



مدل سازی المان گسسته و تعیین تأثیر پارامترهای مختلف بر عملکرد سرنده

اکبر جعفری^{1*}، وحید سلجوقی نژاد²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان
* سیرجان، کد پستی 7813733385، jafari@sirjantech.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 17 دی 1392

پذیرش: 16 فروردین 1393

ارائه در سایت: 30 شهریور 1393

کلید واژگان:

سرنده

مواد دانه‌ای

گندله

المان گسسته

دینامیک مولکولی

در این تحقیق، فرایند غربال مواد دانه‌ای که توسط سرنده ارتعاشی انجام می‌شود، با روش المان گسسته یا به بیانی دیگر دینامیک مولکولی شبیه‌سازی شده است. برای مدل‌سازی نیروی بین ذرات و مرزها، تابع پتانسیل کوتاه برد ویسکوالاستیک هرتز استفاده شده است. ذرات مورد غربال دارای هندسه کروی بوده و روزه‌های توری سرنده به شکل مربع مستطیل هستند و به سطح توری ارتعاش خطی اعمال شده است. طی شبیه‌سازی، معادلات دیفرانسیل حرکت ذرات بصورت عددی حل شده و رفتار آنها پیش‌بینی می‌شود. برنامه‌های کامپیوتری لازم جهت اجرا در نرم‌افزاری منبع باز تهیه و متغیرهای موثر در حل عددی تنظیم و مقادیر مطلوب انتخاب شده‌اند. با اجرای تعداد زیادی شبیه‌سازی، اثر پارامترهای مختلفی از جمله شیب توری، فرکانس ارتعاش، زاویه ارتعاش و سایز روزه‌های توری بر بازده سرنده مورد مطالعه عددی قرار گرفته و نتایج مربوطه در قالب نمودار گزارش شده‌اند. نتایج حاصل با گزارش‌های منتشر شده در مرجع‌های مرتبط مورد مقایسه کمی و کیفی قرار گرفته و اعتبار و صحت نتایج تأیید گردیده است. هر چند راهکار تحقیق جاری عمومیت داشته و به یک مسأله خاص محدود نیست، با این حال برای انتخاب برخی مقادیر عددی از اطلاعات یک مسأله واقعی سرنده گندله آهن مربوط به کارخانه گندله‌سازی گل‌گهر سیرجان استفاده شده است.

Discrete element method to study the impact of different parameters on the screen performance

Akbar Jafari*, Vahid Saljooghinezhad

Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran
* P.O.B. 7813733385, Sirjan, Iran, jafari@sirjantech.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 January 2014
Accepted 05 April 2014
Available Online 21 September 2014

Keywords:
Screen
Granular Medium
Pellet
Discrete Element
Molecular Dynamic

ABSTRACT

In this research, Discrete Element Method (DEM) or in other words, Molecular Dynamics (MD) is employed for simulation of sorting process of granular materials which is done by means of a linear vibrating screen device. To model the interaction forces between the particles and walls, short range viscoelastic Hertz potential has been used. Spherical and rectangular shapes were considered for the particles and the screen mesh apertures respectively; and a linear vibration is applied to the mesh surface. During the simulation, differential governing equations of the granules motions are solved numerically to predict their behavior. The required programs were developed to perform the simulations using the open source code, LIGGGHTS; and the factors affecting numerical computations were tuned to obtain suitable values. Numerous simulations were done to study the effects of different parameters including mesh inclination, vibration frequency, vibration angle and apertures' size on the sorting performance; and the correlations are reported graphically. The obtained results are verified by comparison with the adequate ones reported in open literature. Although the current research is not limited to a special case, some data related to the characteristics of iron pellet and the screen device in Gol-e-Gohar pellet factory are employed for numerical studies.

1- مقدمه

جداسازی گندله آهن در اندازه‌های مختلف جهت تغذیه ادامه خط تولید آهن، درجه‌بندی محصولات غذایی و کشاورزی، درجه بندی محصولات پتروشیمی و بسیاری از موارد دیگر استفاده می‌شود. همان‌گونه که در شکل 1 نشان داده شده است، هر کدام از ذرات موجود در مجموعه ریخته شده روی سطح توری سرنده مسیر خاص خود را طی می‌کند. این مسیر می‌تواند نهایتاً منجر به عبور از روزه‌ها شود که تحت عنوان ته ریز¹

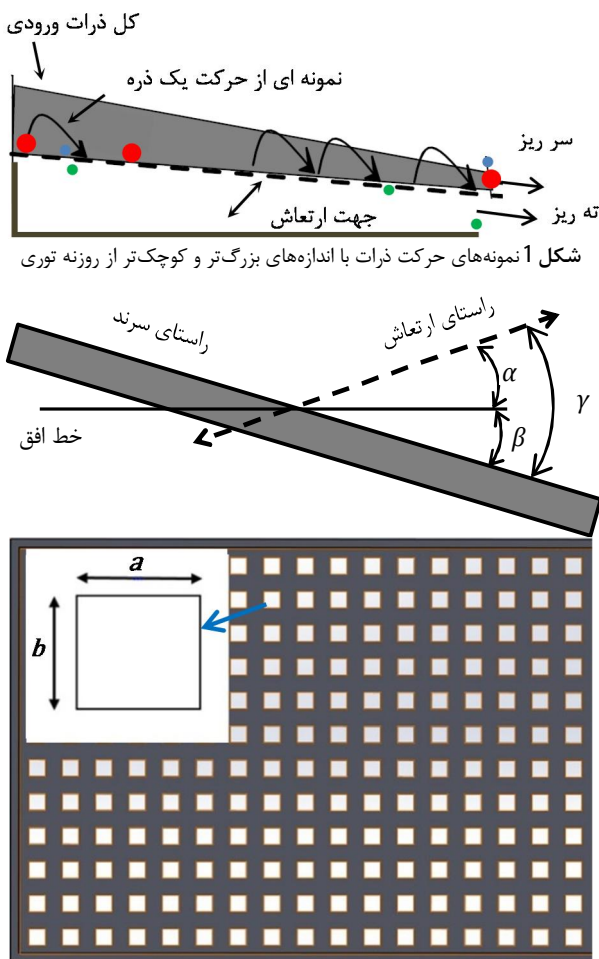
به دلیل اهمیت پدیده‌های مرتبط با مواد دانه‌ای، شناسایی رفتار آنها، شناخت فرایندها و همچنین عملکرد تجهیزات مرتبط با این نوع مواد مورد توجه صنایع مختلف می‌باشد و امروزه پژوهشگران با ابزارهای گوناگونی به مطالعه این قبیل مواد و فرایندهای مرتبط می‌پردازند. در میان تجهیزات صنعتی که با مواد دانه‌ای در ارتباط هستند، سرندها جایگاه ویژه‌ای داشته و در بسیاری از حوزه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، از این تجهیز برای

1- Underflow

سرد بر بازده آن را بصورت عددی مطالعه کرده و نشان دادند که در فرکانس‌های خیلی بالا بازده تقریباً متناسب با فرکانس تغییر می‌کند و در فرکانس‌های بسیار پایین، طول سرد تأثیر چندانی بر بازده آن ندارد [8]. بطور خلاصه آن‌ها پیش‌بینی کردند که رابطه بین کارایی و طول تقریباً نمایی بوده به‌گونه‌ای که هر چه طول افزایش یابد بازده افزایش یافته ولی به تدریج آثار مثبت آن تقلیل می‌یابد و نامحسوس می‌شود. لالا و همکاران با شبیه‌سازی المان گسسته سردی با ارتعاش دورانی، تأثیر دامنه ارتعاش و شیب سرد را بر روی عملکرد آن مطالعه کرده و به این نتیجه رسیدند که با افزایش شیب سرد بازده کاهش می‌یابد [9]. یو و دنگ به شبیه‌سازی جریان مواد دانه‌ای روی سرد به روش المان گسسته پرداخته و تأثیر مولفه‌های ارتعاشات در راستای افقی و عمودی بر عملکرد سرد را بررسی نمودند [10]. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که میزان ذرات عبوری از سرد با کاهش فرکانس ارتعاشات افزایش می‌یابد. زین و جیانگ با بررسی یک سرد با ارتعاش خطی به روش المان گسسته، وابستگی نرخ عبور ذرات بر حسب اندازه روزنه‌ها، قطر سیم‌ها و شیب توری سرد را جستجو نمودند [11].

2- تعریف مسأله

سیستم سرد مورد مطالعه تحقیق جاری، وظیفه تفکیک گندله کروی آهن به سازه‌های مختلف را به عهده دارد. این سرد دارای حرکت ارتعاشی خطی است که به واسطه دوران محور لنگر با وزنه‌های خارج از مرکز قابل تنظیم، تحریک می‌شود.



شکل 1 نمونه‌های حرکت ذرات با اندازه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر از روزنه توری سرد

شناخته می‌شود یا این که اجازه عبور از روزنه‌ها را پیدا نکرده و به عنوان سرریز¹ از انتهای سرد خارج می‌شود. تاریخچه مسیر و چگونگی حرکت هر ذره به اندازه و جنس آن و همچنین اثر برخورد با سطوح و برخورد با سایر ذرات بستگی دارد. همان‌گونه که در شکل 1 بصورت شماتیک ترسیم شده، علاوه بر دینامیک ذرات ناشی از وزن و برخورد، حرکت اجباری سطوح از جمله ارتعاش سطح توری نیز در حرکت ذرات مؤثر است. ملاحظه می‌شود که ذرات بزرگ‌تر از اندازه روزنه‌های توری از انتهای سرد بصورت سرریز خارج می‌شوند. در عین حال، بر خلاف انتظار، ذراتی که دارای اندازه‌های کوچک‌تر از روزنه‌ها هستند نیز می‌توانند همراه سرریز خارج شوند. چنین اتفاقی باعث می‌شود که ساینده‌ی بطور دقیق صورت نپذیرفته و کاهش کارایی فرایند را به دنبال دارد. حال این سوال مطرح می‌شود که کارایی سرد به چه پارامترهایی وابسته است و آیا امکان پیش‌بینی آن وجود دارد؟

با توجه به پر هزینه بودن و مشکلات اجرایی روش‌های مطالعه تجربی، استفاده از رویکردهای تئوری در تحلیل چنین مسائلی گریزناپذیر به نظر می‌رسد. از طرفی به علت تعداد زیاد ذرات و پیچیدگی محاسبات، روش‌های تحلیلی چندان کارگشا نبوده و بکارگیری روش‌های عددی ابزار جایگزین مناسبی برای این منظور محسوب می‌شوند. در این راستا، روش المان گسسته یا به بیانی دیگر دینامیک مولکولی که بر پایه حل عددی معادلات حرکت ذرات بنا شده قابل استفاده است و با استفاده از آن می‌توان رفتار مواد دانه‌ای را مدل‌سازی کرد در این تحقیق از آن استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که هر چند اساس عملکرد دینامیک مولکولی و المان گسسته یکسان است ولی عنوان المان گسسته معمولاً برای حالتی بکار برده می‌شود که نیروهای بین ذرات بصورت کوتاه برد و به ویژه ناشی از برخورد مستقیم باشند در حالی که عبارت دینامیک مولکولی برای حالت وجود نیروهای بلند برد مثل الکترواستاتیک مرسوم‌تر است. علی‌رغم اینها در بسیاری اوقات این دو عبارت با معنی یکسان تلقی و بکار برده می‌شوند.

گزارش استفاده از روش المان گسسته در تحلیل مواد دانه‌ای به اواخر دهه هفتاد میلادی بر می‌گردد [1] ولی توسعه بیشتر و کاربرد گسترده‌تر آن به ساخت کامپیوترهای پرسرعت وابسته بوده و اخیراً رشد سریع‌تری به خود گرفته است. در زمره تحقیقات با روش المان گسسته، لی و همکاران اثرات نرخ تغذیه و طول سرد را بر روی عملکرد مکانیکی با ارتعاش دورانی بررسی کردند [2]. چن و تنگ با استفاده از این روش، تأثیر طول سرد و فرکانس ارتعاش آن بر بازده را مورد مطالعه عددی قرار دادند [3]. بر اساس نتایج تحقیق مذکور، با افزایش فرکانس، بازده سرد کاهش می‌یابد. دونگ و همکاران سردی موزی شکل را با استفاده از روش المان گسسته مدل‌سازی نموده و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله دامنه و فرکانس ارتعاش، نوع ارتعاش و همچنین شیب سرد را بر روی نرخ سرریز، ته ریز و به بیانی دیگر کارایی سرد مورد مطالعه عددی قرار دادند [4]. بطور خلاصه بر اساس نتایج تحقیق یاد شده، بازده فرایند با کاهش فرکانس، دامنه و شیب سرد، افزایش می‌یابد و همچنین تحریک ارتعاش دورانی کارایی بهتری نسبت به تحریک خطی دارد. کلرلی و همکاران با اعمال روش المان گسسته به بررسی اثر شتاب بر روی انرژی جنبشی ذرات روی سرد موزی شکل پرداختند [6.5]. نتایج تحقیق چن و تنگ که به روش المان گسسته انجام شده نشان می‌دهد که رابطه بین فرکانس ارتعاش خطی و بازده سرد تقریباً بصورت نمایی می‌باشد [7]. گویفنگ و زین اثر دامنه، فرکانس، زاویه ارتعاش، شیب و طول

1- Overflow

در معادله (2)، \bar{F}_{ij} معرف نیروی وارده از سوی دانه j ام به دانه i ام است. البته این نیرو می تواند از طرف سطوح دیواره ها و توری نیز وارد شود. بعلاوه، نیروهای وارد شده باعث ایجاد گشتاور حول مرکز ذره شده و منجر به حرکت دورانی آن می شود که معادله حاکم بر آن به صورت رابطه (1-ب) است. در معادله مذکور، گشتاور \bar{M}_i برابر با مجموع تمام گشتاورهای وارد شده از همسایگان بوده و بصورت معادله (3) قابل بیان است.

$$\bar{M}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{M}_{ij} \quad (3)$$

اگر مقادیر نیروهای \bar{F}_{ij} و گشتاورهای \bar{M}_{ij} برای دانه های برخورد کننده به صورت تابعی از موقعیت های (\bar{r}_i, φ_i) و (\bar{r}_j, φ_j) آنها مشخص باشد می توان معادلات حرکت (1) را در یک گام زمانی به صورت عددی حل نمود. لازم به ذکر است که در ادامه همین بخش چگونگی مدل سازی و تعیین نیروی بین ذرات بیان می شود.

3-1- مدل دانه های کروی

رایج ترین مدل برای یک دانه در مواد دانه ای مدل کروی است که در این مقاله نیز از آن استفاده می شود. مدل کروی در شبیه سازی مجموعه ای از مواد دانه ای، ضمن سادگی، با واقعیت نیز سازگاری خوبی دارد. در شکل 3 دو دانه کروی با شعاع های R_i و R_j در حال نزدیک شدن به هم نشان داده شده است و پارامتر تغییر شکل به صورت معادله (4) تعریف می شود.

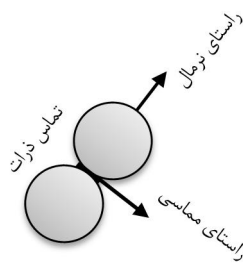
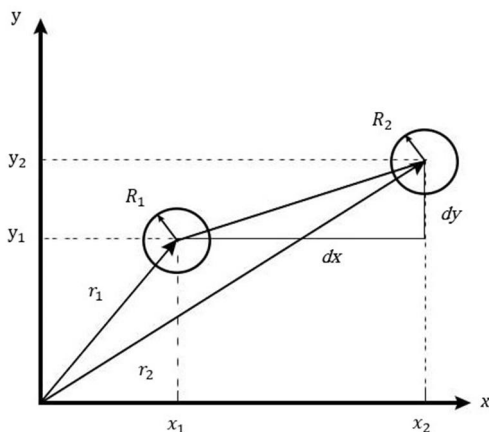
$$\xi_{ij} = R_i + R_j - |\bar{r}_i - \bar{r}_j| \quad (4)$$

همان طور که در شکل 3 دیده می شود پارامتر ξ_{ij} برای دو دانه i و j بصورت رابطه (5) تعیین می شود.

$$\xi_{ij} = R_i + R_j - \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (5)$$

بنابراین، شرط برخورد دو دانه کروی بصورت رابطه (6) است.

$$\xi_{ij} > 0 \quad (6)$$



شکل 3 هندسه موقعیت دو ذره کروی

طرز عملکرد این دستگاه به این صورت است که مخلوطی از دانه ها با اندازه های مختلف از بالای یک انتهای توری سرنده بر روی آن ریخته شده سپس تعدادی از دانه ها از روی سطح در انتهای توری سرنده بصورت سر ریز خارج شده و دانه های ریز بصورت ته ریز از توری عبور می کند. البته در یک سرنده چند طبقه، ذرات ته ریز هر طبقه به عنوان ورودی توری طبقه پایین تر وارد شده و فرایند غربال برای سایز بعدی تکرار می شود. در اینجا تأثیر پارامترهایی از قبیل فرکانس ارتعاش خطی سرنده (ω) ، زاویه راستای تحریک ارتعاشی (α) ، شیب سرنده (β) و همچنین اندازه روزنه های توری که در شکل 2 بصورت شماتیک نشان داده شده اند، بر روی نرخ سرریز و ته ریز یا به بیانی دیگر بازده سرنده مورد مطالعه قرار می گیرد.

3- مدل سازی و فرمول بندی

همان گونه که پیشتر در مقدمه بحث شد، از آنجا که سیستم های مولکولی و همچنین توده های دانه ای عموماً شامل تعداد زیادی از ذرات هستند امکان مدل سازی آن ها بطور تحلیلی وجود ندارد. لذا امروزه مدل سازی ها بر پایه تئوری های مکانیک مولکولی در اغلب شاخه های علوم و مهندسی از جمله مکانیک، معدن، شیمی، فیزیک، بیولوژی و نانوتکنولوژی مورد استفاده قرار می گیرد. دینامیک مولکولی شکلی از شبیه سازی کامپیوتری است که در آن اتم ها و مولکول ها اجازه دارند برای یک بازه زمانی تحت قوانین شناخته شده فیزیک با هم برهم کنش کنند و طی آن چشم اندازی از حرکت اتم ها فراهم می شود. این روش یک واسطه بین تجربیات آزمایشگاهی و نظریه ایجاد می کند و می تواند به عنوان یک آزمایش مجازی در نظر گرفته شود.

در مدل سازی دینامیک مولکولی، ابتدا سیستمی شامل N ذره در داخل جعبه ای به نام جعبه محاسبات در نظر گرفته می شود و شرایط اولیه شامل مکان و سرعت اولیه به ذرات اعمال می شود. با در اختیار داشتن پتانسیل نیرویی بین هر جفت ذره، این مدل از نظر ریاضی قابل حل است. بدین ترتیب که برای هر ذره، جمع نیروهای ناشی از سایر ذرات محاسبه شده و شکل دیفرانسیلی قانون دوم نیوتن برای آن اعمال می شود. برای N ذره موجود در سیستم تعداد $6N$ معادله دیفرانسیل معمولی شکل می گیرد که با تبدیل آنها به معادله های تفاضلی گسسته، مکان و سرعت همه ذرات در هر گام زمانی محاسبه می شود. با در اختیار داشتن مکان و سرعت ذرات در هر مرحله می توان بسیاری ویژگی های ماکروسکوپی سیستم را تعیین نمود.

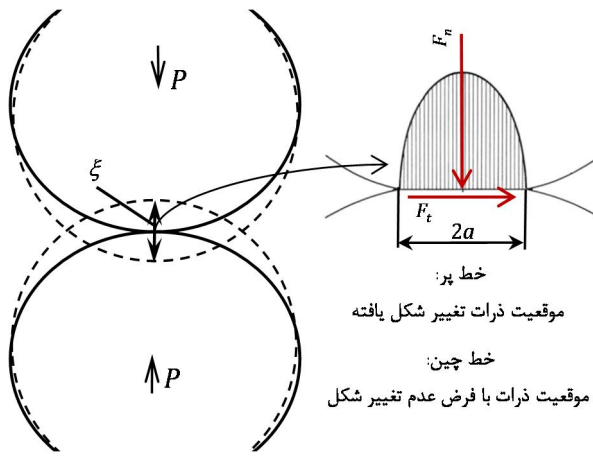
در مجموعه ای متشکل از N دانه با ابعاد و خواص معین فیزیکی حرکت انتقالی و دورانی دانه i ام توسط معادلات تعادل نیرو و گشتاور به صورت معادلات (1) بیان می شود.

$$\frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2} = \frac{1}{m_i} \bar{F}_i(\bar{r}_i, \bar{v}_i, \varphi_i, \omega_i), (i, j = 1, \dots, N) \quad (1-الف)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \frac{1}{J_i} \bar{M}_i(\bar{r}_i, \bar{v}_i, \varphi_i, \omega_i), (i, j = 1, \dots, N) \quad (1-ب)$$

در معادلات (1)، نیروی \bar{F}_i و گشتاور \bar{M}_i بر روی دانه i ام به جرم m_i و ممان اینرسی J_i وارد می شوند. نیروها و گشتاورها تابعی از موقعیت \bar{r}_i وضعیت زاویه ای φ_i ، سرعت خطی \bar{v}_i و سرعت زاویه ای ω_i دانه هستند. نیروی \bar{F}_i شامل تمام نیروهایی می شود که در نتیجه تماس بین دانه و همسایگان آن بوجود می آید و در نقطه تماس هر جفت ذره وارد می شود که نمایش ریاضی آن به صورت معادله (2) است.

$$\bar{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{F}_{ij} \quad (2)$$



شکل 4 چگونگی تغییر شکل اجسام در تماس

در معادلات (13) و (14)، E_i, E_j مدولهای یانگ و v_i, v_j ضرایب پواسن کره‌های برخورد کننده هستند. از طرفی، با استفاده از روابط هندسی، معادله (15) برای ارتباط بین میزان تداخل و لهیدگی بدست می‌آید.

$$a = (\xi R^*)^{1/2} \quad (15)$$

بدین ترتیب با مشخص بودن موقعیت مرکز ذرات، مقدار ξ از رابطه (5) بدست آمده و سپس با ترکیب روابط (15) و (12) نیروی ناشی از تغییر شکل الاستیک وارد بر ذرات بدست می‌آید که متناسب با $E^* (R^* \xi^3)^{1/2}$ می‌باشد. نیرویی که در بالا چگونگی محاسبه آن تشریح شد، صرفاً دارای منشأ رفتار الاستیک است در حالی که برخورد ذرات بطور کاملاً الاستیک نبوده و طی آن مقداری انرژی تلف می‌شود. این تلفات انرژی می‌تواند ناشی از رفتار ویسکوالاستیک یا ویسکوپلاستیک ذرات باشد که به نوعی بیانگر تغییر شکل و بازگشت با تأخیر یا عدم بازگشت است. طبق بیان ماکسول¹ رفتار ویسکوالاستیک را می‌توان با ترکیب سری یک فنر و دمپر مطابق شکل 5 مدل سازی کرد در حالی که بر اساس مدل وویت² از ترکیب موازی المان‌های مذکور استفاده می‌شود. همچنین رفتار بازگشت ناپذیری ناشی از اصطکاک کولومبی نیز می‌تواند در برخورد ذرات اتفاق بیفتد که بطور خاص در حرکت مماسی نسبی بین آنها رخ می‌دهد. در شکل 5 این نوع رفتار با سمبل لفظنده نشان داده شده است. لازم به ذکر است که نیروی ناشی از اثر ویسکوز به ضریب ویسکوزیته دمپر، η ، و نرخ تغییر شکل، $\dot{\xi}$ ، وابسته است که با توجه به نوع مدل می‌تواند خطی یا غیر خطی باشد.

بنابراین بطور خلاصه هر کدام از نیروهای نرمال و مماسی بین ذرات می‌توانند دارای ماهیت الاستیک، ویسکوز یا اصطکاکی کولومبی باشند. پیشتر در مورد نیروی الاستیک نرمال بحث شد لذا با فرض برگشت پذیر بودن تغییر شکل ذرات می‌توان از اثر تغییر شکل دائمی پلاستیک در مولفه نیروی نرمال صرف نظر کرد. با این اوصاف، با توجه به بروز سریع اثر الاستیک در برخورد ذرات، با انتخاب مدل وویت نیروی نرمال کل بین ذرات از مجموع نیروی الاستیک و نیروی ویسکوز بصورت رابطه (16) قابل محاسبه است [13].

$$F^n(\xi, \dot{\xi}) = \frac{4E^* \sqrt{R^*}}{3} \left(\xi^3 + \eta \sqrt{\xi \dot{\xi}} \right) \quad (16)$$

ترم دوم معادله (16) به ضریب میرایی درونی ماده، η ، بستگی دارد. با این حال می‌توان از تعریف ضریب بازگشت، $0 \leq e \leq 1$ ، استفاده و آن را به شکل ملموس تری بازنویسی کرد.

به عبارتی دیگر زمانی دو دانه کروی برخورد می‌کنند که تماس مکانیکی ایجاد شود یعنی مجموع شعاع‌های آنها از فاصله مراکز آن دو بیشتر شود. در این حالت نیروی بین دو دانه برخورد کننده بصورت رابطه (7) قابل بیان است.

$$\vec{F}_{ij} = \begin{cases} \vec{F}_{ij}^n + \vec{F}_{ij}^t & ; \xi_{ij} > 0 \\ 0 & ; \xi_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

در رابطه (7)، بالانویس‌های n و t به ترتیب نشانگر راستای نرمال و مماسی می‌باشند که در شکل 3 نشان داده شده است. مؤلفه‌های نرمال و مماسی نیروی بین ذرات بترتیب طبق روابط (8) و (9) قابل بیان می‌باشند.

$$\vec{F}_{ij}^n = F_{ij}^n \vec{e}_{ij}^n \quad (8)$$

$$\vec{F}_{ij}^t = F_{ij}^t \vec{e}_{ij}^t \quad (9)$$

در روابط (8) و (9)، بردار یک‌جه‌های نرمال و مماس بر سطح تماس بصورت روابط (10) و (11) تعریف می‌شوند.

$$\vec{e}_{ij}^n = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (10)$$

$$\vec{e}_{ij}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{e}_{ij}^n \quad (11)$$

برای ساده‌سازی نگارش متن، در ادامه از درج اندیس‌های ij صرف نظر می‌شود. نیروی عمودی F^n باعث تغییر در وضعیت انتقالی ذرات می‌شود و همان‌گونه که پیشتر نیز بیان شد، نیروی مماسی F^t علاوه بر موقعیت، گشتاوری حول مرکز هر ذره ایجاد کرده و در وضعیت دورانی آن تغییر بوجود می‌آورد.

3-2- نیروی بین ذرات

نیروی بین دو جسم که با هم برخورد می‌کنند تابعی از فاصله بین آنها یا به بیانی دیگر تغییر شکل آنها، سرعت نسبی برخورد، جرم و جنس اجسام است [12]. تئوری‌های مختلفی برای مدل سازی برخورد بین ذرات وجود دارد که مدل ویسکوالاستیک هرگز برای این منظور در اینجا در نظر گرفته می‌شود. در واقع این مدل یک پتانسیل نیرویی کوتاه برد است که فقط در صورت تماس فیزیکی ذرات دارای مقدار است. بر اساس این مدل، هر کدام از مؤلفه‌های نیرویی معرفی شده به جنس، میزان تغییر شکل اجسام و همچنین سرعت تغییر شکل بستگی دارند. مطابق شکل 4 در طی برخورد، اجسام دچار تغییر شکل شده و به هم نیرو وارد می‌کنند. بر اساس تئوری هرگز تابع توزیع فشار از منحنی سهمی پیروی می‌کند. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود میزان تداخل یا به بیانی دیگر لهیدگی برآیند برابر ξ بوده که در نتیجه اگر ذرات کروی باشند سطح تماس بصورت دایره ای به شعاع a در می‌آید. اگر دو ذره تحت نیروی P به همدیگر فشرده شوند، شعاع دایره لهیدگی از رابطه (12) بدست می‌آید [12].

$$P = \frac{4E^* a^3}{3R^*} \quad (12)$$

در این رابطه، R^* و E^* به ترتیب شعاع مؤثر و ضریب الاستیک مؤثر می‌باشند و طبق روابط (13) و (14) تعریف می‌شوند.

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-v_i^2}{E_i} + \frac{1-v_j^2}{E_j} \quad (13)$$

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \quad (14)$$

1- Maxwell
2- Voigt

بصورت رابطه (19) تعریف می شود.

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \quad (19)$$

K_n ضریب فنر الاستیک نرمال است که به تغییر شکل پذیری نرمال وابسته می باشد. البته معمولاً ضریب بازگشت با روش تجربی اندازه گیری شده و بر اساس آن می توان ضریب میرایی را محاسبه کرد. به عنوان یک واقعیت، در عمل ثابت شده که ضریب بازگشت علاوه بر جنس به سرعت برخورد نیز وابسته است [13] ولی در اینجا مقدار ثابتی برای آن در نظر گرفته می شود.

در رابطه با نیروی مماسی نیز می توان تفسیری مشابه نیروی نرمال ارائه کرد که در این صورت نیروی کل برابر مجموع نیروی الاستیک و غیر الاستیک می شود. اثر نیروی تلفاتی غیر قابل برگشت در این مؤلفه بیشتر از اثر الاستیک است چرا که حرکت مماسی به یک طرف انجام شده و بازگشت پذیر نیست. با این حال متناسب با شرایط ذرات و نقطه تماس آنها، این نیرو می تواند از نوع ویسکوز یا اصطکاک خشک باشد. با این اوصاف، نیروی مماسی غیر الاستیک بصورت رابطه (20) قابل بیان است که بر اساس مدل ویسکوپلاستیک نشان داده شده در شکل 5 می باشد [13].

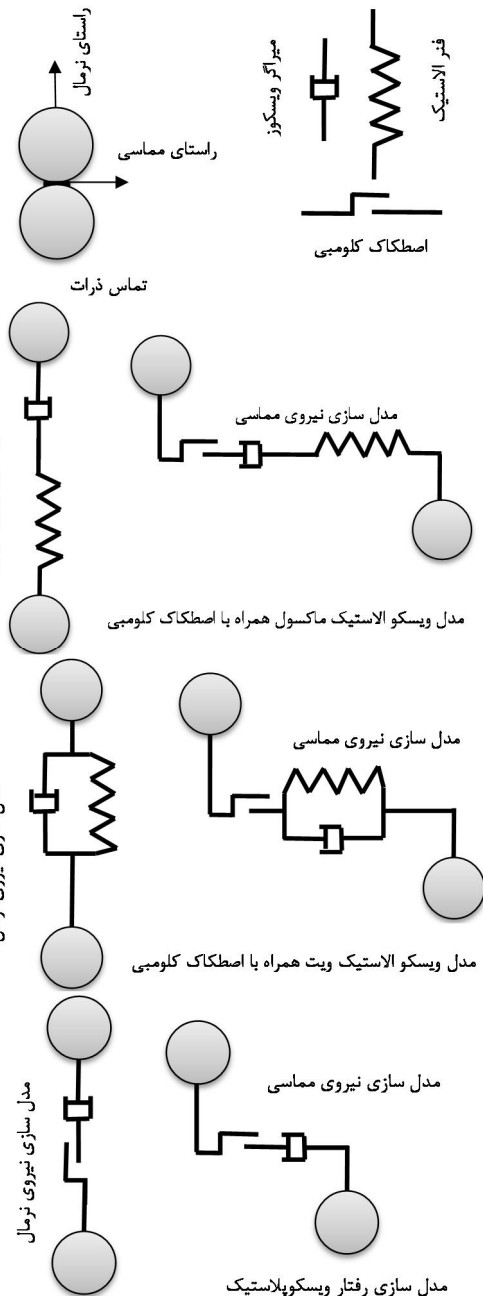
$$F^t = -\text{sign}(v_{rel}^t) \min(\gamma^t |v_{rel}^t|, \mu |F^n|) \quad (20)$$

در معادله (20)، v_{rel}^t مؤلفه مماسی سرعت نسبی، γ^t ضریب میرایی ویسکوز مماسی و μ ضریب اصطکاک کلومب است. همان گونه که در شکل 5 نشان داده شده است، نیروی فعال مماسی یکی از انواع ویسکوز یا اصطکاکی خشک کلمبی است که بر اساس معادله فوق کوچک ترین از بین آنها در نظر گرفته می شود.

3-3- فرایند اجرا

برای اجرای فرایند شبیه سازی، در ابتدا به ذرات موقعیت و سرعت اولیه مشخصی اختصاص داده می شود و سطوح جانبی و توری نیز به عنوان مرزهای سیستم تعریف می شوند. این مرحله از فرایند شبیه سازی، به عنوان مرحله صفر، آماده سازی اولیه¹ نامیده می شود. در مرحله اول از فرایند، با توجه به موقعیت ذرات، تداخلها تشخیص داده شده و در واقع برخوردهای موجود شناسایی می شوند. در مرحله دوم، با توجه به معلوم بودن موقعیت و سرعت ذرات، با اعمال معادلاتی که در قسمت قبل معرفی شدند، نیروی بین آنها محاسبه می شود و برای هر ذره معادلات حرکت تشکیل می گردد. بدین ترتیب به ازای هر ذره شش معادله دیفرانسیل شکل می گیرد که با توجه به تعداد زیاد ذرات حل تحلیلی مجموعه معادلات مقدور نیست. در مرحله سوم، با انتخاب یک گام زمانی، Δt ، معادلات حرکت بصورت عددی حل شده و موقعیت و سرعت ذرات در انتهای گام زمانی تعیین می گردد. با برگشت به مرحله اول و تکرار به دفعات لازم موقعیت و سرعت ذرات در طی زمان تعیین می شود.

لازم به ذکر است که روش های گوناگونی برای اجرای مرحله حل عددی مجموعه معادلات دیفرانسیل وجود دارد و در اینجا از الگوریتم گیر² برای این منظور استفاده می شود [14]. الگوریتم گیر شامل دو گام می باشد که در گام نخست موقعیت دانه ها، سرعت و بقیه مشتقات زمانی در زمان $t + \Delta t$ پیش بینی می شود. این محاسبه توسط بسط تیلور و با استفاده از متغیرهای حرکتی دانه هادر زمان t و زمان های قبلی آن صورت می گیرد. در بیشتر موارد از الگوریتم مرتبه پنج گیر استفاده می شود که در آن خطای عددی در هر گام



شکل 5 مدل سازی برخورد غیر الاستیک ذرات در بیان نیروهای نرمال و مماسی

این ضریب نماینده میزان بازگشت انرژی پس از برخورد است به گونه ای که مقدار واحد برای این فاکتور نشان دهنده عدم وجود رفتار ویسکوز و عدم تلفات است. از نقطه نظر سینماتیکی این ضریب بر حسب نسبت سرعت نسبی نرمال بعد از برخورد، v_{rel}^n ، به سرعت نسبی نرمال قبل از برخورد، v_{rel}^n ، بصورت رابطه (17) قابل بیان است.

$$e = \frac{v_{rel}^n}{v_{rel}^n} \quad (17)$$

از طرفی دیگر، این ضریب به مقدار ضریب میرایی درونی ماده در مدل ویسکوپلاستیک وابسته بوده که با رابطه (18) قابل محاسبه است [8,3].

$$e = \exp\left(-\frac{\pi\eta}{\sqrt{2m^*K_n - \eta^2}}\right) \quad (18)$$

در معادله (18)، m^* جرم مؤثر مجموعه جفت ذره برخورد کننده بوده و

1- Initialization
2- Gear

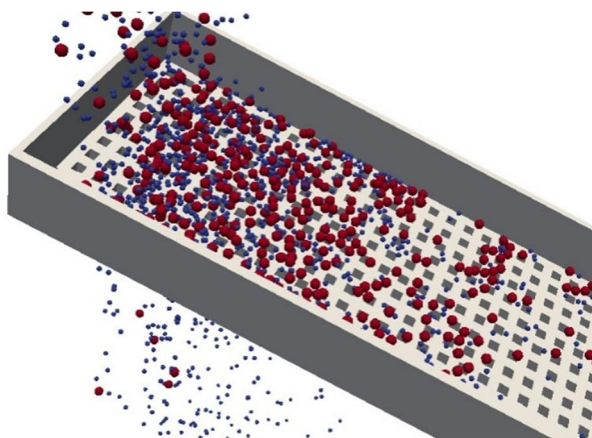
ارتعاشی (α) مطابق شکل 2 می باشد. مشخصات هندسی سرد در جدول 1 و ویژگی های هندسی و فیزیکی ذرات و همچنین نرخ ریزش و سایر کمیات مورد استفاده در شبیه سازی ها در جدول 2 آورده شده است. از طرفی حالات متعددی از شرایط شبیه سازی با تغییر پارامترهای قابل تنظیم در جدول 3 معرفی شده است.

همان گونه که در واقعیت رخ می دهد و پیشتر نیز بیان شد، طی شبیه سازی مطابق شکل 6 ذرات از ارتفاع مشخصی تحت شتاب گرانش روی سطح سرد سقوط می کنند و با گذشت زمان تعدادی از ذرات از روزه های سرد عبور و تعدادی نیز از انتهای آن خارج می شوند که به ترتیب بنام ته ریز و سرریز شناخته می شوند. در حالت ایده آل، همه ذراتی که دارای قطری کمتر از روزه ها هستند به عنوان ته ریز خارج می شوند ولی در واقع چنین اتفاقی نمی افتد و تعدادی از این ذرات به همراه سر ریز از انتهای توری سرد خارج می شوند. در اینجا بازده سرد به صورت تعداد ذرات عبوری از روزه های سرد به تعداد کل ذراتی که می بایست از روزه ها عبور می کردند تعریف می شود و با رصد نمودن موقعیت ذرات در هر لحظه محاسبه می شود. باید یادآوری کرد که ذرات در دو حوزه زمان و مکان قرار دارند و برای حل معادلات آنها به شرایط اولیه و مرزی نیاز است. از نقطه نظر شرایط اولیه، در عمل مشخص شد که موقعیت اولیه ذرات تأثیر چندانی در نتایج نهایی در دراز مدت ندارد که می تواند ناشی از پیوستگی و کارکرد طولانی سیستم باشد. تماس ذرات با دیواره های سرد و همچنین سطح توری در حرکت آنها تأثیر می گذارد و به بیانی دیگر شرایط مرزی از هندسه سرد تأثیر می پذیرد.

لازم به ذکر است که برای اجرای شبیه سازی ها برنامه های لازم برای اجرا در برنامه منبع باز لایتس¹ تهیه و در محیط سیستم عامل لینوکس مورد اجرا قرار گرفت [16,15]. لازم به ذکر است که این برنامه نسخه جدیدی از برنامه دینامیک ملکولی لمپس² [17] است که برای مدل سازی مواد دانه ای بهبود داده شده است. برای نمایش نتایج شبیه سازی بصورت گرافیکی همچون شکل 6 از برنامه پاراوو³ استفاده شده است [18].

5- نتایج عددی و بحث

همان گونه که پیشتر نیز بیان شد، عوامل مختلفی بر کارکرد و نهایتاً بازده سرد تأثیر گذار هستند که با انجام تعداد زیادی شبیه سازی با شرایط مختلف تأثیر این پارامترها مورد مطالعه عددی قرار می گیرد.



شکل 6 لحظه ای از حرکت ذرات روی توری سرد طی یک شبیه سازی

به مقدار Δt^5 وابسته است. روابط (21) قسمت مربوط به پیش بینی در روش مرتبه پنج گیر را نشان می دهد.

$$\vec{r}_i^{pr}(t + \Delta t) = \vec{r}_i(t) + \Delta t \vec{v}_i(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \dddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{24}(\Delta t)^4 \vec{r}_i^{(4)}(t) \quad (21-الف)$$

$$\vec{v}_i^{pr}(t + \Delta t) = \vec{v}_i(t) + \Delta t \dot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \dddot{\vec{r}}_i(t) \quad (21-ب)$$

$$\vec{r}_i^{(3)pr}(t + \Delta t) = \vec{r}_i^{(3)}(t) + \Delta t \ddot{\vec{r}}_i^{(4)}(t) \quad (21-ج)$$

معادلات مشابهی برای حل معادلات مربوط به گشتاور قابل بیان است. در مرحله بعد با استفاده از مقادیر پیش بینی شده و همچنین به کمک مدل های نیروئی که پیشتر به آن اشاره شد، نیروها $(\vec{F}_i^{pr}, \vec{V}_i^{pr}, \omega_i^{pr})$ و گشتاورهای $(\vec{M}_i^{pr}, \vec{V}_i^{pr}, \omega_i^{pr})$ وارد به دانه ها محاسبه می شوند. سپس از نیروها و گشتاورهای محاسبه شده برای اصلاح شتاب های خطی و زاویه ای $\vec{r}_i^{corr}(t + \Delta t)$ و $\vec{\phi}_i^{corr}(t + \Delta t)$ استفاده می شود. اگر پیش بینی کاملاً دقیق باشد متغیرهای حرکتی پیش بینی شده می بایست معادله حرکت را ارضا کنند. پارامتر $\Delta \vec{r}$ به عنوان معیاری برای سنجش انحراف مقادیر موقعیت، سرعت و شتاب پیش بینی شده از مقادیر واقعی به صورت رابطه (22) تعریف می شود.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}^{corr} - \vec{r}^{pr} \quad (22)$$

لازم به ذکر است که در این روابط بالانویس pr مربوط به حالت پیش بینی شده و بالانویس corr حالت اصلاح شده کمیت های مذکور می باشد. در گام دوم از الگوریتم گیر، متغیرهای پیش بینی شده، با اضافه کردن عددی که از حاصل ضرب انحراف $\Delta \vec{r}$ بدست آمده است با استفاده از معادله (23) اصلاح می شود.

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \vec{v}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \dddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \vec{r}_i^{(4)corr}(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \vec{v}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \vec{r}_i^{(4)pr}(t + \Delta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \frac{1}{(\Delta t)} \\ C_2 \frac{2}{(\Delta t)^2} \\ C_3 \frac{6}{(\Delta t)^3} \\ C_4 \frac{24}{(\Delta t)^4} \end{pmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} \Delta \vec{r} \quad (23)$$

در معادله (23)، ضرایب C_i به مرتبه الگوریتم و نوع معادله دیفرانسیل بستگی دارد. این ضرایب برای الگوریتم مرتبه 5 به صورت رابطه (24) می باشند.

$$C_0 = \frac{19}{90}, C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = 1, C_3 = \frac{1}{2}, C_4 = \frac{1}{12} \quad (24)$$

در انتها پس از اصلاح متغیرهای حرکتی دانه ها توسط گام اصلاح کننده الگوریتم، زمان برنامه به اندازه یک گام زمانی به جلو برده شده و ادامه می یابد. لازم به ذکر است که انتخاب مقدار Δt تأثیر زیادی در دقت نتایج دارد به گونه ای که هر چه کوچک تر باشد دقت حل عددی افزایش یافته ولی سرعت انجام محاسبات کاهش می یابد. از طرف مقابل، افزایش اندازه گام زمانی باعث می شود که برخی برخوردها دیده نشوند یا تداخل ذرات زیاد باشد که کاهش دقت و حتی ناپایداری سیستم را به دنبال دارد. در اینجا با انتخاب مقادیر مختلف و مقایسه نتایج در نهایت مقدار 0.00001 ثانیه برای این منظور انتخاب شد.

4- شرایط شبیه سازی

سرد مورد مطالعه در این مقاله دارای یک طبقه توری با روزه های مربعی و راستاها و زوایای مختلف از جمله زاویه شیب سرد (β) زاویه راستای تحریک

1- LIGGGHTS: LAMMPS improved for general granular and granular heat transfer simulations
2- LAMMPS: large-scale atomic/molecular massively parallel simulator
3- Paraview

در این بخش از مقاله، خلاصه‌ای از نتایج حاصل در قالب جدول و نمودار ارائه گردیده و در مورد آنها بحث می‌شود.

جدول 1 مشخصات هندسی سرد

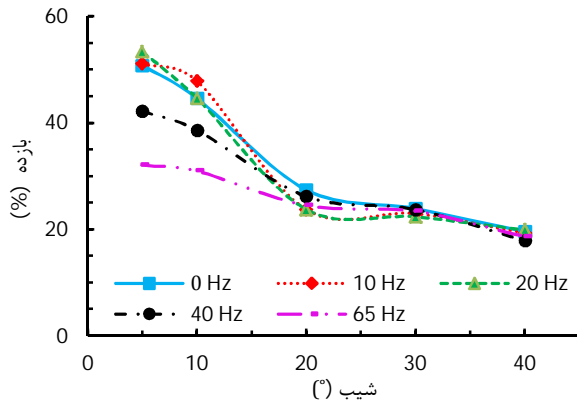
300 mm	طول سرد
100 mm	عرض سرد
4 mm × 4 mm	ابعاد روزنه
4 mm	فاصله روزنه‌ها
407	تعداد کل روزنه‌ها
37	تعداد روزنه‌ها در طول سرد
11	تعداد روزنه‌ها در عرض سرد
1 mm	دامنه ارتعاش

جدول 2 خواص فیزیکی ذرات

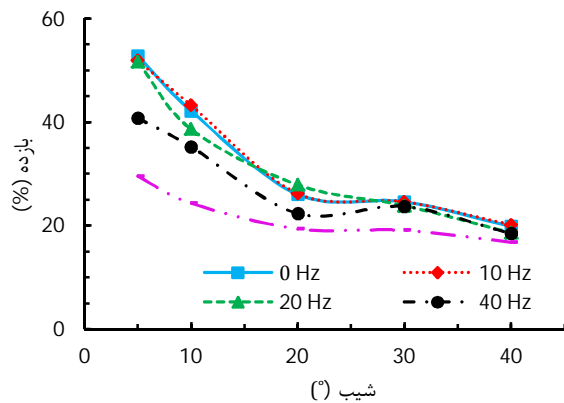
2 mm, 4 mm	قطر ذرات
2500 kg/m ³	چگالی
5000000 Pa	مدول یانگ
0/45	ضریب پواسون
0/3	ضریب بازگشت
0/5	ضریب اصطکاک
50%	درصد جرمی ذرات در ریزش

جدول 3 شرایط مختلف شبیه‌سازی

40, 30, 20, 10, 5	شیب سرد (°)
65, 40, 20, 10, 0	فرکانس ارتعاش (Hz)
40, 30, 20, 10, 0, 10-	زاویه ارتعاش (°)
55000	تعداد ذرات شبیه‌سازی شده



(الف)



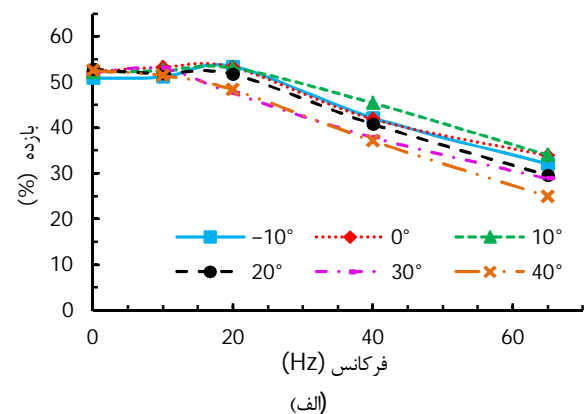
(ب)

شکل 8 نمودارهای تغییرات بازده بر حسب زاویه شیب سرد و فرکانس‌های مختلف (به ازای الف) زاویه ارتعاش $\alpha = -10^\circ$ و (ب) زاویه ارتعاش $\alpha = 20^\circ$

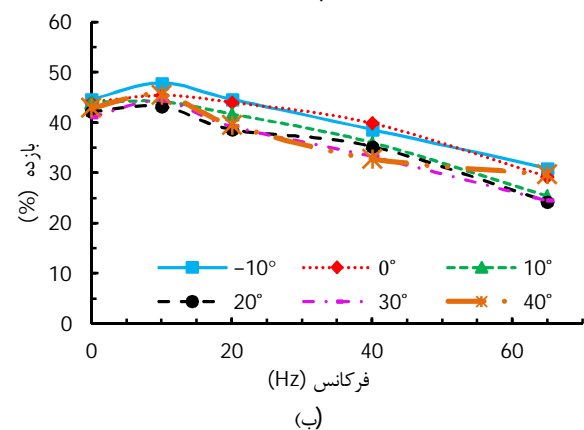
در شکل 7 نمودارهای وابستگی بازده سرد به فرکانس ارتعاش خطی آن به ازای مقادیر مختلف زاویه ارتعاش تحریک و همچنین زاویه شیب سرد نشان داده شده است. نمودارها نشان می‌دهند که در فرکانس‌های کمتر از حدود 16 هرتز بازده بیشترین مقدار را داشته و البته در این محدوده، وابستگی آن به فرکانس چندان محسوس نیست. با این همه می‌توان مشاهده نمود که در فرکانس‌های بیش از این مقدار، با افزایش فرکانس ارتعاش، بازده تقریباً بصورت خطی کاهش می‌یابد. مقایسه نتایجی که در این مرحله از تحقیق جاری حاصل گردیده تطابق خوبی با نتایج گزارش شده در مراجعی چون [7] نشان می‌دهد. همچنین با مقایسه نمودارهای مربوط به زوایای مختلف راستای تحریک ارتعاشی می‌توان نتیجه گرفت که چگونگی ارتباط بازده و فرکانس همواره یکسان نیست.

هر چند نمودارهای ارائه شده وابستگی بازده را در فضای سه متغیره فرکانس- زاویه ارتعاش- زاویه شیب سرد نشان می‌دهد ولی برای وضوح بهتر تابعیت، در شکل 8 نمودارهای تغییرات بازده بر حسب زاویه شیب سرد به ازای فرکانس‌های مختلف و برای زوایای مختلف راستای تحریک ارتعاشی نمایش داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش شیب سرد بازده آن بشدت کاهش می‌یابد هر چند با افزایش آن پس از 20 درجه تقریباً ثابت می‌ماند. لازم به ذکر است که نتایج بدست آمده در اینجا در تطابق بسیار خوبی با نتایج گزارش شده در مراجع [9,4] می‌باشد.

در رابطه با تأثیر راستای ارتعاش، در اینجا از ارائه نتایج عددی مستقل صرف نظر می‌شود لیکن مشاهده شد که راستای ارتعاش تأثیر محسوسی بر روی بازده ندارد.



(الف)



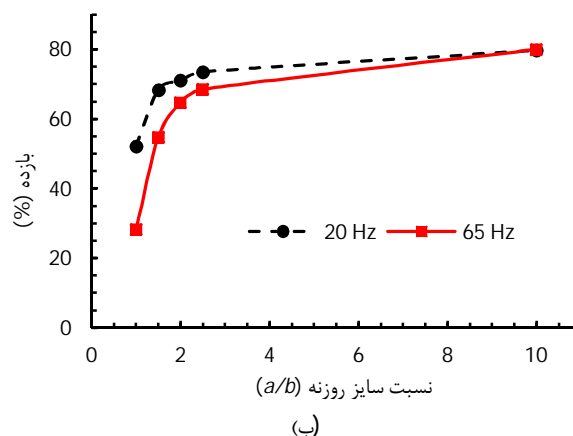
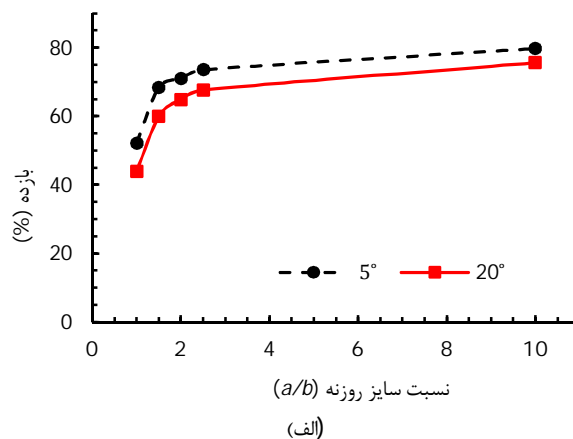
(ب)

شکل 7 نمودارهای وابستگی بازده به فرکانس برای زوایای مختلف ارتعاشی (مختلف به ازای الف) شیب $\beta = 5^\circ$ و (ب) شیب $\beta = 10^\circ$

اجباری تأثیر زیادی بر روی بازده سرنده دارد. بدین ترتیب که با افزایش فرکانس، بازده کاهش می‌یابد. بعلاوه بصورت عددی مشخص شد که با افزایش شیب سرنده، بازده آن دچار کاهش می‌شود. در بررسی دیگری مشاهده شد که زاویه راستای تحریک ارتعاشی نیز بر روی بازده تأثیرگذار است ولی اثر آن در مقایسه با پارامترهای قبلی چندان محسوس نیست. همچنین، نتایج عددی نشان داد که نسبت ابعادی روزنه سوراخ‌های مستطیلی توری سرنده بشدت بازده را تحت تأثیر قرار می‌دهد. مقایسه نتایج حاصل از تحقیق جاری تطابق خوبی را با نتایج گزارش شده در مراجع مرتبط نشان می‌دهد. از نقطه نظر کاربردی، نتایج این تحقیق برای طراحی بهینه سرنده و همچنین تنظیم متغیرهای کارکرد برای حصول حداکثر کارایی قابل استفاده است.

7- مراجع

- [1] P. A. Cundall, O. D. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- [2] J. Li, C. Webb, S. S. Pandiella, G. M. Campbell, Discrete particle motion on sieves - a numerical study using the DEM simulation, *Powder Technology*, Vol. 133, pp. 190-202, 2003.
- [3] C. Yan-hua, T. Xin, Application of the DEM to screening process: a 3D simulation, *Mining Science and Technology*, Vol. 19, pp. 0493-0497, 2009.
- [4] K. J. Dong, A. B. Yu, I. Brake, DEM simulation of particle flow on a multi-deck banana screen, *Minerals Engineering*, Vol. 22, pp. 910-920, 2009.
- [5] P. W. Cleary, M. D. Sinnott, R. D. Morrison, Separation performance of double deck banana screens - Part 2: Quantitative predictions, *Minerals Engineering*, Vol. 22, No. 14, pp. 1230-1244, 2009.
- [6] P. W. Cleary, M. D. Sinnott, R. D. Morrison, Separation performance of double deck banana screens - Part 1: Flow and separation for different accelerations, *Minerals Engineering*, Vol. 22, No. 14, pp. 1218-1229, 2009.
- [7] Y. Chen, X. Tong, Modeling screening efficiency with vibrational parameters based on DEM 3D simulation, *Mining Science and Technology (China)*, Vol. 20, No. 4, pp. 615-620, 2010.
- [8] W. Guifeng, T. Xin, Screening efficiency and screen length of a linear vibrating screen using DEM 3D simulation, *Mining Science and Technology (China)*, Vol. 21, pp. 451-455, 2011.
- [9] L. Zhao, Y. Zhao, C. Liu, J. Li, H. Dong, Simulation of the screening process on a circularly vibrating screen using 3D-DEM, *Mining Science and Technology (China)*, Vol. 21, No. 5, pp. 677-680, 2011.
- [10] K. J. Dong, A. B. Yu, Numerical simulation of the particle flow and sieving behaviour on sieve bend/low head screen combination, *Minerals Engineering*, Vol. 31, No. 0, pp. 2-9, 2012.
- [11] J. Xiao, X. Tong, Particle stratification and penetration of a linear vibrating screen by the discrete element method, *International Journal of Mining Science and Technology*, Vol. 22, No. 3, pp. 357-362, 2012.
- [12] K. L. Johnson, *Contact mechanics*: Cambridge University Press, 1985.
- [13] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, T. Pöschel, Model for collisions in granular gases, *Physical Review E*, Vol. 53, No. 5, pp. 5382-5392, 1996.
- [14] C. W. Gear, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971.
- [15] C. Kloss, C. Goniva, LIGGGHTS-Open Source Discrete Element Simulations of Granular Materials Based on LAMMPS, *Supplemental Proceedings: Materials Fabrication, Properties, Characterization, and Modeling, Volume 2*, pp. 781-788, 2011.
- [16] Liggghts.com. *LIGGGHTS Open Source Discrete Element Method Particle Simulation Code*, <http://www.liggghts.com/>, Accessed 2012.
- [17] Sandia.gov. *LAMMPS Molecular Dynamics Simulator*, <http://lammps.sandia.gov/Accessed> 2012.
- [18] Paraview.org. *Paraview*, <http://www.paraview.org/>, Accessed 2012.



شکل 9 نمودار تغییرات بازده بر حسب تغییرات نسبت سایز روزنه‌ها در الف) فرکانس 20 Hz ب) شیب $\beta = 5^\circ$

پارامتر دیگری که در اینجا مورد مطالعه عددی قرار گرفته، نسبت ابعادی دانه‌ها روزنه‌های توری سرنده است. همان‌گونه که در شکل 9 نشان داده شده است این کمیت بصورت نسبت طول به عرض روزنه‌های مستطیلی توری سرنده تعریف می‌شود. لازم به ذکر است که طول مستطیل روزنه در راستای طول سرنده قرار گرفته است.

در شکل 9 نمودار تغییرات بازده بر حسب نسبت ابعادی روزنه توری نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت طول به عرض روزنه‌ها، بازده افزایش می‌یابد. این نتیجه می‌تواند ناشی از حرکت راحت تر ذرات در راستای طولی و عدم گرفتار شدن آنها باشد. با این حال مشاهده می‌شود که این تأثیر مثبت یکنوا نیست و پس از این که بازده برای نسبت سایز $a/b = 3$ به شدت افزایش یافت وابستگی تضعیف می‌شود و تغییر زیادی در ادامه مشاهده نمی‌شود. با مرور مراجع گزارشی در این رابطه مشاهده نشد لذا امکان مقایسه آن با سایر روش‌ها نیست. با اینحال نتایج تجربیات عملی محققان مقاله حاضر این نتایج را تأیید می‌کند.

6- نتیجه گیری

روش مدل‌سازی المان گسسته در مورد فرایند غربال دانه‌های کروی با موفقیت اجرا شد. بر اساس نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها، فرکانس ارتعاش