



## تحلیل لنگ‌زنی آزاد محور دوار تیموشنکو چندپله‌ای با چندین تکیه‌گاه به روش المان تفاضلات مربعی

حسن افشاری<sup>1</sup>، محسن ایرانی رهقی<sup>2\*</sup>، کیوان ترابی<sup>2</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان  
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان  
\*کاشان، کد پستی 87317-51167، irani@kashanu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 24 دی 1392  
پذیرش: 26 بهمن 1392  
ارائه در سایت: 05 مهر 1393  
کلید واژگان:  
لنگ‌زنی  
محور پله‌دار  
تئوری تیر تیموشنکو  
روش المان تفاضلات مربعی

### چکیده

در این پژوهش با استفاده از روش المان تفاضلات مربعی، ارتعاشات عرضی محور چندپله‌ای با چند تکیه‌گاه بررسی شده است. به منظور افزایش دقت مدل‌سازی از مدل تیر تیموشنکو استفاده شده است. با هدف جامعیت بخشیدن به مدل‌سازی تکیه‌گاه‌ها، هر یک از آن‌ها توسط چهار فنر مدل‌سازی شده‌اند؛ دو فنر طولی و دو فنر پیچشی که دو به دو در دو صفحه عمود بر راستای محور عمل می‌کنند. معادلات حاکم، شرایط سازگاری در مقاطع پله‌دار و تکیه‌گاه‌ها و همچنین شرایط مرزی استخراج شده و با استفاده قوانین روش تفاضلات مربعی معادل‌سازی و حل شده‌اند. پس از حل معادلات، ابتدا همگرایی و اعتبار روش از طریق مقایسه نتایج با حل دقیق ارائه شده بررسی شده‌اند؛ سپس منحنی تغییرات فرکانس حرکت لنگ‌زنی بر حسب سرعت دوران محور (منحنی کمپیل) برای یک مثال رسم شده است. مزیت اصلی روش استفاده شده سرعت بالای آن به دلیل حجم کمتر محاسبات در مقایسه حل‌های دقیق می‌باشد؛ به‌ویژه برای محوره‌ای دارای تعداد زیاد مقطع پله‌دار و تکیه‌گاه که به دلیل حجم بالای محاسبات در تحلیل‌های دقیق ارائه شده عملاً توسط این تحلیل‌ها غیرقابل حل می‌باشند.

## Free whirling analysis of multi-step Timoshenko rotor with multiple bearing using DQEM

Hassan Afshari, Mohsen Irani\*, Keivan Torabi

Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran  
\*P.O.B. 87317-51167 Kashan, Iran, irani@kashanu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 14 January 2014  
Accepted 15 February 2014  
Available Online 27 September 2014

### Keywords:

Whirling, Multi-step  
Timoshenko Beam Theory  
Differential Quadrature Element Method  
(DQEM)

### ABSTRACT

In this paper, differential quadrature element method (DQEM) is used to analyze the free transverse vibration of multi-stepped rotors resting on multiple bearings. In order to increase the accuracy of the model, Timoshenko beam theory is used; also in order to generalization of the modeling of the bearings, each bearing is replaced with four springs; two translational and two rotational acting on two perpendicular directions. Governing equations, compatibility conditions at the each step and each bearing and external boundary conditions are derived and formulated by the differential quadrature rules. First, convergence and versatility of the proposed method are tested by the presented exact solutions. Then, the Campbell diagram is derived for a desired case study and variation of natural frequencies is investigated versus angular velocity of spin. The most advantage of the proposed method is being less time-consuming in comparison with the other methods, especially for cases with high number of steps and bearings which are unsolvable by exact methods.

### 1- مقدمه

برشی و اینرسی دورانی قابل صرف‌نظر نخواهند بود؛ با در نظر گرفتن این دو عامل مدل کامل‌تری به نام مدل تیر تیموشنکو معرفی شده است. نکته‌ی دیگری که باید به آن اشاره نمود این است که به دلیل تقریب‌های صورت گرفته مدل تیر اویلر-برنولی قادر به مدل‌سازی اثر ژبروسکویی در تیرهای دوار نمی‌باشد؛ در حالی که این اثر در مدل تیر تیموشنکو به راحتی نمایان خواهد شد [1].

فرکانس‌های طبیعی، سرعت‌های بحرانی و شکل مودهای محوره‌ای دوار جنبه‌های مهمی در طراحی و تحلیل ارتعاشات اجباری محوره‌ها می‌باشند. از کاربردهای مبحث دینامیک محوره‌ها می‌توان به محوره‌ای دوار، توربین‌ها، پمپ‌ها و تجهیزات مورد استفاده در صنایع هوا-فضا اشاره نمود. برای تیرهای بلند مدل تیر اویلر-برنولی دارای دقت مناسبی می‌باشد ولی برای تیرهای کوتاه این تئوری دقت لازم را ندارد زیرا در چنین تیرهایی اثرات تغییر شکل

داشتند [24-29]. همچنین حسینی هاشمی و خرمی [30] با استفاده از این روش ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نسبتاً ضخیم FGM را بررسی کردند. بر اساس روش تفاضلات مربعی و با هدف گسترش روش برای تحلیل مسائلی که دارای ناپیوستگی‌های محلی هستند، روش المان مربع‌سازی دیفرانسیلی ایجاد شد. این روش نیز در بسیاری از تحقیقات به‌خصوص تحلیل ارتعاشات به‌کار گرفته شد [31-37]. چن [31-34] سهم زیادی در گسترش این روش داشت؛ وی از این روش برای تحلیل ارتعاشات ورق‌های دایره‌ای ضخیم [31]، ارتعاشات تیرهای غیرمنشوری ضخیم بر روی بستر الاستیک [32] و ارتعاشات در صفحه و خارج از صفحه تیرهای انحنادار ضخیم [33,34] استفاده نمود. ملک‌زاده و همکاران [35] با استفاده از این روش حل نیمه تحلیلی برای ارتعاشات ورق ضخیم با دو لبه رو در روی ساده ارائه نمودند. اخیراً ترابی و همکاران [36-38] با استفاده از روش المان تفاضلات مربعی مسائل مختلفی را در زمینه ارتعاشات تیرهای تیموشنکو غیریکنواخت بررسی نموده‌اند که از آن جمله می‌توان به ارتعاشات تیر با چندین جرم متمرکز [36]، ارتعاشات پره چرخان با چندین ترک [37] و ارتعاشات تیر با چندین ترک تحت شرایط مرزی مختلف [38] اشاره نمود.

از آنجایی که روش المان تفاضلات مربعی روشی مناسب برای تحلیل مسائل دارای ناپیوستگی محلی می‌باشد، در این پژوهش با استفاده از این روش ارتعاشات عرضی محور چندپله‌ای با چند تکیه‌گاه بررسی شده است. همگرایی و اعتبار روش از طریق مقایسه نتایج با حل دقیق ارائه شده، بررسی شده‌اند و سپس منحنی تغییرات فرکانس حرکت لنگ‌زنی بر حسب سرعت دوران محور (منحنی کمپبل) برای چند مثال مختلف رسم شده است.

## 2- روش تفاضلات مربعی

بر اساس روش تفاضلات مربعی، مشتقات یک تابع از هر مرتبه‌ای را در نقطه‌ای دلخواه مانند  $x=X_i$  می‌توان بر حسب مقادیر تابع در تمامی بازه به شکل نشان داده شده در معادله (1) بازنویسی کرد:

$$\left. \frac{d^r f}{dx^r} \right|_{x=X_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} f_j \quad (1)$$

که در این رابطه  $f_j$  بر اساس معادله (2) در نظر گرفته شده است:

$$f_j = f(x_j) \quad (2)$$

$A^{(r)}$  ماتریس‌های وزنی می‌باشند که بر اساس معادله (3) تعریف شده‌اند [27]:

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\prod_{m=1, m \neq i}^N (X_i - X_m)}{\prod_{m=1, m \neq j}^N (X_j - X_m)} & i, j = 1, 2, 3, \dots, N; i \neq j \\ \sum_{m=1, m \neq i}^N (X_i - X_m)^{-1} & i = j = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (3)$$

$$A^{(r)} = A^{(1)} A^{(r-1)} \quad 2 \leq r \leq N-1$$

یکی از مهم‌ترین نکات در همگرایی مسئله مسئله، علاوه بر تعداد نقاط، چگونگی توزیع نقاط در دامنه حل آن است. بهترین نوع توزیع نقاطی که تاکنون ارائه شده است، توزیع چیشف-گوس-لوباتو می‌باشد که برای بازه [0-1] از معادله (4) محاسبه می‌شود:

گریبوس [2] اثر تغییر شکل برشی را روی سرعت‌های بحرانی محورها بررسی نمود. چوی و همکاران [3] معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی در دو صفحه و ارتعاشات پیچشی یک محور با ممان اینرسی نامشابه در دو صفحه تحت نیروی محوری فشاری را مورد بررسی قرار دادند. سرعت‌های بحرانی لنگ‌زنی و شکل موده‌های محور رایلی نامتقارن یکنواخت با دیسک‌های صلب و تکیه‌گاه‌های ایزوتروپیک توسط جی و لی [4] بررسی شد. سینگ و جو [5] ارتعاشات آزاد میرای سیلندر استوانه‌ای کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. استورلا و آرجنتو [6] روی ارتعاشات آزاد و اجباری محور رایلی ویسکوالاستیک متمرکز شدند. بر اساس تئوری‌های تیر و پوسته و در نظر گرفتن میرایی داخلی، ملانسون و زو [7] ارتعاشات میرای آزاد و پایداری محورها با شرایط مرزی عمومی را مورد بررسی قرار دادند. جون و کیم [8] ارتعاشات خمشی محور تحت کویل پیچشی ثابت را تحلیل کردند؛ آن‌ها محور را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو مدل کردند و اثر ژبروسکوپی را در نظر گرفتند. تحلیل دینامیکی المان محدود سیستم محور-تکیه‌گاه توسط محی-الدین و خولیف [9] انجام گرفت. آن‌ها مدل الاستودینامیک حرکت جفت شده خمشی و پیچشی را با در نظر گرفتن اثر ژبروسکوپی برای محور دوار استخراج نمودند. تحلیل ارتعاشات محور کامپوزیتی گوه‌ای شکل توسط کیم و همکاران [10] ارائه شد. کاروندیران و زو [11] بر روی تحلیل ارتعاشات محور با تکیه‌گاه‌های ارتجاعی متمرکز شدند. تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم محور-دیسک واقع شده روی تکیه‌گاه‌های الاستیک توسط شبانه و زو [12] انجام گرفت.

المهدی و قادرلب [13] ارتعاشات محور کامپوزیتی با لایه‌های ناهم‌راستا را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حاکم بر ارتعاشات محور تیموشنکو با اینرسی‌های دورانی نابرابر در دو راستا توسط رافا و واتا [14] استخراج شدند. با استفاده از مدل تیر تیموشنکو، گو و چنگ [15] پاسخ دینامیکی یک اسپیندل با سرعت خیلی بالا، حامل جرم‌های متمرکز را مورد بررسی قرار دادند. بهزاد و بسطامی [16] تاثیر چرخش محور بر فرکانس‌های آن را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی را با در نظر گرفتن اثر ژبروسکوپی، نیروی محوری و اثر پواسون بررسی کردند. شو و یانگ [17] تحلیل ارتعاشات آزاد محور رایلی را برای شش شرط مرزی معمول ارائه کردند و فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های متناظر را به‌دست آوردند. با هدف تحلیل ارتعاشات جفت‌شده خمشی و پیچشی، بنرجی و سو [18] ماتریس سفتی دینامیکی تیر کامپوزیتی دوار را استخراج نمودند. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، حسینی و خادم [19] ارتعاشات آزاد محور با تکیه‌گاه‌های ساده را با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی موجود در انحنا و اینرسی مورد مطالعه قرار دادند. با استفاده از تئوری سه‌بعدی لایه‌ای، دانشجو و همکاران [20] ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دوار با تقویت کننده‌های متعامد تحت بار محوری یکنواخت و فشار داخلی را تحلیل و بررسی کردند. ارزنگ‌پی و همکاران [21] با استفاده از روش بدون المان محلی پتروف-گالرکین ارتعاشات پوسته استوانه‌ای FGM را مورد بررسی قرار دادند.

روش تفاضلات مربعی یکی از روش‌های عددی است که در سال 1972 توسط بلمن و همکاران ارائه شد [22] و توسط بلمن و روث گسترش داده شد [23]. پس از آن محققان زیادی از این روش برای حل مسائل گوناگون مهندسی استفاده کردند که از آن جمله می‌توان به برت و همکاران اشاره کرد که تاثیر به‌سزایی در گسترش این روش و استفاده از آن در تحلیل سازه

$$kGA \left[ \frac{\partial \varphi_x(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_y(z,t)}{\partial z^2} \right] - \rho A \frac{\partial^2 u_y(z,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$EI \frac{\partial^2 \varphi_x(z,t)}{\partial z^2} - kGA \left[ \varphi_x(z,t) + \frac{\partial u_y(z,t)}{\partial z} \right]$$

$$- \rho I \frac{\partial^2 \varphi_x(z,t)}{\partial t^2} - 2\rho I \Omega \frac{\partial \varphi_y(z,t)}{\partial t} = 0,$$

$$EI \frac{\partial^2 \varphi_y(z,t)}{\partial z^2} - kGA \left[ \varphi_y(z,t) - \frac{\partial u_x(z,t)}{\partial z} \right]$$

$$- \rho I \frac{\partial^2 \varphi_y(z,t)}{\partial t^2} + 2\rho I \Omega \frac{\partial \varphi_x(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

برای زیرتیر  $m$ ام معادله (8) را می‌توان به‌صورت معادله (9) بیان نمود:

$$kGA_m \left[ \frac{\partial \varphi_y^{(m)}(z_m,t)}{\partial z_m} - \frac{\partial^2 u_x^{(m)}(z_m,t)}{\partial z_m^2} \right] + \rho A_m \frac{\partial^2 u_x^{(m)}(z_m,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$kGA_m \left[ \frac{\partial \varphi_x^{(m)}(z_m,t)}{\partial z_m} + \frac{\partial^2 u_y^{(m)}(z_m,t)}{\partial z_m^2} \right] - \rho A_m \frac{\partial^2 u_y^{(m)}(z_m,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$EI_m \frac{\partial^2 \varphi_x^{(m)}(z_m,t)}{\partial z_m^2} - kGA_m \left[ \varphi_x^{(m)}(z_m,t) + \frac{\partial u_y^{(m)}(z_m,t)}{\partial z} \right]$$

$$- \rho I_m \frac{\partial^2 \varphi_x^{(m)}(z_m,t)}{\partial t^2} - 2\rho \Omega I_m \frac{\partial \varphi_y^{(m)}(z_m,t)}{\partial t} = 0,$$

$$EI_m \frac{\partial^2 \varphi_y^{(m)}(z_m,t)}{\partial z_m^2} - kGA_m \left[ \varphi_y^{(m)}(z_m,t) - \frac{\partial u_x^{(m)}(z_m,t)}{\partial z} \right]$$

$$- \rho I_m \frac{\partial^2 \varphi_y^{(m)}(z_m,t)}{\partial t^2} + 2\rho \Omega I_m \frac{\partial \varphi_x^{(m)}(z_m,t)}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، مولفه‌های جابه‌جایی و شیب خمشی را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب توابعی از مکان در تابعی از زمان در نظر گرفت و به‌صورت رابطه (10) بیان نمود.

$$\begin{Bmatrix} u_x^m(z_m,t) \\ u_y^m(z_m,t) \\ \varphi_x^m(z_m,t) \\ \varphi_y^m(z_m,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} LU_m(z_m) \\ LV_m(z_m) \\ \Theta_m(z_m) \\ \Psi_m(z_m) \end{Bmatrix} e^{\omega t} \quad (10)$$

که در این رابطه  $\omega$  فرکانس طبیعی ارتعاشات محور در حرکت لنگزنی آزاد می‌باشد. با جایگذاری معادله (10) در معادله (9)، دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه شده در معادله (11) به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{I_m} \frac{d\Psi_m}{d\zeta_m} - \left( \frac{1}{I_m} \right)^2 \frac{d^2 U_m}{d\zeta_m^2} + \lambda^2 s^2 U_m = 0,$$

$$\frac{1}{I_m} \frac{d\Theta_m}{d\zeta_m} + \left( \frac{1}{I_m} \right)^2 \frac{d^2 V_m}{d\zeta_m^2} - \lambda^2 s^2 V_m = 0,$$

$$\alpha_m^2 s^2 \left( \frac{1}{I_m} \right)^2 \frac{d^2 \Theta_m}{d\zeta_m^2} - \Theta_m - \frac{1}{I_m} \frac{dV_m}{d\zeta_m} - \alpha_m^2 \lambda^2 s^2 r^2 \Theta_m - 2\alpha_m^2 \gamma \lambda s^2 r^2 \Psi_m = 0,$$

$$\alpha_m^2 s^2 \left( \frac{1}{I_m} \right)^2 \frac{d^2 \Psi_m}{d\zeta_m^2} - \Psi_m + \frac{1}{I_m} \frac{dU_m}{d\zeta_m} - \alpha_m^2 \lambda^2 s^2 r^2 \Psi_m + 2\alpha_m^2 \gamma \lambda s^2 r^2 \Theta_m = 0 \quad (11)$$

$$x_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{(N-1)} \right] \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

### 3- تحلیل ارتعاشات محور چندپله‌ای

#### 1-3- معادلات حاکم

همان‌گونه که در شکل 1 نشان داده شده است، یک محور چند پله‌ای با چندین تکیه‌گاه در نظر گرفته شده است. معادله (5) معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد برای مدل تیموشنکو را بیان می‌کند [1]:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left\{ kGA(z) \left[ \varphi_y(z,t) - \frac{\partial u_x(z,t)}{\partial z} \right] \right\}$$

$$= \rho A(z) \frac{\partial^2 u_x(z,t)}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ kGA(z) \left[ \varphi_x(z,t) + \frac{\partial u_y(z,t)}{\partial z} \right] \right\} = \rho A(z) \frac{\partial^2 u_y(z,t)}{\partial t^2} \quad (\text{الف-5})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ EI_x(z) \frac{\partial \varphi_x(z,t)}{\partial z} \right] - kGA(z) \left[ \varphi_x(z,t) + \frac{\partial u_y(z,t)}{\partial z} \right]$$

$$= \rho I_x(z) \frac{\partial^2 \varphi_x(z,t)}{\partial t^2} + \rho \Omega I_p(z) \frac{\partial \varphi_y(z,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ EI_y(z) \frac{\partial \varphi_y(z,t)}{\partial z} \right] - kGA(z) \left[ \varphi_y(z,t) - \frac{\partial u_x(z,t)}{\partial z} \right]$$

$$= \rho I_y(z) \frac{\partial^2 \varphi_y(z,t)}{\partial t^2} - \rho \Omega I_p(z) \frac{\partial \varphi_x(z,t)}{\partial t} \quad (\text{ب-5})$$

که در این رابطه  $u_x(z,t)$ ،  $u_y(z,t)$ ،  $\varphi_x(z,t)$  و  $\varphi_y(z,t)$  به‌ترتیب جابه‌جایی و شیب ناشی از خمش در راستاهای  $x$  و  $y$  می‌باشند.  $E$ ،  $\rho$ ،  $\Omega$  و  $G$  به‌ترتیب سرعت دوران محور، چگالی، مدول الاستیک و مدول برشی می‌باشند. همچنین  $k$  ضریب اصلاح توزیع تنش برشی در مقطع می‌باشد که تابعی از هندسه سطح مقطع و ضریب پواسون است [39]؛ در این رابطه  $A(z)$ ،  $I_x(z)$  و  $I_y(z)$  به‌ترتیب مساحت، ممان اینرسی حول محورهای  $x$  و  $y$  و ممان اینرسی دورانی می‌باشند.

با در نظر گرفتن معادله (6) به‌صورت زیر

$$I_x = I_y = I, \quad I_p = 2I_x = 2I_y = 2I \quad (6)$$

معادله (5-ب) را می‌توان به‌صورت معادله (7) بیان نمود:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ EI(z) \frac{\partial \varphi_x(z,t)}{\partial z} \right] - kGA(z) \left[ \varphi_x(z,t) + \frac{\partial u_y(z,t)}{\partial z} \right]$$

$$= \rho I(z) \frac{\partial^2 \varphi_x(z,t)}{\partial t^2} + 2\rho \Omega I(z) \frac{\partial \varphi_y(z,t)}{\partial t},$$

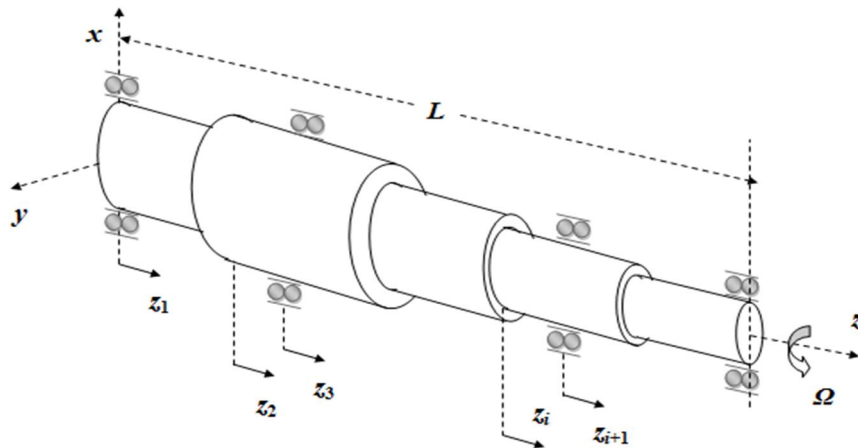
$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ EI(z) \frac{\partial \varphi_y(z,t)}{\partial z} \right] - kGA(z) \left[ \varphi_y(z,t) - \frac{\partial u_x(z,t)}{\partial z} \right]$$

$$= \rho I(z) \frac{\partial^2 \varphi_y(z,t)}{\partial t^2} - 2\rho \Omega I(z) \frac{\partial \varphi_x(z,t)}{\partial t} \quad (7)$$

روابط (الف-5) و (7) را برای محوری با سطح مقطع یکنواخت می‌توان

به شکل معادله (8) ساده‌سازی نمود:

$$kGA \left[ \frac{\partial \varphi_y(z,t)}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_x(z,t)}{\partial z^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 u_x(z,t)}{\partial t^2} = 0,$$



شکل 1 محور پله‌دار با چندین تکیه‌گاه

$$\begin{aligned}
 [K_{1s}^e]^{(m)} &= [K_{2t}^e]^{(m)} = [K_{4u}^e]^{(m)} = -[K_{3v}^e]^{(m)} = A^{(m)}, \\
 [K_{2v}^e]^{(m)} &= -[K_{1u}^e]^{(m)} = B^{(m)}, \\
 [K_{3t}^e]^{(m)} &= [K_{4s}^e]^{(m)} = \alpha_m^2 s^2 B^{(m)} - I, \\
 [C_{4t}^e]^{(m)} &= -[C_{3s}^e]^{(m)} = 2\alpha_m^2 s^2 r^2 I, \\
 [M_{1u}^e]^{(m)} &= -[M_{2v}^e]^{(m)} = s^2 I, \\
 [M_{3t}^e]^{(m)} &= [M_{4s}^e]^{(m)} = -\alpha_m^2 s^2 r^2 I
 \end{aligned} \tag{16}$$

حال با تعریف بردارهای ستونی به شکل نشان داده‌شده در معادله (17):

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \\ \{\Theta\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix},$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U\}^{(1)} \\ \{U\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{U\}^{(n+1)} \end{Bmatrix}, \quad \{V\} = \begin{Bmatrix} \{V\}^{(1)} \\ \{V\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{V\}^{(n+1)} \end{Bmatrix},$$

$$\{\Theta\} = \begin{Bmatrix} \{\Theta\}^{(1)} \\ \{\Theta\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{\Theta\}^{(n+1)} \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \{\Psi\}^{(1)} \\ \{\Psi\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{\Psi\}^{(n+1)} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

معادله (15) را می‌توان به شکل فشرده ارائه شده در معادله (18) بیان نمود:

$$[K]\{w\} + \lambda\gamma[C]\{w\} + \lambda^2[M]\{w\} = 0 \tag{18}$$

که در این رابطه ماتریس‌های مربوط به سفتی، اثر ژيروسکوپی و جرم به ترتیب در معادله (19) تعریف شده‌اند:

که پارامترهای بدون بعد این رابطه در معادله (12) تعریف شده‌اند:

$$\zeta_m = \frac{z_m}{L}, \quad l_m = \frac{L_m}{L}, \quad \alpha_m = \frac{d_m}{d_1},$$

$$r^2 = \frac{I_1}{A_1 L^2}, \quad s^2 = \frac{EI_1}{kGA_1 L^2}, \quad \gamma^2 = \frac{\rho A_1 L^4 \Omega^2}{EI_1}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho A_1 L^4 \omega^2}{EI_1} \tag{12}$$

در این پژوهش به منظور ساده‌سازی در نمایش معادلات در شکل تفاضلات مربعی، ماتریس‌های ضرایب وزنی اصلاح شده بر اساس معادله (13) تعریف شده‌اند:

$$[A]^{(m)} = \frac{[A]^{(1)}}{l_m}, \quad [B]^{(m)} = \frac{[A]^{(2)}}{l_m^2} \tag{13}$$

حال با اعمال قوانین روش تفاضلات مربعی، دستگاه معادلات دیفرانسیل (11) را می‌توان به شکل جبری ارائه شده در معادله (14) بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N A_{ij}^{(m)} \Psi_j^{(m)} - \sum_{n=1}^N B_{ij}^{(m)} U_j^{(m)} + \lambda^2 s^2 U_i^{(m)} &= 0, \\
 \sum_{n=1}^N A_{ij}^{(m)} \Theta_j^{(m)} + \sum_{n=1}^N B_{ij}^{(m)} V_j^{(m)} - \lambda^2 s^2 V_i^{(m)} &= 0, \\
 \alpha_m^2 s^2 \sum_{n=1}^N B_{ij}^{(m)} \Theta_j^{(m)} - \Theta_i^{(m)} - \sum_{n=1}^N A_{ij}^{(m)} V_j^{(m)} \\
 - \alpha_m^2 \lambda^2 s^2 r^2 \Theta_i^{(m)} - 2\alpha_m^2 \gamma \lambda s^2 r \Psi_i^{(m)} &= 0, \\
 \alpha_m^2 s^2 \sum_{n=1}^N B_{ij}^{(m)} \Psi_j^{(m)} - \Psi_i^{(m)} + \sum_{n=1}^N A_{ij}^{(m)} U_j^{(m)} \\
 - \alpha_m^2 \lambda^2 s^2 r^2 \Psi_i^{(m)} + 2\alpha_m^2 \gamma \lambda s^2 r \Theta_i^{(m)} &= 0,
 \end{aligned} \tag{14}$$

معادله (14) نیز می‌تواند به شکل ماتریسی ارائه شده در رابطه (15)

نوشته شود:

$$\begin{aligned}
 [K_{1s}^e]^{(m)} \{\Psi\}^{(m)} + [K_{1u}^e]^{(m)} \{U\}^{(m)} + \lambda^2 [M_{1u}^e]^{(m)} \{U\}^{(m)} &= 0, \\
 [K_{2t}^e]^{(m)} \{\Theta\}^{(m)} + [K_{2v}^e]^{(m)} \{V\}^{(m)} + \lambda^2 [M_{2v}^e]^{(m)} \{V\}^{(m)} &= 0, \\
 [K_{3t}^e]^{(m)} \{\Theta\}^{(m)} + [K_{3v}^e]^{(m)} \{V\}^{(m)} \\
 + \gamma \lambda [C_{3s}^e]^{(m)} \{\Psi\}^{(m)} + \lambda^2 [M_{3t}^e]^{(m)} \{\Theta\}^{(m)} &= 0, \\
 [K_{4s}^e]^{(m)} \{\Psi\}^{(m)} + [K_{4u}^e]^{(m)} \{U\}^{(m)} \\
 + \gamma \lambda [C_{4t}^e]^{(m)} \{\Theta\}^{(m)} + \lambda^2 [M_{4s}^e]^{(m)} \{\Psi\}^{(m)} &= 0,
 \end{aligned} \tag{15}$$

که در این رابطه ماتریس‌های مربوط به هر زیرتیر بر اساس معادله (16)

تعریف شده‌اند:

هستند. با استفاده از تعاریف نیروی برشی و گشتاور خمشی در تئوری تیر تیموشنکو، معادلات (21) و (22) را می‌توان مطابق با معادله (23) بیان نمود:

$$\begin{aligned} u_x(z_c^-) &= u_x(z_c^+), \quad u_y(z_c^-) = u_y(z_c^+), \\ \varphi_x(z_c^-) &= \varphi_x(z_c^+), \quad \varphi_y(z_c^-) = \varphi_y(z_c^+), \\ I^- \frac{\partial \varphi_x}{\partial z}(z_c^-) &= I^+ \frac{\partial \varphi_x}{\partial z}(z_c^+), \\ I^- \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}(z_c^-) &= I^+ \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}(z_c^+), \\ A^- \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_c^-) - \varphi_y(z_c^-) \right] &= A^+ \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_c^+) - \varphi_y(z_c^+) \right], \\ A^+ \left[ \frac{\partial u_y}{\partial z}(z_c^-) + \varphi_x(z_c^-) \right] &= A^+ \left[ \frac{\partial u_y}{\partial z}(z_c^+) + \varphi_x(z_c^+) \right], \\ u_x(z_c^-) &= u_x(z_c^+), \quad u_y(z_c^-) = u_y(z_c^+), \\ \varphi_x(z_c^-) &= \varphi_x(z_c^+), \quad \varphi_y(z_c^-) = \varphi_y(z_c^+), \\ EI \frac{\partial \varphi_x}{\partial z}(z_c^-) + \bar{K}_{rx}^{(m)} \varphi_x(z_c^-) &= EI \frac{\partial \varphi_x}{\partial z}(z_c^+), \\ EI \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}(z_c^-) + \bar{K}_{ry}^{(m)} \varphi_y(z_c^-) &= EI \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}(z_c^+), \\ kAG \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_c^-) - \varphi_y(z_c^-) \right] + \bar{K}_{ix}^{(m)} u_x(z_c^-) &= kAG \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_c^+) - \varphi_y(z_c^+) \right], \\ kAG \left[ \frac{\partial u_y}{\partial z}(z_c^-) + \varphi_x(z_c^-) \right] + \bar{K}_{iy}^{(m)} u_y(z_c^-) &= kAG \left[ \frac{\partial u_y}{\partial z}(z_c^+) + \varphi_x(z_c^+) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

که در این رابطه  $A^-$ ،  $A^+$  و  $I^-$  و  $I^+$  به ترتیب نشان دهنده مقدار سطح مقطع و اینرسی دورانی در دو طرف مقطع پله‌دار بوده و همچنین  $A$  و  $I$  نشان دهنده مساحت و ممان اینرسی تیر در محل تکیه‌گاه‌ها می‌باشند. معادله (23) در شکل تفاضلات دیفرانسیلی مطابق با معادله (24) بیان خواهند شد:

$$\begin{aligned} U_1^{(m+1)} - U_N^{(m)} &= 0, \quad V_1^{(m+1)} - V_N^{(m)} = 0, \\ \Theta_1^{(m+1)} - \Theta_N^{(m)} &= 0, \quad \Psi_1^{(m+1)} - \Psi_N^{(m)} = 0, \\ \alpha_{m+1}^4 \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(m+1)} \Psi_j^{(m+1)} - \alpha_m^4 \sum_{j=1}^N A_{mj}^{(m)} \Psi_j^{(m)} &= 0, \\ \alpha_{m+1}^4 \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(m+1)} \Theta_j^{(m+1)} - \alpha_m^4 \sum_{j=1}^N A_{mj}^{(m)} \Theta_j^{(m)} &= 0, \\ \alpha_{m+1}^2 \left[ \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(m+1)} U_j^{(m+1)} - \Psi_1^{(m+1)} \right] - \alpha_m^2 \left[ \sum_{j=1}^N A_{mj}^{(m)} U_j^{(m)} - \Psi_N^{(m)} \right] &= 0, \\ \alpha_{m+1}^2 \left[ \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(m+1)} V_j^{(m+1)} + \Theta_1^{(m+1)} \right] - \alpha_m^2 \left[ \sum_{j=1}^N A_{mj}^{(m)} V_j^{(m)} + \Theta_N^{(m)} \right] &= 0, \\ U_1^{(m+1)} - U_N^{(m)} &= 0, \quad V_1^{(m+1)} - V_N^{(m)} = 0, \\ \Theta_1^{(m+1)} - \Theta_N^{(m)} &= 0, \quad \Psi_1^{(m+1)} - \Psi_N^{(m)} = 0, \\ \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(m+1)} \Theta_j^{(m+1)} - \sum_{j=1}^N A_{mj}^{(m)} \Theta_j^{(m)} - K_{rx}^{(m)} \Theta_N^{(m)} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{bmatrix} [K_{1u}] & [0] & [0] & [K_{1s}] \\ [0] & [K_{2v}] & [K_{2t}] & [0] \\ [0] & [K_{3v}] & [K_{3t}] & [0] \\ [K_{4u}] & [0] & [0] & [K_{4s}] \end{bmatrix}, \\ [C] &= \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & -[C_{3s}] \\ [0] & [0] & [C_{4t}] & [0] \end{bmatrix}, \\ [M] &= \begin{bmatrix} [M_{1u}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [M_{2v}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [M_{3t}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [M_{4s}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

لازم به ذکر است که در معادله (19)، [0] نشان دهنده ماتریس صفر می‌باشد و ماتریس‌های داخلی استفاده شده در معادله (19) از کنار هم قرار دادن ماتریس‌های تعریف شده در معادله (15) به صورت قطری به دست می‌آیند. به عنوان نمونه یکی از این ماتریس‌ها در معادله (20) ارائه شده است.

$$[K_{1u}] = \begin{bmatrix} [K_{1u}^e]^{(1)} & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{1u}^e]^{(2)} & [0] & [0] & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [K_{1u}^e]^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

### 2-3- شرایط سازگاری

فرض کنید در نقطه‌ای به مختصات  $(z=z_c)$  یک ناپیوستگی در پارامترهای محور ایجاد شده باشد. اگر این ناپیوستگی یک مقطع پله‌دار باشد، شرایط سازگاری را می‌توان به صورت پیوستگی مولفه‌های جابه‌جایی، شیب خمشی، گشتاور خمشی و نیروی برشی در نظر گرفت و به شکل رابطه (21) بیان کرد.

$$\begin{aligned} u_x(z_c^-) &= u_x(z_c^+), \quad u_y(z_c^-) = u_y(z_c^+), \\ \varphi_x(z_c^-) &= \varphi_x(z_c^+), \quad \varphi_y(z_c^-) = \varphi_y(z_c^+), \\ M_x(z_c^-) &= M_x(z_c^+), \quad M_y(z_c^-) = M_y(z_c^+), \\ V_x(z_c^-) &= V_x(z_c^+), \quad V_y(z_c^-) = V_y(z_c^+) \end{aligned} \quad (21)$$

همچنین اگر ناپیوستگی در اثر وجود یک یاتاقان ایجاد شده باشد، شرایط سازگاری به صورت پیوستگی مولفه‌های جابه‌جایی و شیب خمشی و ناپیوستگی گشتاور خمشی و نیروی برشی می‌باشد که این معادلات را می‌توان به صورت معادله (22) بیان کرد:

$$\begin{aligned} u_x(z_c^-) &= u_x(z_c^+), \quad u_y(z_c^-) = u_y(z_c^+), \\ \varphi_x(z_c^-) &= \varphi_x(z_c^+), \quad \varphi_y(z_c^-) = \varphi_y(z_c^+), \\ M_x(z_c^+) - M_x(z_c^-) &= \bar{K}_{rx} \varphi_x(z_c^-), \\ M_y(z_c^+) - M_y(z_c^-) &= \bar{K}_{ry} \varphi_y(z_c^-), \\ V_x(z_c^+) - V_x(z_c^-) &= \bar{K}_{ix} u_x(z_c^-), \\ V_y(z_c^+) - V_y(z_c^-) &= \bar{K}_{iy} u_y(z_c^-) \end{aligned} \quad (22)$$

که در این رابطه  $K$  نشان دهنده سفتی  $m$  امین تکیه‌گاه می‌باشد به طوری که زیرنویس 1 برای فنر طولی و زیرنویس 2 برای فنر پیچشی به کار رفته‌اند. همچنین زیرنویس‌های  $x$  و  $y$  نیز نشان دهنده مختصه مربوط به فنر

و بالانویس‌های L و R به ترتیب نشان دهنده تکیه‌گاه سمت چپ و راست محور می‌باشند. با استفاده از تعاریف نیروی برشی و گشتاور خمشی در تئوری تیر تیموشنکو، معادله (30) را می‌توان به شکل معادله (31) بیان نمود:

$$\begin{cases} \zeta_1 = 0 & \zeta_{n+1} = 1 \\ \left[ \begin{array}{l} \frac{dU}{d\zeta} - \Psi - K_{lx}^{(L)}U = 0, \\ \frac{dV}{d\zeta} + \Theta - K_{ly}^{(L)}V = 0, \\ \frac{d\Theta}{d\zeta} - K_{rx}^{(L)}\Theta = 0, \\ \frac{d\Psi}{d\zeta} - K_{ry}^{(L)}\Psi = 0 \end{array} \right. & \left[ \begin{array}{l} \frac{dU}{d\zeta} - \Psi + K_{lx}^{(R)}U = 0, \\ \frac{dV}{d\zeta} + \Theta + K_{ly}^{(R)}V = 0, \\ \frac{d\Theta}{d\zeta} + K_{rx}^{(R)}\Theta = 0, \\ \frac{d\Psi}{d\zeta} + K_{ry}^{(R)}\Psi = 0 \end{array} \right. \end{cases} \quad (31)$$

که در این رابطه سفتی تکیه‌گاه‌ها بر اساس معادله (32) بدون بعد شده‌اند:

$$\begin{aligned} K_{lx}^{(L)} &= \frac{\bar{K}_{lx}^{(L)}L}{kA_l G}, & K_{lx}^{(R)} &= \frac{\bar{K}_{lx}^{(R)}L}{kGA_{n+1}}, \\ K_{ly}^{(L)} &= \frac{\bar{K}_{ly}^{(L)}L}{kA_l G}, & K_{ly}^{(R)} &= \frac{\bar{K}_{ly}^{(R)}L}{kGA_{n+1}}, \\ K_{rx}^{(L)} &= \frac{\bar{K}_{rx}^{(L)}L}{EI_1}, & K_{rx}^{(R)} &= \frac{\bar{K}_{rx}^{(R)}L}{EI_{n+1}}, \\ K_{ry}^{(L)} &= \frac{\bar{K}_{ry}^{(L)}L}{EI_1}, & K_{ry}^{(R)} &= \frac{\bar{K}_{ry}^{(R)}L}{EI_{n+1}} \end{aligned} \quad (32)$$

معادله (31) را می‌توان در روش تفاضلات مربعی به شکل معادله (33) نمود:

$$\begin{cases} [b]\{U\} - [a]\{\Psi\} = \{0\}, & [d]\{\Theta\} = \{0\}, \\ [c]\{V\} + [a]\{\Theta\} = \{0\}, & [e]\{\Psi\} = \{0\} \end{cases} \quad (33)$$

که تعریف ماتریس‌های موجود در این رابطه در پیوست (ب) ارائه شده‌اند. با استفاده از بردارهای ستونی تعریف شده در معادله (17)، معادله (34) به دست می‌آید:

$$[L]\{w\} = \{0\} \quad (34)$$

ماتریس معرفی شده در رابطه (34)، از معادله (35) به دست می‌آید:

$$[L] = \begin{bmatrix} [b] & [0] & [0] & -[a] \\ [0] & [c] & [a] & [0] \\ [0] & [0] & [d] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [e] \end{bmatrix} \quad (35)$$

### 3-4- اعمال روابط سازگاری و شرایط مرزی بر معادلات حاکم

بر اساس قواعد حاکم بر روش المان تفاضلات مربعی، ابتدا باید نقاط حل مسئله به سه دسته نقاط مرزی  $\{w\}_b$ ، نقاط مشترک بین زیرتیرها در محل ناپیوستگی  $\{w\}_c$  و نقاط دامنه  $\{w\}_d$  تقسیم نمود، این تقسیم بندی در رابطه (36) نشان داده شده است [40].

$$\{w\}_b = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \{U\}_1^{(1)} \right\}^T \\ \left\{ \{U\}_N^{(n+1)} \right\}^T \\ \left\{ \{V\}_1^{(1)} \right\}^T \\ \left\{ \{V\}_N^{(n+1)} \right\}^T \\ \left\{ \{\Theta\}_1^{(1)} \right\}^T \\ \left\{ \{\Theta\}_N^{(n+1)} \right\}^T \\ \left\{ \{\Psi\}_1^{(1)} \right\}^T \\ \left\{ \{\Psi\}_N^{(n+1)} \right\}^T \end{array} \right\}^T$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(m+1)} \Psi_j^{(m+1)} - \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(m)} \Psi_j^{(m)} - K_{ry}^{(m)} \Psi_N^{(m)} &= 0, \\ \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(m+1)} U_j^{(m+1)} - \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(m)} U_j^{(m)} - K_{lx}^{(m)} U_N^{(m)} &= 0, \\ \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(m+1)} V_j^{(m+1)} - \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(m)} V_j^{(m)} - K_{ly}^{(m)} V_N^{(m)} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

که در این رابطه سفتی بدون بعد تکیه‌گاه‌ها به صورت معادله (25) تعریف شده است:

$$\begin{aligned} K_{lx}^{(m)} &= \frac{\bar{K}_{lx}^{(m)}L}{kAG}, & K_{ly}^{(m)} &= \frac{\bar{K}_{ly}^{(m)}L}{kAG}, \\ K_{rx}^{(m)} &= \frac{\bar{K}_{rx}^{(m)}L}{EI}, & K_{ry}^{(m)} &= \frac{\bar{K}_{ry}^{(m)}L}{EI} \end{aligned} \quad (25)$$

معادله (24) را می‌توان در روش تفاضلات مربعی به صورت معادله (26) بیان نمود:

$$\begin{aligned} [t]^{(m)} \begin{Bmatrix} \{\Theta\}^{(m)} \\ \{\Theta\}^{(m+1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, & [s]^{(m)} \begin{Bmatrix} \{\Psi\}^{(m)} \\ \{\Psi\}^{(m+1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \\ [p]^{(m)} \begin{Bmatrix} \{U\}^{(m)} \\ \{U\}^{(m+1)} \end{Bmatrix} &- [r]^{(m)} \begin{Bmatrix} \{\Psi\}^{(m)} \\ \{\Psi\}^{(m+1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \\ [q]^{(m)} \begin{Bmatrix} \{V\}^{(m)} \\ \{V\}^{(m+1)} \end{Bmatrix} &+ [r]^{(m)} \begin{Bmatrix} \{\Theta\}^{(m)} \\ \{\Theta\}^{(m+1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

که تعریف ماتریس‌های موجود در این رابطه در پیوست (الف) ارائه شده‌اند. با ترکیب معادلات نوشته شده برای تمامی زیرتیرها و استفاده از بردارهای ستونی تعریف شده در معادله (17)، روابط ارائه شده در معادله (27) به دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} [T]\{\Theta\} = \{0\}, & [P]\{U\} - [R]\{\Psi\} = \{0\}, \\ [S]\{\Psi\} = \{0\}, & [Q]\{V\} + [R]\{\Theta\} = \{0\} \end{cases} \quad (27)$$

که در این رابطه به عنوان نمونه ماتریس  $[T]$  شامل  $[f]^{(1)}$  تا  $[f]^{(n)}$  می‌باشد. با استفاده از بردار ستونی تعریف شده در معادله (17)، معادله (27) به شکل معادله (28) نوشته خواهد شد:

$$[J]\{w\} = \{0\} \quad (28)$$

که ماتریس معرفی شده در این رابطه، از معادله (29) به دست می‌آید:

$$[J] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [T] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [S] \\ [P] & [0] & [0] & -[R] \\ [0] & [Q] & [R] & [0] \end{bmatrix} \quad (29)$$

### 3-3- شرایط مرزی

برای محور نشان داده شده در شکل 1، معادله (30) شرایط مرزی را بیان می‌کند:

$$\begin{aligned} z=0 & & z=L \\ \begin{cases} V_x - \bar{K}_{lx}^{(L)}u_x = 0 \\ V_y - \bar{K}_{ly}^{(L)}u_y = 0 \\ M_x - \bar{K}_{rx}^{(L)}\phi_x = 0 \\ M_y - \bar{K}_{ry}^{(L)}\phi_y = 0 \end{cases} & & \begin{cases} V_x + \bar{K}_{lx}^{(R)}u_x = 0 \\ V_y + \bar{K}_{ly}^{(R)}u_y = 0 \\ M_x + \bar{K}_{rx}^{(R)}\phi_x = 0 \\ M_y + \bar{K}_{ry}^{(R)}\phi_y = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

در این رابطه K نشان دهنده سفتی فنرهای تکیه‌گاه می‌باشد. زیرنویس‌های r و t تعریفی مشابه با تعریف ارائه شده برای معادله (22) داشته

$$[k]\{w\}_d + \lambda\lambda[c]\{w\}_d + \lambda^2[m]\{w\}_d = 0 \quad (41) \quad \{w\}_c =$$

که در این رابطه نیز ماتریس‌های معرفی شده در معادله (42) به‌کار رفته‌اند:

$$\begin{aligned} [k] &= [\bar{K}]_d + [\bar{K}]_b [S_b] + [\bar{K}]_c [S_c], \\ [c] &= [\bar{C}]_d + [\bar{C}]_b [S_b] + [\bar{C}]_c [S_c], \\ [m] &= [\bar{M}]_d + [\bar{M}]_b [S_b] + [\bar{M}]_c [S_c] \end{aligned} \quad (42)$$

معادله (41) یک معادله مقدار ویژه غیر استاندارد می‌باشد. با تعریف بردار ارائه شده در معادله (43):

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \lambda\{v\} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

مسئله مقدار ویژه استاندارد نشان داده شده در معادله (44) به‌دست خواهد آمد:

$$[F_1]\{w\} = \lambda[F_2]\{w\} \quad (44)$$

در این رابطه دو ماتریس ارائه شده در معادله (45) معرفی شده‌اند:

$$[F_1] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ k & \gamma[c] \end{bmatrix}, \quad [F_2] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -[m] \end{bmatrix} \quad (45)$$

لازم به‌ذکر است که در معادله اخیر [0] و I به ترتیب نشان دهنده ماتریس صفر و همانی می‌باشند. با استفاده از معادله (44) فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به‌دست خواهند آمد؛ همچنین شکل مودها به‌دست آمده توسط معادله (39) تکمیل خواهند شد. در این پژوهش معیار همگرایی برای تعیین تعداد نقاط مورد نیاز به شکل معادله (46) در نظر گرفته شده است:

$$\left| \frac{\lambda_l^{(N)} - \lambda_l^{(N-1)}}{\lambda_l^{(N-1)}} \right| \leq 0.01 \quad l=1,2,\dots,m \quad (46)$$

#### 4- نتایج عددی

پس از استخراج معادلات و حل آن‌ها به روش المان تفاضلات مربعی، در این قسمت به بررسی نتایج عددی پرداخته می‌شود. قبل از بیان نتایج بهتر است به این نکته اشاره شود که در هنگام نوسان روتور، دو حرکت چرخش محور با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  و حرکت لنگزنی محور با فرکانس  $\omega$  رخ می‌دهند. در صورتی که این دو حرکت هم‌جهت باشند حرکت را پیشرو و فرکانس متناظر را فرکانس پیشرو گویند و در صورتی که این دو حرکت مختلف‌الجهت باشند حرکت را پسرو و فرکانس متناظر را فرکانس پسرو می‌گویند. در این تحقیق هر دو فرکانس استخراج و تغییرات آن‌ها بررسی شده‌است.

به‌منظور بررسی صحت تحلیل ارائه‌شده ابتدا یک محور یکنواخت با مشخصات  $(\gamma=5, s=0/05, r=0/03)$  را با دو تکیه‌گاه مشابه در دو انتها در نظر بگیرید. فرض کنید که این تکیه‌گاه‌ها در هر دو جهت دارای سفتی جابه‌جایی برابر  $K_{ix}=K_{iy}=K$  بوده و سفتی پیچشی آن‌ها برابر با صفر باشد  $(K_{rx}=K_{ry}=0)$ .

مقادیر بدون بعد چهار فرکانس اول پیشرو و پسرو را بر حسب مقادیر مختلف K در جدول 1 ارائه شده‌اند. همان‌گونه که این جدول نشان می‌دهد مقدار هر فرکانس پسرو از فرکانس پیشرو متناظر کمتر می‌باشد که دلیل این پدیده اثر ژيروسکوپی است. این جدول همچنین نشان می‌دهد که به‌دلیل افزایش سفتی سیستم، با افزایش مقدار K تمامی فرکانس‌های پسرو و پیشرو افزایش یافته و به مقدار مشخصی همگرا می‌شوند که همان فرکانس حرکت لنگزنی محور یکنواخت بوده که با استفاده از مودهای سینوسی به سادگی از تساوی دقیق ارائه شده در معادله (47) قابل محاسبه می‌باشند [1]:

$$\begin{Bmatrix} \{U\}_N^{(1)} \\ \{U\}_1^{(2)} \\ \{U\}_N^{(2)} \\ \vdots \\ \{U\}_1^{(n)} \\ \{U\}_N^{(n)} \\ \{U\}_1^{(n+1)} \\ \{U\}_N^{(n+1)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{V\}_N^{(1)} \\ \{V\}_1^{(2)} \\ \{V\}_N^{(2)} \\ \vdots \\ \{V\}_1^{(n)} \\ \{V\}_N^{(n)} \\ \{V\}_1^{(n+1)} \\ \{V\}_N^{(n+1)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{\Theta\}_N^{(1)} \\ \{\Theta\}_1^{(2)} \\ \{\Theta\}_N^{(2)} \\ \vdots \\ \{\Theta\}_1^{(n)} \\ \{\Theta\}_N^{(n)} \\ \{\Theta\}_1^{(n+1)} \\ \{\Theta\}_N^{(n+1)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{\Psi\}_N^{(1)} \\ \{\Psi\}_1^{(2)} \\ \{\Psi\}_N^{(2)} \\ \vdots \\ \{\Psi\}_1^{(n)} \\ \{\Psi\}_N^{(n)} \\ \{\Psi\}_1^{(n+1)} \\ \{\Psi\}_N^{(n+1)} \end{Bmatrix}^T \quad (36)$$

با حذف معادلات حاکم در نقاط مرزی و نقاط ناپیوستگی، معادله (18) را می‌توان به شکل معادله (37) بیان نمود [40]:

$$[\bar{K}]\{w\} + \lambda\gamma[\bar{C}]\{w\} + \lambda^2[\bar{M}]\{w\} = 0 \quad (37)$$

که در این رابطه علامت بار روی ماتریس‌ها نشان دهنده ماتریس غیرمربعی متناظر می‌باشد. روابط (28)، (34) و (37) را می‌توان به شکل معادله (38) تفکیک نمود:

$$\begin{aligned} &[\bar{K}]_d \{w\}_d + [\bar{K}]_b \{w\}_b + [\bar{K}]_c \{w\}_c \\ &+ \lambda\gamma([\bar{C}]_d \{w\}_d + [\bar{C}]_b \{w\}_b + [\bar{C}]_c \{w\}_c) \\ &+ \lambda^2([\bar{M}]_d \{w\}_d + [\bar{M}]_b \{w\}_b + [\bar{M}]_c \{w\}_c) = 0 \end{aligned} \quad (38\text{-الف})$$

$$[J]_d \{w\}_d + [J]_b \{w\}_b + [J]_c \{w\}_c = \{0\} \quad (38\text{-ب})$$

$$[L]_d \{w\}_d + [L]_b \{w\}_b + [L]_c \{w\}_c = \{0\} \quad (38\text{-ج})$$

با حل هم‌زمان معادلات (38-ب) و (38-ج) می‌توان  $\{w\}_b$  و  $\{w\}_c$  را به شکل معادله (39) بر حسب  $\{w\}_d$  محاسبه نمود:

$$\{w\}_c = [S_c] \{w\}_d, \quad \{w\}_b = [S_b] \{w\}_d \quad (39)$$

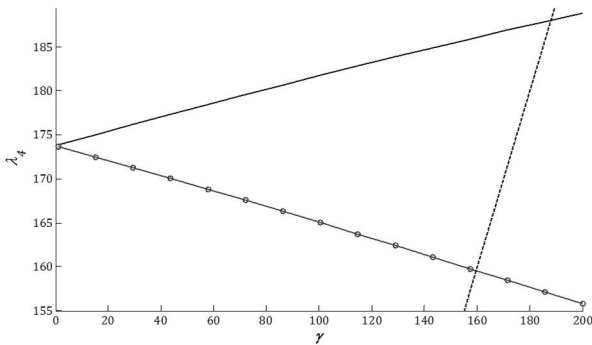
ماتریس‌های معرفی شده در این رابطه از معادله (40) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} [S_c] &= -[J]_c^{-1} [J]_d - [J]_c^{-1} [J]_b [S_b], \\ [S_b] &= -\left( [L]_b - [L]_c [J]_c^{-1} [J]_b \right)^{-1} \left( [L]_d - [L]_c [J]_c^{-1} [J]_d \right) \end{aligned} \quad (40)$$

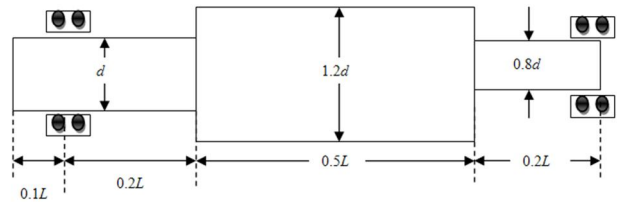
با جایگذاری معادله (39) در معادله (38-الف)، معادله (41) به‌دست خواهد آمد:







شکل 3-4 د- دیاگرام کمپیل برای مود چهارم محور نشان داده شده در شکل 3

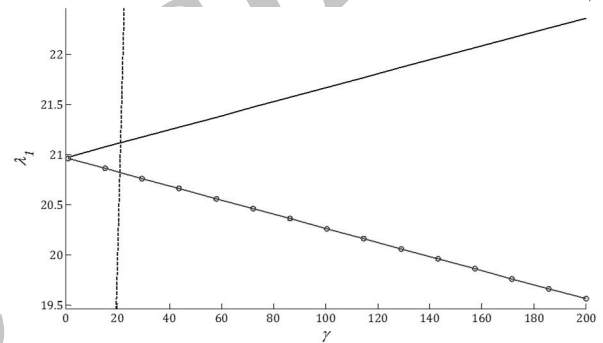


شکل 3 محور دوپله‌ای با دو تکیه‌گاه

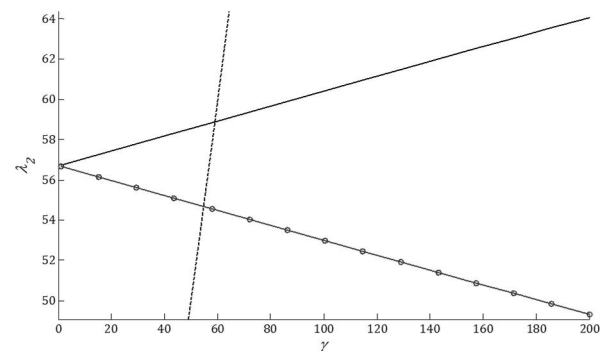
جدول 3 سفتی تکیه‌گاه‌های محور نشان داده شده در شکل 3

موقعیت بدون بعد تکیه‌گاه	$K_{yy}$	$K_{xx}$	$K_{yy}$	$K_{xx}$
0/1	50	50	100	100
1	20	20	200	200

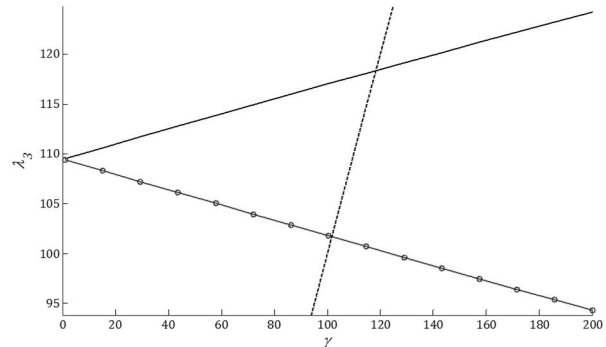
همچنین در شکل 4 نیمساز ربع اول رسم شده است؛ این خط نشان دهنده حالتی است که فرکانس لنگزنی و فرکانس چرخش از نظر اندازه با یکدیگر برابر شوند (لنگزنی همگام<sup>1</sup>)، تقاطع این خط با دیاگرام کمپیل بیانگر حالت تشدید می‌باشد که باید از رسیدن محور به این نقاط پرهیز شود. لازم به ذکر است که برای حالتی که  $\gamma=200$ ، شکل مودهای متناظر در شکل 5 رسم شده‌اند.



شکل 4-الف دیاگرام کمپیل برای مود اول محور نشان داده شده در شکل 3



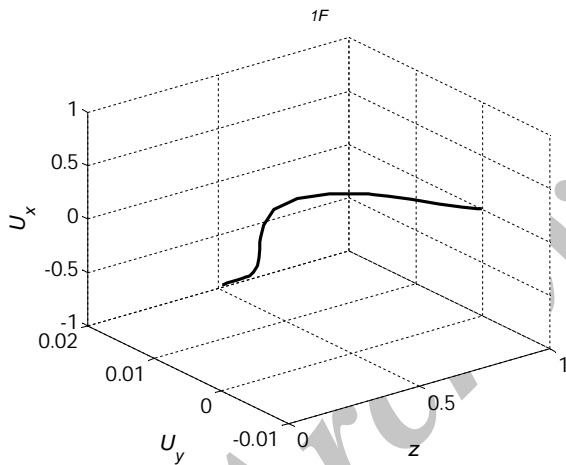
شکل 4-ب دیاگرام کمپیل برای مود دوم محور نشان داده شده در شکل 3



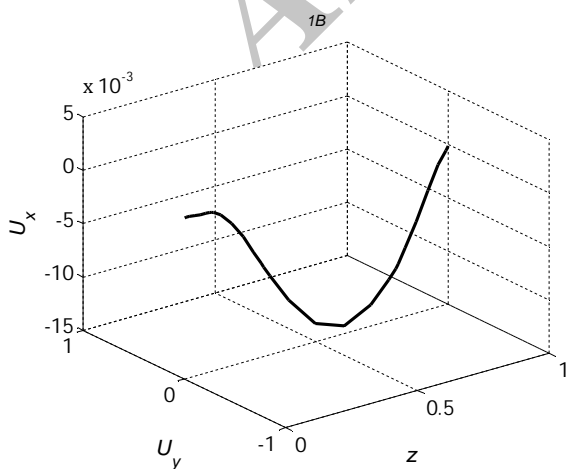
شکل 4-ج دیاگرام کمپیل برای مود سوم محور نشان داده شده در شکل 3

### 5- نتیجه‌گیری

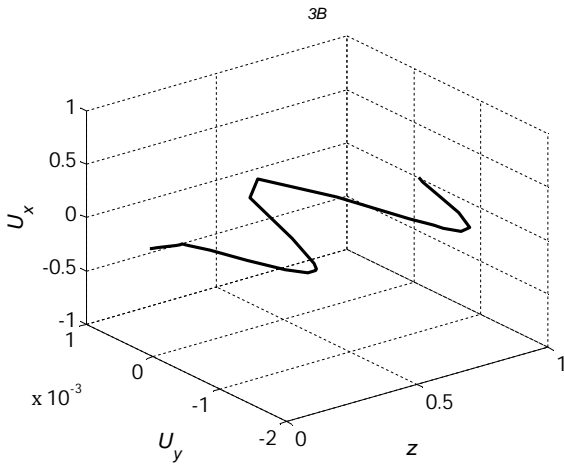
ارتعاشات عرضی محور چندپله‌ای با چند تکیه‌گاه با استفاده از روش المان تفاضلات مربعی بررسی شد. معادلات حاکم، شرایط سازگاری در مقاطع پله‌دار و تکیه‌گاه‌ها و همچنین شرایط مرزی استخراج شده و با استفاده قوانین روش تفاضلات مربعی معادل‌سازی و حل شدند. مقایسه نتایج با نتایج دقیق ارائه شده در سایر مراجع همگرایی و اعتبار روش استفاده شده را تایید کرد. سپس منحنی تغییرات فرکانس حرکت لنگزنی بر حسب سرعت دوران محور (منحنی کمپیل) برای یک مثال خاص ترسیم شد. نتایج عددی نشان دادند که با افزایش مقدار سفتی تکیه‌گاه‌ها تمامی فرکانس‌های پیرو و پیشرو



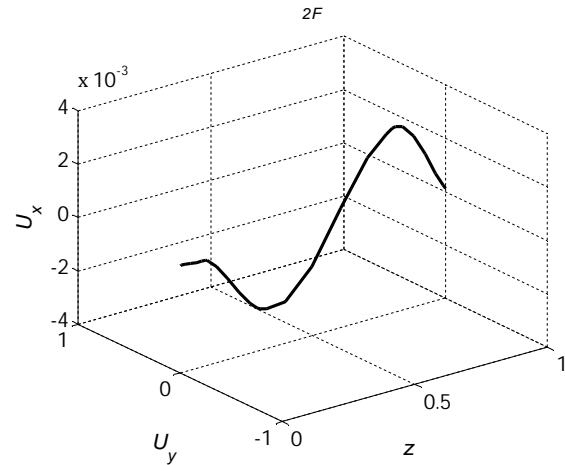
شکل 5-الف شکل مود متناظر با فرکانس اول پیرو به ازای  $\gamma=200$



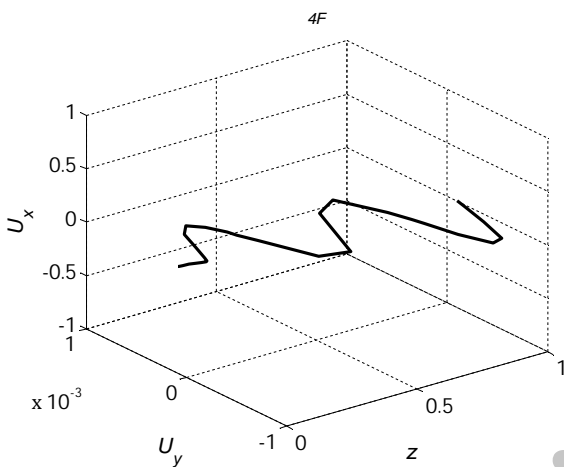
شکل 5-ب شکل مود متناظر با فرکانس اول پیرو به ازای  $\gamma=200$



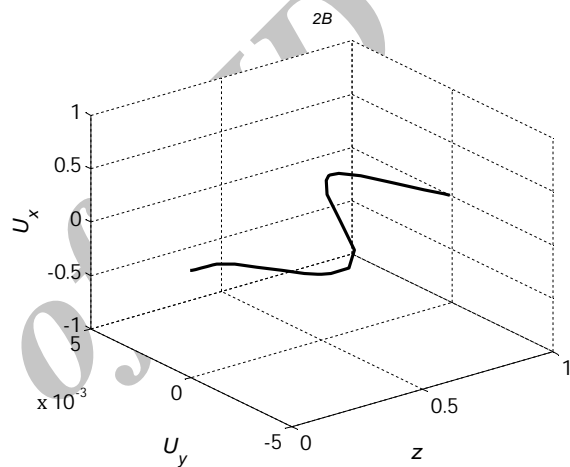
شکل 5-و شکل مود متناظر با فرکانس سوم پیشره به ازای  $\gamma=200$



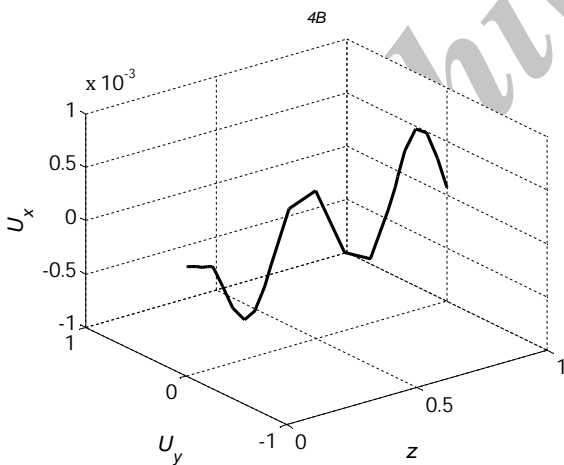
شکل 5-ج شکل مود متناظر با فرکانس دوم پیشره به ازای  $\gamma=200$



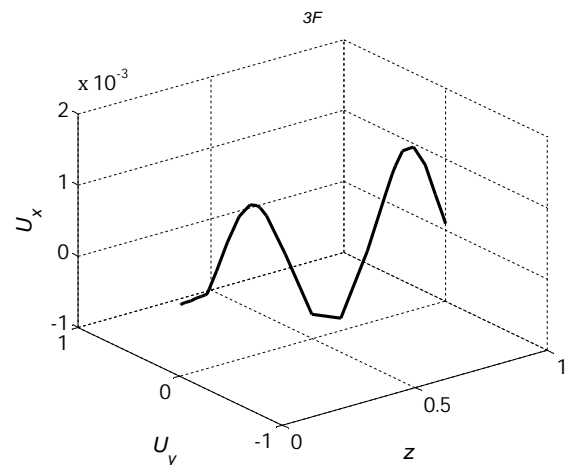
شکل 5-ز شکل مود متناظر با فرکانس چهارم پیشره به ازای  $\gamma=200$



شکل 5-د شکل مود متناظر با فرکانس دوم پیشره به ازای  $\gamma=200$



شکل 5-ک شکل مود متناظر با فرکانس چهارم پیشره به ازای  $\gamma=200$



شکل 5-ه شکل مود متناظر با فرکانس سوم پیشره به ازای  $\gamma=200$

### 6- پیوست الف

شکل ماتریسی روابط مربوط به شرایط سازگاری در معادله (26) بیان شد. ماتریس‌های معرفی شده در این رابطه برای یک مقطع پله‌دار به شکل معادله (الف-1) می‌باشند:

افزایش یافته و به مقدار مشخصی همگرا می‌شوند همچنین نتایج عددی نشان دادند که برای محور ساکن مقادیر فرکانس پیشره و پیشره با یکدیگر برابر می‌باشند ولی با چرخش محور و ایجاد و همچنین با افزایش سرعت دورانی و افزایش اثر ژيروسکوپی فرکانس‌های پیشره افزایش یافته و فرکانس‌های پیشره کاهش می‌یابند تا حدی که ممکن است مقدار یک فرکانس پیشره در یک مود از فرکانس پیشره در مود پایین‌تر، کوچک‌تر شود.

[5] S. P. Singh, K. Gupta, Free damped flexural vibration analysis of composite cylindrical tubes using beam and shell theories, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 172, No. 2, pp. 171-190, 1994.

[6] F. A. Sturla, A. Argento, Free and forced vibrations of a spinning viscoelastic beam, *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 118, No. 3, pp. 463-468, 1996.

[7] J. Melanson, J. W. Zu, Free vibration and stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions, *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 120, No. 3, pp. 776-783, 1998.

[8] O. S. Jun, J. O. Kim, Free bending vibration of a multi-step rotor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 4, pp. 625-642, 1999.

[9] M. A. Mohiuddin, Y. A. Khulief, Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, No. 2, pp. 297-316, 1999.

[10] W. Kim, A. Argento, R. A. Scott, Free vibration of a rotating tapered composite Timoshenko shaft, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, No. 1, pp. 125-147, 1999.

[11] S. Karunendiran, J. W. Zu, Free vibration analysis of shafts on resilient bearings using Timoshenko beam theory, *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 121, No. 2, pp. 256-258, 1999.

[12] N. H. Shabaneh, J. W. Zu, Dynamic analysis of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearings, *Mechanism and machine theory*, Vol. 35, No. 9, pp. 1313-1330, 2000.

[13] T. H. El-Mahdy, R. M. Gaderlab, Free vibration of unidirectional fiber reinforcement composite rotor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No. 1, pp. 195-202, 2000.

[14] F. A. Raffa, F. Vatta, Equations of motion of a asymmetric Timoshenko shaft, *Meccanica*, Vol. 36, No. 2, pp. 201-211, 2001.

[15] U. C. Gu, C. C. Cheng, Vibration analysis of a high-speed spindle under the action of a moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 278, No. 4-5, pp. 1131-1146, 2004.

[16] M. Behzad, A. R. Bastami, Effect of centrifugal force on natural frequency of lateral vibration of rotating shafts, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 274, No. 3-5, pp. 985-995, 2004.

[17] G. J. Sheu, S. M. Yang, Dynamic analysis of a spinning Rayleigh beam, *International journal of mechanical science*, Vol. 47, No. 2, pp. 157-169, 2005.

[18] J. R. Banerjee, H. Su, Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a spinning composite beam, *Computers and Structures*, Vol. 84, No. 19-20, pp. 1208-1214, 2006.

[19] S. A. A. Hosseini, S. E. Khadem, Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, No. 1, pp. 272-28, 20098.

[20] K. Daneshjou, R. Madoliat, M. Talebitooti, Three-dimensional vibration analysis and critical speed of rotating orthogonally stiffened laminated cylindrical shells under axial load and pressure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 80-94, 2013. (In Persian)

[21] A. Arjangpay, R. Ansari, M. Darvazah, Vibration analysis of a FGM cylindrical shell using MLPG method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 93-101, 2013. (In Persian)

[22] R. Bellman, B.G. Kashef, J. Casti, Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.

[23] R. Bellman, R.S. Roth, System identification with partial information, *Journal of Mathematical Analysis and applications*, Vol. 68, pp. 321-333, 1979.

[24] C. W. Bert, S. K. Jang, A.G. Striz, Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components, *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 5, pp. 612-618, 1988.

[25] C. W. Bert, M. Malik, Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature methods: A semi-analytical approach, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190, No. 1, pp. 41-63, 1996.

[26] C. W. Bert, M. Malik, The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 38, No. 6, pp. 589-606, 1996.

[27] C. W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics: A review, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, No. 1, pp. 1-28, 1996.

[28] C. W. Bert, X. Wang, A. G. Striz, Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 30, No. 13, pp. 1737-1744, 1993.

[29] C. W. Bert, X. Wang, A. G. Striz, Convergence of the DQ method in the analysis of anisotropic plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 170, No. 1, pp. 140-144, 1994.

$$t_{jk}^{(m)} = s_{jk}^{(m)} = \begin{cases} -\delta_{Nk} & j=1, 1 \leq k \leq N \\ \delta_{(N+1)k} & j=1, N+1 \leq k \leq 2N \\ -\alpha_m^4 A_{Nk}^{(m)} & j=2, 1 \leq k \leq N \\ \alpha_{m+1}^4 A_{(k-N)}^{(m+1)} & j=2, N+1 \leq k \leq 2N \end{cases}$$

$$p_{jk}^{(m)} = q_{jk}^{(m)} = \begin{cases} -\delta_{Nk} & j=1, 1 \leq k \leq N \\ \delta_{(N+1)k} & j=1, N+1 \leq k \leq 2N \\ -\alpha_m^2 A_{Nk}^{(m)} & j=2, 1 \leq k \leq N \\ \alpha_{m+1}^2 A_{(k-N)}^{(m+1)} & j=2, N+1 \leq k \leq 2N \end{cases}$$

$$r_{jk}^{(m)} = \begin{cases} 0 & j=1, 1 \leq k \leq N \\ 0 & j=1, N+1 \leq k \leq 2N \\ -\alpha_m^2 \delta_{Nk} & j=2, 1 \leq k \leq N \\ \alpha_{m+1}^2 \delta_{(N+1)k} & j=2, N+1 \leq k \leq 2N \end{cases} \quad (1\text{-الف})$$

همچنین برای یک تکیه‌گاه این ماتریس‌ها به شکل معادله (2-الف)

تعریف خواهند شد:

$$r_{jk}^{(m)} = 0$$

$$t_{jk}^{(m)} = s_{jk}^{(m)} = p_{jk}^{(m)} = q_{jk}^{(m)} = -\delta_{Nk} \quad j=1, 1 \leq k \leq N$$

$$t_{jk}^{(m)} = s_{jk}^{(m)} = p_{jk}^{(m)} = q_{jk}^{(m)} = \delta_{(N+1)k} \quad j=1, N+1 \leq k \leq 2N$$

$$t_{jk}^{(m)} = s_{jk}^{(m)} = p_{jk}^{(m)} = q_{jk}^{(m)} = A_{(k-N)}^{(m+1)} \quad j=2, N+1 \leq k \leq 2N$$

$$t_{jk}^{(m)} = -A_{Nk}^{(m)} - K_{rx}^{(m)} \delta_{Nk}$$

$$s_{jk}^{(m)} = -A_{Nk}^{(m)} - K_{ry}^{(m)} \delta_{Nk} \quad j=2, 1 \leq k \leq N$$

$$p_{jk}^{(m)} = -A_{Nk}^{(m)} - K_{lx}^{(m)} \delta_{Nk}$$

$$q_{jk}^{(m)} = -A_{Nk}^{(m)} - K_{ly}^{(m)} \delta_{Nk} \quad (2\text{-الف})$$

## 7- پیوست ب

شکل ماتریسی روابط مربوط به شرایط مرزی در معادله (33) ارائه شده است؛ درایه‌های غیرصفر ماتریس‌های معرفی شده در این رابطه به شکل معادله (ب-1) خواهند بود:

$$a_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k=1 \\ 1 & j=2, k=(n+1)N' \end{cases}$$

$$b_{jk} = \begin{cases} A_{1k}^{(1)} - K_{lx}^{(1)} \delta_{1k} & j=1, 1 \leq k \leq N \\ A_{N(k-nN)}^{(n+1)} + K_{lx}^{(n)} \delta_{[(n+1)N]k} & j=2, nN+1 \leq k \leq (n+1)N' \end{cases}$$

$$c_{jk} = \begin{cases} A_{1k}^{(1)} - K_{ly}^{(1)} \delta_{1k} & j=1, 1 \leq k \leq N \\ A_{N(k-nN)}^{(n+1)} + K_{ly}^{(n)} \delta_{[(n+1)N]k} & j=2, nN+1 \leq k \leq (n+1)N' \end{cases}$$

$$d_{jk} = \begin{cases} A_{1k}^{(1)} - K_{rx}^{(1)} \delta_{1k} & j=1, 1 \leq k \leq N \\ A_{N(k-nN)}^{(n+1)} + K_{rx}^{(n)} \delta_{[(n+1)N]k} & j=2, nN+1 \leq k \leq (n+1)N' \end{cases}$$

$$e_{jk} = \begin{cases} A_{1k}^{(1)} - K_{ry}^{(1)} \delta_{1k} & j=1, 1 \leq k \leq N \\ A_{N(k-nN)}^{(n+1)} + K_{ry}^{(n)} \delta_{[(n+1)N]k} & j=2, nN+1 \leq k \leq (n+1)N \end{cases} \quad (1\text{-ب})$$

## 8- مراجع

[1] G. Genta, *Dynamics of Rotating Systems*, Springer, New York, 2005

[2] R. Grybos, Effect of shear and rotary inertia of a rotor at its critical speeds, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 61, No. 2, pp. 104-109, 1991.

[3] S. H. Choi, C. Pierre, A. G. Ulsoy, Consistent modeling of rotating Timoshenko shafts subject to axial loads, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 114, No. 2, pp. 249-259, 1992.

[4] Y. G. Jei, C. W. Lee, Modal analysis of continuous asymmetrical rotor-bearing systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 152, No. 2, pp. 245-262, 1992.

- 193, No. 45-47, pp. 4781-4796, 2004.
- [36] K. Torabi, H. Afshari, M. Heidari-Rarani. Free vibration analysis of a non-uniform cantilever Timoshenko beam with multiple concentrated masses using DQEM, *Engineering Solid Mechanics*, Vol. 1, No. 1, pp. 9-20, 2013.
- [37] K. Torabi, H. Afshari, M. Heidari-Rarani. Free vibration analysis of a rotating non-uniform blade with multiple open cracks using DQEM, *Universal Journal of mechanical Engineering*, Vol. 2, No. 3, pp. 101-111, 2014.
- [38] K. Torabi, H. Afshari, F. Haji Aboutalebi. A DQEM for transverse vibration analysis of multiple cracked non-uniform Timoshenko beams with general boundary conditions, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 67, No. 3, pp. 527-541, 2014.
- [39] T. Kaneko, On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 8, No. 16, pp. 1928-1937, 1975.
- [40] G. Karami, P. Malekzadeh, A new differential quadrature methodology for beam analysis and the associated differential quadrature element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, No. 32, pp. 3509-3526, 2002.
- [30] Sh. Hosseini-Hashemi, K. Khorami, Analysis of free vibration of moderately thick cylindrical shell made of functionally graded materials using differential quadrature method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 93-106, 2012. (In Persian)
- [31] C. N. Chen. Vibration of non-uniform shear deformable axisymmetric orthotropic circular plates solved by DQEM, *Composite Structures*, Vol. 53, No. 3, pp. 257-264, 2001.
- [32] C. N. Chen. DQEM vibration analyses of non-prismatic shear deformable beams resting on elastic foundations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, pp. 989-999, 2002.
- [33] C. N. Chen. DQEM analysis of in-plane vibration of curved beam structures, *Advances in Engineering Software*, Vol. 36, No. 6, pp. 412-424, 2005.
- [34] C. N. Chen. DQEM analysis of out-of-plane vibration of non-prismatic curved beam structures considering the effect of shear deformation, *Advances in Engineering Software*, Vol. 39, No. 6, pp. 466-472, 2008.
- [35] P. Malekzadeh, G. Karami, M. Farid. A semi-analytical DQEM for free vibration analysis of thick plates with two opposite edges simply supported, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.

Archive of SID