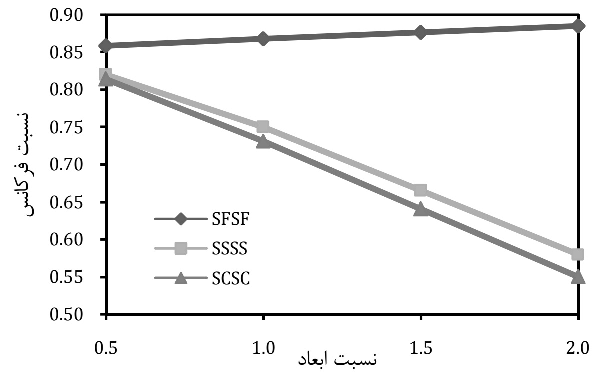
شکل ۳ تغییرات نسبت فرکانسی نانوصفحه SCSC با پارامتر غیرمحلی بی بعد $\sqrt{\mu}/a$ به ازای مودهای مختلف (η=1, τ=0.1).



شکل ۴ تغییرات نسبت فرکانسی نانوصفحه SCSC با پارامتر غیرمحلی بی بعد $\sqrt{\mu}/a$ به ازای نسبت ابعاد مختلف (τ=0.1)



شکل ۵ تغییرات نسبت فرکانسی نانوصفحه SCSC با نسبت ضخامت به طول (h/a) به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی بی‌بعد (η=1, m=1, n=1).



شکل ۶ تغییرات نسبت فرکانسی با نسبت ابعاد برای سه شرایط مرزی مختلف ($\sqrt{\mu}/a=0.2$,τ=0.1).

در انتها و در شکل ۶، تغییرات نسبت فرکانسی با نسبت ابعاد فقط برای سه شرط مرزی SSSS، SCSC و SFSF (به دلیل نزدیک بودن منحنی‌های SSSS، SCSC، SSSC، SSSF و SCSF) نشان داده شده است. از شکل ۶ می‌توان نتیجه‌گیری نمود که اثر کاهشی پارامتر غیرمحلی بر روی نسبت فرکانسی نانوصفحه با شرایط مرزی SSSS، SCSC (و هم‌چنین SSSC، SSSF و SCSF) با افزایش نسبت ابعاد بیشتر می‌شود در حالیکه اثر متفاوتی برای نانوصفحه با شرایط مرزی SFSF مشاهده می‌شود. برای نانوصفحه با شرایط مرزی SFSF، با افزایش نسبت ابعاد اثر کاهشی پارامتر غیرمحلی بر روی نسبت فرکانسی کاهش می‌یابد.

رفتاری که در شکل‌های ۲ تا ۶ مشاهده شده است را می‌توان این گونه تفسیر نمود که در نظر گرفتن اثر پارامتر غیرمحلی در معادلات حرکت یک سازه معادل است با در نظر گرفتن تأثیر نیروی بر هم کنش داخلی سازه بر رفتار استاتیکی و دینامیکی آن [۳۳]. حال، هر چه مقدار بیشتری برای پارامتر غیر محلی در نظر گرفته شود متعاقبا نیروی برهم کنش درونی بیشتری برای سازه درنظر گرفته شده و این عامل سبب کاهش بیشتر فرکانس طبیعی یا بارهای کمانشی بحرانی می‌شود. از طرفی، در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی سخت‌تر در حضور پارامتر غیرمحلی، به افزایش نیروی برهم کنش درونی کمک کرده که نتیجه آن نیز تاثیر کاهشی بیشتر بر روی فرکانس‌های طبیعی یا بارهای کمانشی می‌باشد. این رفتار در مودهای بالاتر ارتعاشی نیز صادق می‌باشد. نکته آخری که باید به آن اشاره نمود این است که اگر طول لبه‌هایی از سازه که شرط مرزی آزاد دارد نسبت به لبه‌هایی که شرط مرزی‌ای غیر از شرط مرزی آزاد دارد بزرگتر باشد مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی روند افزایشی داشته که این به دلیل کاهش نیروی برهم کنش درونی سازه می‌باشد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، اثرات مقیاس کوچک بر ارتعاشات آزاد صفحات مستطیلی نانو نوع لوی با استفاده از حل دقیق فرم بسته در چارچوب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم غیرمحلی صفحات مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان ساده‌ترین تقریب، یک ورق گرافن چند لایه را می‌توان با ضخامت و مدول یانگ معادل در نظر گرفت. بنابراین استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر صفحه، تئوری ردی، برای تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق گرافن چندلایه با خواص معادل منطقی بنظر می‌رسد. نتایج این پژوهش نشان داد که روش حل دقیق فرم بسته ارائه شده برای صفحات ماکرو، در حوزه نانو نیز معتبر می‌باشد. مشاهده شده است با افزایش نسبت ابعاد

نانوصفحه با شرایط مرزی SSSS، SCSC، SSSC، SFSC و SSSF، اثر کاهشی پارامتر غیر محلی روی نسبت فرکانسی افزایش می‌یابد در حالی که برای نانو صفحه با شرایط مرزی SFSF، پارامتر غیرمحلی اثری افزایشی بر نسبت فرکانسی دارد. از آنجا که نتایج ارائه شده در این مقاله دقیق می‌باشد این پژوهش می‌تواند مرجع مناسبی برای مقایسه نتایج سایر پژوهشگران که از روش‌های عددی و نیمه تحلیلی استفاده می‌نمایند باشد و بتوان از نتایج این مقاله در طراحی‌های نانوسازه‌ها با اطمینان بیشتری استفاده نمود.

۵- فهرست علایم

μ	پارامتر غیرمحلی (nm^2)
β	پارامتر فرکانس بی‌بعد
σ	تنش (Pa)
u	جابه‌جایی درون صفحه‌ای صفحه میانی در راستای x (m)
u_i	جابه‌جایی درون صفحه‌ای در راستای x(m)
v	جابه‌جایی درون صفحه‌ای صفحه میانی در راستای y (m)
$\bar{w}$	جابه‌جایی عرضی بی‌بعد در راستای z
w	جابه‌جایی عرضی در راستای z (m)
$\bar{\psi}_i$	چرخش بی‌بعد نسبت به صفحه میانی
ψ_i	چرخش نسبت به صفحه میانی
t	زمان (s)
D	سختی خمشی نانوورق ($Pa.m^3$)
h	ضخامت نانوورق (m)
υ	ضریب پواسون
ζ	ضریب غیرمحلی بی‌بعد
b	عرض نانوورق راستای y (m)
∇^2	عملگر لاپلاسین
ε	کرنش
W	متغیرهای کمکی بر حسب جابجایی بی‌بعد
X_i	مختصات بی‌بعد دستگاه کارتزین
x_i	مختصات دستگاه کارتزین
E	مدول الاستیسیته (Pa)
G	مدول برشی الاستیسیته (Pa)
τ	نسبت ضخامت به طول
η	نسبت طول به عرض

۶- مراجع

[1] A. K. Geim, K. S. Novoselov, The rise of graphene, *Nature materials,* Vol. 6, No. 3, pp. 183-191, 2007.

[2] A. C. Neto, F. Guinea, N. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, The electronic properties of graphene, *Reviews of modern physics,* Vol. 81, No. 1, pp. 109, 2009.

[3] Q. Lu, M. Arroyo, R. Huang, Elastic bending modulus of monolayer graphene, *Journal of Physics D: Applied Physics,* Vol. 42, No. 10, pp. 102002, 2009.

[4] R. Nair, P. Blake, A. Grigorenko, K. Novoselov, T. Booth, T. Stauber, N. Peres, A. Geim, Fine structure constant defines visual transparency of graphene, *Science,* Vol. 320, No. 5881, pp. 1308-1308, 2008.

[5] A. A. Balandin, S. Ghosh, W. Bao, I. Calizo, D. Teweldebrhan, F. Miao, C. N. Lau, Superior thermal conductivity of single-layer graphene, *Nano letters,* Vol. 8, No. 3, pp. 902-907, 2008.

[6] C. Lee, X. Wei, J. W. Kysar, J. Hone, Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene, *Science,* Vol. 321, No. 5887, pp. 385-388, 2008.

[7] Y.-M. Lin, C. Dimitrakopoulos, K. A. Jenkins, D. B. Farmer, H.-Y. Chiu, A. Grill, P. Avouris, 100-GHz transistors from wafer-scale epitaxial graphene, *Science,* Vol. 327, No. 5966, pp. 662-662, 2010.

[8] X. Miao, S. Tongay, M. K. Petterson, K. Berke, A. G. Rinzler, B. R. Appleton, A. F. Hebard, High efficiency graphene solar cells by chemical doping, *Nano letters,* Vol. 12, No. 6, pp. 2745-2750, 2012.

[9] I. Frank, D. M. Tanenbaum, A. Van der Zande, P. L. McEuen, Mechanical properties of suspended graphene sheets, *Journal of Vacuum Science & Technology B,* Vol. 25, No. 6, pp. 2558-2561, 2007.

[10] E. Yoo, J. Kim, E. Hosono, H.-s. Zhou, T. Kudo, I. Honma, Large reversible Li storage of graphene nanosheet families for use in rechargeable lithium ion batteries, *Nano letters,* Vol. 8, No. 8, pp. 2277-2282, 2008.

[11] R. Ansari, B. Arash, H. Rouhi, Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets with different boundary conditions via nonlocal elasticity, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 9, pp. 2419-2429, 2011.

[12] K. Behfar, R. Naghdabadi, Nanoscale vibrational analysis of a multi-layered graphene sheet embedded in an elastic medium, *Composites Science and Technology,* Vol. 65, No. 7, pp. 1159-1164, 2005.

[13] Y. Chandra, R. Chowdhury, F. Scarpa, S. Adhikaricor, Vibrational characteristics of bilayer graphene sheets, *Thin Solid Films,* Vol. 519, No. 18, pp. 6026-6032, 2011.

[14] X. He, S. Kitipornchai, K. Liew, Resonance analysis of multi-layered graphene sheets used as nanoscale resonators, *Nanotechnology,* Vol. 16, No. 10, pp. 2086, 2005.

[15] Y. Liu, Z. Xu, Q. Zheng, The interlayer shear effect on graphene multilayer resonators, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* Vol. 59, No. 8, pp. 1613-1622, 2011.

[16] A. C. Eringen, *Nonlocal continuum field theories*: Springer Verlag, 2002.

[17] A. C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 10, No. 3, pp. 233-248, 1972.

[18] R. Ansari, R. Rajabiehfard, B. Arash, Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets, *Computational Materials Science,* Vol. 49, No. 4, pp. 831-838, 2010.

[19] R. Aghababaei, J. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 326, No. 1, pp. 277-289, 2009.

[20] S. Pradhan, Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory, *Physics Letters A,* Vol. 373, No. 45, pp. 4182-4188, 2009.

[21] R. Ansari, R. Gholami, K. Hosseini, S. Sahmani, A sixth-order compact finite difference method for vibrational analysis of nanobeams embedded in an elastic medium based on nonlocal beam theory, *Mathematical and Computer Modelling,* Vol. 54, No. 11, pp. 2577-2586, 2011.

[22] Z.-B. Shen, H.-L. Tang, D.-K. Li, G.-J. Tang, Vibration of single-layered graphene sheet-based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory, *Computational Materials Science,* Vol. 61, pp. 200-205, 2012.

[23] R. Ansari, S. Sahmani, B. Arash, Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets, *Physics Letters A,* Vol. 375, No. 1, pp. 53-62, 2010.

[24] S. Pradhan, A. Kumar, Vibration analysis of orthotropic graphene sheets embedded in Pasternak elastic medium using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method, *Computational Materials Science,* Vol. 50, No. 1, pp. 239-245, 2010.

[25] T. Aksencer, M. Aydogdu, Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory, *Physica E,* Vol. 43, No. 4, pp. 954-959, 2011.

[26] M. Bedroud, Sh. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, Axisymmetric/Asymmetric buckling of circular/annular nanoplates via nonlocal elasticity, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 5, pp. 144-152, 2013. (In Persian)

[27] Sh. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, H. Rokni Damavandi Taher, Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 35, No. 2, pp. 708-727, 2011.

[28] M. Kermajani, Sh. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, Sh. Amirabdollahian, Exact solutions for buckling of rectangular nanoplates via nonlocal third-order plate theory, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. In Press, 2013. (In Persian)

[29] B. Arash, R. Ansari, Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain, *Physica E,* Vol. 42, No. 8, pp. 2058-2064, 2010.

[30] W. Duan, C. Wang, Y. Zhang, Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics, *Journal of Applied Physics,* Vol. 101, No. 2, pp. 024305-024305-7, 2007.

[31] Q. Wang, C. Wang, The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes, *Nanotechnology,* Vol. 18, No. 7, pp. 075702, 2007.

[32] P. Lu, P. Zhang, H. Lee, C. Wang, J. Reddy, Non-local elastic plate theories, *Proceedings the Royal of Society A,* Vol. 463, No. 2088, pp. 3225-3240, 2007.

[33] K. Wang, B. Wang, Vibration of nanoscale plates with surface energy via nonlocal elasticity, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 44, No. 2, pp. 448-453, 2011.