مجله مهندسی مکانیک مدرس، دی ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۱۰، ص‌ص ۵۰-۵۸

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تابع وزن دوبعدی مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری کششی

رحمت‌ا... قاجار[1*]، جواد علیزاده کاکلر[2]

۱- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۲- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۱۹۹۹، ghajar@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۷ خرداد ۱۳۹۳

پذیرش: ۲۱ شهریور ۱۳۹۳

ارائه در سایت: ۰۲ مهر ۱۳۹۳

کلید واژگان:

ترک زیرسطحی بیضوی

تابع وزن دوبعدی

کوپلینگ مودهای شکست

مود ترکیبی

چکیده

یکی از انواع ترک‌های مشاهده شده در سازه‌های مکانیکی، ترک‌های زیرسطحی بیضوی هستند. در این ترک‌ها، به دلیل عدم تقارن هندسی نسبت به سطح ترک، پدیده کوپلینگ مودهای شکست منجر می‌شود که تحت بارگذاری کششی، ترک هر سه مود شکست را تجربه نماید. تحت بارگذاری کششی، مود *III* ناشی از پدیده کوپلینگ مودها قابل صرف‌نظر ولی مود *II* قابل ملاحظه می‌باشد. در این مطالعه، تابع وزن دوبعدی مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی موازی با سطح تحت کشش برای نسبت منظرهای α=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 و نسبت عمق ترک به طول ترک‌های β=0.05, 0.06, 0.08, 0.1, 0.14, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0 استخراج شده است. برای استخراج توابع وزن، از کشش یکنواخت اعمال شده روی سطوح ترک به عنوان بارگذاری مرجع استفاده شده است. با برازش تابع با دقت بالا روی ضرایب تابع وزن به دست آمده، تابع وزن ارائه شده برای هر مقداری از نسبت منظر و نسبت عمق به طول ترک قابل استفاده شده است. به منظور صحه‌گذاری تابع وزن به دست آمده، ضرایب شدت تنش مود ترکیبی تمام نقاط جبهه ترک تحت توزیع تنش‌های خطی، بیض‌گون و مثلثاتی با استفاده از آن محاسبه شده و با نتایج اجزامحدود مورد مقایسه قرار گرفته است. مقایسه نتایج، دقت بالا و میانگین خطای نسبی زیر ۷ درصد را نشان می‌دهد. به کمک توابع وزن ارائه شده می‌توان ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک زیرسطحی بیضوی با هر مقدار α و β را تحت هر توزیع بار کششی دلخواه محاسبه نمود.

Mixed mode two dimensional weight functions for the subsurface elliptical cracks under normal loadings

Rahmatollah Ghajar*, Javad Alizadeh Kaklar

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

* P.O.B. 193951999 Tehran, Iran, ghajar@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 24 May 2014
Accepted 12 September 2014
Available Online 24 September 2014

Keywords:
Elliptical Subsurface Crack
Two Dimensional Weight Function
Coupling Of The Fracture Modes
Mixed Mode

ABSTRACT

Elliptical subsurface cracks are one of the probable types of cracks that occur in engineering structures. Due to the non-symmetrical geometry with respect to the crack surface, coupling of the fracture modes occurs in an elliptical subsurface crack and so, the crack under normal loading will experience all fracture modes. Mode *III* caused by the coupling effect under normal loading is negligible whereas mode *II* is significant. In this paper, mixed mode two dimensional weight functions of the elliptical subsurface cracks parallel to the surface are derived for aspect ratios of α=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 and ratios of crack depth to crack length of β=0.05, 0.06, 0.08, 0.1, 0.14, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0. Mixed mode stress intensity factors under uniform normal loading are used as reference stress intensity factors. By curve fitting on the calculated weight functions coefficients, the derived weight functions are able to be used for any α and β. To verify the weight functions, the stress intensity factors of all points of the crack front are calculated under linear, elliptic paraboloid and trigonometric paraboloid stress distributions and compared to the finite element results. Comparison of the results shows high accuracy with mean relative error less than 7%. Using derived weight functions, mixed mode stress intensity factors of the subsurface elliptical crack can be determined for any α and β and under any normal stress distributions.

۱- مقدمه

اغلب قطعات مهندسی که بر اساس معیار تحمل آسیب طراحی می‌شوند، به منظور شناسایی عیوب احتمالی ایجاد شده حین عملکرد، متناوباً تحت آزمون‌های غیرمخرب قرار می‌گیرند. در کنار انجام این آزمون‌ها، تشخیص بحرانی بودن ترک یافت شده، با استفاده از تعیین بازه تغییرات ضریب شدت تنش ترک تحت بارهای سیکلی از اهمیت زیادی برخوردار است. بنابراین، در تحلیل‌های شکست و خستگی، اولین گام تعیین رهیافتی است که بتوان با استفاده از آن، ضرایب شدت تنش ترک را به راحتی و با دقت مناسب محاسبه نمود.

رهیافت اجزامحدود به طور گسترده برای تعیین ضرایب شدت تنش ترک‌ها تحت بارگذاری‌های پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرد. با وجود دقت بالا و عمومی بودن روش اجزامحدود، در مواردی مانند مطالعه رشد خستگی ترک که نیاز به تعداد زیادی محاسبه ضریب شدت تنش تحت شرایط مختلف بارگذاری است، این تحلیل‌ها بسیار زمان‌بر می‌باشند. در این بین، استفاده از

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

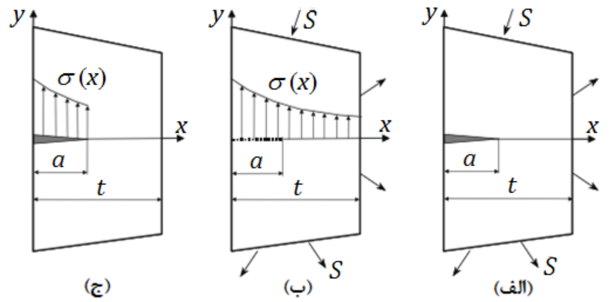
R. Ghajar, J. Alizadeh K., Mixed mode two dimensional weight functions for the subsurface elliptical cracks under normal loadings, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 50-58, 2014 (In Persian)

روش تابع وزن به خصوص زمانی‌که تعداد محاسبات ضرایب شدت تنش یک هندسه خاص تحت توزیع تنش‌های پیچیده مختلف مورد نظر باشد، بسیار مناسب می‌باشد. تمرکز اغلب تحقیقات صورت گرفته تا به حال بر روی تابع وزن ترک‌های یک‌بعدی بوده و چگونگی به دست آوردن توابع وزن دوبعدی برای ترک‌های دوبعدی کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. برای ترک‌های دوبعدی، توابع وزن تحلیلی تنها برای حالت‌های بسیار محدود و خاص ترک دایره‌ای، ترک نیم‌صفحه و ترک بیضوی در فضای بی‌نهایت موجودند.

اورنیاک و همکاران [۱-۳] در سال ۱۹۹۷ روشی برای تعیین میدان جابه‌جایی جبهه ترک بیضوی محصور شده در فضای بی‌نهایت و در نتیجه تعیین ضرایب شدت تنش آن تحت بارگذاری چندجمله‌ای پیشنهاد دادند. روی و ساها [۴] در سال ۲۰۰۰، جابه‌جایی بازشدگی یک ترک بیضوی در فضای الاستیک بی‌نهایت را تحت یک جفت بار نقطه‌ای عمودی که در محل دلخواه از سطوح ترک اعمال می‌شود، با استفاده از روش معادله انتگرالی استخراج نمودند. این محققان در ادامه کار خود، در سال ۲۰۰۱، تابع وزن تحلیلی ترک بیضوی محصور شده در فضای بی‌نهایت تحت بارگذاری برشی را نیز ارائه دادند [۵]. گلینکا و وانگ [۶] در سال ۲۰۰۹، روش تابع وزن دوبعدی را برای محاسبه ضرایب شدت تنش ترک‌های بیضوی محصور شده، تحت شرایط بارگذاری دوبعدی پیچیده مورد استفاده قرار دادند. آن‌ها یک شکل عمومی جدید از تابع وزن را براساس توابع وزن موجود و خواص آن‌ها برای ترک‌های دوبعدی محصور شده ارائه دادند. مزیت اصلی تابع وزن ارائه شده، سادگی آن در کنار حفظ دقت نتایج حاصله است.

در سازه‌های دارای تماس غلتشی مانند رولربیرینگ‌ها [۷] و چرخ و ریل فولادی [۸]، به دلیل ماهیت سیکلیک بارگذاری ناشی از غلتش، خستگی بروز نموده و می‌تواند منجر به جوانه‌زنی و رشد ترک‌های زیرسطحی بیضوی گردد. این ترک‌ها در صورت رشد می‌توانند قطعه‌ای از سطح تماس را جدا کرده و منجر به حوادث پر خطر شوند (شکل ۱). در ترک‌های زیرسطحی بیضوی به دلیل عدم وجود تقارن هندسی نسبت به سطوح ترک، پدیده کوپلینگ بین مودهای شکست اتفاق می‌افتد. یعنی، اعمال بارگذاری کششی روی سطوح ترک می‌تواند موجب بروز مودهای برشی گردد و بالعکس. مازو [۹] در سال ۲۰۰۲، خصوصیات کلی تابع وزن یک‌بعدی مود II را برای یک ترک زیرسطحی موازی با سطح یک صفحه نیمه بینهایت بدون درنظر گرفتن کوپلینگ مودها مورد بررسی قرار داد. سپس بقینی و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۸، با لحاظ نمودن اثرات کوپلینگ مودها، ضرایب شدت تنش مود ترکیبی یک ترک زیرسطحی دوبعدی موازی با سطح را در یک نیم‌صفحه الاستیک با استفاده از روش تابع وزن یک‌بعدی محاسبه نمودند. آن‌ها نشان دادند که پدیده کوپلینگ زمانی بروز می‌کند که فاصله ترک از سطح کمتر از طول ترک شود. این مشاهده، عدم لحاظ نمودن پدیده کوپلینگ توسط مازو [۹] که مطالعه‌اش روی میکرو ترک‌ها متمرکز بود را توجیه می‌نماید. در فضای سه‌بعدی، ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری کششی یکنواخت توسط قاجار و علیزاده [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته و مشاهده شد که، مود لغزشی ناشی از پدیده کوپلینگ قابل ملاحظه ولی مود پارگی ناچیز است.

شکل ۱ شکست دو چرخ فولادی قطار در اثر رشد ترک زیرسطحی بیضوی [۸]



شکل ۲ سازه ترک‌دار با بارگذاری S در دوردست [۶]

هدف این پژوهش استخراج تابع وزن دوبعدی مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری کششی است. به این منظور، با استفاده از ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بار کششی یکنواخت به عنوان بارگذاری مرجع، ضرایب تابع وزن دوبعدی مود I و II برای ضریب منظرهای α=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 و نسبت‌های عمق ترک به طول ترک β=0.05, 0.06, 0.08, 0.1, 0.14, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0 استخراج می‌شوند. با توجه به ناچیز بودن مود III ناشی از پدیده کوپلینگ در ترک زیرسطحی بیضوی تحت کشش، در این پژوهش از آن صرف‌نظر می‌شود. با برازش دو تابع با دقت بالا بر روی ضرایب تابع وزن به دست آمده، توابع وزن هر نقطه از جبهه ترکی با α و β دلخواه، تحت بارگذاری کششی ارائه می‌شود. به این ترتیب، ضرایب شدت تنش مود ترکیبی نقاط مختلف جبهه ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت هر بارگذاری کششی دلخواه با دقت و سرعت بالا قابل محاسبه خواهد بود. برای صحه‌گذاری توابع وزن استخراجی و توابع برازش شده روی ضرایب تابع وزن، از مقایسه با نتایج تحلیل‌های اجزامحدود برای توزیع تنش‌های مختلف استفاده خواهد شد.

۲- روش تابع وزن در تعیین ضرایب شدت تنش

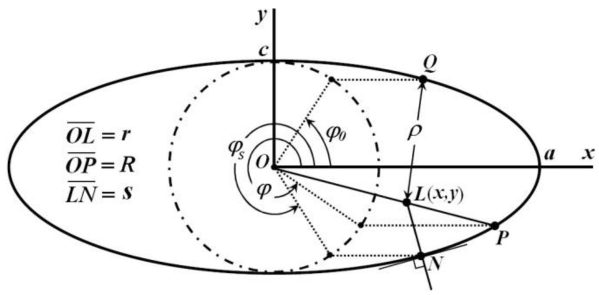
در اکثر روش‌های عددی، برای یک سازه ترک‌دار، محاسبه ضرایب شدت تنش برای هر توزیع تنش و هر طول ترکی نیازمند محاسبات جداگانه‌ای است. در این موارد، روش تابع وزن ارائه شده توسط بوئیکنر [۱۲] و رایس [۱۳]، به عنوان روشی کارا جهت تعیین ضرایب شدت تنش با استفاده از میدان تنش سازه بدون ترک به حساب می‌آید. به عبارت دیگر، روش تابع وزن، با جدا کردن هندسه سازه ترک‌دار از بار اعمالی به ترک، محاسبه ضریب شدت تنش برای هندسه مشخصی از سازه ترک‌دار را تحت بارگذاری‌های مختلف، ساده و سریع می‌نماید.

شکل ۲- الف سازه‌ای دارای یک ترک یک‌بعدی که در دوردست تحت بارگذاری S قرار دارد را نشان می‌دهد. درصورتی‌که بارگذاری دوردست S، توزیع تنش $\sigma(x)$ را در محل ترک در سازه بدون ترک نتیجه دهد (شکل ۲- ب)، می‌توان بارگذاری S را با بارگذاری محلی $\sigma(x)$ روی خط ترک (شکل ۲- ج) جایگزین نمود. در این حالت، K_I یعنی ضریب شدت تنش مود I ترک از رابطه (۱) به دست می‌آید [۶]:

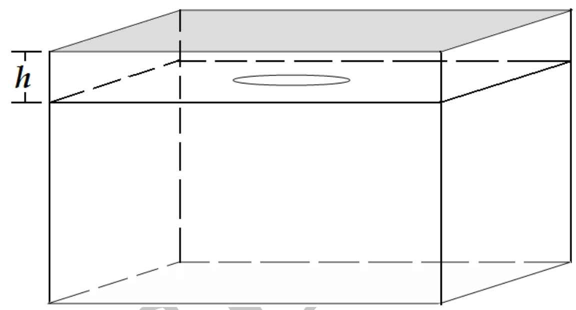
$$K_I = \int_0^{a} \sigma(x) W_I(x,a)\,dx \qquad (۱)$$

که در آن، a طول ترک و $W_I(x,a)$ تابع وزن یک‌بعدی مود I می‌باشد. تابع وزن، تابعی از هندسه سازه و ترک و نوع بارگذاری بوده ولی از چگونگی توزیع تنش مستقل است. در حالت ترک دو بعدی (شکل ۳)، رابطه (۱) به صورت (۲) قابل بازنویسی خواهد بود [۶]:

$$K_I(\varphi_0) = \iint_A \sigma(x,y) W_I(x,y,\varphi_0)\,dA \qquad (۲)$$



شکل ۳ نمایش ترک بیضوی و پارامترهای مختلف آن



شکل ۴ ترک زیرسطحی بیضوی در فضای نیمه بی‌نهایت

که در آن $W_I(x,y,\varphi_0)$ تابع وزن دوبعدی مود I و برابر ضریب شدت تنش نقطه $Q(\varphi_0)$ از جبهه ترک تحت یک جفت بار نقطه‌ای عمودی واحد که به نقطه $L(x,y)$ از سطح ترک اعمال می‌شود، می‌باشد. $\sigma(x,y)$ توزیع تنش دوبعدی ناشی از بارگذاری خارجی روی سطح ترک در سازه بدون ترک، $K_I(\varphi_0)$ ضریب شدت تنش مود I در نقطه Q از جبهه ترک دوبعدی و A سطح ترک می‌باشد.

با داشتن میدان جابه‌جایی جبهه ترک و ضرایب شدت تنش آن تحت یک بارگذاری مرجع، می‌توان تابع وزن ترک را به صورت تحلیلی به دست آورد [۱۳]. اما از آن‌جا که میدان جابه‌جایی جبهه بسیاری از ترک‌ها تعیین نشده و یا بسیار پیچیده و نامناسب برای کاربردهای مهندسی است، استفاده از توابع وزن تقریبی جایگاه مناسبی یافته است. یکی از روش‌های استخراج توابع وزن تقریبی استفاده از شکل عمومی مناسب برای هندسه سازه و ترک مورد نظر است. استفاده از شکل ریاضی عمومی برای تابع وزن، تعیین توابع وزن را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌نماید. گلینکا و وانگ [۶] با تحلیل خواص توابع وزن استخراج شده برای ترک‌های مختلف، یک شکل عمومی تقریبی برای ترک‌های محصور شده از جمله ترک‌های محصور شده بیضوی (شکل ۳) ارائه نمودند. طبق رابطه (۳) داریم:

$$W(x,y,\varphi_0)=\frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}\left[1+\sum_{i=1}^{n}D_i(\varphi_0,\alpha)\left(1-\frac{r(\varphi)}{R(\varphi)}\right)^i\right] \quad (۳)$$

که در آن s فاصله محل اعمال بار نقطه‌ای (نقطه L) از جبهه ترک، ρ فاصله محل اعمال بار نقطه‌ای از نقطه مورد نظر روی جبهه ترک برای محاسبه ضریب شدت تنش (نقطه Q)، φ_0 نشان دهنده مکان نقطه Q، r و φ مختصات قطبی نقطه دلخواه از سطح ترک و $R(\varphi)$ فاصله نقطه متناظر نقطه L روی جبهه ترک از مرکز ترک است (شکل ۳). D_i ضرایب تابع وزن و وابسته به ضریب منظر ترک یعنی $\alpha=c/a$ می‌باشند. براساس مطالعات انجام شده [۶]، شکل عمومی رابطه (۳) با یک جمله یعنی $n=1$، تابع وزن بسیاری از ترک‌های محصورشده را با دقت بالا تقریب می‌زند، یعنی طبق رابطه (۴):

$$W(x,y,\varphi_0)=\frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}\left[1+D(\varphi_0,\alpha)\left(1-\frac{r(\varphi)}{R(\varphi)}\right)\right] \quad (۴)$$

قاجار و سعیدی [۱۴،۱۵] شکل عمومی رابطه (۴) را برای استخراج تابع وزن دوبعدی ترک‌های نیم‌بیضوی سطحی در ورق‌های ضخیم و استوانه‌های جدار ضخیم به کار برده و قابلیت استفاده از این شکل عمومی را برای ترک‌های سطحی (علاوه‌بر ترک‌های محصور شده) نشان دادند.

۳- توابع وزن مود ترکیبی ترک زیرسطحی بیضوی

تابع وزن ترک زیرسطحی بیضوی موازی سطح یک نیم فضا (شکل ۴) تا به حال ارائه نشده است. درصورت استخراج این تابع وزن، با توجه به عمومیت داشتن هندسه مورد نظر، می‌توان برای بسیاری از مسائل از جمله حل مسئله خستگی تماس غلتشی زیرسطحی در چرخ‌ها و ریل‌های فولادی راه آهن از آن استفاده نمود. همان‌طورکه بیان شد، تحت بارگذاری کششی، به دلیل بروز پدیده کوپلینگ مودهای شکست، ترک زیرسطحی بیضوی هر سه مود شکست را تجربه می‌کند. مطالعات نشان می‌دهد [۱۱] که از بین مودهای برشی، مود II قابل ملاحظه ولی III ناچیز (زیر ۱۰ درصد مود I) و در کاربردهای مهندسی قابل صرف‌نظر است. لذا در این مطالعه، تمرکز روی مود ترکیبی II+I خواهد بود.

برای استفاده از رابطه (۴) در استخراج توابع وزن ترک‌های زیرسطحی بیضوی بایستی اصلاحاتی انجام شود. در مورد تابع وزن مود I، اصلاح لازم وارد کردن پارامتر فاصله از سطح در ضریب تابع وزن است. این پارامتر به صورت نسبت بی‌بعد عمق ترک به طول ترک ($\beta=h/a$) در ضریب D وارد می‌شود، بنابراین طبق رابطه (۵):

$$W_I(x,y,\varphi_0)=\frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}\left[1+D_I(\varphi_0,\alpha,\beta)\left(1-\frac{r(\varphi)}{R(\varphi)}\right)\right] \quad (۵)$$

با فاصله گرفتن ترک زیرسطحی از سطح و افزایش β، اثر کوپلینگ مودها کم شده و اگر ترک به اندازه طول خود از سطح فاصله داشته باشد، می‌توان از کوپلینگ مودها صرف‌نظر نمود [۱۱]. این بدین معنی است که، تحت بارگذاری کششی، مودهای برشی که ناشی از عدم تقارن هندسی و بروز پدیده کوپلینگ می‌باشند، با افزایش β و تبدیل ترک زیرسطحی به ترک در فضای بی‌نهایت، صفر می‌شوند. بنابراین، برای استفاده از رابطه (۴) برای مود II ناشی از کوپلینگ با مود کششی در ترک زیرسطحی بیضوی نشان داده شده در شکل ۴، علاوه‌بر وارد نمودن پارامتر β در ضریب D، بایستی شرایط رابطه به‌گونه‌ای باشد که صفر شدن ضریب شدت تنش مود II را با فاصله گرفتن از سطح ($\beta\to\infty$) تضمین نماید. بدین منظور، بایستی جمله ثابت اول تابع وزن که تابعی از β نبوده و لذا در βهای زیاد نیز مقدار خود را حفظ می‌کند، حذف شود. بنابراین، شکل تقریبی رابطه تابع وزن برای مود II ناشی از کوپلینگ با مود کششی ترک زیرسطحی به صورت رابطه (۶) در می‌آید:

$$W_{II}(x,y,\varphi_0)=\frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}D_{II}(\varphi_0,\alpha,\beta)\left(1-\frac{r(\varphi)}{R(\varphi)}\right) \quad (۶)$$

در واقع، درصورت استخراج ضرایب D_I و D_{II} روابط (۵) و (۶) برای α و βهای مختلف و نیز برای نقاط مختلف جبهه ترک، تابع وزن مود ترکیبی این ترک‌ها به دست آمده است.

٤- ضرایب شدت تنش مرجع

ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی برای ضریب منظرهای مختلف ($۰/۲ \le \alpha \le ۱$)، نسبت‌های مختلف عمق ترک به طول آن ($۰/۰۵ \le \beta \le ۱$) و تمام نقاط جبهه ترک ($۰\le 2\varphi_0/\pi \le ۱$) تحت بارگذاری کششی یکنواخت σ_0 با استفاده از روش اجزامحدود محاسبه و توابع زیر با دقت بالا روی آن برازش شده است [۱۱]. طبق رابطه (۷) داریم:

$$K_I(\alpha,\beta,\varphi_0)=\frac{\sigma_0\sqrt{\pi c_1^*}}{E(\alpha)}\left(1+\sum_{i=1}^{2}\frac{a_{1i}}{\beta^{b_{1i}}}\cos^2(\varphi_0+\frac{i\pi}{2})\right)^{d_1}$$

$$K_{II}(\alpha,\beta,\varphi_0)=\frac{\sigma_0\sqrt{\pi c_2^*}}{E(\alpha)}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{e^{(a_{2i}\beta+b_{2i})}}{\beta^{c_{2i}}}\cos^2(\varphi_0+\frac{i\pi}{2})\right)^{d_2} \quad (۷)$$

که در آن ضرایب a_{1i}، a_{2i}، b_{1i}، b_{2i}، c_{2i}، d_1 و d_2 توابعی از α هستند که در پیوست ارائه شده‌اند. $E(\alpha)$ انتگرال نوع دوم بیضی با تعریف رابطه (۸) است:

$$E(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(1-\alpha^2)^2\sin^2\psi}\,d\psi \quad (۸)$$

و پارامترهای c_1^* و c_2^* به صورت رابطه (۹) هستند [۱۱]:

$$c_1^*=c(\sin^2\varphi_0+\alpha^2\cos^2\varphi_0)^{0.5} \quad , \quad c_2^*=\frac{c^2}{c_1^*} \quad (۹)$$

مقادیر حاصل از رابطه (۷) به عنوان ضرایب شدت تنش مرجع برای استخراج ضرایب توابع وزن مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به وجود دو صفحه تقارن در هندسه ترک و فضا، عملا رابطه (۷) برای $0 \le 2\varphi_0/\pi \le 1$ بوده و ضرایب تابع وزن نیز برای یک چهارم ترک به دست خواهد آمد. درصورتی‌که مقدار بار کششی یکنواخت روی سطوح ترک برابر یک مگاپاسکال باشد ($\sigma(x,y)=\sigma_0=1$ MPa)، جاگذاری روابط(۵)، (۶) و (۷) در رابطه (۲)، ضرایب تابع وزن را به صورت رابطه (۱۰) نتیجه می‌دهد.

$$D_I(\alpha,\beta,\varphi_0)=\frac{\left(K_{Ir}(\alpha,\beta,\varphi_0)-\iint\limits_A\frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}dA\right)}{\iint\limits_A\frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}\left(1-\frac{r(\varphi)}{R(\varphi)}\right)dA}$$

$$D_{II}(\alpha,\beta,\varphi_0)=\frac{K_{IIr}(\alpha,\beta,\varphi_0)}{\iint\limits_A\frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}\left(1-\frac{r(\varphi)}{R(\varphi)}\right)dA} \quad (۱۰)$$

که در آن K_{Ir} و K_{IIr} به ترتیب ضرایب شدت تنش مرجع مود I و II هستند که در رابطه (۷) ارائه شده‌اند.

۵- ارائه نتایج

۵-۱- ضرایب توابع وزن ترک زیرسطحی بیضوی

برای تعیین ضرایب توابع وزن دوبعدی مود ترکیبی با استفاده از ضرایب شدت تنش مرجع، لازم است که انتگرال‌های دوگانه رابطه (۱۰) محاسبه شوند. با توجه به عدم وجود رابطه‌ای صریح برای پارامترهای s و ρ بر حسب x و y، برای محاسبه انتگرال‌های رابطه (۱۰) از مختصات کمکی (s,φ) استفاده شده است. توجه شود که در این مختصات برای هر نقطه دلخواه L روی سطح ترک، زاویه φ مربوط به نقطه‌ای در روی جبهه ترک است که کمترین فاصله را از نقطه L دارد (نقطه N در شکل ۳). متغیرهای مختصات دکارتی در مختصات کمکی خواهند بود:

$$x=\cos\varphi(\mathrm{a}-\frac{\alpha s}{l}) \quad , \quad y=\sin\varphi(c-\frac{s}{l}) \quad (۱۱)$$

که در آن پارامتر l طبق رابطه (۱۲) برابر است با:

$$l=(\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi)^{0.5} \quad (۱۲)$$

همچنین، ρ، r و R در دستگاه مختصات کمکی طبق رابطه (۱۳) خواهند بود:

$$\rho=\left((\mathrm{x}-\mathrm{a}\cos\varphi_0)^2+(\mathrm{y}-\mathrm{c}\sin\varphi_0)^2\right)^{0.5} \ , \ r=\left(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\right)^{0.5} \ ,$$

$$R=\frac{cr}{\left(\alpha^2\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\right)^{0.5}} \quad (۱۳)$$

ژاکوبین تبدیل دستگاه مختصات برای محاسبه انتگرال‌های رابطه (۱۰) و محدوده تغییرات متغیرهای مربوطه به صورت رابطه (۱۴) است:

$$J=\mathrm{a}l-\frac{\alpha s}{l^2} \quad , \quad 0\le\varphi\le 2\pi \quad , \quad 0\le s\le cl \quad (۱۴)$$

پس از تعیین تمامی پارامترهای مورد نیاز برای انتگرال‌گیری، برنامه‌ای در نرم‌افزار متمتیکا ۷ تدوین و پس از صحه‌گذاری، انتگرال‌ها به صورت عددی محاسبه و ضرایب توابع وزن استخراج شدند. ضرایب تابع وزن برای نسبت منظرهای α=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0، نسبت‌های عمق ترک به طول ترک β=0.05, 0.06, 0.08, 0.1, 0.14, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0 و برای ربع بیضی در شکل ۵ نشان داده شده است.

۵-۲- برازش تابع بر روی ضرایب توابع وزن

به منظور استفاده آسان از ضرایب تابع وزن و نیز درون‌یابی آن‌ها برای سایر مقادیر α، β و φ_0، تابعی بر روی این ضرایب برازش شده است. بدین منظور، ابتدا شکل کلی مناسب برای تابع برازش، بر مبنای رفتار شناسی داده‌ها و به روش سعی و خطا تعیین شده است. با توجه به مقادیر محاسبه شده برای ضرایب تابع وزن و توضیحات داده شده در بخش‌های قبل، شکل کلی تابع برازش باید به گونه‌ای باشد که برای ترک دایره‌ای (α=1) تابع φ_0 نباشد. علاوه‌براین، با میل β به بی‌نهایت بایستی ضرایب تابع وزن مود II حاصل از تابع برازش به صفر میل نمایند. بهترین تابع برازش شده از بین توابع مورد بررسی به صورت رابطه (۱۵) است:

$$D_j(\alpha,\beta,\varphi_0)=\frac{A(\alpha,\beta)+(1-\alpha)\sum_{n=1}^{5}B_n(\alpha,\beta)\sin^n\varphi_0}{(\alpha^2\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0)^{0.25}} \ , j=I,II \quad (۱۵)$$

که در آن طبق رابطه (۱۶):

$$A(\alpha,\beta)=\frac{A_1(\alpha)}{\beta^{0.25}}+\frac{A_2(\alpha)}{\beta^{0.5}}+\frac{A_3(\alpha)}{\beta^{0.75}}+\frac{A_4(\alpha)}{\beta^{1.5}} \ ,$$

$$A_i(\alpha)=\sum_{m=0}^{3}A_{im}\alpha^m \quad ,i=1..4 \quad (۱۶)$$

و طبق رابطه (۱۷):

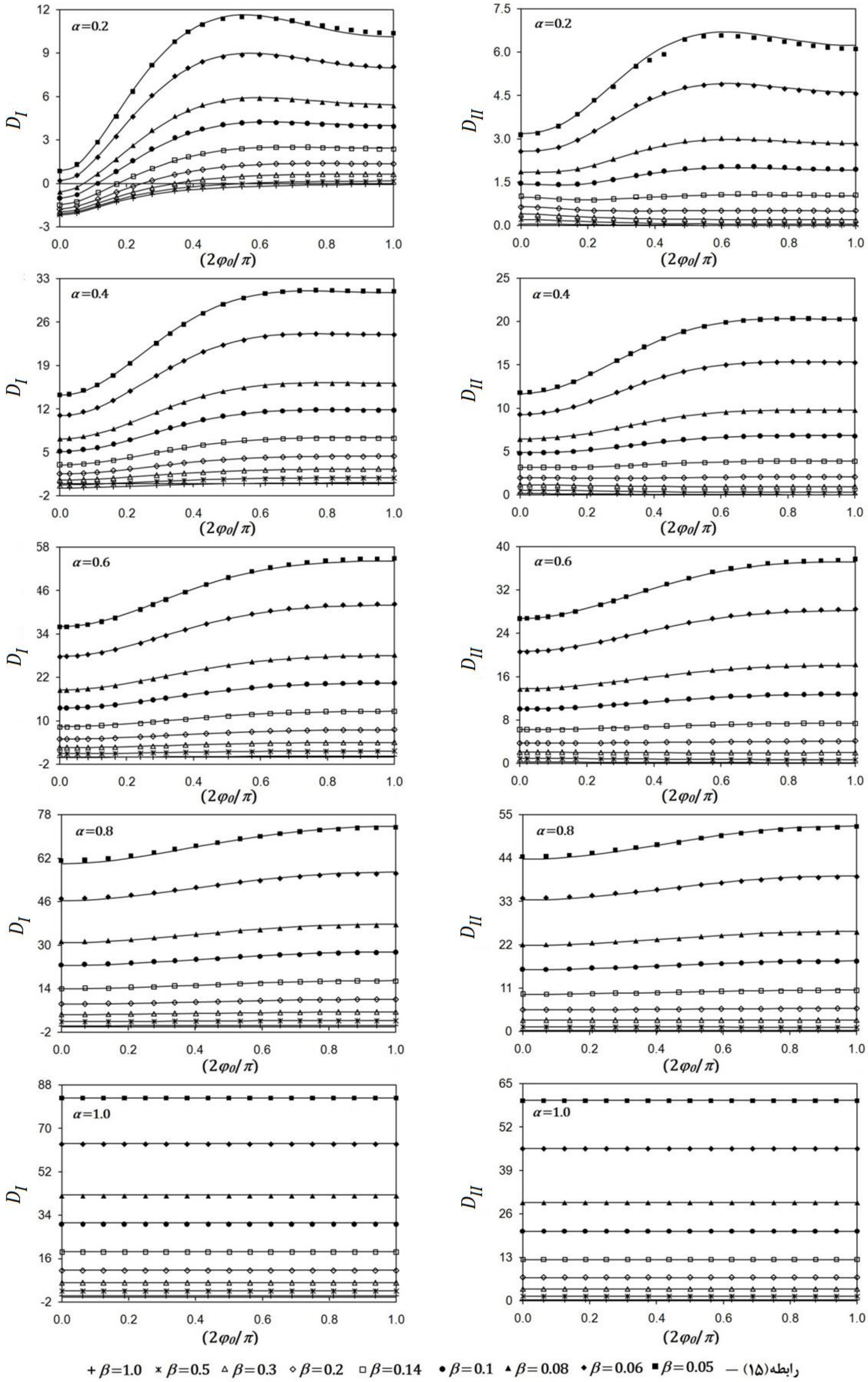
$$B_n(\alpha,\beta)=\frac{B_{n1}(\alpha)}{\beta^{0.25}}+\frac{B_{n2}(\alpha)}{\beta^{0.5}}+\frac{B_{n3}(\alpha)}{\beta^{0.75}}+\frac{B_{n4}(\alpha)}{\beta^{1.5}} \ ,$$

$$B_{ni}(\alpha)=\sum_{m=0}^{2}B_{nim}\alpha^m \quad ,i=1..4 \quad (۱۷)$$

در روابط (۱۶) و (۱۷) A_{im}ها و B_{nim}ها ضرایب ثابت محاسبه شده با استفاده از برازش غیرخطی در نرم‌افزار دیتافیت هستند که در پیوست ارائه شده‌اند. تعداد ضرایب ثابت برای مود I و II به ترتیب برابر ۸۰ و ۷۶ است. برای ارزیابی دقت برازش صورت گرفته، بیشینه خطای نسبی و میانگین خطاهای نسبی داده‌ها محاسبه شده که به ترتیب برابر ۴/۸ و ۰/۹ درصد برای D_I و ۴/۵ و ۰/۸ درصد برای D_{II} می‌باشند. توابع برازش شده رابطه (۱۵) به منظور مقایسه با مقادیر محاسبه شده برای D_I و D_{II} توسط روابط (۱۰)، به صورت خط پیوسته در شکل ۵ رسم شده‌اند. با توجه به مقدار خطاها و نیز مقایسه انجام شده در شکل ۵ می‌توان تطابق تابع برازش و داده‌ها را عالی ارزیابی نمود.

٦- صحه‌گذاری

برای صحه‌گذاری و بررسی کارایی و دقت توابع وزن به دست آمده در تعیین ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری‌های مختلف، و نیز دقت استفاده از رابطه (۱۵) برای مقادیری از α و β که در استخراج آن مورد استفاده قرار نگرفته‌اند، ابتدا D_I و D_{II} برای نقاط مختلف جبهه دو ترک با مشخصات α=0.3، β=0.12 و α=0.7، β=0.07 با استفاده از رابطه (۱۵) محاسبه شد.



شکل ۵ ضرایب توابع وزن مود ترکیبی ترک زیرسطحی بیضوی برای αها، βها و φ_0های مختلف

سپس این دو ترک تحت تنش کششی با توزیع‌های خطی، بیضی‌گون و مثلثاتی قرار گرفته و ضرایب شدت تنش مود ترکیبی آن‌ها به دو روش اجزامحدود و تابع وزن مورد محاسبه قرار گرفت. مدل اجزامحدود مورد استفاده در محاسبه ضرایب شدت این ترک‌ها در مطالعات قبلی [۱۱] صحه‌گذاری شده است. توزیع تنش‌های خطی، بیضی‌گون و مثلثاتی اعمالی به صورت روابط (۱۸) تا (۲۰) هستند:

$$\sigma(x,y)=\sigma(y)=\sigma_0\left(0.5\frac{y}{c}+1\right) \qquad (۱۸)$$

$$\sigma(x,y)=\sigma_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}\right) \qquad (۱۹)$$

$$\sigma(x,y)=2\sigma_0\sin\left(\frac{\pi}{6}(\frac{x}{a}+2)\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}(\frac{y}{c}+1)\right) \qquad (۲۰)$$

هر چند در انتخاب چگونگی توزیع تنش‌ها، جامعیت صحه‌گذاری برای انواع بارگذاری‌های دوبعدی مطرح بوده اما، هر یک از این بارگذاری‌ها می‌تواند در صنعت به عنوان توزیع تنش‌های پسماند ناشی از فرایند ساخت مانند انواع جوشکاری [۱۶] بروز نمایند. علاوه‌براین، صحه‌گذاری توابع وزن استخراجی با استفاده از توزیع تنش‌های جامع و پیچیده، قابلیت استفاده از آن را تحت توزیع تنش‌های ساده‌تر تضمین می‌نماید. ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی تحت توزیع تنش‌های داده شده به روش تابع وزن با استفاده از روابط (۲۱) و مختصات کمکی ارائه شده در بخش ۵-۱ قابل محاسبه است:

$$K_I(\alpha,\beta,\varphi_0)=\iint\limits_A \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}\left(1+D_I(\alpha,\beta,\varphi_0)\left(1-\frac{r(\varphi)}{R(\varphi)}\right)\right)\sigma(\mathrm{x,y})dA$$

$$K_{II}(\alpha,\beta,\varphi_0)=\iint\limits_A \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2}D_{II}(\alpha,\beta,\varphi_0)\left(1-\frac{r(\varphi)}{R(\varphi)}\right)\sigma(\mathrm{x,y})dA \qquad (۲۱)$$

توزیع تنش‌های تعریف شده برای صحه‌گذاری به گونه‌ای تعریف شده‌اند که سطوح ترک تحت آن‌ها در تمامی نقاط دچار بازشدگی گردند. توزیع تنش‌های خطی و بیضی‌گون روابط (۱۸) و (۱۹) به ترتیب دارای یک و دو صفحه تقارن هستند (صفحه yz برای توزیع تنش خطی و صفحات xz و yz برای توزیع تنش بیضی‌گون) درحالی‌که توزیع تنش مثلثاتی رابطه (۲۰) فاقد صفحه تقارن است. بنابراین، در محاسبه ضرایب شدت تنش ناشی از توزیع تنش‌های (۱۸) تا (۲۰)، به ترتیب بازه‌های $1 \le 2\varphi_0/\pi \le 3$، $0 \le 2\varphi_0/\pi \le 1$ و $0 \le 2\varphi_0/\pi \le 4$ لحاظ شده است. مقایسه نتایج اجزامحدود و تابع وزن ترک‌های α=0.3، β=0.12 و α=0.7، β=0.07 تحت توزیع تنش‌های (۱۸) الی (۲۰) در شکل ۶ نشان داده شده است. در نمودارهای مربوطه، ضرایب شدت تنش به صورت بی‌بعد ارائه شده‌اند که برای بی‌بعدسازی از رابطه (۲۲) استفاده شده است.

$$K_{jn}(\alpha,\beta,\varphi_0)=\frac{K_j(\alpha,\beta,\varphi_0)}{\dfrac{\sigma_0\sqrt{\pi c}}{E(\alpha)}} \;,\; j=I,II \qquad (۲۲)$$

برای ارزیابی کمی دقت تابع وزن در تعیین ضرایب شدت تنش، میانگین خطای نسبی بین نتایج اجزامحدود و تابع وزن برای توزیع تنش‌های مختلف محاسبه و در جدول ۱ آورده شده است. درصد میانگین خطای نسبی نتایج حاصل از توابع وزن استخراجی در این مطالعه نسبت به نتایج اجزمحدود زیر ۷ درصد قرار دارد. با استفاده از نمودارهای شکل ۶ و نیز مقادیر خطای محاسبه شده می‌توان نتیجه گرفت که تابع وزن استخراج شده به همراه رابطه (۱۵) از دقت بسیار بالایی در تعیین ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی با هر مقداری از α و β برخوردارند.

مطالعات نشان می‌دهد که حداکثر مقادیر ضرایب شدت تنش مود I و II ترک زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری کششی یکنواخت در نقطه $\varphi_0=\pi/2$ رخ می‌هد [۱۱]. همان‌طورکه در نمودارهای مربوط به توزیع تنش‌های خطی و بیضی‌گون در شکل ۶ نیز ملاحظه می‌شود، نقطه بحرانی مود I و II برای این بارگذاری‌ها، نقطه روی قطر کوچک بیضی است. اما برای بارگذاری مثلثاتی، نقطه بحرانی به نقطه φ_0=3.09π/2 برای ترک α=0.3، β=0.12 و φ_0=3.11π/2 برای ترک α=0.7، β=0.07 جابه‌جا شده است. با توجه به این‌که صفحه zy، صفحه تقارن هر دو بارگذاری خطی و بیضی‌گون است، تغییر نکردن نقطه بحرانی ترک توجیه می‌یابد. اما در مورد بارگذاری مثلثاتی، با توجه به عدم وجود صفحه تقارن، نقطه بحرانی کمی جابه‌جا شده است.

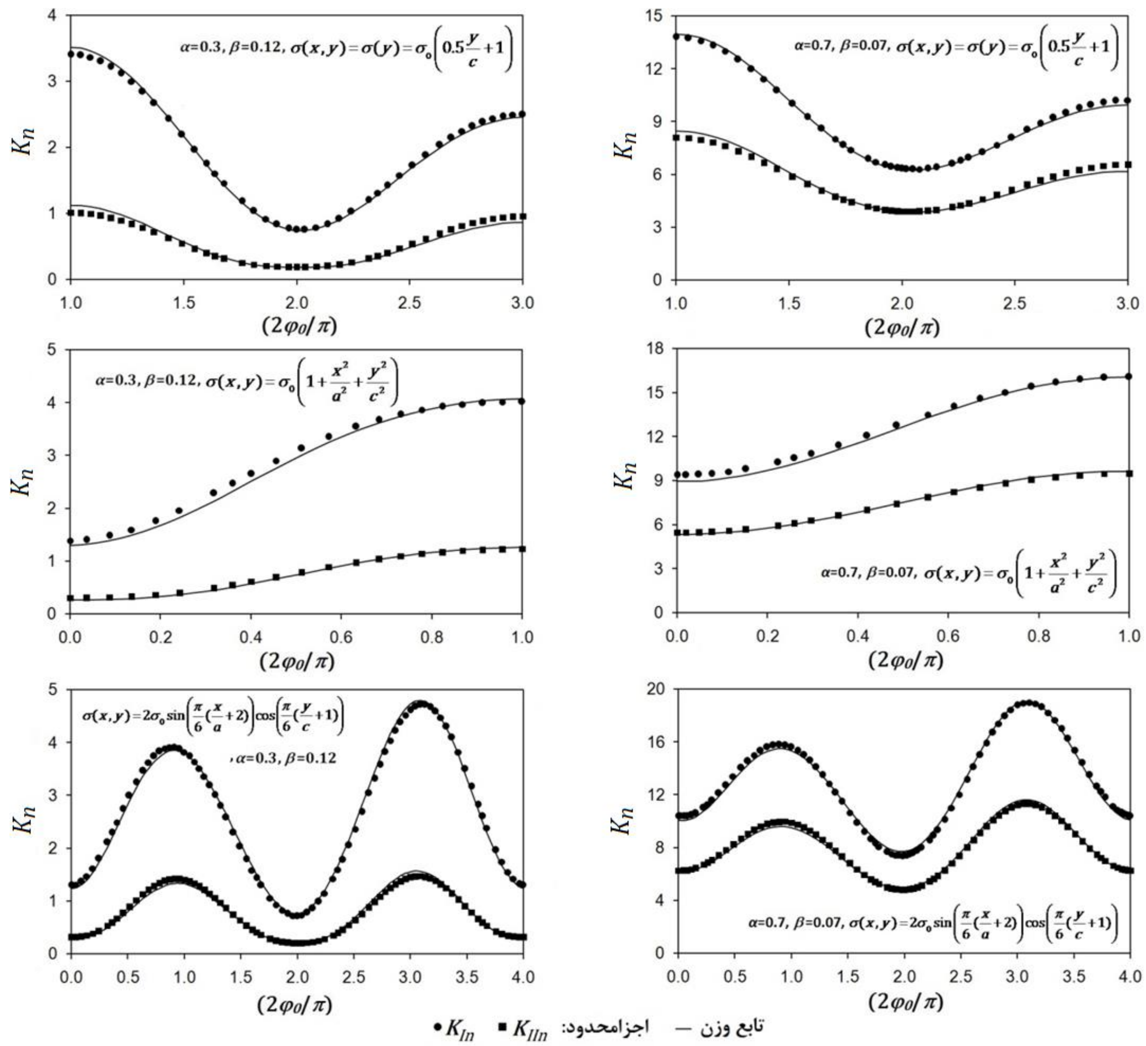
نقطه بحرانی در ترک‌های بیضوی تابع هندسه بیضی و بار اعمالی است. هندسه بیضی موجب می‌شود که حداکثر مقادیر ضرایب شدت تنش مودهای I و II روی نقاط قطر کوچک بیضی رخ دهد. اما توزیع بارگذاری روی ترک بر محل نقطه بحرانی ترک مؤثر بوده و می‌تواند محل نقاط بحرانی ترک را تغییر دهد. این تأثیر از آن‌جا دارای اهمیت است که نمی‌توان همواره به محاسبه ضریب شدت تنش نقطه خاصی از جبهه ترک (نقطه بحرانی) بسنده نمود. به عبارت دیگر، بایستی برای لحاظ نمودن بحرانی‌ترین نقطه جبهه ترک که در حالت کلی مشخص نیست، ضرایب شدت تنش تمام نقاط را محاسبه نمود. این امر یکی از ابعاد لزوم استفاده از توابع وزن دوبعدی را آشکار می‌سازد.

یکی از مهم‌ترین مزایای استفاده از روش تابع وزن نسبت به سایر روش‌های عددی همچون اجزامحدود، سرعت بالای این روش در محاسبه ضرایب شدت تنش است. به همین دلیل این روش در مواردی که بایستی تعداد زیادی ترک با ضرایب منظر مختلف مورد بررسی قرار گیرند، مانند تحلیل خستگی ترک‌ها، بسیار کارا می‌باشد. برای ارزیابی میزان بالا بودن سرعت این روش در مقایسه با روش اجزامحدود در مطالعه حاضر، فقط زمان محاسبه (نه مدل‌سازی) ضرایب شدت تنش ترک با α=0.3 و β=0.12 تحت یک بارگذاری خاص با استفاده از هر یک از روش‌ها در یک رایانه مشخص اندازه‌گیری شد. اجزامحدود این محاسبه را در زمان حدود ۲ ساعت انجام داد درحالی‌که تابع وزن آن را در ۲ دقیقه به انجام رسانید. بنابراین، می‌توان گفت، در مورد مسئله مورد مطالعه در این مقاله، تابع وزن ۶۰ برابر سریع‌تر از اجزامحدود است.

نسبت $K_{IIn,max}/K_{In,max}$ برای ترک با مشخصات α=0.3، β=0.12 و α=0.7، β=0.07 تحت بارگذاری‌های خطی، بیضی‌گون و مثلثاتی به ترتیب برابر با ۳۰ و ۵۹ درصد می‌باشد. این نسبت‌ها نشان می‌دهند که، در شرایطی که ترک تنها تحت بار کششی است، مود برشی قابل ملاحظه‌ای نسبت به مود کششی امکان بروز یافته است. این پدیده که همان کوپلینگ مودهاست، با نزدیک‌تر شدن ترک به سطح بیشتر نیز می‌شود. مقادیر ضرایب شدت تنش مود II ترسیم شده در شکل ۶ اهمیت این پدیده را به وضوح نشان داده و صرف‌نظر از آن را در تحلیل‌های خستگی و شکست مجاز نمی‌داند. از طرفی با توجه به ثابت ماندن نسبت ضرایب شدت تنش بیشینه مود II به مود I تحت سه بارگذاری مختلف می‌توان نتیجه گرفت که پدیده کوپلینگ در ترک‌های زیرسطحی بحثی هندسی بوده و تابع بارگذاری نیست.

جدول ۱ درصد میانگین خطای نسبی بین نتایج اجزا محدود و توابع وزن

توزیع تنش	α=0.3, β=0.12		α=0.7, β=0.07	
	K_{In}	K_{IIn}	K_{In}	K_{IIn}
خطی – رابطه (۱۸)	۱/۹	۶/۸	۰/۹	۲/۸
بیضی‌گون – رابطه (۱۹)	۳/۶	۵/۴	۲/۳	۱/۳
مثلثاتی – رابطه (۲۰)	۳/۳	۵/۷	۲/۲	۱/۸



شکل ۶ مقایسه ضرایب شدت تنش بی‌بعد محاسبه شده با استفاده از روش اجزامحدود و تابع وزن دوبعدی برای توزیع تنش‌های خطی، بیضی‌گون و مثلثاتی

افزایش α و کاهش β باعث افزایش اثر پدیده کوپلینگ می‌شود. بنابراین، بیشتر بودن ضریب منظر ترک دوم و کمتر بودن عمق آن نسبت به ترک اول در دو برابر بودن نسبت $K_{IIn,max}/K_{In,max}$ برای ترک دوم نسبت به ترک اول سهم دارند.

نهایتاً با توجه به دقت توابع وزن استخراج شده در تعیین ضرایب شدت تنش ترک‌های زیرسطحی بیضوی می‌توان نتیجه گرفت که، با استفاده از این توابع می‌توان ضرایب شدت تنش مود ترکیبی همه نقاط جبهه ترک‌های زیرسطحی بیضوی را با هر ضریب منظر و هر عمقی تحت هر بار کششی دلخواه با دقت و سرعت بالا محاسبه نمود. این قابلیت به خصوص در مطالعات خستگی بسیار کارا و قابل استفاده خواهد بود.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از ضرایب شدت تنش مرجع مودهای I و II ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری کششی یکنواخت، توابع وزن دوبعدی مود ترکیبی آن‌ها تحت بارگذاری کششی برای مقادیر مختلف ضریب منظر ترک و نسبت عمق به طول ترک استخراج شد. رابطه صریحی با دقت بالا برای ضرایب تابع وزن بر حسب نقطه مورد نظر از جبهه ترک و α و β ارائه گردید که امکان درون‌یابی ضرایب برای تمامی مقادیر α، β و φ_0 را فراهم می‌نماید.

توزیع تنش‌های خطی و غیرخطی برای مقادیر متفاوت α و β ترک، به سطوح ترک اعمال و ضرایب شدت تنش مود ترکیبی آن محاسبه گردید. میانگین خطای نسبی بین نتایج اجزامحدود و تابع وزن برای تمامی نقاط جبهه دو ترک بیضوی تحت سه بارگذاری مختلف زیر ۷ درصد گزارش شد که نشان دهنده تطابق بسیار عالی نتایج تابع وزن و اجزامحدود می‌باشد. این درحالی است که در کنار دقت بالا، برای مسئله حاضر، سرعت تابع وزن ۶۰ برابر اجزامحدود ارزیابی شد. پدیده کوپلینگ مودها در ترک‌های مورد مطالعه یک بحث هندسی و مستقل از بارگذاری ارزیابی شد. مود II ناشی از پدیده کوپلینگ در β=0.07 برای α=0.7، تقریباً ۶۰ درصد مود کششی محاسبه شد که نشان‌دهنده اهمیت لحاظ نمودن این پدیده در مطالعات شکست و خستگی است. همچنین نتایج نشان داد که نقطه بحرانی جبهه ترک زیرسطحی بیضوی می‌تواند متأثر از توزیع بارگذاری باشد.

نهایتاً می‌توان نتیجه گرفت که، تابع وزن ارائه شده قادر است تحت توزیع تنش‌های دوبعدی پیچیده که قابل بروز در کاربردهای صنعتی است، ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی را با دقت و سرعت بالا محاسبه نماید.

۸- فهرست علایم

a	نیم قطر بزرگ بیضی، طول ترک
a_{1i}	ضرایب تابع ضریب شدت تنش مرجع مود I

a_{2i}	ضرایب تابع ضریب شدت تنش مرجع مود II
A	ناحیه سطح ترک
$A(\alpha,\beta)$	ضرایب توابع برازش
$A_i(\alpha)$	ضرایب توابع برازش
A_{im}	ضرایب ثابت توابع برازش
b_{1i}	ضرایب تابع ضریب شدت تنش مرجع مود I
b_{2i}	ضرایب تابع ضریب شدت تنش مرجع مود II
B_{nim}	ضرایب ثابت توابع برازش
c	نیم قطر کوچک بیضی
c_{2i}	ضرایب تابع ضریب شدت تنش مرجع مود II
d_1	ضریب تابع ضریب شدت تنش مرجع مود I
d_2	ضریب تابع ضریب شدت تنش مرجع مود II
D_i	ضرایب تابع وزن دوبعدی
D_I	ضریب تابع وزن دوبعدی مود I ترک بیضوی
D_{II}	ضریب تابع وزن دوبعدی مود II ترک بیضوی
$E(\alpha)$	انتگرال نوع دوم بیضی
h	عمق ترک
$L(x,y)$	نقطه بارگذاری روی سطح ترک بیضوی
K_I	ضریب شدت تنش مود I ($MPa.m^{1/2}$)
K_{In}	ضریب شدت تنش بی‌بعد مود I
$K_{In,max}$	بیشینه ضریب شدت تنش بی‌بعد مود I
K_{Ir}	ضریب شدت تنش مرجع مود I ($MPa.m^{1/2}$)
K_{II}	ضریب شدت تنش مود II ($MPa.m^{1/2}$)
K_{IIn}	ضریب شدت تنش بی‌بعد مود II
$K_{IIn,max}$	بیشینه ضریب شدت تنش بی‌بعد مود II
K_{IIr}	ضریب شدت تنش مرجع مود II ($MPa.m^{1/2}$)
$Q(\varphi_0)$	نقطه‌ای از جبهه ترک بیضوی
$r(\varphi)$	فاصله نقطه L از مرکز ترک بیضوی
$R(\varphi)$	فاصله نقطه متناظر L روی جبهه ترک از مرکز ترک بیضوی
s	فاصله نقطه L از جبهه ترک بیضوی
$W_I(x,a)$	تابع وزن یک‌بعدی مود I
$W_I(x,y,\varphi_0)$	تابع وزن دوبعدی مود I ترک بیضوی
$W_{II}(x,y,\varphi_0)$	تابع وزن دوبعدی مود II ترک بیضوی

علایم یونانی

α	ضریب منظر ترک
β	نسبت عمق ترک به طول آن
φ	زاویه متناظر با نقطه L
φ_0	زاویه جبهه ترک
ρ	فاصله نقطه L از نقطه Q
σ_0	تنش کششی یکنواخت (MPa)
$\sigma(x)$	توزیع تنش کششی یک‌بعدی (MPa)
$\sigma(x,y)$	توزیع تنش کششی دوبعدی (MPa)

۹- پیوست

۱- ضرایب ثابت روابط (۷) [۱۱]:

$$a_{11} = -0.22657\alpha^3 + 0.12954\alpha^2 + 0.41891\alpha - 0.03170$$
$$a_{12} = -0.35191\alpha^3 + 0.73947\alpha^2 - 0.10929\alpha + 0.00553$$
$$b_{11} = -1.26627\alpha^3 + 2.38695\alpha^2 - 1.46677\alpha + 1.99229$$
$$b_{12} = -1.11616\alpha^3 + 1.86069\alpha^2 - 0.52788\alpha + 1.44869$$
$$d_1 = +0.99790\alpha^3 - 2.23270\alpha^2 + 1.69895\alpha + 0.34846$$
$$a_{21} = (+0.26790\alpha^2 - 1.98561\alpha - 0.05276)^{-1}$$
$$a_{22} = (-0.85066\alpha^2 + 1.68969\alpha - 2.71593)^{-1}$$
$$b_{21} = (+0.86184\alpha^2 - 1.77185\alpha - 0.35303)^{-1}$$
$$b_{22} = (-0.30154\alpha^2 - 0.75410\alpha - 0.17661)^{-1}$$
$$c_{21} = (+0.03188\alpha^2 + 0.16904\alpha + 1.13696)^{-1}$$
$$c_{22} = (+0.30338\alpha^2 - 0.63083\alpha + 1.65343)^{-1}$$
$$d_2 = -0.43182\alpha^3 + 0.64669\alpha^2 + 1.66807$$

۲- ضرایب ثابت روابط (۱۶) و (۱۷) برای D_I:

$$A_{im} = \begin{bmatrix} -3.01154 & 1.92519 & 31.22797 & -33.96749 \\ 3.73639 & 6.92323 & -106.59032 & 109.02282 \\ -3.60947 & -5.13682 & 97.71597 & -105.97812 \\ 1.10213 & 1.43568 & -28.59324 & 33.73228 \\ 0.07205 & -0.82683 & 2.74670 & -1.29655 \end{bmatrix}$$

$$B_{1im} = \begin{bmatrix} 1.02834 & 37.54864 & -74.18393 \\ 1.66335 & -99.42857 & 179.27974 \\ -2.55851 & 62.21605 & -105.95042 \\ 0.15530 & -2.55081 & 4.03953 \end{bmatrix}$$

$$B_{2im} = \begin{bmatrix} 28.88420 & -379.10750 & 640.13464 \\ -41.54847 & 823.18169 & -1434.00121 \\ 25.75844 & -486.80586 & 829.92741 \\ -1.01696 & 21.19961 & -31.48329 \end{bmatrix}$$

$$B_{3im} = \begin{bmatrix} -59.35302 & 1041.31585 & -1770.73668 \\ 96.50845 & -2270.67059 & 3944.63745 \\ -66.84058 & 1341.83095 & -2277.57685 \\ 2.55265 & -49.41203 & 81.85634 \end{bmatrix}$$

$$B_{4im} = \begin{bmatrix} 51.77380 & -1116.74804 & 1956.95123 \\ -101.36809 & 2470.88276 & -4367.11313 \\ 76.63010 & -1467.39565 & 2520.95609 \\ -3.45934 & 51.93034 & -87.99084 \end{bmatrix}$$

$$B_{5im} = \begin{bmatrix} -18.32160 & 423.49768 & -757.71866 \\ 41.92657 & -950.61364 & 1697.22670 \\ -32.65838 & 568.00015 & -981.17187 \\ 1.70809 & -20.98892 & 34.92604 \end{bmatrix}$$

۳- ضرایب ثابت روابط (۱۶) و (۱۷) برای D_{II}:

$$A_0(\alpha) = 0$$

$$A_{im} = \begin{bmatrix} -2.14577 & 15.57413 & -32.30237 & 20.47058 \\ 4.13977 & -30.18985 & 58.04527 & -35.42184 \\ -2.16483 & 16.00954 & -28.21370 & 15.86908 \\ 0.13222 & -1.09122 & 2.56527 & -0.96001 \end{bmatrix}$$

$$B_{1im} = \begin{bmatrix} 11.16217 & -65.07357 & 80.25297 \\ -20.43750 & 119.91671 & -148.81454 \\ 9.75691 & -57.80666 & 72.77029 \\ -0.33686 & 2.12273 & -2.85793 \end{bmatrix}$$

$$B_{2im} = \begin{bmatrix} -15.30024 & 7.30926 & 2.89060 \\ 29.07765 & -18.77079 & 17.64314 \\ -15.20041 & 17.62449 & -34.80522 \\ 0.81862 & -2.98550 & 7.77269 \end{bmatrix}$$

$$B_{3im}=\begin{bmatrix} -1.54154 & 247.81151 & -252.82609 \\ -4.56702 & -381.85812 & 340.71866 \\ 9.93051 & 110.63663 & -45.05547 \\ -2.09300 & 12.21576 & -22.67680 \end{bmatrix}$$

$$B_{4im}=\begin{bmatrix} -0.17560 & -238.21444 & 192.17327 \\ 11.97243 & 318.70452 & -169.84688 \\ -16.54271 & -46.73694 & -81.30951 \\ 2.79497 & -19.60056 & 33.43768 \end{bmatrix}$$

$$B_{5im}=\begin{bmatrix} 5.05261 & 54.96535 & -17.39994 \\ -14.42527 & -49.43838 & -47.45815 \\ 11.33957 & -20.08438 & 90.69072 \\ -1.22912 & 8.78980 & -15.06580 \end{bmatrix}$$

۱۰- مراجع

[1] I. V. Orynyak, Method of translations for elliptic mode I cracks in infinite bodies. Part 1. Polynomial loads, *Strength of Materials,* Vol. 29, pp. 644-660, 1977.

[2] I. V. Orynyak, Method of translations for a mode I elliptic crack in an infinite body. Part II. Expantion of the fundamental solution into a series, *International Journalof Solids and Structures,* Vol. 35, pp. 3043-3052, 1998.

[3] A. J. Krasowsky, I. V. Orynyak, A. Yu. Gienko, Approximate closed form weight function for an elliptical crack in an infinite body, *International Journal of Fracture,* Vol. 99, pp. 117-130, 1998.

[4] A. Roy, T. K. Saha, Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. I. Normal loading, *International Journal of Fracture,* Vol. 103, pp. 227-241, 2000.

[5] A. Roy, T. K. Saha, Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. II. Shear loading, *International Journalof Solids and Structures,* Vol. 112, pp. 1-21, 2001.

[6] X. Wang, G. Glinka, Determination of approximate point load weight functions for embedded elliptical cracks, *International Journal of Fatigue,* Vol. 31, pp. 1816-1827, 2009.

[7] S. Deng, X. Han, X. Qin, S. Huang, Subsurface crack propagation under rolling contact fatigue in bearing ring, *Science China Technological Sciences*, Vol. 56, No. 10, pp. 2422-2432, 2013.

[8] R. Ghajar, J. Alizadeh K., Prediction of the subsurface crack growth lifetime in railroad wheel of the Iranian railway system, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology,* Vol. 13, pp. 11-24, 2010. (In Persian)

[9] A. Mazzu, A mode II weight function for subsurface cracks in a two-dimensional half-space, Fatigue *and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 25, pp. 911–916, 2002.

[10] M. Beghini, L. Bertini, V. Fontanari, A weight function for 2D subsurface cracks under general loading conditions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, pp. 427-439, 2008.

[11] R. Ghajar, J. Alizadeh K., Mixed mode stress intensity factors for elliptical subsurface cracks in an elastic half-space subjected to a uniform normal loading, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 34, pp. 1199–1208, 2013.

[12] H. F. Bueckner, A novel principle for the computation of stress intensity factors, *Z Angew Math Mech*, Vol. 50, pp. 529–546, 1970.

[13] J. Rice, Some remarks on elastic crack-tip stress field, *International Journalof Solids and Structures*, Vol. 8, pp. 751–758, 1972.

[14] R. Ghajar, H. Saeidi Googarchin, General point load weight function for semi-elliptical crack in finite thickness plates, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 109, pp. 33–44, 2013.

[15] H. Saeidi Googarchin, R. Ghajar, Stress intensity factors calculation for surface crack in cylinders under longitudinal gradient pressure using general point load weight function, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 37, pp. 184–194, 2013.

[16] R. S. Parmar, *Welding engineering and technology*, 4th Edition, Dehli, Khanna publishers, 2005.