



## احتساب خطای ناوبری در طراحی مسیر پروازی بهینه و مقید بر فراز عوارض زمینی برای پرنده‌های بدون سرنشین

رضا زردشتی<sup>1</sup>، امیرعلی نیکخواه<sup>2\*</sup>، محمدجواد یزدانپناه<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استاد، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تهران، تهران

\* صندوق پستی 16765-3381، nikkhah@kntu.ac.ir

### چکیده

در این مقاله، به مسأله تأثیر خطای ناوبری در طراحی مسیر پرنده‌های بدون سرنشینی که ملزم به پرواز بر فراز عوارض زمینی در ارتفاع پایین هستند پرداخته شده است. با توجه به اینکه سیستم‌های ناوبری اینرسی مشکل افزایش انحراف برحسب زمان دارند، داشتن پرواز ایمن و بدون برخورد با عوارض زمینی در ارتفاعات پایین، از نکات اساسی طراحی مسیر اینگونه پرنده‌ها تلقی می‌شود. از طرف دیگر، بعضی پرنده‌ها از ترکام به عنوان سیستم کمک ناوبری استفاده می‌کنند. این سیستم در مناطق ناهموار کارایی بیشتری دارد و لذا تأمین الزامات آن در کنار قیود دیگر کار پیچیده‌ای است. در این مقاله تلاش شده محدودیت‌های فوق در فرایند طراحی مسیر لحاظ شود. برای این منظور، از الگوریتمی مبتنی بر شبکه جریان لایه‌ای روی نقشه‌های دیجیتالی عوارض زمینی استفاده شده که قابلیت بالایی در پذیرش انواع قیود داشته و مسیری بهینه و قطعی تولید می‌کند. بنابراین با بکارگیری معادلات دینامیک حرکت سه بعدی پرنده در فضای گسسته همراه با قیود دینامیکی و معیارهای بهینگی مختلف، مدل کاملی از خطای ناوبری و همچنین پارامترهای تأثیرگذار ترکام در الگوریتم مزبور اضافه شده تا مسیر شدنی تولید کند که احتمال برخورد به عوارض به صفر کاهش یابد، ضمن این که الزامات ترکام را تأمین کند. الگوریتم حاصل با اعمال شرایط اولیه و در کمترین زمان ممکن، مسیر مزبور را تولید می‌کند. نتایج عددی، صحت این مسأله را نشان می‌دهد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 22 دی 1392

پذیرش: 09 مهر 1393

ارائه در سایت: 12 مهر 1393

کلید واژگان:

طراحی مسیر

پرنده بدون سرنشین

خطای ناوبری

شبکه جریان

تطبیق کانتور عوارض زمینی

## Considering Navigation Error in the Constraint Optimal Trajectory Design over Terrains for Unmanned Aerial Vehicles

Reza Zardashti<sup>1</sup>, Amir Ali Nikkhah<sup>1\*</sup>, Mohammad Javad Yazdanpanah<sup>2</sup>

1- Faculty of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of Tech., Tehran, Iran.

2- School of Electrical and Computer Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 16765-3381, Tehran, Iran, nikkhah@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 12 January 2013  
Accepted 01 October 2014  
Available Online 04 October 2014

### Keywords:

Trajectory Design  
Unmanned Aerial Vehicle  
Navigation Error  
Network Flow  
TERCOM

### ABSTRACT

In this paper, the problem of the navigation error effect for the optimal and constraint Trajectory de of the UAVs that are required to fly at low altitude over terrains has been discussed. Due to the increasing deviation problem of inertial navigation systems in terms of time, having a safe flight and collision avoidance with terrain at low altitude is the main point in the trajectory design of this type of the vehicles. On the other hand, some of these vehicles use Terrain Contour Matching (TERCOM) as a navigation aiding system. This system is more efficient in rough terrains, and providing the requirements of this system beside other constraints is a complex task. In this paper is tried to meet these constraints in the trajectory design process. For this purpose, an algorithm based on the layered network flow on the digital terrain maps used in a manner that has a high potential in adoption of various constraints and optimal trajectory is generated. Then, using equations of motion on a terrain digital data in 3D space with the dynamical constraints and different optimality criteria, a complete model of navigation error and also parameters affecting TERCOM has been developed to generate feasible path reducing terrain collision probability to zero. The resulting algorithm applying initial conditions and in the least time possible, produces the trajectory. Numerical results show validity of this issue.

### 1- مقدمه

مأموریت‌هایی که به اهداف نقطه‌ای یا نواحی خاص منتهی می‌شوند، معمولاً نیازمند طراحی مسیر بهینه برای رسیدن به هدف هستند. مسأله طراحی مسیر به لحاظ کاربردهای متعدد آن در سیستم‌های هوشمند نقل و انتقال

برای بسیاری از کاربردهای نظامی و حتی غیرنظامی برای یک وسیله پرنده بدون سرنشین، طراحی مسیر پرواز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

مسیر در این سیستم در حدود چند ساعت است. به همین دلیل، این طراح مسیر برای مأموریت‌های بلندمدت مناسب نیست. طراح مسیر دیگری بنام ARMS اثر شروع حرکت را به‌عنوان بخشی از فرایند پیش طراحی در نظر گرفته و جریان داده‌های پس از شروع را نیز در فرایند لحاظ کرده و از آن برای تحلیل استفاده می‌کند. این طراح مسیر نیز قابلیت به‌کارگیری در سیستم‌های بلندمدت را ندارد [4]. روش‌هایی که به تولید مسیرهای با کیفیت پایین‌تر می‌پردازند و سپس سعی در بهینه‌سازی آن دارند نیز برای اغلب کاربردها، کارایی مناسبی ندارند.

در این مقاله با استفاده از ساختار شبکه جریان لایه‌ای که روی داده‌های دیجیتالی عوارض ساخته می‌شود، الگوریتمی برای طراحی مسیر سه بعدی ارائه می‌شود که علاوه بر سرعت بالای الگوریتم در مقایسه با روش‌های موجود، امکان افزودن قیود خاص به آن نیز وجود دارد. از مزایای این الگوریتم که نتایج عددی کاملاً مؤید آنهاست، می‌توان به چهار بعدی بودن مسیر حاصل (سه بعد مکانی و یک بعد زمانی) در مقایسه با روش‌های هندسی [14، 13] که مسیر دو بعدی با سرعت ثابت تولید می‌کنند، سرعت بالای آن در مقایسه با الگوریتم‌های موجود، عدم نیاز به نرم‌افزار پایه خاص و محاسبه و ذخیره نقشه هزینه در مقایسه با الگوریتم  $A^*$  و تعیین جواب دقیق در مقایسه با الگوریتم‌های تکاملی نظیر ژنتیک اشاره کرد. البته با توجه به اینکه میانی الگوریتم فوق در مرجع [15] پرداخته شده، در این مقاله بعد از معرفی روش مزبور و بیان مسأله طراحی مسیر، به بحث اصلی که تأثیر خطای ناوبری و الزامات ترکام در فرایند طراحی مسیر است پرداخته می‌شود و در نهایت، مدل جامعی از مسأله طراحی مسیر در قالب یک مسأله بهینه‌سازی مقید چندمعیاره استخراج و الگوریتم مناسبی برای آن معرفی می‌شود. باتوجه به این که ناوبری اینرسی مشکل افزایش انحراف جانبی برحسب زمان دارد، داشتن پرواز ایمن و بدون برخورد با عوارض زمینی در هنگام پرواز در ارتفاعات پایین، از نکات اساسی در طراحی مسیر اینگونه پرنده‌ها تلقی می‌شود. برای حل این مشکل راه‌حل‌های متعددی وجود دارد. در این تحقیق، روش ابتکاری ارائه می‌شود که می‌تواند در فرایند پیاده‌سازی الگوریتم طراحی مسیر، خطای افزایشی با زمان ناوبری را لحاظ کند به گونه‌ای که مسیر نهایی، شرایط کافی را جهت عدم برخورد احتمالی پرنده در طول مسیر فراهم سازد. لحاظ نمودن پارامترهای تأثیرگذار ترکام<sup>8</sup> در راهبرد طراحی مسیر، از ویژگی دیگر الگوریتم مزبور است. این راهبرد باعث می‌شود که الگوریتم ترکام نیز در سیستم کمک ناوبری پرنده قابل استفاده باشد. با این وسیله، یک مسیر تصحیح شده ناشی از خطای ناوبری اینرسی در اختیار پرنده قرار گرفته و پرنده نیز با استفاده از روش‌های کمک ناوبری مانند ترکام، مبادرت به کاهش خطای ناوبری اینرسی می‌دهد. بدیهی است که به‌کارگیری این روش ترکیبی، عدم قطعیت ناشی از برخورد احتمالی به عوارض و موانع را به صفر کاهش می‌دهد.

در ادامه مقاله، ابتدا به مدل‌سازی مسأله طراحی مسیر پرداخته می‌شود. این مدل‌سازی شامل معادلات حرکت، قیود، تابع هزینه، مدل خطای ناوبری و پارامترهای تأثیرگذار ترکام است. سپس مدل شبکه جریان لایه‌ای ارائه و براساس مدل گسسته معادلات، قیود و تابع هزینه چند معیاره فرمولبندی می‌شود. سپس الگوریتم پیشنهادی طراحی مسیر و نحوه افزودن قیود مختلف به الگوریتم بیان می‌شوند. همچنین نحوه لحاظ کردن خطای ناوبری و پارامترهای تأثیرگذار ترکام روی الگوریتم ارائه می‌شود. در خاتمه، نتایج

[2، 1]، رباتیک [3] و سیستم‌های هدایت و ناوبری خودگردان<sup>1</sup> [5، 4] بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. ملزومات این مسأله باعث شده که در رده مسائل محاسباتی پیچیده قرار گیرد. این پیچیدگی به بعد فضای مسأله، معیارهای بهینگی، تقید، قوام و غیره بستگی دارد. با مطالعه روش‌های متعددی که در این حوزه ارائه شده، ملاحظه شد که در بسیاری از آنها، ساده‌سازی‌های زیادی صورت گرفته تا از عهده این مسأله برآیند و یا زمان خیلی زیادی را برای حل مسأله اختصاص می‌دهند.

بعنوان مثال این مسأله را می‌توان به صورت یک مسأله کنترل بهینه فرمول‌بندی کرد، که متناظر با یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای است [6]. اما چون معادلات الحاقی این مسأله کاملاً غیرخطی هستند، محاسبه آنها در سیستم‌های پیچیده بسیار مشکل است. از یک طرف، علاوه بر مشکل همگرایی الگوریتم‌های تکرارشونده در این روش‌ها و وابستگی زیاد آنها به حدس اولیه بعضی از پارامترهای بهینه‌سازی، تحلیل عددی روش‌های فوق عموماً زمان‌بر است. از طرف دیگر هیچ تعبیر فیزیکی از این پارامترها وجود ندارد که بر اساس آن بتوان یک حدس اولیه خوب به دست آورد [7]. معایب روش فوق باعث شده که روشهای دیگری نیز برای طراحی مسیر بهینه مورد توجه قرار گیرند که از بین آنها می‌توان به الگوریتم‌های ریاضی طراحی مسیر اشاره کرد. الگوریتم‌های ریاضی طراحی مسیر، یا مبتنی بر گراف هستند یا مبتنی بر شبکه‌بندی<sup>2</sup>، که هر یک محاسن و معایب مختص به خود را دارا هستند. روش‌های مبتنی بر گراف معمولاً خیلی دقیق هستند ولی سرعت همگرایی آنها بسیار کم است و از نظر پیچیدگی محاسباتی مرتبه نامی دارند [8]. در روش‌های مبتنی بر گراف نظیر روش‌های هندسی، ابتدا با در نظر گرفتن سینماتیک وسیله پرنده، گراف مشاهده‌پذیری ساخته شده و سپس الگوریتم دایجسترا برای جستجوی کوتاه‌ترین مسیر از هر گره مورد استفاده قرار می‌گیرد. حاصل این الگوریتم‌ها عموماً مسیری در صفحه یعنی یک مسیر دو بعدی است [9]. روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی عموماً قابلیت همگرایی در زمان بلندمدت را دارند ولی اگر معیارهای دینامیکی وسیله پرنده در آنها لحاظ شود، با مشکل مواجه می‌شوند. این الگوریتم‌ها معمولاً یک مسیر با معیار کوتاه‌ترین فاصله را براساس یک تابع هزینه که برطبق عواملی نظیر عوارض زمین، مواضع تهدید، نیازهای خاص مأموریت و غیره تعریف می‌شود، تولید می‌کنند. اما به دلیل محدودیت‌های فیزیکی وسیله پرنده، ممکن است مسیر تولید شده، مسیر مطلوبی تلقی نشود. از الگوریتم‌های تکاملی نیز برای طراحی مسیر استفاده شده است [10]، که جواب نزدیک به بهینه تولید می‌کند. به طور کلی روش‌های کاشف<sup>3</sup> جواب بهینه تولید نمی‌کنند چراکه اثبات بهینگی ندارند. تولید کننده مسیر CRG<sup>4</sup> مبتنی بر یک الگوریتم جستجوی بهترین مسیر درختی به نام  $A^*$  است که مسیر با کمترین هزینه را از نقطه شروع تا نقطه هدف معین، جستجو می‌کند. این روش مبتنی بر نرم افزار ARCGIS بوده و نیاز به محاسبه نقشه هزینه و ذخیره آن در یک دادگان دارد [11]، که بسیار زمان‌بر است. به منظور طراحی مسیر، سیستم‌هایی نیز ارائه شده‌اند که از بین آنها می‌توان به سیستم‌های CLOAR<sup>5</sup> و ARMS<sup>6</sup> اشاره کرد. سیستم CLOAR مسیریابی است که در هواپیمای F-117A، بمبافکن B-2 و موشک کروز JASSM<sup>7</sup> مورد استفاده قرار گرفته است [12]. زمان طراحی

1- Autonomous

2- grid

3- Heuristic

4- Candidate Route Generator

5- Common Low Observable Auto- Router

6- Automated Routing and Maintenance System

7- Joint Air-to-Surface Standoff Missile

8- TERCOM (Terrain Contour Matching)

شبیه‌سازی جهت تأیید کارایی الگوریتم نمایش داده شده است.

## 2- مدل‌سازی مسأله

### 1-1- معادلات حرکت

معادلات حرکت - که در اینجا بر اساس معادلات جرم-نقطه‌ای<sup>1</sup> سه بعدی و وسیله در حالت غیرخطی بیان می‌شوند- معرفی می‌شوند. در حالت کلی، بردار سرعت پرنده نسبت به بدنه توسط زوایای حمله  $\alpha$  و لغزش جانبی  $\beta$  تعریف می‌شود. در حالتی که بردار سرعت در صفحه تقارن (قائم) پرنده قرار گیرد، زاویه لغزش جانبی صفر در نظر گرفته می‌شود که به آن پرواز متقارن می‌گویند. این معادلات به صورت روابط (1-5) تعریف می‌شوند [16]:

$$m\dot{V} = T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma \quad (1)$$

$$mV\dot{\gamma} = (T \sin \alpha + L) \cos \mu - mg \cos \gamma \quad (2)$$

$$mV \cos \gamma \dot{\chi} = (T \sin \alpha + L) \sin \mu \quad (3)$$

$$\dot{m} = -\frac{T \cdot SFC}{3600g} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos(\gamma) \cos(\chi) \\ \dot{y} &= V \cos(\gamma) \sin(\chi) \\ \dot{z} &= V \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن،  $\gamma$  معرف زاویه مسیر پرواز یعنی زاویه بین بردار سرعت و صفحه  $x$ - $y$  است،  $\chi$  زاویه سمت (هدینگ) یعنی زاویه بین تصویر بردار سرعت پرنده و محور  $x$ ها بر روی صفحه  $x$ - $y$  بوده و  $\mu$  معرف زاویه غلت<sup>2</sup> حول محور  $x$ ها است،  $L$  و  $D$  به ترتیب نیروهای برآ و پسا،  $T$  و  $SFC$  به ترتیب تراست و مصرف سوخت ویژه،  $m$  جرم و  $(x, y, z)$  موقعیت مکانی پرنده هستند.

با ترکیب معادلات (2) و (3) معادله (6) تولید خواهد شد که در آن زاویه غلت بدست خواهد آمد:

$$\tan \mu = \frac{V \cos \gamma \dot{\chi}}{V \dot{\gamma} + g \cos \gamma} = \frac{\dot{\chi}}{\frac{\dot{\gamma}}{V} + \frac{g}{\cos \gamma}} \quad (6)$$

رابطه (6)، تفسیر کاملی از زاویه غلت و وابستگی آن به پارامترهای سینماتیکی پرنده را ارائه می‌دهد. با تعریف رابطه (7) می‌توان روابط فوق را به فرم ضریب بار بصورت زیر نوشت:

$$n = \frac{L + T \sin \alpha}{mg} \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه (7) در رابطه‌های (2) و (3) فرم جدید این معادلات به صورت رابطه (8) است:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \frac{g}{V} \frac{n \sin \mu}{\cos \gamma} \quad \text{و} \quad \dot{\gamma} = \frac{g}{V} (n \cos \mu - \cos \gamma) \\ \therefore n &= \frac{\dot{\gamma} V / g + \cos \gamma}{\cos \mu} \end{aligned} \quad (8)$$

### 2-2- قیود دینامیکی

عملکرد پرنده تحت تأثیر محدودیت‌های عملکردی و آیرودینامیکی است که مانورپذیری آن را تحت تأثیر قرار می‌دهند. برای تضمین راحتی اتوپایلوت پرنده محدودیت‌های بیشتری نیز می‌توانند لحاظ شوند.

نرخ صعود و نرخ گردش به عنوان دو محدودیت عملکردی بصورت روابط

(9.10) مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$ROC_{\max} = V_{ROC-\max} \sin(\gamma_{ROC-\max}) \quad (9)$$

$$\dot{\chi}_{\max} = 57.3 \times \frac{V}{R_{\min}} \quad (10)$$

که در آن  $ROC_{\max}^3$  و  $\dot{\chi}_{\max}$ ، به ترتیب حداکثر نرخ اوج‌گیری و حداکثر نرخ گردش را نمایش می‌دهند و  $R_{\min} = V^2 / g \sqrt{n_{\max}^2 - 1}$  حداقل شعاع گردش پرنده است که در آن  $g$  شتاب جاذبه و  $n_{\max}$  حداکثر ضریب بار پرنده هستند. لذا از بین پارامترهای مذکور، حداکثر نرخ اوج‌گیری، حداکثر نرخ گردش و حداکثر ضریب بار به عنوان 3 محدودیت مستقل از پارامترهای عملکردی در نظر گرفته می‌شوند.

از طرف دیگر، زاویه غلت نیز از محدودیت‌های جدی در پرنده‌های BTT<sup>4</sup> به حساب می‌آید. این محدودیت یکی به خاطر محدودیت در مانورپذیری در کانال عرضی-سمتی و دیگری به دلیل الزامات سیستمی چون محدودیت در سنسورها و ادوات ناوبری مانند رادار داپلر و ارتفاع‌سنج رادیویی است که بر مقدار غلت پرنده حاکم می‌کنند.

همچنین، محدودیت در سرعت پرنده (با میزان تراست مورد نیاز) به عنوان ورودی مقید در نظر گرفته می‌شود؛ چرا که پرنده مجاز نیست هرچقدر که بخواهد سرعت خود را افزایش یا کاهش دهد. در مجموع، قیود مورد نیاز مطابق روابط (11) در برنامه الگوریتم لحاظ می‌شوند.

$$\begin{aligned} |ROC| &\leq ROC_{\max} \\ \dot{\chi} &\leq \dot{\chi}_{\max} \\ \mu &\leq \mu_{\max} \\ n_{\min} &\leq n \leq n_{\max} \\ T_{\min} &\leq T \leq T_{\max} \\ V_{\min} &\leq V \leq V_{\max} \\ \alpha_{\min} &\leq \alpha \leq \alpha_{\max} \end{aligned} \quad (11)$$

### 2-3- تابع هزینه

برای دستیابی به مسیریابی به مسیریابی با کیفیت مطلوب، تابع معیار لازم است. در پرنده‌های بدون سرنشین، معیارهای مختلفی برای سنجش عملکرد و بهینه‌سازی مسیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. مهم‌ترین مسأله در این حوزه، ابتدا شناخت عوامل تأثیرگذار در معیارهای بهینگی و سپس، حصول جواب‌های بهینه براساس انتخاب درست معیارهاست. این معیارها شامل حداقل مدت زمان پرواز، حداقل مصرف سوخت و کوتاه‌ترین مسیر است. این معیارها را می‌توان بصورت ترکیبی (12) در نظر گرفت:

$$C(t) = W_t \int dt + W_m \int \dot{m} dt + W_s \int \dot{S} dt \quad (12)$$

پارامترهای  $W_t$ ،  $W_m$  و  $W_s$ ، پارامترهای وزنی متناظر با هر تابع معیار هستند و توسط تصمیم گیرنده انتخاب می‌شوند. پارامترهای وزنی فوق در صورتی که شرایط  $\sum W_i = 1$  و  $W_i > 0$  برای آنها مهیا شود شرط کافی را برای رسیدن به جواب پارتو<sup>5</sup> مهیا می‌سازند [17].

### 2-4- توسعه معادلات خطای ناوبری اینرسی

اگر ناوبری وسیله پرنده توسط سیستم ناوبری اینرسی<sup>6</sup> انجام شود، با گذشت زمان دارای انباشتگی خطای ناوبری خواهد شد. به عبارت دیگر، سیستم‌های ناوبری اینرسی دارای خطای ناپایدار با پیروید 84.4min (موسوم به پیروید

3- Rate Of Climb

4- Bank-To-Turn

5- Pareto Condition

6- Inertial Navigation System (INS)

1- Point Mass Equations

2- Bank Angle (Velocity Roll)

و با مقایسه المان به المان با معادله قبلی رابطه (23) بدست می‌آید:

$$\dot{\Delta} \cong -\omega_{in}^n \times \Delta + \delta\omega_{in}^n - C_b^n \delta\omega_{ib}^b \quad (23)$$

که در آن، رابطه (24) برقرار است.

$$\omega_{in}^n \times = \Omega_{in}^n, \delta\omega_{in}^n \times = \delta\Omega_{in}^n, \delta\omega_{ib}^b \times = \delta\Omega_{ib}^b \quad (24)$$

#### 2-4-2- خطاهای سرعت و موقعیت

معادله بردار سرعت به صورت رابطه (25) بیان می‌شود:

$$\dot{v} = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times v + g^n \quad (25)$$

که  $f^b$  نیروی مخصوص را در محورهای بدنی نشان می‌دهد.

بطور مشابه، سرعت تخمینی را می‌توان برحسب کمیت‌های تخمین زده شده به صورت (26) انتشار داد:

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{C}_b^n \tilde{f}^b - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{in}^n) \times \tilde{v} + \tilde{g}^n \quad (26)$$

با تفاضل دو معادله فوق رابطه (27) بدست می‌آید:

$$\delta\dot{v} = \dot{\tilde{v}} - \dot{v} = \tilde{C}_b^n \tilde{f}^b - C_b^n f^b - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{in}^n) \times \tilde{v} + (2\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times v + \tilde{g}^n - g^n \quad (27)$$

بطور مشابه با قراردادن  $\tilde{C}_b^n = [I - \Delta]C_b^n$ ،  $\delta v = \tilde{v} - v$ ،  $\delta f^b = \tilde{f}^b - f^b$ ، و پس از ساده‌سازی و حذف ترم‌های ضربی کوچک رابطه (28) بدست می‌آید:

$$\delta\dot{v} = -\Delta C_b^n f^b + C_b^n \delta f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times \delta v - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{in}^n) \times v + \delta g \quad (28)$$

با اغماض از ترم‌های کوریولیس و شتاب جاذبه و استفاده از  $f^n = C_b^n f^b$ ، معادله خطای سرعت به صورت (29) می‌شود:

$$\delta\dot{v} = [f^n \times] \Delta + C_b^n \delta f^b \quad (29)$$

در نهایت، معادله خطای موقعیت نیز به صورت رابطه (30) حاصل می‌شود:

$$\delta\dot{p} = \delta v \quad (30)$$

خطاهای سرعت و موقعیت غالباً تابعی از نیروهای مخصوص  $f^n$  هستند که روی سیستم ناوبری اینرسی اثر می‌گذارد، خطاهای وضعیت  $\Delta$  و عدم دقت‌ها در اندازه‌گیری نیروهای مخصوص توسط شتاب‌سنج‌ها یعنی  $\delta f^b$ . بعلاوه خطاها به دلیل خطا در ترم‌های کوریولیس و عدم قطعیت در مدل کامل شتاب جاذبه و فرضیات نه چندان دقیق در خصوص شکل زمین افزایش خواهد یافت.

#### 2-4-3- فرم فضای حالت معادلات خطا

با استفاده از معادلات بدست آمده فوق، فرم فضای حالت خلاصه شده به صورت رابطه (31) ارائه می‌شود:

$$\dot{\delta x} = F \delta x + G u \quad (31)$$

که در آن روابط زیر برقرارند:

$$\delta x = [\delta\phi \quad \delta\theta \quad \delta\psi \quad \delta v_n \quad \delta v_e \quad \delta v_d \quad \delta L \quad \delta l \quad \delta h]^T$$

$$u = [\delta\omega_x \quad \delta\omega_y \quad \delta\omega_z \quad \delta f_x \quad \delta f_y \quad \delta f_z]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} -C_b^n & 0 \\ 0 & C_b^n \end{bmatrix}$$

شولر) هستند. یعنی خطای INS به صورت نوسانی واگراست. برای مدل‌سازی خطا می‌توان از مدل‌های خطای INS استفاده کرد که عبارتند از [18]:

#### 2-4-1- خطاهای وضعیت

وضعیت تجهیزات ناوبری چسبیده به بدنه نسبت به دستگاه مرجع ناوبری برحسب ماتریس کسینوس‌های هادی آن یعنی  $C_b^n$  بیان می‌شود. وضعیت تخمین زده شده یعنی  $\tilde{C}_b^n$  می‌تواند برحسب ماتریس کسینوس‌های هادی واقعی خود نوشته شود (رابطه 13):

$$\tilde{C}_b^n = B C_b^n \quad (13)$$

که در آن B انتقال از مختصات مرجع واقعی به مختصات مرجع تخمینی را نشان داده و به عنوان عدم هم‌راستایی دستگاه مرجع در کامپیوتر سیستم ناوبری اینرسی ذخیره شده است. برای زوایای کوچک این عدم هم‌راستایی، ماتریس B می‌تواند برحسب ماتریس مایل متقارن به صورت رابطه (14) نوشته شود:

$$B = [I - \Delta] \quad (14)$$

که A ماتریس همانی 3x3 بوده و  $\Delta$  به صورت (15) داده می‌شود:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 0 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

که  $\delta\theta$ ،  $\delta\phi$  و  $\delta\psi$  مربوط به خطای وضعیت غلت، پیچ و سمت هستند. این ترم‌ها قابل قیاس و مشابه با عدم هم‌راستایی فیزیکی تجهیزات ناوبری در سیستم ناوبری چسبیده به بدنه هستند و در صورت کوچک بودن آنها معادل با عدم هم‌راستایی زوایای اوپلر در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین رابطه (16) بدست می‌آید:

$$\tilde{C}_b^n = [I - \Delta] C_b^n \quad (16)$$

$$\therefore \Delta = I - \tilde{C}_b^n C_b^{nT}$$

با مشتق‌گیری از رابطه (16)، رابطه (17) بدست می‌آید:

$$\dot{\Delta} = -\dot{\tilde{C}_b^n} C_b^{nT} - \tilde{C}_b^n \dot{C}_b^{nT} \quad (17)$$

متطابق [3]، ماتریس کسینوس هادی  $C_b^n$  به عنوان تابعی از نرخ مطلق بدنی  $(\Omega_{ib}^b)$  و نرخ دستگاه ناوبری  $(\Omega_{in}^n)$  به صورت رابطه (18) انتشار می‌یابد:

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^n C_b^n \quad (18)$$

به صورت مشابه می‌توان رابطه (19) را نوشت:

$$\dot{\tilde{C}_b^n} = \tilde{C}_b^n \tilde{\Omega}_{ib}^b - \tilde{\Omega}_{in}^n \tilde{C}_b^n \quad (19)$$

که در آن  $\tilde{\Omega}_{in}^n$  و  $\tilde{\Omega}_{ib}^b$  به ترتیب نرخ بدنی اندازه‌گیری شده و نرخ چرخش تخمین شده شده دستگاه ناوبری اینرسی هستند. با قراردادی مقادیر فوق در معادله 17 می‌دهد:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= -\tilde{C}_b^n \tilde{\Omega}_{ib}^b C_b^{nT} + \tilde{\Omega}_{in}^n \tilde{C}_b^n C_b^{nT} + \tilde{C}_b^n \Omega_{ib}^b C_b^{nT} - \tilde{C}_b^n C_b^{nT} \Omega_{in}^n \\ &= -\tilde{C}_b^n [\tilde{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ib}^b] C_b^{nT} + \tilde{\Omega}_{in}^n \tilde{C}_b^n C_b^{nT} - \tilde{C}_b^n C_b^{nT} \Omega_{in}^n \end{aligned} \quad (20)$$

با قراردادی معادله 16 در رابطه (20)، رابطه (21) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= -[I - \Delta] C_b^n [\tilde{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ib}^b] C_b^{nT} + \tilde{\Omega}_{in}^n [I - \Delta] C_b^n C_b^{nT} \\ &\quad - [I - \Delta] C_b^n C_b^{nT} \Omega_{in}^n \end{aligned} \quad (21)$$

با نوشتن  $\delta\Omega_{ib}^b = \tilde{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ib}^b$ ،  $\delta\Omega_{in}^n = \tilde{\Omega}_{in}^n - \Omega_{in}^n$  و صرف‌نظر از ترم‌های ضربی کوچک رابطه (22) بدست می‌آید:

$$\dot{\Delta} \cong \Delta \Omega_{in}^n - \Omega_{in}^n \Delta + \delta\Omega_{in}^n - C_b^n \delta\Omega_{ib}^b C_b^{nT} \quad (22)$$

در رابطه (32)،  $\bar{H} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i$ ، به عبارت دیگر  $\sigma_T$  معیاری برای میزان تغییر ارتفاع عوارض حول ارتفاع متوسط است. توجه شود که کمترین مقدار  $\sigma_T$  مورد نیاز برای پشتیبانی از عملیات ترkam تقریباً 7/62 متر است. نواحی که در آن  $\sigma_T$  دارای مقادیر 50 فوت یا بیشتر باشد، معمولاً کاندیدای خوبی برای نواحی تصحیح ترkam در نظر گرفته می‌شوند. دریاچه‌ها و نواحی هموار یا خیلی مسطح مقدار  $\sigma_T$  خیلی کمی دارند و لذا نواحی تصحیح مناسبی نیستند. اما  $\sigma_T$  تنها شرط تعیین مناسب بودن یک ناحیه برای عملیات ترkam نیست. بطور خاص سه پارامتر برای توصیف عوارض مربوط به ترkam مورد استفاده قرار می‌گیرند و مقادیر آنها شاخصی برای توانایی عوارض برای پشتیبانی موفق از تصحیح ترkam است. این پارامترها عبارتند از:  $\sigma_z$ ،  $\sigma_T$  و طول همبستگی عوارض  $X_T$ . این طول، فاصله جداسازی بین دو سطر یا ستون ماتریس ارتفاعی عوارض است که برای کاهش خود همبستگی نرمال آنها به مقدار  $e^{-1}$  مورد نیاز است. معمولاً فرض می‌شود که دو پروفیل ارتفاع عوارض موازی که با فاصله بزرگ‌تر از  $X_T$  از هم جدا می‌شوند از یکدیگر مستقل هستند.

$\sigma_z$  انحراف استاندارد تغییرات نقطه به نقطه در ارتفاع عوارض است و به صورت شکل 2 تعریف می‌شود. همانند  $\sigma_T$  مقادیر  $\sigma_z$  نمایش مستقیمی از ناهمواری عوارض است. عبارت  $\sigma_z$  با فرض تابع خود همبستگی گوسی از معادله (33) بدست می‌آید:

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (D_i - D)^2}{N-1}} \quad (33)$$

که در آن  $D = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} D_i$  و  $D_i = H_i - H_{i+1}$



شکل 2 تعریف  $\sigma_z$

$\sigma_T$  و  $\sigma_z$  طبق رابطه (34) با پارامتر سوم  $X_T$  مرتبط می‌شوند:

$$\sigma_z^2 = 2\sigma_T^2 \left( 1 - e^{-\left(\frac{d}{X_T}\right)^2} \right) \quad (34)$$

که  $d$  اندازه سلول یا فاصله بین نمونه‌های ارتفاع است.

### 3- الگوریتم طراحی مسیر مبتنی بر شبکه جریان

این الگوریتم از یک شبکه رقمی از سلول‌های مستطیل شکل با اندازه مساوی به عنوان ورودی الگوریتم استفاده می‌کند که اندازه آن برابر با یک شبکه  $m \times n$  است. سپس بر اساس گرید DEM<sup>1</sup>، یک ساختار شبکه جریان ساخته می‌شود. هر نقطه از گرید به عنوان یک گره از شبکه در نظر گرفته می‌شود. چون گرید DEM منظم است، می‌توان گره‌ها را بصورت یک شبکه لایه‌ای دسته‌بندی کرد، پس  $n$  لایه و هر لایه شامل  $m$  گره خواهد بود. هر گره شبکه به صورت  $(x, y, z)$  موقعیت جغرافیایی آن نقطه محسوب می‌شود. تمام نقاطی که دارای طول برابر هستند یک لایه از شبکه نامیده می‌شوند. گره‌های واقع در لایه  $j$  توسط کمان‌هایی به گره‌های واقع در  $j-1$  متصل

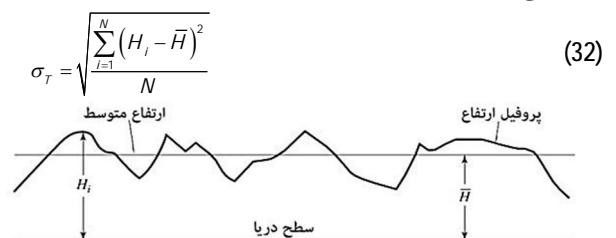
$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\omega_E \sin L + \frac{V_n}{R} \tan L\right) & \frac{V_n}{R} & 0 \\ \left(\omega_E \sin L + \frac{V_n}{R} \tan L\right) & 0 & \omega_E \cos L + \frac{V_e}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{V_n}{R} & -\omega_E \cos L - \frac{V_e}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -f_d & f_e & \frac{V_d}{R} \\ f_d & 0 & -f_n & 2\omega_E \sin L + \frac{V_e}{R} \tan L \\ -f_e & f_n & 0 & -\frac{2V_n}{R} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\omega_E \sin L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tan L}{R} & 0 & -\omega_E \cos L - \frac{V_e}{R \cos^2 L} & 0 \\ -2\left(\omega_E \sin L + \frac{V_n}{R} \tan L\right) & \frac{V_n}{R} & -V_n \left(2\omega_E \cos L + \frac{V_e}{R \cos^2 L}\right) & 0 \\ \frac{1}{R} (V_n \tan L + V_d) & 2\omega_E \cos L + \frac{V_e}{R} & 2\omega_E (V_n \cos L - V_e \sin L) & 0 \\ -2\left(\omega_E \cos L + \frac{V_e}{R}\right) & 0 & 2\omega_E V_n \sin L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R \cos L} & 0 & \frac{V_n \tan L}{R \cos L} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس  $F$ ،  $R$  شعاع زمین،  $L$  عرض جغرافیایی،  $\omega_E$  سرعت زاویه‌ای زمین و مؤلفه‌های سرعت در دستگاه ناوبری است. ( $V_n, V_e, V_d$ )

### 2-5- ملاحظات ترkam در طراحی مسیر

الگوریتم ترkam با استفاده از تطبیق داده‌های عوارض زمینی و ارتفاع سنج راداری برای یافتن موقعیت دقیق پرنده و در نتیجه به عنوان سیستم کمک ناوبری استفاده می‌شود. از عوامل مؤثر بر انتخاب ناحیه به‌روزرسانی موقعیت توسط این الگوریتم، ناهمواری و یکنایی عوارض است و لذا کیفیت سیگنال‌های تولید شده توسط آن مستقیماً با افزایش دامنه، فرکانس و تصادفی بودن عوارض افزایش می‌یابد.

به عبارت دیگر، الگوریتم ترkam روی هر نوع عوارضی کار نمی‌کند. مثلاً هر چقدر عوارض ناهموارتر باشد، ترkam بهتر کار می‌کند. اما عوارض خوب باید ویژگی دیگری نیز به جز ناهمواری داشته باشد؛ عوارض باید یکتا باشد (به عبارت دیگر یک پروفیل خارج از نقشه ترkam نباید مشابه هیچ نقشه دیگری باشد). ناهمواری عوارض به صورت انحراف استاندارد نمونه‌های ارتفاع عوارض تعریف می‌شود. این مقدار را با  $\sigma_T$  نمایش می‌دهند که با رابطه (32) تعریف می‌شود (شکل 1) [19].



شکل 1 انحراف استاندارد عوارض ( $\sigma_T$ )

1- Digital Elevation Map

3-1-1-1- قضیه بهینگی

**قضیه:** برچسب‌های هزینه گره‌ها، در صورتی مسیر بهینه از نقطه شروع تا آن گره را نمایش می‌دهند که برای همه گره‌های  $(i,j)$  و  $(k,j-1)$  که توسط کمان  $C_{ij,kj-1}$  به هم متصل شده‌اند، رابطه (36) برقرار باشد:

$$P(k,j+1) \leq P(i,j) + C_{i,j,k,j+1} \quad (36)$$

و کمان  $C_{ij,kj-1}$  در صورتی روی مسیر بهینه واقع می‌شود که رابطه (37) برقرار باشد:

$$P(k,j+1) = P(i,j) + C_{i,j,k,j+1} \quad (37)$$

اثبات قضیه در [15] آمده است.

3-1-1-2- محاسبه برچسب‌های هزینه

ابتدا برچسب هزینه گره شروع را صفر قرار داده و برچسب بقیه گره‌ها بینهایت در نظر گرفته می‌شوند. فرض می‌شود که برچسب هزینه گره‌های لایه  $f$  محاسبه شده باشند. برای هر گره  $k$  در لایه  $f-1$  ابتدا مقدار پارامترهای مقید در گره جاری  $(i,j)$  محاسبه می‌شود. در صورتی که قید پارامترها ارضا نشد مقدار جریان روی گره مزبور را صفر  $(X_{ij,kj-1}=0)$  و برچسب هزینه آن بینهایت قرار داده می‌شوند. در غیر اینصورت مطابق قضیه فوق رابطه (38) بدست می‌آید:

$$P(i,j) = \min [P(k,j-1,j) + C_{k,j-1,j,j}], X_{ij,kj-1} = 1 \quad (38)$$

این روند تا رسیدن به آخرین لایه شبکه که شامل گره هدف است، ادامه می‌یابد تا این که برچسب هزینه همگی نقاط، به هنگام‌سازی می‌شوند.

3-1-1-3- استخراج مسیر بهینه

پس از اینکه گره هدف نیز دارای برچسب هزینه بهینه شد، می‌توان مسیر بهینه را با الگوریتم بازگشت به عقب از نقطه هدف تا نقطه شروع، لایه به لایه تعیین کرد و در نهایت مسیر بهینه را بدست آورد.

لازم به ذکر است که اگر مسأله فوق به صورت عددی و مثلاً با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی پویای پیوسته یا کنترل بهینه حل شود بایستی چند بار از کل فضای حالت گذر شود تا جواب بهینه بدست آید. اما با طرح‌های گسسته‌سازی مناسب فضای جواب، الگوریتم کارآمد شبکه جریان لایه‌ای، با یکبار عبور از فضای جواب، مسیر بهینه را در قالب بهینه‌سازی چندمعیاری می‌یابد.

از طرف دیگر، ساختار لایه‌ای و برچسب گذاری این طرح قابلیت افزودن اصلاحات مهمی را به الگوریتم ایجاد می‌کند؛ بدین صورت که می‌توان هرگونه پارامترهای مقیدی را تعریف و محاسبه نموده و بدون اینکه به صورت تلویحی (ضمنی) در تابع هزینه وارد شود و حل آن را پیچیده کند، مقدار آن را روی برچسب گره‌ها ارزیابی کرده و در صورتی که قید مزبور ارضا نشد با صفر نمودن مقدار جریان روی گره، از مجموعه گره‌های مجاز خارج کرد. در واقع مسأله بهینه‌سازی در این بخش به یک مسأله تصمیم‌گیری<sup>5</sup> تبدیل شده و لذا با توجه به این که اصولاً مسأله تصمیم‌گیری راحت‌تر از مسأله بهینه‌سازی حل می‌شود، با عنایت به این موضوع، امکان بکارگیری هرگونه قید در الگوریتم طراحی مسیر ارائه شده به راحتی فراهم می‌شود و این یکی از جنبه‌های نوآورانه روش مزبور است.

3-1-1-4- اعمال خطای ناوبری به الگوریتم

برای اعمال خطای ناوبری به الگوریتم طراحی مسیر، ابتدا مقدار مکانی

می‌شوند. اگر گره  $(X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij})$  در لایه  $j$  و گره  $(X_{k,j-1}, Y_{k,j-1}, Z_{k,j-1})$  در لایه  $j-1$  باشد، تابع هزینه  $C_{ij,kj-1}$  برای کمان متصل کننده این دو گره تعریف شده که در واقع، هزینه انتقال یک واحد جریان از گره  $(k,j-1)$  به گره  $(i,j)$  است. به عبارت دیگر برای هر گره در لایه جاری، به تعداد  $K$  کمان  $(k \in K)$  در لایه قبلی مورد استفاده قرار می‌گیرد؛  $K$ ، میدان دید مورد نیاز برای اتصال گره‌های لایه قبلی به لایه جاری است. شکل 3 نحوه ساختن شبکه را نمایش می‌دهد. هر گره  $V$ ، مجموعه همه گره‌های شبکه با اندازه  $m \times n$  و مجموعه همه کمان‌های شبکه با اندازه  $V \times V$  باشند، گراف جهت‌دار  $G(V,A)$  تعریف می‌شود. ساختار  $F=(V,A,X)$  یک شبکه نامیده می‌شود هرگاه  $X$  بردار جریان روی کمان‌ها بوده و به صورت تابع  $X: A \rightarrow \mathbb{R}$  باشد.

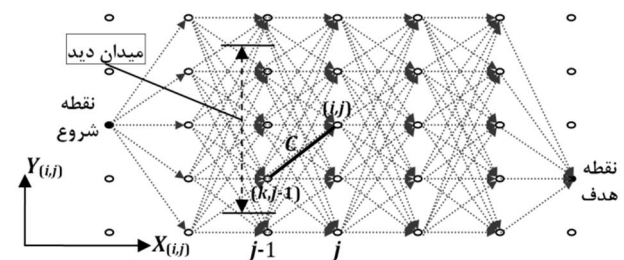
مسأله جریان با کمترین هزینه<sup>1</sup> که در شبکه‌های جریان مطرح می‌شود، یافتن جریان شدنی<sup>2</sup> است بطوریکه مجموع هزینه ارسال‌ها به حداقل خود برسد. به عبارت دیگر، یافتن جریانی که با کمترین هزینه، عرضه‌ها را به گره‌های متقاضی برساند. مدل ریاضی این مسأله به صورت رابطه (35) است [20].

$$\begin{aligned} \text{Min.} : J &= \sum_{\{(i,j),(k,j-1)\} \in A} C_{i,j,k,j-1} X_{i,j,k,j-1} \\ \text{S.T.} : & \sum_{\{(i,j),(k,j-1)\} \in A} X_{i,j,k,j-1} - \sum_{\{(i,j),(k,j-1)\} \in A} X_{k,j-1,i,j} \\ &= \begin{cases} m \times n - 1 & (i,j) = (is, js) \\ -1 & \forall (i,j) \neq (is, js) \end{cases} \\ & X_{i,j,k,j-1} \geq 0 \quad \forall [(i,j),(k,j-1)] \in A \end{aligned} \quad (35)$$

که در آن،  $J$  معرف هزینه کل مسیرها در شبکه بوده، گره شروع و  $X_{ij,kj-1}$  مقدار (ظرفیت) جریانی را نشان می‌دهد که از کمان مزبور عبور می‌کند و به عنوان متغیر تصمیم‌گیری قلمداد می‌شود. بعد از محاسبه حداقل هزینه، اگر کمان فوق روی مسیر بهینه واقع شود:  $X_{ij,kj-1} = 1$  و در غیر اینصورت:  $X_{ij,kj-1} = 0$ . اگر هیچ جریانی وجود نداشته باشد که به طور همزمان در هر دو محدودیت فوق صدق کند، شبکه را نشدنی<sup>3</sup> می‌نامند.

3-1-1-3- الگوریتم مسیر بهینه

برای مسأله مورد نظر، شرایط بهینگی به صورت زیر بیان می‌شود: در هر تکرار الگوریتم، به گره‌های هر لایه از شبکه یک عدد نسبت داده می‌شود که به آن برچسب هزینه<sup>4</sup> گفته می‌شود. اگر  $(i,j)$  اندیس‌های گره مفروضی از شبکه باشد آنگاه برچسب هزینه این گره با  $p(i,j)$  نمایش داده می‌شود. برچسب هزینه‌ها توسط الگوریتمی محاسبه می‌شود که در ادامه اشاره می‌شود. قبل از آن اثبات بهینگی الگوریتم مورد نیاز ارائه می‌شود.



شکل 3 نمایشی از شبکه جریان لایه ای ایجاد شده روی نقشه رقومی

2- Minimum Cost Flow Problem  
3- Feasible  
4- Infeasible  
5- Cost Label

1- Decision Problem

تأمین محدوده مجاز پارامترهای تأثیرگذار فوق، تضمین بکارگیری ترکام است و بدین صورت در الگوریتم مورد نیاز در نظر گرفته می‌شود که ابتدا مقدار پارامترهای مذکور برای هر نقطه از ابتدا تا انتهای لایه‌های شبکه محاسبه می‌شوند و در صورتی که خارج از حد مجاز باشند برچسب هزینه آن نقطه برابر با بینهایت قرار داده می‌شود. بدین ترتیب مسیر طراحی شده توسط الگوریتم به طور خودکار از نقاط مزبور عبور نمی‌کند. به عنوان نمونه، برای گره جاری  $(i,j)$  بایستی روابط:  $\sigma_{T_{min}} \leq \sigma_{T(i,j)} \leq \sigma_{T_{max}}$  و  $\sigma_{z_{min}} \leq \sigma_{z(i,j)} \leq \sigma_{z_{max}}$  برقرار باشند.

### 3-2- گسسته‌سازی معادلات و تابع هزینه

از آنجایی که معادلات ارائه شده برای دینامیکی جسم مورد نظر به صورت پیوسته است لذا به منظور بکارگیری در روش شبکه جریان، می‌بایست معادلات به فرم گسسته تبدیل شوند. ضمن این که، پارمترهای ورودی مسئله، هندسه نقاط است که بر اساس آنها، معادلات عملکردی حاصل می‌شوند. برای این منظور، تغییر وابستگی معادلات از حالت زمان به مکان مد نظر قرار گرفته و فرم جدید گسسته شده بدست می‌آید. با محاسبه طول مسیر، زوایای مسیر و هدینگ بر اساس هندسه نقاط به صورت روابط (39-41):

$$\Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)} = \sqrt{(X_{(i,j)} - X_{(k,j-1)})^2 + (Y_{(i,j)} - Y_{(k,j-1)})^2 + (Z_{(i,j)} - Z_{(k,j-1)})^2} \quad (39)$$

$$\gamma_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)} = \tan^{-1} \left( \frac{Z_{(i,j)} - Z_{(k,j-1)}}{\sqrt{(X_{(i,j)} - X_{(k,j-1)})^2 + (Y_{(i,j)} - Y_{(k,j-1)})^2}} \right) \quad (40)$$

$$\chi_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)} = \tan^{-1} \left( \frac{Y_{(i,j)} - Y_{(k,j-1)}}{X_{(i,j)} - X_{(k,j-1)}} \right) \quad (41)$$

و جایگزینی تغییرات مکان به جای زمان (رابطه 42):

$$V_{(k,j-1)} = \frac{\Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)}}{V_{(k,j-1)}} \quad (42)$$

آنگاه عبارت مربوط به نرخ اوج‌گیری از رابطه (43) بدست می‌آید:

$$ROC_{(k,j-1)} = V_{(k,j-1)} \sin \gamma_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)} \quad (43)$$

و عبارات مربوط به نرخ زوایای مسیر و هدینگ به ترتیب به صورت روابط (44,45) تولید خواهد شد:

$$\dot{\gamma}_{(k,j-1)} = \frac{\Delta \gamma_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)}}{\Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)}} V_{(k,j-1)} \quad (44)$$

$$\dot{\chi}_{(k,j-1)} = \frac{\Delta \chi_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)}}{\Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)}} V_{(k,j-1)} \quad (45)$$

زوایای غلت نیز طبق رابطه (6) تولید خواهد شد:

$$\mu_{(k,j-1)} = \tan^{-1} \frac{\dot{\chi}_{(k,j-1)}}{\dot{\gamma}_{(k,j-1)} + \frac{g}{V_{(k,j-1)}}} \quad (46)$$

ضریب بار نیز طبق رابطه (7) تولید خواهد شد:

$$n_{(k,j-1)} = \frac{V_{(k,j-1)} \dot{\gamma}_{(k,j-1)} + \frac{g \cos \mu_{(k,j-1)}}{\cos \mu_{(k,j-1)}}}{g \cos \mu_{(k,j-1)}} \quad (47)$$

همچنین، تابع هزینه عملکردی برای این مسئله طبق رابطه (12) با توابع بی بعد شده بصورت رابطه (48) بدست می‌آید:

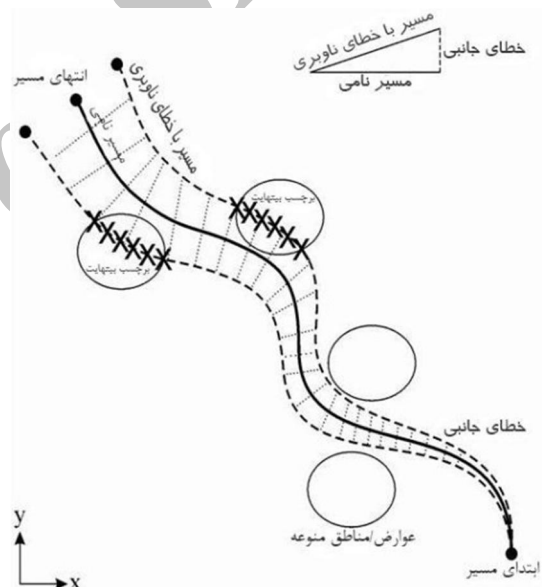
$$C(t) = W_t \frac{\Delta t}{\Delta t_{max}} + W_m \frac{\Delta m}{\Delta m_{max}} + W_s \frac{\Delta s}{\Delta s_{max}} \quad (48)$$

انحراف حاصل از خطای ناوبری کل بر حسب زمان از ابتدا تا انتهای لایه‌های شبکه توزیع می‌شود تا حول مسیر احتمالی، یک کُریدور (دالان) بدست آید. سپس ارتفاع عوارض محدوده کُریدور را بررسی کرده و در صورتی که ارتفاع عوارض محدوده بیش از ارتفاع نقطه مسیر احتمالی باشد برچسب هزینه آن نقطه برابر با بینهایت قرار داده می‌شود. بدین ترتیب مسیر طراحی شده توسط الگوریتم به طور خودکار از نقاطی که در صورت انحراف از مسیر امکان برخورد با عوارض حاشیه مسیر در آنها وجود دارد، عبور نمی‌کند. شکل 4، نمایشی از اعمال خطای ناوبری را روی مسیر مورد نیاز ارائه می‌دهد. جدول 1 نیز شبه کد نحوه اعمال خطای ناوبری را ارائه می‌دهد.

پارامتر drift یک کمیت متریک است که در هر لحظه از ترم مقادیر طولی رابطه (31) حاصل می‌شود.  $h_c$  ارتفاع پرنده از سطح عوارض است.

### 3-1-5- اعمال پارامترهای تأثیرگذار ترکام به الگوریتم

برای اعمال پارامترهای تأثیرگذار ترکام به الگوریتم طراحی مسیر، ابتدا مقادیر مورد نیاز پارامترهای مزبور تهیه می‌شود. جدول 2، مقادیر نوعی پارامترهای  $\sigma_T$  و  $\sigma_Z$  را برای سه نوع منطقه در آمریکای مرکزی از لحاظ میزان ناهمواری ارائه داده است [21].



شکل 4 تأثیر خطای ناوبری روی مسیر پروازی

جدول 1 شبکه کد الگوریتم اعمال خطای ناوبری

Algorithm: Navigation Error determination			
for $(i,j) \in V$			
Produce total drift(j) based on equ. (31)			
NAV_Error_Corridor = {i - drift : i + drift}			
if $(z(i,j) + h_c \leq \max_{k_{drift} \in NAV\_Error\_Corridor} \{z(k_{drift}, j)\})$			
p(i,j) ← ∞			
end if			
end for			

جدول 2 مقادیر متداول پارامترها برای 3 نوع عوارض

محل	نوع عوارض	$m \sigma_T$	$m \sigma_Z$
الزورت، کانزاس	معمولی	9.14	0.5
گرین ریور، اوتاه	متوسط	30.48	2
بلک ماونتین، نیومکزیکو	زیر	152.4	7.5

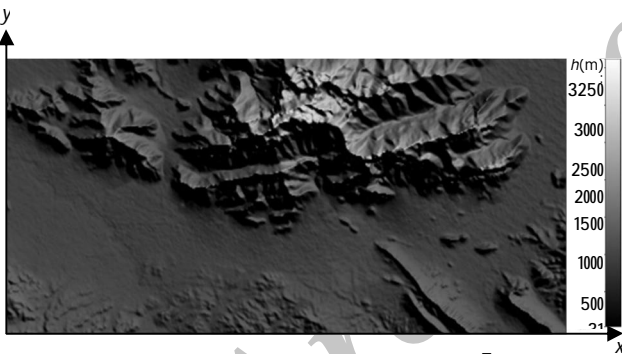
- 4- به‌هنگام‌سازی برجسب<sup>2</sup> هزینه و جریان عبوری گره‌ها تا آخرین لایه شامل گره هدف طبق فرمول‌بندی (52) و بخش 3-1-2، همراه با ذخیره پارامترهای مرتبط گره‌ها،
- 5- بازگشت به عقب<sup>3</sup> از لایه آخر (شامل گره هدف) تا لایه اول (شامل گره شروع) و حصول مسیر بهینه با استفاده از برجسب‌های بهینه و جریان عبوری مرتبط با گره هدف،
- 6- ذخیره پارامترهای مرتبط با گره‌های مسیر بهینه،
- 7- پایان.

**4- پیاده‌سازی الگوریتم و اخذ نتایج**

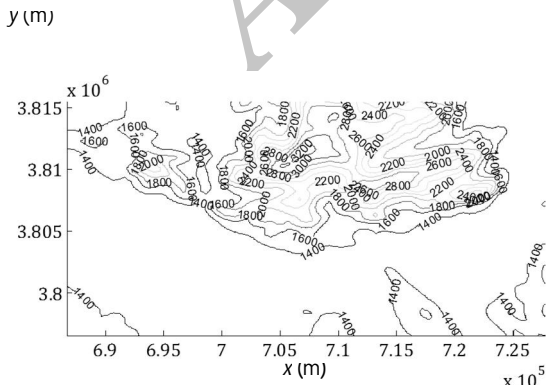
به منظور پیاده‌سازی الگوریتم طراحی مسیر از محیط نرم‌افزاری متلب استفاده شده است. برای اجرای الگوریتم از یک نقشه DEM واقعی با 31457 گره از منطقه‌ای در کشور استفاده شده است. شکل‌های 5 و 6، به ترتیب نمای سه بعدی و کانتوری از نقشه فوق‌الذکر را در محیط نرم‌افزار نشان می‌دهد.

مقادیر اولیه پارامترهای  $\mu_{max}=30^\circ$ ،  $n_{max}=3$ ،  $\dot{x}_{max}=5^\circ/\text{sec}$ ،  $ROC_{max}=30\text{m}/\text{sec}$ ،  $W_s=0.05$ ،  $W_t=0.05$ ،  $W_m=0.9$ ،  $h_{max}=1900\text{m}$  و سرعت اولیه 230 m/s مورد استفاده قرار گرفته است. پرنده مورد نظر دارای وزن 1040 کیلوگرم بوده و مشخصات پیشراناش و آیرودینامیک آن نیز معلوم است.

جدول 3 مقادیر اولیه پارامترهای خطای ناوبری را ارائه می‌دهد. این مقادیر، عناصر تشکیل‌دهنده بردار  $u$  در رابطه (31) می‌باشند.



شکل 5 نمای سه بعدی ساخته شده از نقشه رقومی در نرم‌افزار (مناطق مرتفع، روشن‌تر دیده می‌شوند)



شکل 6 نمای کانتوری همان نقشه در محیط نرم‌افزار

مقادیر دارای اندیس ماکزیمم به صورت روابط (49.50) تعریف می‌شوند:

$$\Delta t_{\max} = \max_k \frac{\Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)}}{V_{(k,j-1)}}, \Delta S_{\max} = \max_k \Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)} \quad (49)$$

$$\Delta m_{\max} = \max_k \frac{T.SFC.\Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)}}{3600.g.V_{(k,j-1)}} \quad (50)$$

$T = T(Z_{(i,j)}, V_{(k,j-1)})$ ,  $SFC = SFC(Z_{(i,j)}, V_{(k,j-1)})$   
 که در آن مقادیر تراست  $T$  و مصرف سوخت ویژه  $SFC$  پرنده مورد نظر بصورت جدول ورودی برحسب پارامترهای مربوطه به الگوریتم داده می‌شوند.

در نتیجه، تابع هزینه مورد نیاز در شبکه جریان از رابطه (51) بدست می‌آید:

$$C_{i,j,k,j-1} = \Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)} \left\{ \frac{W_t}{\Delta t_{\max}.V_{(k,j-1)}} + \frac{W_m.T.SFC}{3600.g.V_{(k,j-1)}. \Delta m_{\max}} + \frac{W_s}{\Delta S_{\max}} \right\} \quad (51)$$

**3-3- جمع‌بندی الگوریتم طراحی مسیر مبتنی بر شبکه جریان**

رابطه (52)، جمع‌بندی مسأله بهینه‌سازی را با رویکرد شبکه جریان و استفاده از تمامی قیود مساوی و نامساوی مسأله حاضر ارائه می‌دهد.

$$\text{Min.: } J = \sum_{\{(i,j),(k,j-1)\} \in A} \Delta S_{(k,j-1) \rightarrow (i,j)} \left\{ \frac{W_t}{\Delta t_{\max}.V_{(k,j-1)}} + \frac{W_m.T.SFC}{3600.g.V_{(k,j-1)}. \Delta m_{\max}} + \frac{W_s}{\Delta S_{\max}} \right\} X_{i,j,k,j-1}$$

$$S.T.: \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\{(i,j),(k,j-1)\} \in A} X_{i,j,k,j-1} - \sum_{\{(i,j),(k,j-1)\} \in A} X_{k,j-1,i,j} = \begin{cases} m \times n - 1 & (i,j) = (is, js) \\ -1 & (i,j) \neq (is, js) \end{cases} \\ X_{i,j,k,j-1} \in \{0,1\} \quad \text{for all } \{(i,j),(k,j-1)\} \in A \\ \text{روابط 39 الی 47} \\ |ROC| \leq ROC_{\max} \\ |\dot{x}| \leq \dot{x}_{\max} \\ |\mu| \leq \mu_{\max} \\ n_{\min} \leq n \leq n_{\max} \\ T_{\min} \leq T \leq T_{\max} \\ V_{\min} \leq V \leq V_{\max} \\ \sigma_{T_{\min}} \leq \sigma_{T(i,j)} \leq \sigma_{T_{\max}} \\ \sigma_{z_{\min}} \leq \sigma_{z(i,j)} \leq \sigma_{z_{\max}} \\ z(i,j) + h_c > \max_{k_{drift} \in \text{INS\_Error\_Corridor}} \{z(k_{drift}, j)\} \end{array} \right. \quad (52)$$

لذا طبق آنچه در بخش 3-1 تشریح گردید، مراحل کاری الگوریتم مزبور بصورت زیر خلاصه می‌شود:

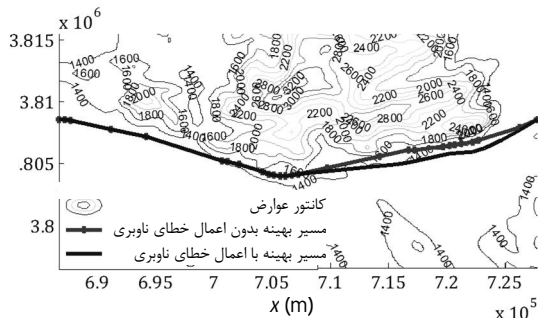
- 1- شروع،
- 2- بارگذاری نقشه DEM و مقداردهی اولیه پارامترهای موردنیاز،
- 3- انتخاب گره<sup>1</sup> براساس ابعاد شبکه DEM به صورت لایه به لایه،

2- Label Update  
 3- Backtracking Procedure

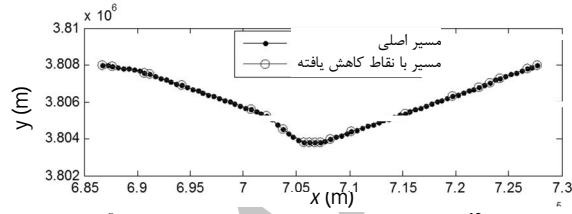
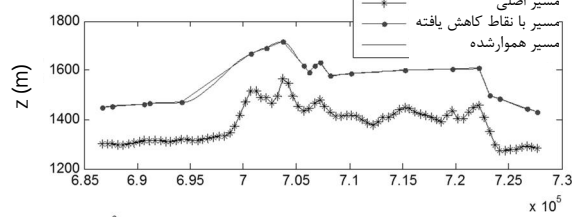
1- Node Selection



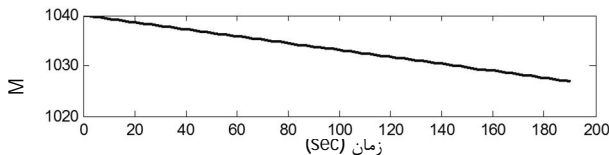
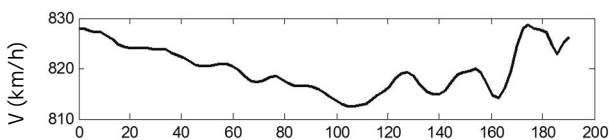
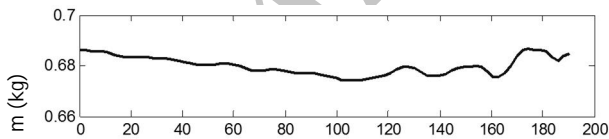
شکل 12 تغییرات مصرف سوخت، تراست و ضریب بار پرنده را در طول مسیر نمایش می‌دهد. شکل 13 تغییرات نرخ زاویه هدینگ، زاویه هدینگ و زاویه غلت را در طول مسیر نمایش می‌دهد. شکل 14 تغییرات زاویه حمله، زاویه مسیر، نرخ اوج‌گیری و زاویه الویتور مورد نیاز برای شرایط تریم را در طول مسیر نمایش می‌دهد. مطابق شکل‌های مزبور، قابلیت بکارگیری معادلات حرکت سه بعدی که منجر به تولید پارامترهای عملکردی و دینامیکی پرنده شده کاملاً مشهود است ضمن این که که پارامترهای مزبور در محدوده مجاز خود مقید شده‌اند و لذا مسیر 4 بعدی منتهی (سه بعد مکانی و یک بعد زمانی)، یک مسیر عملی و قابل ردیابی خواهد بود. زمان اجرای الگوریتم، بسته به سخت‌افزار مورد استفاده برای این تعداد گره در شبکه حدود 130 ثانیه بدست آمده است.



شکل 9 مقایسه مسیرهای بهینه در مجاورت عوارض با و بدون در نظر گرفتن خطای ناوبری



شکل 10 تصویر مسیر در صفحات X-Z و X-Y و هموار شده آن



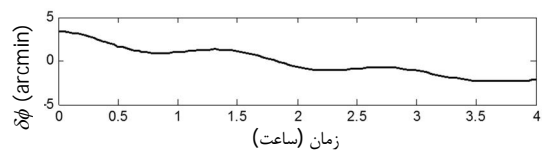
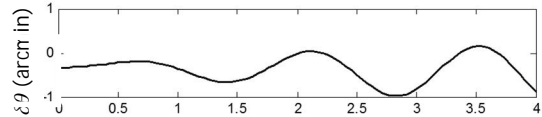
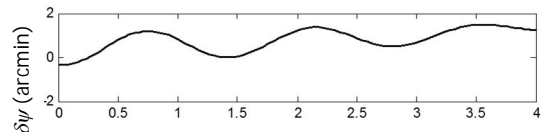
شکل 11 تغییرات عدد ماخ، سرعت و وزن پرنده

جدول 3 مقادیر اولیه پارامترهای خطای ناوبری

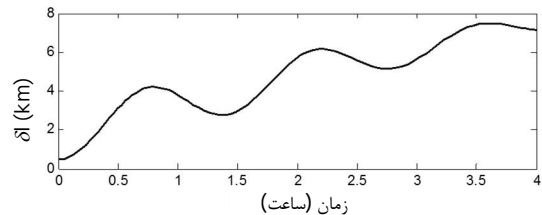
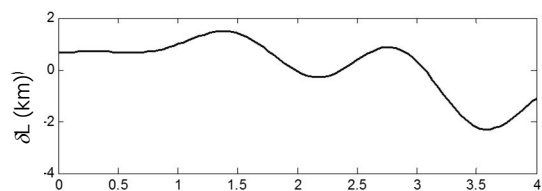
مقادیر	پارامترهای خطادار
0.01	بایاس ژيروسکوپها (°/h)
220	بایاس شتابسنجها (μg)
0.1	خطای سرعت اولیه (m/s)
20	خطای موقعیت اولیه (m)
0.01	خطای سمت اولیه (deg)
0.01	خطای غلت اولیه (deg)

شکل‌های 7 و 8، نتایج عددی حل معادلات خطا را در قالب خطای وضعیت (زوایای اوپلر) و خطای موقعیت (در دو جهت شمال و غرب) برحسب زمان نشان می‌دهد. انحراف موقعیت در طول زمان، کاملاً مشهود است.

شکل 9 مسیرهای بهینه و مقید تولید شده توسط الگوریتم را با احتساب خطای ناوبری (مطابق پروفیل شکل 8) و بدون احتساب آن و در شرایط اولیه یکسان روی مدل کانتور نقشه رقمی نمایش می‌دهد. مطابق شکل دیده می‌شود که مسیر اول به دلیل در نظر گرفتن خطای ناوبری، به مقدار لازم از عوارض زمینی دور شده تا خطر برخورد را کاهش دهد. بر اساس اندازه نقشه فوق و سرعت پرنده، زمان پرواز به میزان 190 ثانیه حاصل شده است. این زمان در تخمین خطای ناوبری و گسترش آن روی لایه‌های شبکه مورد استفاده قرار گرفته است. شکل 10 تصویر این مسیر در صفحات X-Z و X-Y را نشان می‌دهد. همچنین به منظور اجتناب از تغییرات مکرر ارتفاع و کاهش نقاط غیر ضروری، مسیر صفحه X-Z توسط یک الگوریتم هموارسازی تغییرات ارتفاع که قبلاً طراحی شده [15]، هموارسازی نیز شده است. شکل 11 تغییرات عدد ماخ، سرعت و وزن پرنده را در طول مسیر نمایش می‌دهد.



شکل 7 تغییرات خطای وضعیتهای زاویه‌ای برحسب زمان



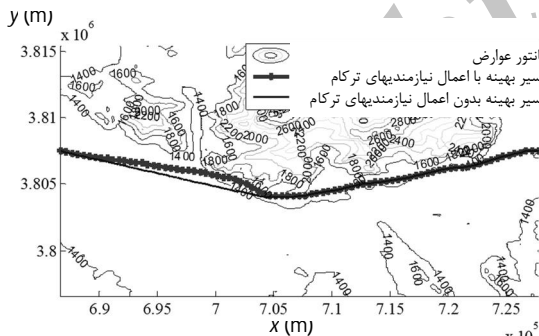
شکل 8 تغییرات خطای موقعیت در دو جهت عرض و طول جغرافیایی برحسب زمان

شرایط اولیه فوق و با مقادیر نمونه  $\sigma_z = 2m$  و  $\sigma_r = 30m$  (بر اساس جدول 1) انجام و نتایج آن کسب شد. شکل 15 مسیر حاصله را در کنار مسیر بدون تاثیر تراکم در مجاورت عوارض نشان می‌دهد. مطابق شکل دیده می‌شود که مسیر حاصله، سعی نموده خود را به عوارض زمینی نزدیکتر کند تا پارامترهای زبری سطح را در محدوده موردنیاز خود تأمین کند.

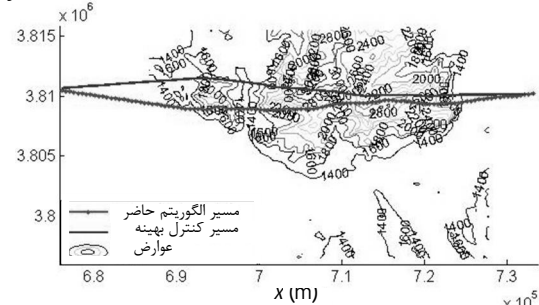
به منظور اعتبارسنجی روش حاضر، مقایسه‌ای با روش استاندارد مبتنی بر کنترل بهینه که شرح کامل آن در منابع معتبری چون [23,22] ارائه شده پیاده‌سازی و انجام گردیده است. برای این منظور، یک منطقه DEM با نقاط شروع و پایان مشترک در نظر گرفته شده است. الگوریتم‌ها با شرایط  $V=234m/s$  و سرعت ثابت  $ROC_{max} = 30m/sec$ ،  $\dot{\chi}_{max} = 4.5^\circ/sec$  (بدون قید ارتفاع حداکثر) با معیار حداقل زمان پروازی اجرا شده‌اند. زمان اجرای الگوریتم حاضر سریع‌تر بوده است. یعنی حدود 130 ثانیه، در حالی که الگوریتم کنترل بهینه، 420 ثانیه نیاز داشت. همچنین، زمان پرواز بدست آمده مسیر حاصل بر اساس الگوریتم حاضر، 246 ثانیه و بر اساس الگوریتم کنترل بهینه، 250 ثانیه شده که نشان می‌دهد الگوریتم حاضر، 4 ثانیه زمان پرواز کمتری را مبتنی بر معیار حداقل زمان پروازی حاصل نموده است. شکل 16، نمایشی از دو مسیر حاصل را با استفاده از دو روش مزبور نشان می‌دهد.

**5- نتیجه‌گیری**

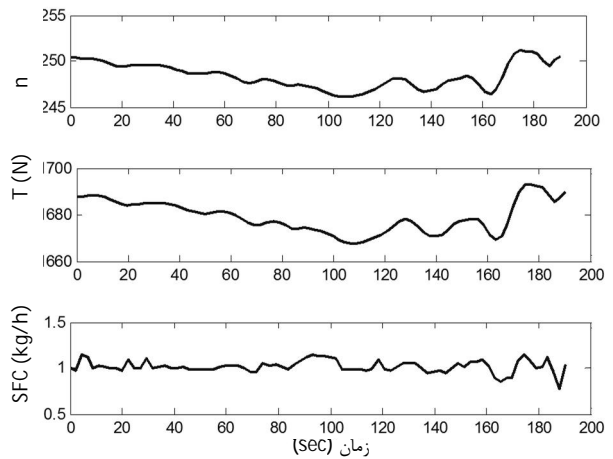
در این مقاله، مسأله طراحی مسیر بهینه و مقید چهاربعدی (سه بعد مکانی و یک بعد زمانی) برای وسایل پرنده بدون سرنشین مورد بررسی قرار گرفته و الگوریتم جامعی برای حل آن ارائه شده است. جنبه نوآورانه این الگوریتم که ایده اولیه آن در [15] معرفی شد، شیوه برچسب‌زنی گره‌ها در فضای گسسته مبتنی بر شبکه جریان و تعریف مناسب جریان عبوری از گره‌هاست. با این تکنیک، می‌توان هرگونه پارامتر قید را تعریف و محاسبه کرده و بدون اینکه



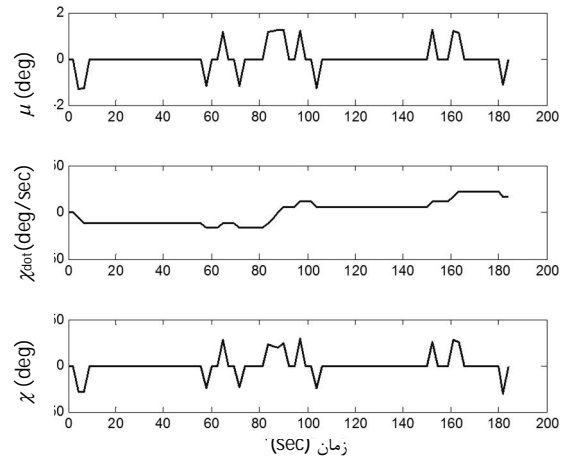
شکل 15 مقایسه دو مسیر با و بدون در نظر گرفتن پارامترهای تأثیرگذار تراکم



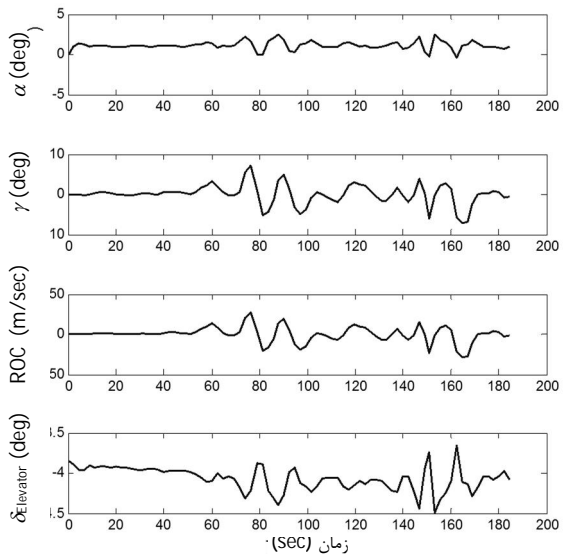
شکل 16 مقایسه مسیرهای منتجه با روش‌های کنترل بهینه و شبکه جریان در شرایط یکسان



شکل 12 تغییرات مصرف سوخت، تراست و ضریب بار



شکل 13 تغییرات نرخ هدینگ، زاویه هدینگ و زاویه غلت



شکل 14 تغییرات زاویه حمله، نرخ زاویه مسیر، نرخ اوج‌گیری و زاویه الویتور مورد نیاز

به منظور بررسی تأثیر الزامات تراکم روی مسیر، شبیه‌سازی دیگری مشابه

- [8] T. Cormen, C. Leiserson and R. Rivest, *Introduction to Algorithms*. New York: McGraw Hill, 1990.
- [9] R. V. Helgason, J. L. Kennington, K. R. Lewis, Cruise Missile Mission Planning: A heuristic algorithm for automatic path generation, *Journal of Heuristics*, Vol. 7, No. 5, pp. 473-494, 2005.
- [10] W. M. Carlyle, J. O. Royset, R. K. Wood, Three-Dimensional Offline Path Planning for UAVs using Multiobjective Evolutionary Algorithms, *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2007.
- [11] J. McDonald, *Federal Business Opportunities*, Department of the Air Force, Air Force Materiel Command, AFLCMC - Hanscom, USA, Accessed July 2013; <https://www.fbo.gov>.
- [12] F. E. Mitchel, The use of Preprocessed Cruise Missile Data for Strategic Planning, *Department of Defense, United States Strategic Command*, 1996.
- [13] I. Akram, M. A. Pasha, N. Iqbal, Optimal path planner for autonomous vehicles, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 3, pp. 134-137, 2005.
- [14] R. Szczerba, D. Chen, I. Jr. Ufran, A framed-quadtree approach for determining Euclidean shortest paths in a 2-D environment, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 13, No. 5, pp. 668-681, 1997.
- [15] R. Zardashti and M. Bagherian, A new model for optimal TF/TA flight path design problem, *The Aeronautical Journal*, Vol. 113, No. 1143, pp. 301-308, 2009.
- [16] A. Miele, *Flight Mechanics, Vol. 1, Theory of Flight Paths*, Addison-Wesley, Reading MA, 1962.
- [17] R. T. Marler, J. S. Arora, Survey of multi-objective optimization methods for engineering, *Struct Multidisc Optim*, Vol. 26, pp. 369-395, 2004.
- [18] D. H. Titterton, J. L. Weston, *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Peter Peregrinus Ltd., London, 1997.
- [19] G. M. Siouris, *Missile Guidance and Control Systems*, Published by: Springer, 2003.
- [20] R. K. Ahuja, L. Thomas, L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network flows, Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall Englewood Cliffs, 1993.
- [21] P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*, AIAA Publishers, 2007.
- [22] P. K. A. Menon, E. Kim, "Optimal Trajectory Synthesis for Terrain-Following Flight", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 14, No. 4, 1991, pp. 807-813.
- [23] M. H. Korayem, M. Nazemizadeh, H. Ghaffarpour, Optimal path planning of nonholonomic mobile robots using optimal control method and verification of the method via experimental tests of the Scout mobile robot, *Madares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 2, pp. 87-94, 2013. (In Persian)

به صورت تلویحی (ضمنی) در تابع هزینه وارد شود و حل آن را پیچیده کند، مقدار آن را روی برجسب گره‌ها ارزیابی نموده و در صورتی که قید مزبور ارضاء نشد با صفر نمودن مقدار جریان عبوری از گره، از مجموعه گره‌های مجاز خارج کرد. در واقع بخشی از مسأله بهینه‌سازی به مسأله تصمیم‌گیری تبدیل شده و لذا با توجه به این که اصولاً مسأله تصمیم‌گیری راحت‌تر از مسأله بهینه‌سازی حل می‌شود، امکان بکارگیری هرگونه قید بصورت تساوی یا نامساوی در الگوریتم به راحتی فراهم می‌شود. ضمن اینکه روش مزبور نیاز به مشتقات مراتب بالای تابع هزینه ندارد. لذا با رویکرد مزبور، ضمن بکارگیری معادلات حرکت سه بعدی پرنده و اعمال قیود مختلف دینامیکی و ماموریتی در الگوریتم، در این مقاله با اضافه نمودن خطای ناوبری و همچنین الزامات محدودکننده سیستم‌های کمک ناوبری مانند تراکم، جواب بهینه و قطعی در قالب بهینه‌سازی چندمعیاره حاصل شده و موضوعیت جامعی به روش مزبور داده است که در کارهای مشابه دیده نمی‌شود. سادگی در پیاده‌سازی و سرعت بالای پردازش آن نیز مزیت آن را افزایش داده است.

## 6- مراجع

- [1] R. Szczerba, *New cell decomposition techniques for planning optimal paths*, Doctoral dissertation, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, 1996.
- [2] Y. Hwang and N. Ahuja, Gross motion planning-a survey, *ACM Computing Surveys*, Vol. 24, No. 3, pp. 219-291, 1992.
- [3] J. Latombe, *Robot motion planning*. Boston, MA: Kluwer, 1991.
- [4] C. Bodenhorn, P. Galkowski, P. Stiles, R. Szczerba and I. Glickstein, Personalizing onboard route re-planning for recon, attack, and special operations missions, *American Helicopter Society Conference (Avionics and Crew Systems Technical Specialists Conference)*, 1997.
- [5] P. Stiles and I. Glickstein, Highly parallelizable route planner based on cellular automata algorithms, *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 38, No. 2, pp. 167-181, 1994.
- [6] T. L. Vincent, W. J. Grantham, *Nonlinear and Optimal Control Systems*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.
- [7] J. T. Betts, W. P. Huffman, Path Constrained Trajectory Optimization Using Sparse Sequential Quadratic Programming, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No. 1, pp. 59-68, 1993.