مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 13، ص‌ص 172-182

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ناپایداری استاتیکی، دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی صفحات FG با بستر الاستیک تحت تحریک پارامتریک نیروئی

موسی رضائی[1*]، رضا جهانگیری[2]

1- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
2- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
* تبریز، صندوق پستی 51665-315، m_rezaee@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 21 بهمن 1392
پذیرش: 07 اردیبهشت 1393
ارائه در سایت: 16 مهر 1393

کلید واژگان:
ناپایداری دینامیکی
بستر الاستیک پاسترناک
روش اغتشاشات
دوشاخگی
پاسخ فرکانسی

چکیده

در این مقاله ناپایداری استاتیکی/دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی صفحات مدرج تابعی با بستر الاستیک، در معرض نیروهای هارمونیک درون-صفحه‌ای مطالعه شده است. بر اساس تئوری کلاسیک صفحات و با بکارگیری تئوری تغییرشکل‌های بزرگ وُن-کارمن و اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیل جزئی و غیرخطی حاکم بر صفحه استخراج شده است. با در نظر گرفتن شش شکل مود ارتعاشی و با اعمال روش گالرکین، معادلات غیرخطی حاکم به معادلات دیفرانسیل غیرخطی ماتیو تبدیل شده است. با استخراج نواحی ناپایدار دینامیکی، نشان داده شد که با افزایش پارامترهای بستر الاستیک، فرکانس طبیعی و نیروی بحرانی کمانش افزایش می‌یابد و ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بالاتر رخ می‌دهد. سپس با بکارگیری روش اغتشاشات، معادلات پاسخ فرکانسی سیستم در شرایط پایا استخراج شد و آنالیز تشدید پارامتریک سیستم صورت گرفت و شرایط وجود و عدم وجود جواب‌های غیربدیهی (تشدید) ماندگار بررسی و تحلیل شد و نشان داده شد که تغییرات پارامترهای مسأله، تأثیر متفاوتی بر پاسخ غیرخطی صفحه می‌گذارند. در این راستا، با ارائه نتایج عددی تأثیر پارامترهای مختلف مسأله، شامل: فرکانس تحریک، دامنه نیروی تحریک، پارامترهای سفتی بستر الاستیک و پارامتر میرائی بر رفتاردینامیکی غیرخطی صفحه مطالعه شد و نشان داده شد که حضور بستر الاستیک، تأثیر عمده‌ای بر منحنی‌های مشخصه تشدید صفحه می‌گذارد.

Static/dynamic instability and nonlinear vibrations of FG plates resting on elastic foundation under parametric forcing excitation

Mousa Rezaee*, Reza Jahangiri

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
* P.O.B. 51665-315 Tabriz, Iran, m_rezaee@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 February 2014
Accepted 27 April 2014
Available Online 08 October 2014

Keywords:
Dynamic Instability
Pasternak Elastic Foundation
Perturbation Method
Bifurcation
Frequency Response

ABSTRACT

In this study, static/dynamic instability and nonlinear vibrations of FG plates resting on elastic foundation under parametric forcing excitation are investigated. Based on CPT, applying the von-Karman nonlinear strain–displacement relation and the Hamilton's principle, the governing nonlinear coupled partial differential equations are derived. By considering six vibration modes, the Galerkin's procedure is used to reduce the equations of motion to nonlinear Mathieu equations. In the absence of elastic foundation, the validity of the formulation for analyzing the static buckling, dynamic instability and nonlinear deflection is accomplished by comparing the results with those of the literature. Then, in the presence of the foundation and by deriving the regions of dynamic instability, it is shown that as the parameters of the foundation increases, the natural frequency and the critical buckling load increase and the dynamic instability occurs at higher excitation frequencies. The frequency response equations in the steady-state condition are derived by applying the multiple scales method, and the parametric resonance is analyzed. Then the conditions of existence and stability of nontrivial solutions are discussed. Moreover, the effects of the system parameters, including excitation frequency, amplitude of excitation, foundation parameters and damping, on the nonlinear dynamics of the FG plate are investigated. Also, it is shown that the presence of the foundation has a considerable influence on the resonance characteristic curves.

1- مقدمه

امروزه آلیاژهای فلزی افق جدیدی در ساخت مواد پیشرفته‌ای که عملکرد بهینه تحت شرایط مکانیکی و حرارتی مختلف و در کاربردهای متنوع از قبیل صنایع فضایی، سیستم‌های پیشرانش هواپیماها، پوشش حفاظتی پره‌های توربین و غیره دارند، باز کرده است. برای مثال در شاتل‌های فضایی از کامپوزیت‌های حاوی کاشی‌های سرامیکی جهت حفاظت حرارتی در مقابل

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Rezaee, R. Jahangiri, Static/dynamic instability and nonlinear vibrations of FG plates resting on elastic foundation under parametric forcing excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 172--182, 2015 (In Persian)

گرمای ایجاد شده در حین ورود به اتمسفر زمین استفاده می‌شود، اما وجود تغییرات ناگهانی در ترکیب و خواص مواد از یک لایه به لایه دیگر که تحت اثر تنش می‌باشد، منجر به تمرکز شدید تنش موضعی، تنش‌های پسماند و تورق بین لایه‌ای و نهایتاً ترک و جداشدگی می‌شود، در صورتی که که با انتقال تدریجی خواص از یک ماده به ماده دیگر، تمرکز تنش به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. ایده اصلی مواد تابعی برای اولین بار در سال 1984 توسط نینو و همکارانش [1] در آزمایشگاه ملی هوا و فضای ژاپن در منطقه سندایی جهت تولید مواد مقاوم در معرض دماهای بسیار بالا مطرح شد، شناخته شده‌ترین نوع مواد مدرج تابعی[1] دارای ساختار تدریجی از خواص سرامیکی به خواص فلزی هستند که علاوه بر دارا بودن ماهیت کامپوزیتی، خواص مطلوب فلزات از قبیل هدایت الکتریکی بالا، سختی و استحکام بالا، خواص مطلوب سرامیک‌ها همانند سبکی و مقاومت حرارتی زیاد در دماهای بالا را نیز دارا هستند. علاوه بر بارهای حرارتی، چنین سازه‌هایی تحت تأثیر بارهای مکانیکی متغیر نیز قرار می‌گیرند که ممکن است در بازه وسیعی از فرکانس‌ها، اعمال شوند که تحت شرایط خاصی ممکن است به تشدید سازه منجر شود. حال اگر بارگذاری به صورت نیروی فشاری درون صفحه‌ای[2] باشد پدیده تشدید پارامتریک ممکن است حتی در بارهای کمتر از بار بحرانی باعث ناپایداری شود. از این‌رو مطالعه رفتار دینامیکی صفحات تابعی تحت بارهای هارمونیک از اهمیت خاصی برخوردار است.

در این راستا، لانهه و همکارانش [2] با استفاده از روش دیفرانسیل مربعات نواحی ناپایداری دینامیکی صفحات تابعی تحت بارهای آیرو-ترمو-الاستیک استخراج کردند و اثرات شاخص کسر حجمی صفحه، تغییرات دما، نیروی درون-صفحه‌ای بارهای آیرودینامیکی، ضخامت و نسبت ابعاد را بر روی محدوده ناپایداری دینامیکی بررسی کردند. کومار پاندا و همکارش [3] نیز با استفاده از تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه بالای صفحات کمانش استاتیکی صفحات مستطیلی شکل تحت تأثیر نیروهای غیریکنواخت درون-صفحه‌ای بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش درجه غیریکنواختی توزیع نیرو و درجه قیود تکیه‌گاهی، برای رسیدن به همگرائی لازم در محاسبه بار کمانش، بایستی از تعداد نیم موج‌های بیشتری در جهت نیرو برای توصیف تغییرمکان عرضی نقاط صفحه استفاده کرد. در تحقیق دیگری راماچاندرا و همکارش [4] ناپایداری دینامیکی صفحات تحت نیروهای درون-صفحه‌ای غیرهارمونیک و غیریکنواخت بررسی کردند و نشان دادند که نوع شرایط مرزی و نحوه تغییرات زمانی نیروی درون-صفحه‌ای تأثیر چشمگیری روی مرز ناحیه ناپایداری می‌گذارد. کیم [5] با در نظر گرفتن غیرخطینگی‌های ناشی از تغییرشکل‌های بزرگ صفحات، نشان داد که به هنگام تحریک پارامتریک و چندگانه صفحه، وابستگی زمانی و غیریکنواختی بارگذاری‌های لبه‌های صفحه می‌تواند بر روی فرکانس تشدید تأثیر بسزائی داشته باشد. اخیراً علی‌جانی و همکارش [6] نیز با در نظرگرفتن درجات آزادی بالا و با در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه بالا و غیرخطینگی‌های هندسی صفحات، ناپایداری پارامتریک صفحات را مورد مطالعه قرار دادند و اثرات شاخص کسر حجمی صفحات تابعی، دامنه نیروی تحریک و گرادیان دمائی در جهت ضخامت را بر روی شروع ناپایداری‌های استاتیکی و دینامیکی بررسی کردند.

از طرف دیگر اخیراً استفاده از صفحات تابعی در کاربردهای صنعتی و بویژه پوشش رویه‌ای سازه‌های ساندویچی به صورت چشمگیری گسترش یافته است. در برخی از این کاربردها می‌توان پوشش رویه را به صورت صفحه تابعی با بستر الاستیک مدل‌سازی کرد [7]. از این رو بررسی و مطالعه مشخصات ناپایداری استاتیکی، دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی صفحات تابعی با بستر الاستیک، به عنوان زمینه مطالعاتی جالب مورد توجه قرار گرفته است. در این زمینه ونگ و همکارش [8] پاسخ دینامیکی غیرخطی صفحات ساندویچی با بستر الاستیک و پوشش ورقه‌ای-تابعی، را در حضور محیط‌های حرارتی بررسی کردند و نشان دادند که سفتی بستر و تنش‌های اولیه تأثیر بسزائی بر رفتار دینامیکی صفحه تابعی تک‌لایه و ساندویچی تابعی می‌گذارد. تینح و همکارانش [9] نیز با استفاده از تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه اول، ارتعاشات صفحات کامپوزیتی ضخیم با بستر الاستیک ناهمگن را مطالعه کردند. در تحقیق دیگری، بافرانی و همکارش [10] اثرات بارگذاری‌های درون-صفحه‌ای بر ارتعاشات غیرخطی صفحات با بستر الاستیک را بررسی کردند و نشان دادند که کاهش/افزایش فرکانس طبیعی صفحات مستطیلی به نوع شرایط تکیه‌گاهی و نحوه اعمال نیروی درون-صفحه‌ای بستگی دارد و با افزایش ثابت سفتی بستر وینکلر، نیروی متناظر با حالت کمانش افزایش یافته و با افزایش نسبت ابعاد، کمانش صفحه در شکل مودهای بالاتر رخ می‌دهد. آنها همچنین نشان دادند که تأثیر پارامترهای بستر پاسترناک بر فرکانس طبیعی، به مراتب بیشتر از پارامترهای وینکلر می‌باشد.

در برخی از کاربردها، در زمینه تحریکات پارامتریک نیروئی صفحات، استفاده از مدل غیرخطی هندسی با وجود بستر الاستیک ضروری است از این رو شناخت رفتار و خصوصیات ارتعاشات غیرخطی صفحات با بستر الاستیک اجتناب‌ناپذیر است. تا به حال تحقیقات متعددی در زمینه ارتعاشات غیرخطی و پارامتریک صفحات همگن/تابعی صورت گرفته است. برای مثال هائو و همکارانش [11] برای اولین بار دینامیک غیرخطی صفحه مستطیلی با شرایط تکیه‌گاهی ساده در معرض بارهای عرضی و نیروهای درون صفحه‌ای در محیط‌های حرارتی را مرور و مطالعه کردند و رفتار غیرخطی صفحه تحت تشدیدهای داخلی و پارامتریک را مورد بررسی قرار دادند. در تحقیق دیگری هگازی [12] رفتار غیرخطی یک صفحه نازک مستطیلی تحت بارگذاری عرضی و درون صفحه‌ای با کوپلینگ دو مود اول را مطالعه کرد و نشان داد که ماهیت حرکات آشوبناک صفحه در مود اول کاملاً با رفتار آن در مود دوم متفاوت است. زنگ و همکارانش [13] ارتعاشات غیرخطی و دینامیک آشوبناک صفحه FG ارتوتروپیک مستطیلی تحت تحریک بارهای عرضی و درون صفحه‌ای هارمونیک را مطالعه کردند. آنها با استفاده از تقریب گالرکین، معادلات حاکم بر سیستم را کاهش مرتبه داده و با بکارگیری الگوریتم رانگ-کوتا و تحت تحریکات تشدیدی، پاسخ‌های آشوبناک و دوشاخه‌گی[3] مسأله را به صورت عددی بررسی کردند و نشان دادند که تحت تحریک اجباری عرضی، صفحه ممکن است رفتار آشوبناک از خود نشان دهد. ریبرو [14] نوسانات صفحات تحت اعمال بارهای هارمونیک عرضی و حرارتی را بررسی کرد. او در شبیه‌سازی‌های عددی، فرکانس تحریک بارهای عرضی را در نزدیکی اولین فرکانس طبیعی سازه در نظر گرفت و نشان داد که تحریک سازه تحت دامنه‌ها و میرایی‌های مختلف همزمان با افزایش دما می‌تواند باعث تغییر ماهیت نوسانات از هارمونیک به غیرهارمونیک و حتی غیرپریودیک شود. او نشان داد که وقتی نوسانات ماهیت چند هارمونیکی یا غیرپریودیک داشته باشند، اثرات مودهای بالاتر بر رفتار سازه بسیار چشمگیر می‌شود و افزایش ضخامت صفحه سبب کوچک شدن محدوده رفتار غیرپریودیک می‌شود. در تحقیق دیگری، هو و زنگ [15] ارتعاشات و پایداری صفحات FG

1- Functionally Graded Material
2- In-Plane Force
3- Bifurcation

تحت تحریکات پارامتریک نیروئی را بررسی کردند. آنها حالات وجود و عدم وجود تشدید در محدوده فرکانس تحریک سیستم را تحلیل کردند و نشان دادند که افزایش میرائی می‌تواند از وقوع پدیده تشدید جلوگیری کند.

بررسی‌ها نشان می‌دهد که در پژوهش‌های پیشین تاکنون رفتار دینامیکی و غیرخطی صفحات FG با بستر الاستیک از نوع پاسترناک تحت تشدیدهای پارامتریک به صورت جامع مورد مطالعه قرار نگرفته است، اما با توجه به اینکه در بعضی از کاربردها، بویژه در سازه‌های فضائی، مکانیکی، هسته‌ای و دریائی [16،17] حضور بستر الاستیک تأثیر عمده بر رفتار دینامیکی صفحات دارند از این‌رو بررسی ناپایداری دینامیکی و رفتار غیرخطی صفحات تابعی واقع بر بستر الاستیک حائز اهمیت می‌باشد.

در این تحقیق تحلیل ناپایداری استاتیکی/دینامیکی و ارتعاشات پارامتریک صفحه مستطیلی FG تحت تحریک نیروی هارمونیک درون-صفحه‌ای در حضور بستر الاستیک پاسترناک مطالعه شده و رفتار دینامیکی و غیرخطی صفحه تابعی با شرایط تکیه‌گاهی ساده متحرک بررسی شده است. با صرف‌نظر از تأثیر اینرسی‌های درون-صفحه‌ای و دورانی و اثر نیروهای برشی، معادله دیفرانسیل جزئی و غیرخطی حاکم بر ارتعاشات عرضی صفحه با وجود بستر الاستیک استخراج شد و اثرات ناشی از وجود بستر الاستیک بر نواحی ناپایداری دینامیکی مسأله مورد بررسی قرار گرفت. همچنین ناپایداری استاتیکی صفحه تابعی در عدم حضور و حضور بستر پاسترناک مطالعه شد. با اعمال روش اغتشاشات، معادله غیرخطی حاکم حل شده و معادلات دامنه-پاسخ فرکانسی سیستم در شرایط ماندگار بدست آمده است. سپس منحنی‌های مشخصه دامنه-تشدید و دوشاخگی بر حسب پارامترهای مسأله در شرایط ماندگار بدست آمد و پایداری سیستم مورد مطالعه قرار گرفت. با آنالیز تشدید پارامتریک، تأثیر هر یک از پارامترها بویژه مشخصات فیزیکی بستر الاستیک بر پاسخ غیرخطی سیستم مورد بررسی قرار گرفت.

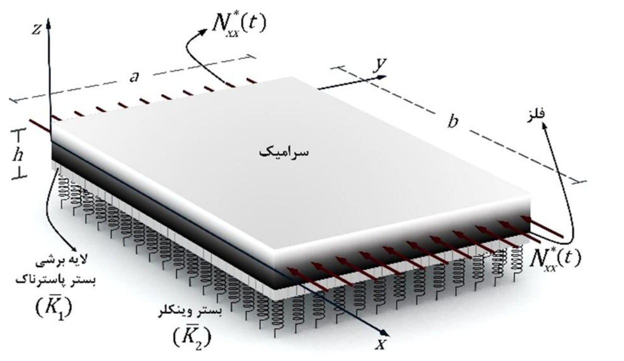
2- فرمولبندی مسأله

در شکل 1 صفحه FG مستطیلی به طول a، عرض b و ضخامت h با چهار تکیه‌گاه ساده نشان داده شده است. مطابق این شکل، دستگاه مختصات دکارتی $Oxyz$ منطبق بر صفحه میانی صفحه FG در نظر گرفته شده است. (U,V,W) و (u,v,w) به ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های تغییرمکان نقطه دلخواهی در داخل صفحه و نقطه‌ای در روی صفحه میانی در امتداد محورهای x، y و z هستند. صفحه FG در لبه $x=0$ و $x=a$ تحت تأثیر نیروی درون صفحه‌ای به صورت $N_{xx}(t)=-(N_{0x}+N_{1x}\cos\Omega t)$ قرار دارد که در آن Ω نشان‌دهنده فرکانس تحریک هارمونیک بار محوری است.

فرض می‌شود که بستر الاستیک ساختار پیوسته داشته و در حین تغییر شکل صفحه، بستر تماس خود را با صفحه حفظ می‌کند. رابطه بین بار و جابجائی بستر الاستیک به صورت (1) فرض می‌شود [18]:

$$q_e=\bar{K}_1 w(x,y,t)-\bar{K}_2\nabla^2 w(x,y,t) \tag{1}$$

در رابطه (1) $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ و $w(x,y,t)$ نشان‌دهنده خیز صفحه تابعی است. q_e نشان دهنده نیروی وارد بر واحد سطح صفحه بوده و $\bar{K}_1$ نشان دهنده پارامتر سفتی وینکلر و $\bar{K}_2$ ثابتی است که نشان دهنده سفتی برشی بستر پاسترناک است.



شکل 1 شماتیک هندسی صفحه FG روی بستر الاستیک پاسترناک و در معرض بارهای مکانیکی.

3- خواص مواد

صفحه FG مورد نظر از دو جزء سرامیکی و فلزی تشکیل شده است، طوریکه خواص ماده در امتداد ضخامت صفحه به صورت پیوسته و تدریجی از خواص 100% فلزی در سطح تحتانی صفحه به خواص 100% سرامیکی در سطح فوقانی تغییر می‌کند. با فرض اینکه توزیع خواص ماده در راستای ضخامت از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد تبعیت کند، رابطه (2) را می‌توان نوشت:

$$P=P_m V_m(z)+P_c V_c(z) \tag{2}$$

در رابطه (2) P_m و P_c به ترتیب نشان دهنده خواص فلزی و سرامیکی، و V_m و V_c نشان دهنده کسر حجمی جزءهای فلزی و سرامیکی در سطوح تحتانی و فوقانی صفحه هستند. با استفاده از قانون توزیع توانی، کسر حجمی جزء سرامیکی در هر نقطه از ضخامت صفحه به صورت روابط (3،4) بیان می‌شود [19]:

$$V_c(z)=\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^n,\ 0\le n\le\infty \tag{3}$$

$$V_m(z)+V_c(z)=1 \tag{4}$$

که در آن n یک عدد حقیقی نامنفی بوده و مشخص کننده شاخص کسر حجمی سرامیک می‌باشد و نحوه توزیع جزء سرامیکی در امتداد ضخامت صفحه را بیان می‌کند، بنابراین با توجه به روابط فوق، می‌توان توزیع خواص تأثیرپذیر مواد مدرج تابعی از قبیل مدول یانگ E، نسبت پواسون ν و جرم واحد حجم ρ در امتداد ضخامت صفحه را به صورت روابط (5-7) بیان کرد:

$$E(z)=\left(E_c-E_m\right)V_c(z)+E_m \tag{5}$$

$$\nu(z)=\left(\nu_c-\nu_m\right)V_c(z)+\nu_m \tag{6}$$

$$\rho(z)=\left(\rho_c-\rho_m\right)V_c(z)+\rho_m \tag{7}$$

4- استخراج معادلات غیرخطی حرکت

بر اساس تئوری کلاسیک صفحات[1] $(CPLT)$، میدان جابجائی نقاط داخل صفحه مستطیلی را می‌توان به شکل رابطه (8) بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix}U(x,y,z,t)\\V(x,y,z,t)\\W(x,y,z,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u(x,y,t)\\v(x,y,t)\\w(x,y,t)\end{Bmatrix}-z\begin{Bmatrix}w_{,x}\\w_{,y}\\0\end{Bmatrix} \tag{8}$$

1- Classic Plate Theory

که در آن (u,v,w) نشان دهنده مؤلفه‌های تغییرمکان نقاط روی صفحه میانی $(z=0)$ در دستگاه مختصات دکارتی هستند. با استفاده از مؤلفه‌های کرنش غیرخطی ون-کارمن و رابطه (8)، روابط بین مؤلفه‌های کرنش و تغییر مکان مربوط به نقاط داخل صفحه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [19]:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \tag{9}$$

جمله اول در رابطه فوق در برگیرنده مؤلفه‌های کرنش غشائی و جمله دوم نشان دهنده مؤلفه‌های کرنش خمشی است. از طرف دیگر، روابط متشکله[1] تنش-کرنش مربوط به صفحات مدرج تابعی با خواص تقارن ایزوتروپیکی به شکل رابطه (10) بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0\\ Q_{21}(z) & Q_{22}(z) & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}(z)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \tag{10}$$

که در آن مؤلفه‌های $Q_{ij}(z)$ بیانگر ثابت‌های سفتی صفحه FG بوده و از روابط (11) بدست می‌آیند:

$$Q_{11}(z)=Q_{22}(z)=\frac{E(z)}{1-\nu(z)^2},\quad Q_{66}(z)=\frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$
$$Q_{12}(z)=Q_{21}(z)=\nu(z)Q_{11}(z) \tag{11}$$

با جایگذاری میدان کرنش (9) در روابط تنش (10) و با استفاده از رابطه (11)، می‌توان منتجه‌های نیروهای محوری، برشی و گشتاورهای خمشی مربوط به صفحه را با انتگرال‌گیری روی مقطع عرضی صفحه به صورت رابطه (12) نوشت:

$$\begin{Bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\\ M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & D_{66}\\ D_{11} & D_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0\\ D_{21} & D_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0\\ 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(0)}\\ \varepsilon_{yy}^{(0)}\\ \varepsilon_{xy}^{(0)}\\ \varepsilon_{xx}^{(1)}\\ \varepsilon_{xx}^{(1)}\\ \varepsilon_{xx}^{(1)}\end{Bmatrix} \tag{12}$$

در روابط اخیر A_{ij}، B_{ij} و D_{ij} که نشان‌دهنده عناصر ماتریس‌های سفتی صفحه هستند از رابطه (13) بدست می‌آیند:

$$(A_{ij},B_{ij},D_{ij})=\int_{-h/2}^{+h/2}Q_{ij}(1,z,z^2)dz,\quad (i,j=1,2,6) \tag{13}$$

انرژی جنبشی صفحه را با در نظر گرفتن اثر اینرسی‌های حرکات درون-صفحه‌ای و دورانی از رابطه (14) بدست می‌آید:

$$T=\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^a\int_0^b\rho(z)\left(\dot U^2+\dot V^2+\dot W^2\right)dydxdz \tag{14}$$

با استفاده از میدان تغییر مکان نقاط داخل صفحه (8)، انرژی جنبشی کل را می‌توان به صورت رابطه (15) بیان کرد:

$$T=\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}I_0(\dot u^2+\dot v^2+\dot w^2)dydx \tag{15}$$

که در آن I_0 نشان دهنده جرم واحد سطح صفحه بوده و از رابطه انتگرالی $I_0=\int_{-h/2}^{+h/2}\rho(z)dz$ بدست می‌آید.

انرژی کرنشی ذخیره شده در سیستم به صورت مجموع انرژی کرنشی داخل حجم صفحه تابعی و انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک است:

$$U=\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^a\int_0^b\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}\right)dydxdz+\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left(\bar K_1 w-\bar K_2\nabla^2 w\right)\Big|_{z=-h/2}dydx \tag{16}$$

تغییرات کار انجام شده توسط نیروی میرائی ویسکوز به صورت رابطه (17) می‌باشد [20]:

$$\delta W_{nc}=\int_0^a\int_0^b\mu\,\dot{\mathrm w}\,\delta\,\mathrm w\,dydx \tag{17}$$

که در آن μ نشان‌دهنده میرائی واحد سطح صفحه است. یادآوری این نکته ضروری است که میرائی داخلی به علت تغییر جنس و تغییر خواص مواد متشکله صفحه تابعی در راستای ضخامت تغییر می‌کند، ولی با توجه به اینکه هدف اصلی تحقیق حاضر بررسی ارتعاشات غیرخطی است لذا برای تمرکز بر روی هدف اصلی، میرائی در راستای ضخامت ثابت فرض می‌شود.

با جایگذاری میدان کرنش از رابطه (9) و (10) در رابطه (9) می‌توان انرژی کرنشی الاستیک را به صورت عبارات انتگرالی از میدان جابجائی بیان کرد و سپس با استفاده از اصل همیلتون توسعه یافته، بصورت رابطه (18) [20] نوشت:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt+\int_{t_1}^{t_2}\delta W_{nc}dt=0 \tag{18}$$

می‌توان معادلات غیرخطی حاکم بر حرکات درون-صفحه‌ای و عرضی صفحه نازک تابعی با بستر الاستیک، در غیاب اثرات اینرسی (ناشی از حرکات درون-صفحه‌ای و دورانی) و تغییر شکل‌های برشی، را به صورت روابط (19-21) بدست آورد:

$$\begin{aligned}&A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\&-B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\\&+A_{11}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\\&(A_{12}+A_{66})\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(A_{21}+A_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\&-B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-(B_{21}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+A_{66}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&+A_{22}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(A_{21}+A_{66})\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&B_{11}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+B_{22}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}+(B_{21}+2B_{66})\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\\&+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}-(D_{12}+D_{21}+4D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\\&-D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}+A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}$$

1- Constitutive Relations

$$
\begin{aligned}
&+A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial y}+A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\
&+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}+(A_{21}+A_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\\
&+A_{21}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+A_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\
&+A_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2A_{66}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2A_{66}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\\
&+(B_{21}-B_{12})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x}+(B_{12}-B_{21})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\\
&+2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{3}{2}A_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2-2B_{66}(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})^2\\
&-(B_{12}+B_{21})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(B_{12}+B_{21})(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})^2\\
&+\frac{3}{2}A_{11}(\frac{\partial w}{\partial x})^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_{12}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\\
&+\frac{1}{2}A_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2+A_{21}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\\
&+A_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2+\frac{1}{2}A_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2\\
&+A_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2+4A_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\\
&-I_0\ddot{w}-\mu\dot{w}-\bar{K}_1 w+\bar{K}_2(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})=0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

با توجه به شکل 1 شرایط مرزی تکیه‌گاهی حاکم بر حرکات عرضی لبه‌های صفحه FG از نوع ساده بوده و به صورت رابطه (22) داده می‌شوند:

$$x=0,\, a\ :\ w=w_{,xx}=0,\quad y=0,\, b\ :\ w=w_{,yy}=0 \tag{22}$$

از آنجائی که لبه انتهایی صفحه، تحت اثر بارگذاری گسترده درون-صفحه‌ای قرار دارد، لذا شرط مرزی نیروئی روی لبه‌های متحرک به شکل روابط (24،23) بیان می‌شود:

$$\int_0^b N_{xx}\Big|_{x=0,a}dy=-\int_0^b\left(N_{0x}+N_{1x}\cos\Omega t\right)\Big|_{x=0,a}dy \tag{23}$$

$$\int_0^a N_{xx}\Big|_{y=0,b}dx=0 \tag{24}$$

با توجه به رابطه (12) به سادگی می‌توان دریافت که ماهیت غیرهمگن صفحات تابعی، سبب ایجاد کوپلینگ بین منتجه‌های گشتاورهای خمشی و نیروهای محوری می‌شود که در نتیجه این کوپلینگ شرایط مرزی طبیعی به صورت کامل ارضا نمی‌شوند. از این رو برای ارضا شرایط مرزی طبیعی نیز، می‌توان جملات تحلیلی اضافی را به مؤلفه‌های حرکات درون-صفحه‌ای اضافه کرد[6،21].

تحقیقات و بررسی‌های انجام گرفته بر روی ارتعاشات غیرخطی صفحات FG مستطیلی نشان داده است که تأثیر شکل مودهای مربوط به فرکانس‌های پائین بسیار چشمگیرتر و غالب بر اثرات شکل مودهای متناظر با فرکانس‌های بالا است [13]. لذا برای مطالعه و بررسی ارتعاشات عرضی و غیرخطی این صفحات، در تقریب گالرکین می‌توان از چند شکل مود اول ارتعاشی صفحه که شرایط مرزی ساده تکیه‌گاهی مربوط به لبه‌های صفحه را ارضاء می‌کنند استفاده کرد و معادلات حرکت کوپل‌شده دیفرانسیلی با مشتقات جزئی را به فرم معادلات دیفرانسیلی غیرخطی معمولی تبدیل نمود. با فرضیات یاد شده می‌توان تابع تغییر مکان عرضی صفحه را به شکل رابطه (25) نوشت:

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}w_{m,n}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{25}$$

در اینجا m و n به ترتیب نشان دهنده تعداد نیم موج‌ها در جهات x و y هستند و $w_{m,n}(t)$ نشان‌دهنده دامنه وابسته به زمان در شکل مود مربوطه است. همان طوری که اشاره شد معادلات (19، 20 و 21) در بر گیرنده دستگاه معادلات کوپل شده غیرخطی هستند و پیداکردن حل دقیق این معادلات بسیار پیچیده است اما با استفاده از تقریب گالرکین و با توجه به فرایندی که در [22] و [23] ارائه شده است با جایگذاری رابطه (25) در معادلات (19) و (20) می‌توان حل تقریبی مؤلفه‌های جابجائی u و v را به صورت تابعی از $w_{m,n}(t)$ به شکل زیر استخراج کرد:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\Big(&\alpha_{m,n}^{(1)}w_{m,n}(t)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\
&+\kappa_{m,n}^{(1)}w_{m,n}(t)^2\sin\frac{2m\pi x}{a}\cos\frac{2n\pi y}{b}\\
&+\beta_{m,n}^{(1)}w_{m,n}(t)^2\sin\frac{2m\pi x}{a}\\
&+(\eta_1^{(1)}N_{xx}^{*}x+\eta_2^{(1)})\Big)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
v(x,y,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\Big(&\alpha_{m,n}^{(2)}w_{m,n}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\\
&+\kappa_{m,n}^{(2)}w_{m,n}(t)^2\cos\frac{2m\pi x}{a}\sin\frac{2n\pi y}{b}\\
&+\beta_{m,n}^{(2)}w_{m,n}(t)^2\sin\frac{2m\pi x}{a}\\
&+(\eta_1^{(2)}N_{xx}^{*}+\eta_2^{(2)})y\Big)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

جملات آخر در روابط فوق نشان دهنده اثرات بارگذاری درون-صفحه‌ای بوده و $\eta_1^{(1)}$، $\eta_1^{(2)}$، $\eta_2^{(1)}$ و $\eta_2^{(2)}$ را می‌توان با استفاده از شرایط مرزی (23) و (24) بدست آورد. برای بی‌بعد سازی معادلات حرکت حاکم بر رفتار دینامیکی صفحه، می‌توان تبدیلات (28) را روی پارامترها و متغیرهای مسأله اعمال کرد:

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}=\frac{u}{a},\quad \bar{v}=\frac{v}{b},\quad \bar{x}=\frac{x}{a},\quad \bar{y}=\frac{y}{b},\\
&\bar{w}=\frac{w}{h},\quad \bar{t}=\omega^{*}t,\quad R_x=\frac{\pi^2a^2N_{xx}^{*}}{D_{11}},\\
&\mathrm{k}_1=\frac{a^4\bar{K}_1}{D_{11}},\quad \mathrm{k}_2=\frac{a^2\bar{K}_2}{D_{11}},\quad \delta=\frac{\mu}{m\omega^{*}}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

در اینجا $\omega^{*}=\sqrt{D_{11}/ma^4}$ نشان دهنده فرکانس مرجع، δ و R_x به ترتیب نشان دهنده میرائی و نیروی درون-صفحه‌ای بی‌بعد هستند.

در ادامه با صرف‌نظر کردن از بالانویس بار از روی پارامترهای مسأله و با استفاده از شش شکل مود ارتعاشی اول صفحه در تقریب میدان جابجائی‌های درون-صفحه‌ای و عرضی و با جایگذاری حل‌های (26) و (27) و رابطه (28) در معادله (21) و سپس با اعمال روش گالرکین، می‌توان معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکات عرضی صفحه FG بر بستر الاستیک را در حضور نیروی درون-صفحه‌ای هارمونیک به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (29) بدست آورد:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{w}_1+\delta\dot{w}_1+(\omega_1^2+a_1R_{x_1}\cos\Omega t)w_1+\\
&\qquad g_1(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=0\\
&\ddot{w}_2+\delta\dot{w}_2+(\omega_2^2+b_1R_{x_1}\cos\Omega t)w_2+\\
&\qquad g_2(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=0
\end{aligned}
$$

$$\ddot{w}_3+\delta\dot{w}_3+(\omega_3^2+c_1R_{x_1}\cos\Omega t)w_3+$$
$$g_3(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=0$$
$$\ddot{w}_4+\delta\dot{w}_4+(\omega_4^2+d_1R_{x_1}\cos\Omega t)w_4+$$
$$g_4(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=0$$
$$\ddot{w}_5+\delta\dot{w}_5+(\omega_4^2+e_1R_{x_1}\cos\Omega t)w_5+$$
$$g_5(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=0$$
$$\ddot{w}_6+\delta\dot{w}_6+(\omega_4^2+f_1R_{x_1}\cos\Omega t)w_6+$$
$$g_6(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=0 \qquad (29)$$

معادلات فوق شامل جملات تحریک پارامتریک، میرائی و جملات غیرخطی $g_i(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6),\ (i=1,...,6)$ می‌باشند. این جملات در برگیرنده غیرخطینگی‌های مرتبه دوم و سوم از حرکات عرضی صفحه ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ هستند. در تحقیق حاضر تحت عنوان نوآوری اول مسأله، با صرف‌نظر کردن از غیرخطینگی‌های فوق و با استفاده از شش شکل مود اول ارتعاشی، ناپایداری استاتیکی/ دینامیکی صفحه تابعی بررسی می‌شود و با ارائه منحنی‌های همگرائی، اثرات وجود بستر الاستیک پاسترناک بر نواحی ناپایداری دینامیکی صفحه بررسی می‌شود، سپس برای ادامه و تکمیل کار مرجع [15] و به عنوان نوآوری بعدی، به بررسی و مطالعه اثرات بستر الاستیک پاسترناک بر روی دینامیک غیرخطی صفحه تحت تحریک پارامتریک نیروئی پرداخته می‌شود.

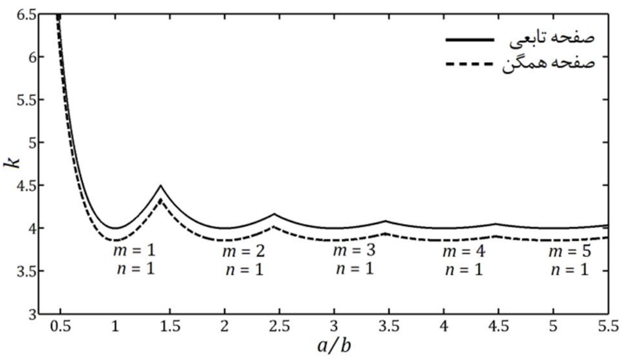
5- شبیه‌سازی عددی مسأله

فرض می‌شود که خواص صفحه در راستای ضخامت دارای توزیع توانی بوده و به صورت پیوسته و تدریجی از خواص خالص فلزی از جنس آلومینیم با $\rho_m=2707\ \mathrm{kg/m^3}$ ، $E_m=70\ \mathrm{GPa}$ و $\nu_m=0.3$ در سطح تحتانی به خواص خالص سرامیکی از جنس زیرکونیم با $\rho_c=3000\ \mathrm{kg/m^3}$ ، $E_c=151\ \mathrm{GPa}$ و $\nu_c=0.3$ در سطح فوقانی تغییر می‌کند [24]. شاخص کسر حجمی اختلاط مواد $n=5$ در نظر گرفته شد.

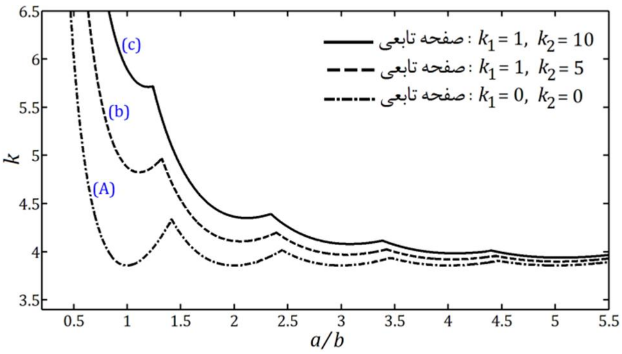
6- پایداری استاتیکی صفحه تابعی

با چشم پوشی از اثرات میرائی سازه‌ای، اثرات اینرسی، ترم هارمونیک نیروی تحریک و جملات غیر خطی موجود در معادلات (29)، و با فرض اینکه صفحه تابعی با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده متحرک، تحت تأثیر نیروی استاتیکی درون-صفحه‌ای تک-محوره در راستای محور x قرار دارد، با در نظر گرفتن پنج نیم موج $(m=1,\ ...,\ 5,\quad n=1)$ در جهت نیرو و با حل مسأله مقدار ویژه مربوطه، نیروی بحرانی متناظر با حالت کمانش صفحه برای دو حالت همگن و تابعی در غیاب/حضور بستر الاستیک محاسبه شد.

مطابق شکل 2- الف تغییرات ضریب کمانش تک-محوره بی‌بعد $(k=b^2N_{cr}/\pi^2D_m)$ برای صفحه ایزوتروپیک با $a/h=100$، و با شرایط مرزی ساده و متحرک در برابر تغییرات نسبت ابعاد صفحه a/b، نشان داده شده است. مطابق این شکل با افزایش نسبت ابعاد، یعنی برای صفحات طویل، ضریب کمانش همگرا شده و ثابت می‌ماند. در شکل 2- ب نیز اثر بستر الاستیک پاسترناک بر روی ضریب کمانش تک-محوره صفحه تابعی با شرایط مرزی تکیه گاهی ساده با لبه‌های متحرک، نشان داده شده است. با توجه به این شکل همچنان که انتظار می‌رود افزایش ضرایب سفتی بستر سبب بالا رفتن سفتی صفحه تابعی شده و مقدار نیروی کمانش با وجود بستر الاستیک نسبت به حالت عدم وجود بستر، افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، با توجه به این شکل همگرائی نیروی کمانش با افزایش نسبت ابعاد نیز مشهود است.



شکل 2- الف تغییرات ضریب کمانش بارگذاری تک-محوره در برابر پارامتر نسبت ابعاد (a/b) با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده متحرک و بدون وجود بستر الاستیک در دو حالت، الف) صفحه همگن ب) صفحه تابعی.



شکل 2- ب تغییرات ضریب کمانش صفحه تابعی با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده متحرک در برابر پارامتر نسبت ابعاد (a/b) با وجود بستر الاستیک در سه حالت از مقادیر ضرایب سفتی بستر، A)

7- استخراج نواحی ناپایداری دینامیکی

با چشم‌پوشی از اثرات ترم‌های غیرخطی موجود در معادلات (29)، معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی صفحه به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی معمولی ماتیو توصیف کننده ناپایداری دینامیکی صفحه، کاهش می‌یابد. با قرار دادن حل همگن در دستگاه معادلات خطی کاهش یافته و با صرف‌نظر کردن از جملات تحریک پارامتریک و میرائی می‌توان نیروی کمانش بحرانی (R_{cr}) را با حل مسأله مقدار ویژه بدست آورد.

مطابق روش ارائه شده توسط راماچاندرا و همکارش [4] با تعریف $\beta=R_{x_1}/R_{cr}$ و $\alpha=R_{x_0}/R_{cr}$ که به ترتیب نشان دهنده ضریب بار استاتیکی و دینامیکی هستند، تقریب‌های مرتبه اول و دوم برای محدوده نواحی ناپایداری دینامیکی (دامنه تحریک فرکانسی) مربوط به پریود $2T$ (به علت اهمیت کاربردی آن) را با حل دو معادله کوپله شده مقدار ویژه متناظر بدست آورد [4].

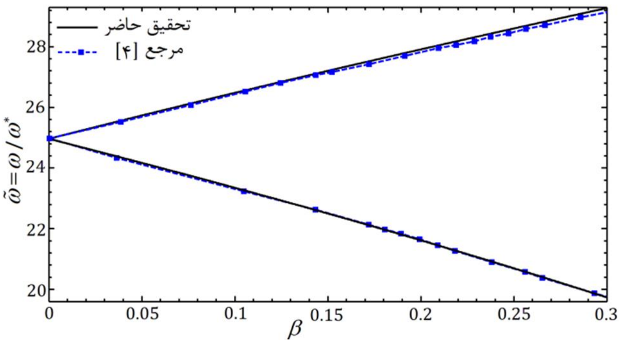
به منظور صحه‌گذاری نتایج بدست آمده، خواص مکانیکی و هندسی بدون بعد صفحه با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده متحرک به صورت $E_{11}=E_{22}=E$ ، $E_{12}=E/2(1+\nu)$ ، $\nu=0.25$ ، $a/b=1$ و $a/h=100$ در نظر گرفته می‌شوند [4]. در مرجع [4] برای استخراج نواحی ناپایداری چهار جمله $(m=1,n=1)$ ، $(m=1,n=3)$ ، $(m=3,n=1)$ و $(m=3,n=3)$ برای تخمین میدان جابجائی‌ها در نظر گرفته شده است. در اینجا به منظور تکمیل و بهبود نتایج، جملات اضافی $(m=1,n=5)$ و $(m=5,n=5)$ برای تخمین مؤلفه‌های جابجائی‌ها به مدل اضافه شده و نتایج حاصل با نتایج مرجع [4] مقایسه شده است. در شکل‌های 3- الف و 3- ب

نواحی ناپایداری دینامیکی برای مقدار مشخصی از ضریب بار استاتیکی $\alpha=0.6$، به صورت تغییرات فرکانس تحریک بدون بعد $\tilde{\omega}=\omega/\omega^*$ بر حسب تغییرات ضریب بار دینامیکی بدون بعد β نشان داده شده‌اند، همچنان که مشاهده می‌شود سازگاری بسیار خوبی بین نتایج بدست آمده و نتایج مرجع [4] وجود دارد و با افزایش ضریب بار دینامیکی عرض ناحیه ناپایداری اصلی نیز افزایش می‌یابد. یادآوری این نکته ضروری است که افزایش مقدار مؤلفه استاتیکی نیروی درون صفحه‌ای، با توجه به نحوه بارگذاری درون- صفحه‌ای از نظر کششی/فشاری بودن، باعث افزایش/کاهش فرکانس خطی سیستم می‌شود.

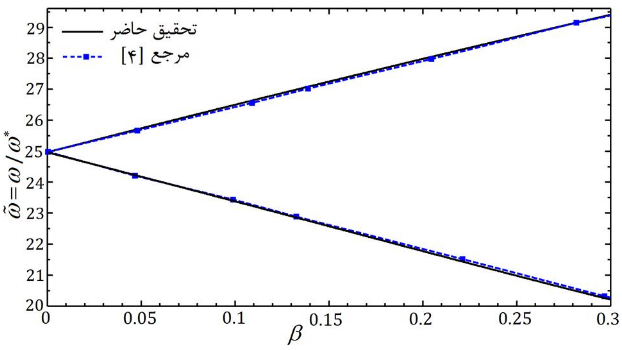
در این قسمت با استفاده از شش شکل مود ارتعاشی، اثرات تغییرات ضرایب بستر پاسترناک بر محدوده اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه تابعی مربعی شکل با $a/h=100$ و تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده و متحرک و برای مقدار ثابتی از ضریب بار استاتیکی، $\alpha=0.4$، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در شکل 4 تغییرات فرکانس تحریک بدون بعد $\tilde{\omega}$ بر حسب تغییرات ضریب بار دینامیکی β برای چهار حالت از مقادیر ضرایب بدون بعد بستر k_1 و k_2 نشان داده شده است. مطابق این شکل با افزایش ضرایب ثابت بستر پاسترناک فرکانس طبیعی صفحه تحت بارگذاری افزایش می‌یابد و ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بالاتر رخ می‌دهد.

8- تحلیل غیرخطی تغییرمکان‌های عرضی صفحه

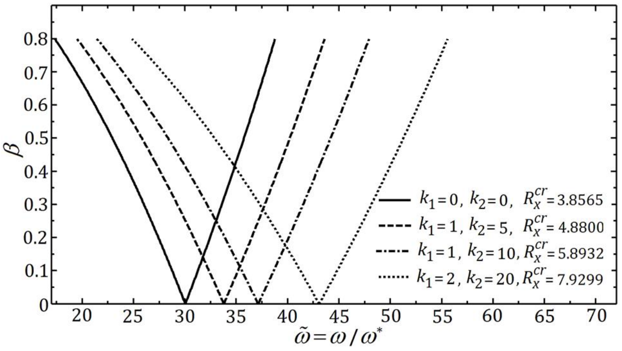
برای صحه‌گذاری مدل غیرخطی حاضر و نتایج حاصل، فرض می‌شود که صفحه مربعی ایزوتروپیک تحت تأثیر بار عرضی با توزیع یکنواخت قرار گرفته است. همانند مراجع [25] و [26] خواص هندسی و مکانیکی صفحه به صورت $a=b=10$ in، $h=1$ in، $E=7.8\times10^6$ psi و $\nu=0.3$ در نظر گرفته شده است. با توجه به مراجع مذکور، دو نوع شرط مرزی تکیه‌گاهی با عناوین *SS-1* و *SS-3* به صورت روابط (31،30) در نظر گرفته می‌شوند.



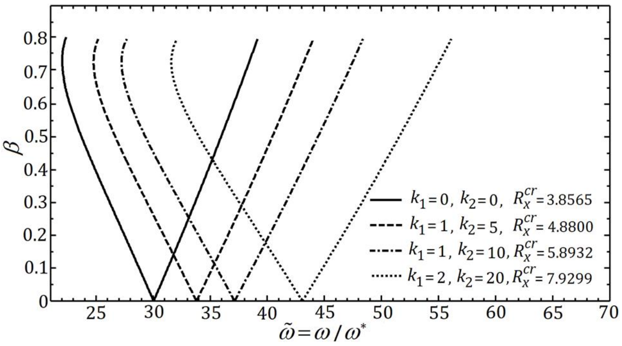
شکل 3- الف تقریب مرتبه اول ناحیه اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه تحت نیروی درون-صفحه‌ای با شرایط مرزی ساده تکیه‌گاهی ($\alpha=0.6$).



شکل 3- ب تقریب مرتبه دوم ناحیه اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه تحت نیروی درون-صفحه‌ای با شرایط مرزی ساده تکیه‌گاهی ($\alpha=0.6$).



شکل 4- الف تقریب مرتبه اول ناحیه اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه تحت نیروی درون-صفحه‌ای تک محوره ($\alpha=0.4$) برای چهار حالت از ضرایب بستر.

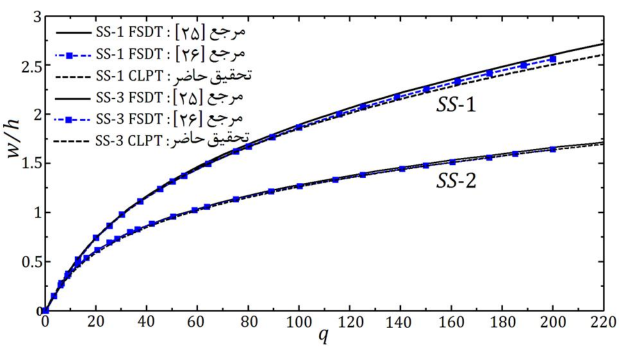


شکل 4- ب تقریب مرتبه دوم ناحیه اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه تحت نیروی درون-صفحه‌ای تک محوره ($\alpha=0.4$) برای چهار حالت از ضرایب بستر.

$$\text{SS-1}:\ x=0,\ a\ :\ v=w=\frac{\partial w}{\partial x}=0,\qquad y=0,\ b\ :\ u=w=\frac{\partial w}{\partial y}=0. \tag{30}$$

$$\text{SS-3}:\ u=v=w=0,\ \ x=0,a\ ;\ \ y=0,\ b \tag{31}$$

در شکل 5 تغییرات تغییرمکان بدون بعد مرکز صفحه همگن در برابر پارامتر بارگذاری عرضی بدون بعد $q=q_0a^4/Eh^4$ نشان داده شده است. حل ارائه شده حاضر با استفاده از روش مود فرضی و برای هشت مقدار از (m,n) بصورت (1,1)، (1,3)، (3,1)، (3,3)، (5,1)، (1,5)، (5,5) و (7,1) بدست آمده است. با توجه به شکل 5 می‌توان دریافت که حل غیرخطی بدست آمده بر اساس تئوری کلاسیک صفحات برای $a/h=10$ (مشخصه صفحه نسبتاً ضخیم) دارای سازگاری نسبتا خوبی با حل‌های بدست آمده توسط زائو و همکارش [25] و ردی [26] با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های مرتبه اول صفحات می‌باشد و همگرائی جواب‌ها با افزایش تعداد شکل مودهای فرضی افزایش می‌یابد.



شکل 5 تغییر مکان عرضی مرکز صفحه در برابر پارامتر بار عرضی با توزیع یکنواخت برای صفحه ایزوتروپیک مربعی در غیاب بستر الاستیک.

9- تحلیل غیرخطی رفتار صفحه به روش اغتشاشات

در این بخش برای اجتناب از پیچیدگی تحلیل، رفتار کیفی غیرخطی صفحه تابعی تحت تحریک پارامتریک نیروئی در شکل مود اول ارتعاشی مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد، از این رو با فرض $w(x,y,t)=w_1(t)\sin\pi x\sin\pi y$ یعنی با نگه داشتن اولین معادله از معادلات دیفرانسیل (29)، معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکات عرضی صفحه FG در شکل مود ارتعاشی اول و در حضور نیروی درون-صفحه‌ای به شکل رابطه (32) بیان می‌شود:

$$\ddot{w}_1+\omega^2 w_1+\lambda_1 w_1\cos\Omega t+\delta_1\dot{w}_1+\lambda_2 w_1^2+\lambda_3 w_1^3=0 \tag{32}$$

مشابه مرجع [15]، معادله فوق شامل جمله تحریک پارامتریک و جملات مرتبه دوم و سوم از w_1 می‌باشد طوری که این جملات دربرگیرنده اثرات بارگذاری‌های درون صفحه‌ای و غیرخطینگی‌های حرکات عرضی صفحه می‌باشند. یادآوری این نکته ضروری است که، وجود غیرخطیگری‌های مرتبه دوم که ناشی از کوپلینگ بین منتجه‌های گشتاورهای خمشی و نیروهای محوری صفحه تابعی هستند منجر به ایجاد تشدید ساب‌هامونیک می‌شوند. در تحقیق حاضر برای ادامه و تکمیل کار مرجع مذکور، اثر بستر الاستیک پاسترناک بر دینامیک صفحه تحت تحریک پارامتریک در شکل مود اول ارتعاشی بررسی و مطالعه می‌شود.

تحلیل معادلات غیرخطی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در مقایسه با روش‌های هارمونیک بالانس و غیره از دقت بالاتری برخوردار است [27]. بنابراین با فرض این که دامنه جمله هارمونیک نیروی درون-صفحه‌ای (R_{x1})، میرائی سازه‌ای و جملات غیرخطی در مقایسه با جملات خطی از مرتبه‌پائین‌تر هستند لذا می‌توان با وارد کردن پارامتر کوچک و بدون بعد ε که نشان دهنده مرتبه دامنه حرکات عرضی صفحه است و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله (28) را به شکل زیر تبدیل کرد:

$$\ddot{w}_1+\omega_1^2 w_1=-\varepsilon a_1 R_{x_1} w_1\cos\Omega t-\varepsilon\delta\dot{w}_1-\varepsilon a_2 w_1^2-\varepsilon a_3 w_1^3 \tag{33}$$

هنگامی که Ω فرکانس تحریک نیروی درون-صفحه‌ای در محدوده دو برابر فرکانس طبیعی ω سیستم باشد، کوچکترین تغییر در پارامترهای سیستم، می‌تواند منجر به بوجود آمدن پاسخ‌هایی با دامنه‌هائی بسیار بزرگ شود. لذا برای بررسی کیفی و مطالعه رفتار غیرخطی سیستم هنگام تشدید پارامتریک، با وارد کردن پارامتر تنظیم کننده σ می‌توان رابطه تشدید فرکانس را به شکل رابطه (349 بیان کرد:

$$\Omega=2\omega+\sigma\varepsilon \tag{34}$$

حل تقریبی و مرتبه اول معادله (33) را می‌توان به شکل (35) بیان کرد:

$$w_1(t,\varepsilon)=w_{10}(T_0,T_1)+\varepsilon\ w_{11}(T_0,T_1),\quad T_n=\varepsilon^n t,\quad n=0,1 \tag{35}$$

اپراتورهای دیفرانسیلی را می‌توان به صورت رابطه (36) تعریف کرد:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial t}+\ldots=D_0+\varepsilon D_1+\ldots,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}=\left(D_0+\varepsilon D_1+\ldots\right)^2=D_0^2+2\varepsilon D_0 D_1+\ldots, \tag{36}$$

که در اینجا $D_j=\partial/\partial T_j,\ (j=0,1)$ است و با جایگذاری (34) تا (36) در معادله (33) و با متحد قرار دادن ضرایب توان‌های مشابه از ε رابطه (37) بدست می‌آید:

$$\varepsilon^0:\ D_0^2 w_{10}+\omega_1^2 w_{10}=0 \tag{37}$$

$$\varepsilon^1:\ D_0^2 w_{11}+\omega_1^2 w_{11}=-2D_0 D_1 w_{10}+2\sigma\ w_{10}-\delta D_0 w_{10}-\alpha_1 R_{x_1} w_{10}\cos\Omega T_0-\alpha_2 w_{10}^2-\alpha_3 w_{10}^3 \tag{38}$$

حل همگن معادله (37) به صورت رابطه (39) است:

$$w_{10}(T_0,T_1)=A_1(T_1)\ e^{i\Omega T_0/2}+\bar{A}_1(T_1)\ e^{-i\Omega T_0/2} \tag{39}$$

که در آن $A_1(T_1)$ یک تابع نامشخص بوده و $\bar{A}_1(T_1)$ مزدوج مختلط آن می‌باشد. با جایگذاری حل همگن (39) در (38) رابطه (40) بدست می‌آید:

$$D_0^2 w_{11}+\omega_1^2 w_{11}=-\left(i\Omega D_1 A_1-\sigma\Omega A_1+\frac{1}{2}\alpha_1 R_{x_1}\bar{A}_1+\frac{1}{2}\delta i\Omega A_1+3i\alpha_3 A_1^2\bar{A}_1\right)e^{i\Omega T_0/2}-2\alpha_2 A_1\bar{A}_1-\left(\frac{1}{2}\alpha_1 R_{x_1}A_1+\alpha_3 A_1^3\right)e^{3\Omega T_0}-\alpha_2 A_1^2 e^{i\Omega T_0}+c.c. \tag{40}$$

برای حذف جملات سکولار از حل w_{11}، بایستی رابطه (41) برقرار باشد:

$$2i\Omega D_1 A_1-2\sigma\Omega A_1+\alpha_1 R_{x_1}\bar{A}_1+\delta i\Omega A_1+6i\alpha_3 A_1^2\bar{A}_1=0 \tag{41}$$

از طرف دیگر جهت توصیف معادله (41)، می‌توان تابع $A(T_1)$ را بصورت (42) بیان کرد:

$$A_1(T_1)=x_1(T_1)+i\ x_2(T_1) \tag{42}$$

در رابطه فوق x_1 و x_2 نشان دهنده توابعی حقیقی از دامنه و فاز نوسانات غیرخطی صفحه هستند. با جایگذاری (42) در (41) و با جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی، رابطه (42) بدست می‌آید:

$$\frac{dx_1}{dT_1}=-\sigma x_2-\frac{1}{2}\delta x_1+\frac{1}{2\Omega}\alpha_1 R_{x_1}x_2-\frac{3}{\Omega}\alpha_3 x_1^2 x_2-\frac{3}{\Omega}\alpha_3 x_2^3$$
$$\frac{dx_2}{dT_1}=+\sigma x_1-\frac{1}{2}\delta x_2+\frac{1}{2\Omega}\alpha_1 R_{x_1}x_1+\frac{3}{\Omega}\alpha_3 x_1^3+\frac{3}{\Omega}\alpha_3 x_1 x_2^2 \tag{43}$$

با استفاده از رابطه (43) معادلات پاسخ نیرویی و فرکانسی سیستم، در حالت پایا ($dx_1/dT_1=0$ و $dx_2/dT_1=0$) با ثابت ماندن دامنه و فاز نسبت به زمان بدست می‌آید. در ادامه با بکارگیری نرم افزار میپل و در حالت پایا معادلات جبری غیرخطی حاصل از (43) حل شد و با استفاده از داده‌های بدست آمده منحنی‌های مشخصه پاسخ فرکانسی و دوشاخگی ترسیم شد و سپس رفتار غیرخطی صفحه در حضور اثر بستر به هنگام تشدید مطالعه شد و تأثیر پارامترهای مختلف بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی و نقاط دوشاخگی سیستم بررسی شد.

10- تحلیل پایداری حل در شرایط ماندگار

فرض می‌شود x_{1s} و x_{2s} به ترتیب به عنوان حل بدیهی و غیربدیهی معادلات جبری (43) در شرایط پایا باشند، از این رو a_s و ϕ_s به ترتیب دامنه و فاز سیستم در شرایط پایا هستند و از رابطه (44) بدست خواهند آمد:

$$a_s=\sqrt{x_{1s}^2+x_{2s}^2},\quad \phi_s=tg^{-1}(x_{2s}/x_{1s}) \tag{44}$$

برای بررسی پایداری حل‌های پایای معادلات (43)، رابطه (45) فرض می‌شود:

$$x_1(T_1)=x_{1s}+x_{1p}(T_1),\quad x_2(T_1)=x_{2s}+x_{2p}(T_1) \tag{45}$$

در اینجا توابع x_{1p} و x_{2p} بیانگر اغتشاشات جزئی حل‌های سیستم نسبت به حل‌های سیستم در وضعیت پایا هستند. با جایگذاری روابط (45) در (43) و با جداسازی بخش‌های خطی معادلات حاصل رابطه (46) بدست می‌آید [28]:

$$\dot{x}_{1p}=m_{11}x_{1p}+m_{12}x_{2p}$$
$$\dot{x}_{2p}=m_{21}x_{1p}+m_{22}x_{2p} \tag{46}$$

$$m_{11}=-\frac{1}{2}\delta-\frac{6}{\Omega}\alpha_3 x_1 x_2\ ,\ m_{22}=-\frac{1}{2}\delta+\frac{6}{\Omega}\alpha_3 x_1 x_2$$
$$m_{12}=-\sigma+\frac{1}{2\Omega}\alpha_1 R_{x_1}-\frac{3}{\Omega}\alpha_3 x_1^2-\frac{9}{\Omega}\alpha_3 x_2^2$$
$$m_{21}=+\sigma+\frac{1}{2\Omega}\alpha_1 R_{x_1}+\frac{9}{\Omega}\alpha_3 x_1^2+\frac{3}{\Omega}\alpha_3 x_2^2 \qquad (47)$$

که در آن ضرایب $m_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ از روابط (47) بدست می‌آیند:

مطابق محک راث-هرویتز اگر بخش حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس ضرایب $m_{ij}(i=1,2\ ;\ j=1,2)$، منفی باشند حل غیربدیهی سیستم پایدار خواهد بود.

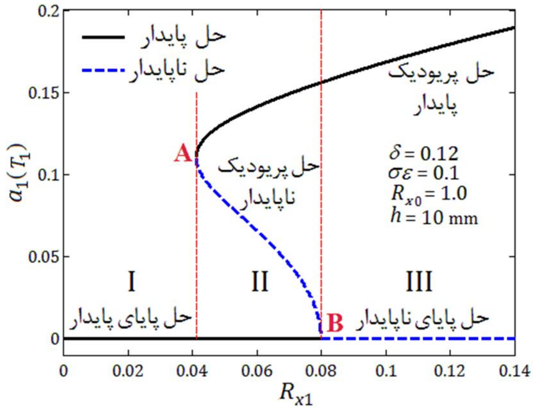
11- مطالعه کمّی رفتار غیرخطی و پایداری

در این بخش به بررسی عددی رفتار صفحه تابعی تحت تحریک نیروئی پارامتریک (در محدوده اولین فرکانس طبیعی) پرداخته می‌شود. با فرضیات فوق و در غیاب بستر الاستیک و با ثابت نگه داشتن جمله استاتیکی نیروی درون-صفحه‌ای بدون بعد $R_{X0}=1.0$، تغییرات دامنه تشدید صفحه در برابر دامنه تحریک R_{x1}، در حضور اثرات میرائی سازه‌ای با $\delta=0.12$ در شکل 6-الف نشان داده شده است. مطابق این شکل، منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید در برگیرنده حل‌های بدیهی و غیربدیهی می‌باشد. در این شکل منحنی‌های پیوسته بیانگر حل پایدار و منحنی‌های منقطع بیانگر حل ناپایدار است. در ناحیه I اثرات میرائی سازه‌ای غالب بر اثرات دامنه تحریک است طوری که در این ناحیه فقط یک حل بدیهی پایدار برای دامنه تشدید وجود دارد و بنابراین در این ناحیه، تشدید صفحه تحریک نخواهد شد. با افزایش دامنه نیروی تحریک بدون بعد، اولین گره زینی دوشاخگی[1] یعنی نقطه A ظاهر می‌شود. بعد از گذر از این نقطه و در ناحیه II با توجه به تعامل بین δ و R_{x1}، ابتدا یک حل غیربدیهی پریودیک پایدار (سیکل حدی نوسانی پایدار) و سپس یک حل غیربدیهی پریودیک ناپایدار (سیکل حدی نوسانی ناپایدار) برای دامنه تشدید وجود دارد. در ادامه و با افزایش دامنه نیروی تحریک حل ناپایدار از بین رفته و دومین نقطه دوشاخگی از نوع زیر بحرانی (نقطه B) نیز ظاهر می شود. بعد از گذر از نقطه دوشاخگی دوم، سیستم فقط یک حل غیربدیهی پایدار متناظر با وجود سیکل حدی پایدار خواهد داشت (ناحیه III). به عبارت دیگر در ناحیه III اثرات دامنه تحریک غالب بر اثرات میرائی بوده و همواره یک حل پریودیک غیربدیهی پایدار وجود داشته و تشدید صفحه اتفاق می‌افتد.

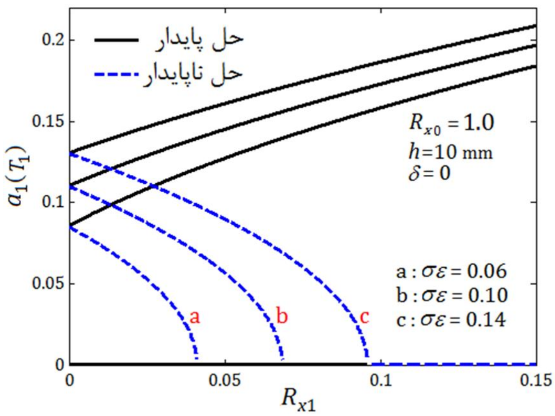
در شکل6- ب منحنی‌ها برای سه مقدار پارامتر تنظیم‌کننده $\sigma\varepsilon=-0.03$، $\sigma\varepsilon=-0.1$ و $\sigma\varepsilon=-0.14$ ترسیم شده است. از روی این شکل می‌توان دریافت در غیاب میرائی، تشدید صفحه همواره تحریک شده و کاهش پارامتر $\sigma\varepsilon$، صرفاً باعث افزایش اندازه دامنه تشدید شده و تغییرات آن تأثیری بر عرض منطقه تشدید ندارد.

در شکل 7- الف منحنی‌های مشخصه پاسخ فرکانسی متناظر با وجود غیرخطی‌گری‌های سخت شونده در سیستم، در غیاب اثرات میرائی و بدون وجود بستر الاستیک نشان داده شده است. با توجه به این شکل دیده می‌شود که در ناحیه I با افزایش $\sigma\varepsilon$ در بازه فرکانسی داده شده، فقط یک حل بدیهی پایدار برای دامنه تشدید وجود دارد به عبارت دیگر در این ناحیه، تشدید صفحه تحریک نخواهد شد. با افزایش تدریجی پارامتر $\sigma\varepsilon$، اولین نقطه دوشاخگی از نوع فوق بحرانی ظاهر می‌شود. بعد از گذر از این نقطه

1- Saddle-Node Hopf bifurcation



شکل 6- الف تغییرات دامنه تشدید با افزایش دامنه نیروی تحریک برای صفحه مربعی با نسبت ابعاد $a/h=100$ در غیاب بستر الاستیک



شکل 6- ب تغییرات دامنه تشدید با افزایش دامنه نیروی تحریک در غیاب بستر الاستیک $k_1=k_2=0$

دوشاخگی یعنی در ناحیه II، یک حل پریودیک غیربدیهی پایدار (سیکل حدی نوسانی پایدار) برای دامنه تشدید وجود دارد و در این ناحیه، پدیده تشدید اتفاق می‌افتد. با افزایش تدریجی پارامتر $\sigma\varepsilon$ در بازه فرکانسی داده شده، دامنه تشدید افزایش می‌یابد. با ادامه افزایش پارامتر تنظیم و بعد از گذر از نقطه صفر، نقطه دوشاخگی دوم از نوع زیر بحرانی نیز ظاهر می‌شود. بعد از عبور از نقطه دوشاخگی دوم در ناحیه III، ابتدا یک حل پریودیک غیربدیهی ناپایدار (سیکل حدی ناپایدار) و یک حل پریودیک غیربدیهی پایدار (سیکل حدی پایدار) برای دامنه تشدید وجود خواهد داشت.

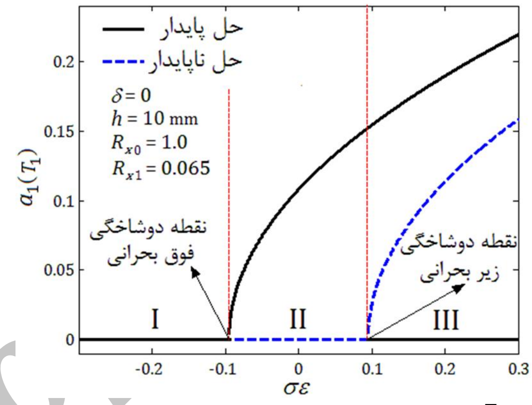
شکل 7- ب نشان‌دهنده منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای سه مقدار مختلف دامنه تحریک $R_{X1}=0.03$، $R_{X1}=0.065$ و $R_{X1}=0.1$ می‌باشد. این شکل نشان می‌دهد که افزایش اندازه دامنه تحریک باعث بزرگتر شدن ناحیه وجود تشدید صفحه می‌شود.

در شکل 8 منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید در برابر دامنه تحریک در غیاب بستر الاستیک و درحضور اثرات میرائی سازه‌ای نشان داده شده است. با توجه به شکل 8 می‌توان دریافت که افزایش پارامتر δ باعث انتقال اولین گره زینی دوشاخگی منحنی‌ها به سمت راست شده و سبب کاهش عرض منطقه وجود تشدید می‌شود.

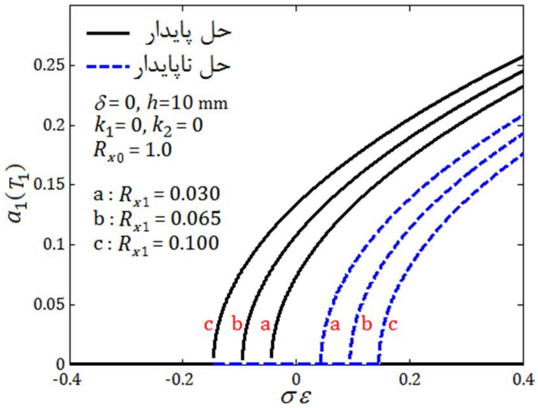
در این قسمت، اثر بستر الاستیک بر مشخصات تشدید صفحه تابعی بررسی می‌شود. در شکل 9 منحنی‌های مشخصه پاسخ فرکانسی صفحه در غیاب اثرات میرائی سازه‌ای برای دو حالت مختلف: a) بدون وجود بستر الاستیک، $k_1=k_2=0$، b) با وجود بستر الاستیک، $k_1=k_2=50$، نشان

داده شده است. با توجه این شکل دیده می‌شود که بستر الاستیک از نوع پاسترناک، باعث برخاستگی منحنی‌های پاسخ فرکانسی به سمت بالا شده (نسبت به حالت بدون بستر) و همچنان که انتظار می‌رود وجود بستر الاستیک سبب افزایش سفتی صفحه شده و باعث نزدیک شدن نقاط دوشاخگی زیر بحرانی و فوق بحرانی به سمت هم می‌شود که منجر به کاهش عرض منطقه وجود تشدید می‌شود.

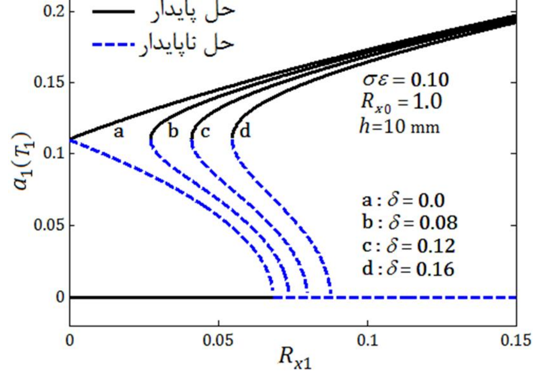
در شکل 10 اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید در برابر دامنه تحریک برای چهار حالت از مقادیر ضرایب سفتی بستر پاسترناک، ترسیم شده است. از روی این شکل می‌توان دریافت در غیاب میرائی تشدید صفحه همواره تحریک شده و افزایش ضرایب سفتی بستر سبب افزایش دامنه تشدید و باعث انتقال اولین گره زینی دوشاخگی منحنی‌ها به سمت بالا می‌شود و همچنین عرض منطقه وجود جواب بدیهی هم افزایش می‌یابد.



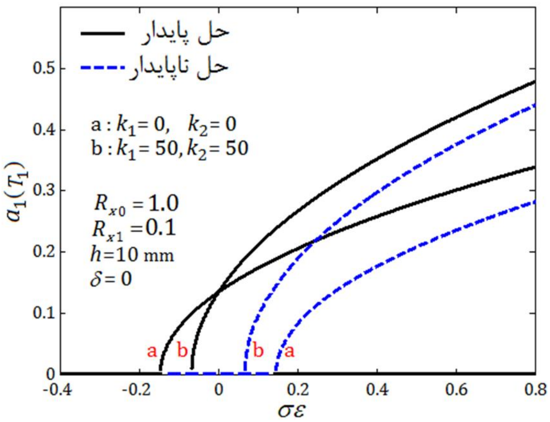
شکل 7- الف منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای صفحه مربعی با نسبت ابعاد $a/h=100$ در غیاب اثر میرائی و اثر بستر الاستیک



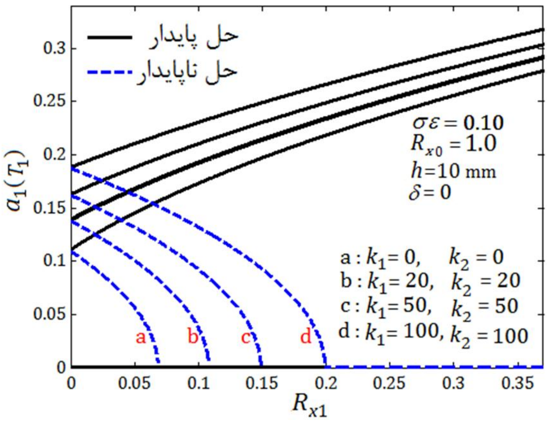
شکل 7- ب منحنی‌های مشخصه پاسخ فرکانسی متناظر



شکل 8 منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید در برابر دامنه تحریک در غیاب بستر الاستیک ($k_1=k_2=0$)



شکل 9 مقایسه منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای دو حالت مختلف: (a بدون وجود بستر با $k_1=k_2=0$، (b با وجود بستر با سفتی‌های بدون بعد $k_1=k_2=50$

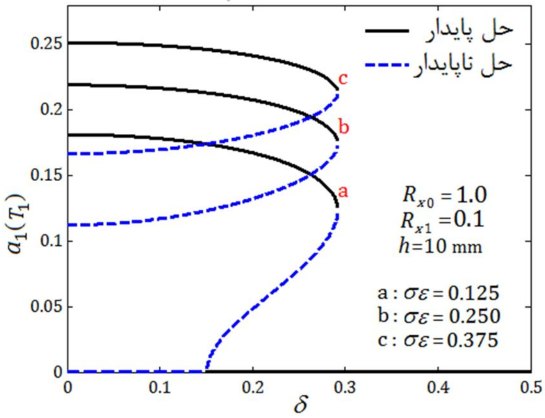


شکل 10 مقایسه منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای چهار حالت مختلف از ضرائب سفتی بستر

شکل 11 منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید نسبت به پارامتر میرائی در غیاب بستر الاستیک برای سه مقدار از پارامتر تنظیم کننده را نشان می‌دهد، با توجه به شکل، کاهش مقدار پارامتر تنظیم سبب افزایش اندازه دامنه تشدید از حالت a به c شده و تأثیری بر روی عرض منطقه وجود تشدید نمی‌گذارد.

12- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر مسأله ناپایداری استاتیکی/دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی صفحه مدرج تابعی با بستر الاستیک و تحت تحریک پارامتریک مورد بررسی



شکل 11 تغییرات دامنه تشدید با پارامتر میرائی، در غیاب بستر الاستیک

قرار گرفت و معادله دیفرانسیل حاکم بر دینامیک صفحه با وجود غیرخطینگی‌های هندسی و ناهمگنی ساختاری استخراج شد. نتایج بدست آمده نشان داد که با افزایش مقادیر پارامترهای بستر الاستیک، فرکانس طبیعی صفحه افزایش می‌یابد و ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بالاتر اتفاق می‌افتد. در ادامه با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه معادلات پاسخ فرکانسی بدست آمد و پایداری حل‌های بدیهی و غیربدیهی این معادلات در شرایط ماندگار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و اثرات تغییرات پارامترهای مسأله بر تشدید صفحه بررسی شد. نتایج نشان دادند که با قرار گرفتن فرکانس تحریک پارامتریک (پارامتر تنظیم) در محدوده معین، تشدید صفحه تحریک می‌شود طوری که با تغییر پارامتر تنظیم در بخشی از این محدوده تشدید، سیستم دو حل غیربدیهی پریودیک ناپایدار و پایدار خواهد داشت و در بخش دیگری از این محدوده تشدید، سیستم فقط یک حل غیربدیهی پریودیک پایدار خواهد داشت. علاوه بر این نشان داده شد که:

- با افزایش پارامترهای بستر، کمانش صفحه تابعی در شکل مودهای بالاتر و در مقادیر بزرگتری از نیروی بحرانی کمانش متناظر با عدم وجود بستر رخ می‌دهد.
- با تحریک پارامتریک صفحه در غیاب بستر الاستیک و اثرات میرائی، کاهش مقدار پارامتر تنظیم کننده فقط باعث افزایش دامنه تشدید منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید-دامنه نیروی تحریک شده و تأثیری بر عرض منطقه وجود تشدید نمی‌گذارد.
- در غیاب بستر الاستیک و با تحریک پارامتریک صفحه، افزایش میرائی بی‌بعد خطی سیستم سبب انتقال نقاط زینی دوشاخگی منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید-دامنه تحریک به سمت راست شده و عرض منطقه وجود تشدید کاهش می‌یابد.
- با تحریک پارامتریک صفحه در غیاب بستر الاستیک و در غیاب اثر میرائی، افزایش دامنه نیروی هارمونیک درون-صفحه‌ای، سبب عریض‌تر شدن منطقه وجود دو جواب غیربدیهی پایدار و ناپایدار متناظر با بروز تشدید می‌شود.
- با تحریک پارامتریک صفحه در حضور بستر الاستیک و در غیاب اثر میرائی، افزایش پارامترهای بستر الاستیک، سبب برخاستگی منحنی‌های مشخصه پاسخ فرکانسی به سمت بالا شده و همچنین سبب نزدیک شدن نقاط دوشاخگی زیر بحرانی و فوق بحرانی به سمت هم می‌شود که منجر به کاهش عرض منطقه وجود تشدید می‌شود.
- در غیاب اثر میرائی و با تحریک پارامتریک صفحه توسط نیروی هارمونیک درون-صفحه‌ای با مؤلفه استاتیکی ثابت، افزایش پارامترهای سفتی بستر، باعث افزایش دامنه تشدید منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید-دامنه تحریک شده و تأثیری بر عرض منطقه وجود تشدید نمی‌گذارد.

13- مراجع

[1] K. Ichikawa, Functionally Graded Material in the 21st Century, *A workshop on Trends and Forecasts, Kluwer Academic Publishers*, 2001.

[2] W. Lanhe, W. Hongjun, W. Daobin, Dynamic stability analysis of FGM plates by the moving least squares differential quadrature method, *Composite Structures,* Vol. 77, pp. 383-394, 2007.

[3] S. Kumar Panda, L.S. Ramachandra, Buckling of rectangular plates with various boundary conditions loaded by non-uniform inplane loads, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 52, pp. 819-828, 2010.

[4] L.S. Ramachandra, S. Kumar Panda, Dynamic instability of composite plates subjected to non-uniform in-plane loads, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 331, pp. 53-65, 2012.

[5] C.H. Kim, Multi-mode parametric excitation of a simply supported plate under time-varying and non-uniform edge loading, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 45, pp. 149-158, 2010.

[6] F. Alijani, M. Amabili, Non-linear dynamic instability of functionally graded plates in thermal environments, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 50, pp. 109-126, 2013.

[7] H.S. Shen, Z.X. Wang, Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations, *Composite Structures,* Vol. 92, pp. 2517-2524, 2010.

[8] Z.X. Wan, H.S. Shen, Nonlinear dynamic response of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations in thermal environments, *Ocean Engineering,* Vol. 57, pp. 99-110, 2013.

[9] T.L. Thinh, M.C. Nguyen, D.G. Ninh, Dynamic stiffness formulation for vibration analysis of thick composite plates resting on non-homogenous foundations, *Composite Structures,* Vol. 108, pp. 684-695, 2014.

[10] A.H. Baferani, A.R. Saidi, Effects of in-plane loads on vibration of laminated thick rectangular plates resting on elastic foundation: An exact analytical approach, *European Journal of Mechanics A/Solids,* Vol. 42, pp. 299-314, 2013.

[11] Y.X. Hao, L.H. Chen, W. Zhang, J.G. Lei, Nonlinear oscillations bifurcations and chaos of functionally graded materials plate, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 140, No. 1, pp. 172-181, 2014.

[12] U.H. Hegazy, Nonlinear Vibrations of a Thin Plate under Simultaneous Internal and External Resonances, *Journal of Vibration and Acoustics,* Vol. 132, pp. 051004-1-051004-9, 2010.

[13] W. Zhang, J. Yang, Y. Hao, Chaotic vibration of an orthotropic FGM rectangular plate based on third-order shear deformation theory, *Nonlinear Dynamic,* Vol. 59, pp. 619-660, 2010.

[14] P. Ribeiro, Thermally induced transitions to chaos in plate vibrations, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 299, pp. 314-330, 2007.

[15] Y. Hu, X. Zhang, Parametric Vibrations and Stability of a Functionally Graded Plate, *Mechanics Based Design of Structures and Machines,* Vol. 39, pp. 367-377, 2011.

[16] S.M. Hasheminejad, M.M. Keshvari, M.R. Shory, Dynamic Stability of Superelliptical Plates Resting on Elastic Foundations under Periodic In-Plane Loads, *Journal of Engineering Mechanics,* Vol. 140, No. 1, pp. 172-181, 2014.

[17] B.P. Patel, M. Ganapathi, K.R. Prasad, V. Balamurugan, Dynamic instability of layered anisotropic composite plates on elastic foundations, *Engineering Structures,* Vol. 21, pp. 988-995, 1999.

[18] N.D. Duc, H.C. Pham, Nonlinear postbuckling of an eccentrically stiffened thin FGM plate resting on elastic foundations in thermal environments, *Thin-Walled Structures,* Vol. 57, pp. 103-112, 2014.

[19] H.S. Shen, Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 44, pp. 561-584, 2002.

[20] L. Ravi Kumar, P.K. Datta, D.L. Prabhakara, Dynamic instability characteristics of laminated composite doubly curved panels subjected to partially distributed follower edge loading, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 42, pp. 2243–2264, 2005.

[21] C. V. Chia, *Non-linear Analysis of Plates,* McGraw-Hill, New York, 1980.

[22] A. Nosir, J.N. Reddy, A study of non-linear dynamic equations of higher-order deformation plate theories, *Non-Linear Mechanics,* Vol. 26, pp. 233-249, 1991.

[23] A. Bhimaraddi, Large amplitude vibrations of imperfect antisymmetric angle-ply laminated plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 162, pp. 457-470, 1999.

[24] G.N. Praveen, J.N. Reddy, Nonlinear transient thermo-elastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 35, No. 33, pp. 4457-4476, 1998.

[25] X. Zhao, K.M. Liew, Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 198, pp. 2796-2811, 2009.

[26] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, second edition,* CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.

[27] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations,* New York, John Wiley & Sons 1979.

[28] X.Y. Guo, W. Zhang, M.H. Yao, Nonlinear dynamics of angle-ply composite laminated thin plate with third-order shear deformation, *Science China Technological Sciences,* Vol. 53, pp. 3612-3622, 2010.