مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۱۳، ص‌ص ۲۸۱-۲۹۰

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل و شبیه‌سازی دینامیکی معکوس دو مکانیزم موازی با ساختار سینماتیکی یکسان در شاخه‌ها و قیدهای افزونه

مجتبی یزدانی[۱]، مهدی طالع ماسوله[۲*]، میلاد حسن‌وند[۳]، ایمان یحیی‌پور[۴]، محمود غفوری تبریزی[۵]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران
۲- استادیار، مهندسی مکانیک-رباتیک، آزمایشگاه تعامل انسان و ربات، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران
۳- کارشناس ارشد ، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
۴- کارشناس ارشد، مهندسی مکاترونیک، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران
۵- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکاترونیک، دانشگاه آزاد قزوین، قزوین
*تهران، صندوق پستی ۱۴۳۹۵۱۳۷۴، m.t.masouleh@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۱۵ دی ۱۳۹۲
پذیرش: ۰۶ بهمن ۱۳۹۲
ارائه در سایت: ۱۹ مهر ۱۳۹۳

کلید واژگان:
مکانیزم‌های موازی
تحلیل دینامیکی
روش لاگرانژ
روش نیوتن-اویلر
نرم افزار تحلیل دینامیکی

چکیده

در این مقاله روش جدیدی به‌منظور مدل سازی دو مکانیزم موازی افزونه مقید با سه و چهار درجه آزادی مستقل ارائه شده است. مدل‌سازی دینامیکی مکانیزم‌های افزونه مقید امری پیچیده بوده که در این مقاله و با توجه به ویژگی‌های ساختاری این دو مکانیزم روشی برای غلبه بر این پیچیدگی ارایه شده است. در این روش هر مکانیزم به چند زیرساختار تقسیم شده و تحلیل‌های سینماتیکی و روش‌های مدل‌سازی دینامیکی نیوتن-اویلر و لاگرانژ روی این زیرساختارها پیاده سازی شده‌اند. با به‌کارگیری روش لاگرانژ و با استفاده از مقادیر سینماتیکی استخراج شده، مدل دینامیکی هر زیرساختار در فضای وظیفه به‌دست آمده است. سپس مدل دینامیکی مجری‌نهایی، که می‌توان از آن به‌عنوان قید مرتبط کننده زیرساختارها یاد کرد، با استفاده از روش نیوتن-اویلر نوشته و به معادلات مستقل از هم منتج شده است. همچنین دسته‌بندی بین نیروهای به‌کار رفته در مدل‌سازی، نظیر نیروهای محرک انتقال یافته و نیروهای قیدی انجام شده است. در انتها، نتایج به‌دست آمده از روش فوق با یک نرم‌افزار شبیه‌سازی دینامیکی مقایسه شده است. این مقایسه تطابق بین نتایج حاصل شده از این دو روش را به‌خوبی نشان داده است.

Inverse dynamic problem of two parallel manipulators with identical limbs structures

Mojtaba Yazdani[1], Mehdi Tale Masouleh[2*], Milad Hasanvand[3], Iman Yahyapour[2], Mahmoud Ghafouri Tabrizi[4]

1- Department of Mechanical Engineering, Amir Kabir University of Technology, Tehran, Iran
2- Department of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.
3- Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
4- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University of Qazvin, Qazvin, Iran.
*P.O.B 143951374, Tehran, Iran, m.t.masouleh@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 January 2014
Accepted 26 January 2014
Available Online 11 October 2014

Keywords:
Dynamic modeling, Tripteron
Quadrupteron
Lagrangian Approach
Newtonian Approach

ABSTRACT

This paper aims to obtain the dynamic models of two over-constraint parallel mechanisms (PM) with 3-DOF (degree of freedom) and 4-DOF, the Tripteron and the Quadrupteron. The reasoning used in this paper is based on a judicious concept in detaching the whole mechanism into several subsystems and consecutive synergies between kinematic analysis, Lagrangian and Newtonian approaches. In this regard, the mechanisms are made equivalent to some subsystems and the equations of kinematic constraints are derived for all subsystems. Afterwards, upon resorting to Lagrangian approach and blending it with the latter kinematic relations, the dynamic model of each leg in task space is obtained. The dynamic model of the end-effector is written in virtue of Newton-Euler's approach where it yields to three differential equations. Finally, the problem leads to a system of 12 equations for the Tripteron and 16 equations for the Quadrupteron, which do not require the usual simplifications in such problems. For the sake of comparison, the results are put into contrast by the one obtained with a dynamic analyzer software. The results obtained by both approaches are coherent, which affirms the correctness of the proposed algorithm.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، کاربرد مکانیزم‌های موازی از ساختارهای ساده‌ای مانند سه پایه عکاسی تا مکانیزم‌های پرکاربرد صنعتی همچون ربات گاف-استوارت و ربات دلتا گسترش یافته است[۱]. از جمله کاربردهای اصلی مکانیزم‌های موازی در صنعت امروز می‌توان به شبیه‌سازهای حرکتی، ربات‌های صنعتی و عملگرهای در ابعاد میکرو و نانو اشاره نمود[۲].

یک زنجیره‌ی سینماتیکی سری یا مکانیزم سری را می‌توان ترتیبی از لینک‌ها و مفاصل که از یک پایه‌ی ثابت شروع می‌شوند و به مجری‌نهایی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
Please cite this article using:
M. Yazdani, M. Tale Masouleh, M. Hasanvand, I. Yahyapour, M. Ghafouri Tabrizi, Inverse dynamic problem of two parallel manipulators with identical limbs structures, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 281-290, 2015 (In Persian)

منتهی می‌شوند، تعریف نمود. با توجه به این تعریف، یک مکانیزم موازی را به شکل مکانیزمی حلقه بسته که از یک مجری‌نهایی با تعدادی درجه آزادی و یک پایه ثابت تشکیل یافته و این دو جزء با حداقل دو زنجیره سینماتیکی سری مستقل به هم متصل شده‌اند، تعریف می‌نمایند[۳].

ربات‌های موازی نسبت به ربات‌های سری مزایای آشکاری دارند. این مکانیزم‌ها با توجه به دارا بودن چندین حلقه سینماتیکی بسته، دارای سفتی بیشتری نسبت به مکانیزم‌های سری بوده و به‌همین دلیل دارای توانایی حمل بار بیشتری هستند. همچنین این مکانیزم‌ها سرعت و دقت بیشتری در جابه‌جایی‌ها دارا هستند. البته این مکانیزم‌ها نسبت به مکانیزم‌های سری فضای کاری کوچکتری دارند[۴-۵].

مطالعات بر روی مکانیزم‌های مکانیکی، به‌ویژه مکانیزم‌های موازی، به بررسی مدل‌های سینماتیکی و دینامیکی این گونه مکانیزم‌ها منتج شده است. ویژگی‌های منحصر به فرد مکانیزم‌های موازی در تحلیل‌های سینماتیکی و دینامیکی، نظیر تفاوت این گونه ساختارها با مکانیزم‌های سری، ارتباط دینامیکی و سینماتیکی بین پایه‌های مختلف و وجود مفاصل غیرفعال باعث پیچیدگی مطالعات بر روی این مکانیزم‌ها شده است. علاوه بر این نکات، تحلیل دینامیکی مکانیزم‌های موازی با قیدهای افزونه، که مکانیزم مورد بررسی در این مقاله نیز از این دسته می‌باشد، دارای پیچیدگی بیشتری هستند[۶-۸].

پیش از این، تحقیقاتی در زمینه مدل‌سازی دینامیکی مکانیزم‌های موازی انجام شده و روش‌های متنوعی در این زمینه ارایه شده است. ییم و همکاران [۹] با استفاده از روش لاگرانژ به مدل‌سازی دینامیکی یک مکانیزم گاف-استوارت[1] پرداخته است. این مکانیزم پرکاربرد در سایر تحقیقات نیز با استفاده از سایر روش‌های مدل‌سازی دینامیکی نظیر روش نیوتن-اویلر [۱۰]، اصل کار مجازی [۱۱] و روش کین [۱۲] نیز مورد بررسی قرار گرفته است. تانه و همکاران [۱۳] یک روش عمومی برای مدل‌سازی دینامیک معکوس مکانیزم‌های موازی با درجات آزادی افزونه یا کاسته شده ارایه داده‌اند. در زمینه همین نوع از مکانیزم‌ها، آلن [۱۴] با استفاده از روش نیوتن-اویلر به بررسی دو مکانیزم با سه و چهار درجه آزادی پرداخت و پس از به‌دست آوردن معادلات و به‌منظور برابر کردن تعداد مجهولات و معادلات، از تعدادی از مجهولات صرف‌نظر کرد. نتایج به‌دست آمده از این روش مدل‌سازی به خوبی با نتایج نرم‌افزارهای مدل‌سازی دینامیکی همخوانی دارد. کرون [۱۵] به‌منظور مدل‌سازی یک مکانیزم دو درجه آزادی از همین روش استفاده کرده و همخوانی مناسب بین دو روش را نشان داده است. بونماینس و همکاران [۱۶] به بررسی مدل دینامیکی یک ماشین ابزار بیشینه مقید با ساختار سینماتیکی موازی پرداخته‌اند و با دو فرض صلب بودن تمام اجزا و همچنین با در نظر گرفتن تاثیر و تغییر شکل مفاصل و اجزا پرداخته‌اند. انفرادی و توتونچی نیز با حذف نیروها و ممان‌های بیشینه به مدل‌سازی دینامیکی یک مکانیزم موازی فضایی با ساختار $3-RRP$ پرداخته‌اند. برخی مقالات نیز به بررسی مکانیزم‌ها با اجزا انعطاف‌پذیر پرداخته‌اند[۱۷-۱۸]. از جمله فرض‌های رایج در این نوع مدل‌سازی‌ها، که گاهی در مدل‌سازی مکانیزم‌ها با طول اجزا ثابت نیز استفاده می‌شوند، متمرکز کردن جرم لینک‌ها در دو نقطه ابتدایی و انتهایی می‌باشد[۱۹].

گاسلن [۲۰] مدل دینامیکی تریپترون[2] و کوادراپترون[3]، مکانیزم‌های مورد بحث در این مقاله، را با استفاده از روش نیوتن-اویلر به‌دست آورده است. بدین منظور ابتدا مدل سینماتیکی مکانیزم‌ها، که شامل سرعت و شتاب زاویه‌ای هر لینک می‌باشد، استخراج شده و سپس مکانیزم به زیرساختارهایی شامل لینک‌های مکانیزم و مجری‌نهایی تقسیم شده و معادلات دینامیکی هر یک از این زیرساختارها نوشته می‌شود. این روش به ایجاد ۴۲ معادله و ۴۵ مجهول در مورد تریپترون و همچنین ۵۴ معادله و ۶۰ مجهول در کوادراپترون منجر می‌شود و ادعا شده که با انتخاب مناسب روند حل مناسب برای این معادلات، مدل دینامیکی این مکانیزم‌ها به‌دست خواهد آمد. این موضوع نشان می‌دهد که به‌دلیل ساختار این دو مکانیزم، می‌توان بدون دخیل کردن برخی گشتاورها به حل معادلات دینامیکی این دو مکانیزم پرداخت و نیازی به ساده‌سازی و حذف برخی مجهولات وجود ندارد.

در این مقاله هدف یافتن مدل دینامیکی معکوس مکانیزم‌های افزونه مقید تریپترون و کوادراپترون، که از اعضای خانواده مولتیپترون[4] به‌شمار می‌روند، با استفاده از ترکیبی از روش نیوتن-اویلر و روش لاگرانژ می‌باشد. تفاوت مدل ارایه شده در این مقاله با روش ارایه شده در [۲۰] در نحوه جداسازی زیرساختارها از مکانیزم کلی می‌باشد که منجر به ظاهر شدن تعداد کمتری معادله و مجهول در روند حل مسئله می‌شود و از پیچیدگی مواجهه با تعداد زیادی نیروها و مجهولات خواهد کاست. شایان ذکر است که مولتیپترون نشات گرفته شده از سنتز نوعی جدید مکانیزم‌های موازی [۱] صورت گرفته و به‌دلیل جدید بودن مطالعات دینامیکی کمی بر روی آن‌ها انجام شده است.

در روش ارایه شده در این مقاله، پس از مدل‌سازی سینماتیکی، تریپترون از مفاصل مشخصی جدا شده و به چند زیرساختار، شامل سه پایه با ساختار $\underline{P}RR$ و یک مجری‌نهایی، تقسیم می‌شود. سپس با استفاده از روش لاگرانژ ۹ معادله دینامیکی در فضای وظیفه برای پایه‌ها نوشته می‌شود. در پایان با هدف مرتبط کردن این ۹ معادله، مدل دینامیکی مجری‌نهایی در راستای درجات آزادی، به‌عنوان قید مرتبط کننده مسئله، نوشته می‌شود و به ۳ معادله دینامیکی منجر می‌شود. با حل ۱۲ به‌دست آمده نیروهای عملگری به‌دست آمده است. این تقسیم بندی در مورد مکانیزم کوادراپترون منجر به تقسیم مکانیزم به چهار مکانیزم $\underline{P}RR$ و یک مجری‌نهایی می‌شود. سپس روند پیاده‌سازی شده روی تریپترون به‌طور مشابه روی زیر ساختارهای به‌دست آمده از کوادراپترون اجرا می‌شود. تنها تفاوت‌هایی که در مدل‌سازی دینامیکی کوادراپترون نسبت به تریپترون وجود دارد، به مدل‌سازی چهار پایه به جای سه پایه و همچنین تعداد معادلات به‌دست آمده از مدل‌سازی دینامیکی مجری‌نهایی، با توجه به چهار درجه آزادی مجری‌نهایی در کوادراپترون که منجر به ۱۵ معادله می‌شود، معطوف می‌شود.

در این مقاله ابتدا به معرفی ساختار و ویژگی های مکانیزم‌های تریپترون و کوادراپترون پرداخته می‌شود. سپس روند کلی حل مسایل دینامیکی مکانیزم‌های موازی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این روش مدل‌سازی در مورد مکانیزم‌های تریپترون و کوادراپترون پیاده‌سازی شده و مدل‌سازی دینامیکی، شامل مدل‌سازی سینماتیکی مکانیزم، مدل‌سازی دینامیکی پایه‌ها با استفاده از روش لاگرانژ مجری نهایی با روش نیوتن-اویلر به‌دست خواهد آمد. در انتها نتایج به‌دست آمده با یک نرم‌افزار مدل‌ساز دینامیکی مقایسه می‌شود.

1- Gough-Stewart
2- Tripteron
3- Quadrupteron
4- Multipteron

۲- ساختار مکانیزم ها

۲-۱-تریپترون

تریپترون، شکل ۱، از سه پایه با ساختار سینماتیکی مشابه تشکیل شده که به وسیله سه محرک کشویی در سه راستای عمود بر هم به حرکت می‌کنند. از سنتز نوعی [۱] و [۲۱]، خواص هندسی اجزای هر پایه بدین قرار است: جهت محرک هر پایه با راستای محور مفاصل لولایی یکسان می‌باشد که منجر به ساختار $3-\underline{P}RR$ می‌شود.

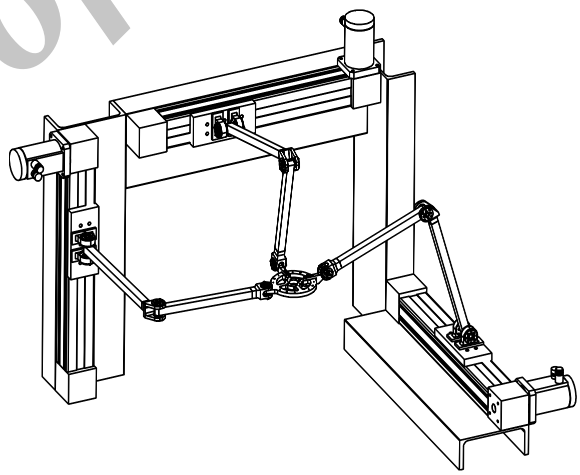
مطالعات [۲۲] برروی تریپترون نشان داده است که حرکات انتقالی سه درجه آزادی این مکانیزم کاملا مجزا از هم و مستقل می‌باشد. این خاصیت در بررسی‌های ریاضیاتی [۱] و [۲۱] که روی تریپترون انجام شده است نیز استخراج شده و در معادله (۱) نمایش داده شده است:

$$\rho_1 = x,\quad \rho_2 = y,\quad \rho_3 = z. \qquad (۱)$$

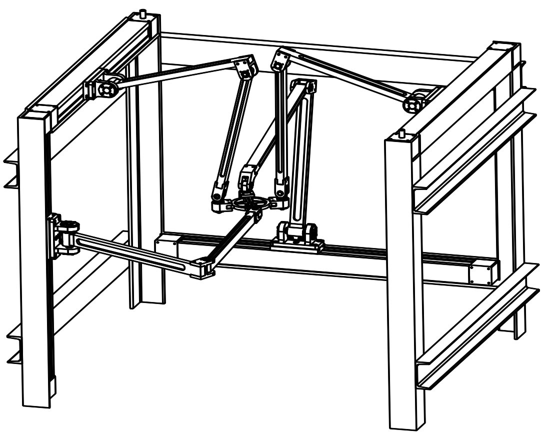
همان‌گونه که در شکل ۲ (مدل مکانیزم کوادراپترون)نمایش داده شده، در این مقاله تمامی پارامترهای یک پایه بر اساس جهت حرکت محرک آن پایه نام‌گذاری شده است.

۲-۲-کوادراپترون

کوادراپترون [۲۲]، شکل ۳، یک مکانیزم چهار درجه آزادی، با سه درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی دورانی [۲۳] می‌باشد. این مکانیزم از سه پایه با ساختار $\underline{P}RRU$ و یک پایه با ساختار $\underline{P}RRR$ که زمین را به مجری نهایی متصل می‌کنند، تشکیل شده است. هرچند که گونه‌های مختلفی از



شکل ۱ مدل مکانیزم تریپترون.



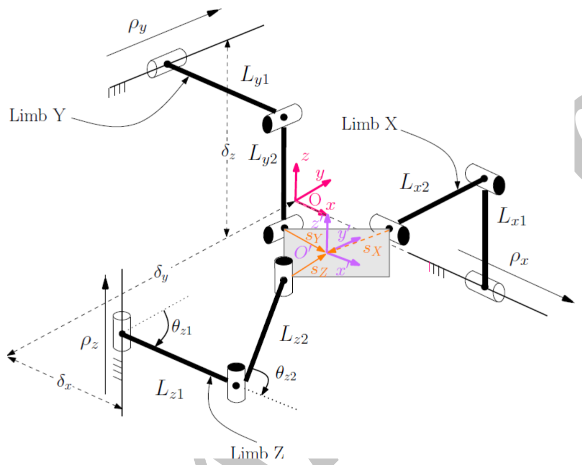
شکل ۲ مدل مکانیزم کوادراپترون.

کوادراپترون طراحی شده‌اند، با این حال جذاب‌ترین نوع این طراحی ها با چهار پایه عمود بر هم دارای ساختاری شبیه به تریپترون می‌باشد. در این نوع طراحی کوادراپترون دو محور از چهار محور دارای راستای موازی هم بوده و در فاصله‌ای از هم قرار گرفته‌اند(شکل ۳).

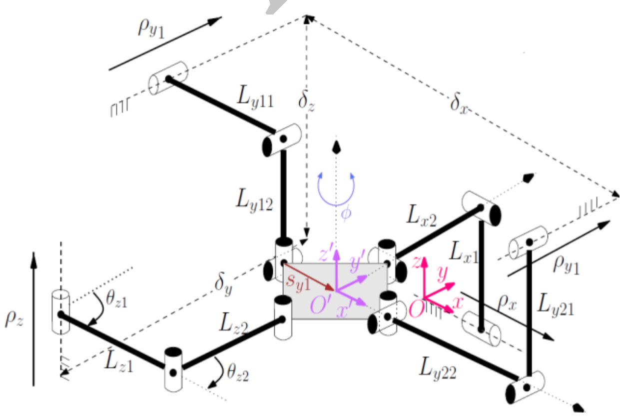
با توجه به نتایج به‌دست آمده در [۲۲] معادلات سینماتیک معکوس کوادراپترون در معادله (۲) نمایش داده شده است:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= x + s_{x1}\cos\phi - s_{y1}\sin\phi - r_{x1}\\
\rho_2 &= y + s_{x1}\sin\phi - s_{y2}\cos\phi - r_{y1}\\
\rho_3 &= y + s_{x3}\sin\phi - s_{y3}\cos\phi - r_{y4}\\
\rho_4 &= z + s_{z3} - r_{z3}
\end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن‌ها $s_i = \begin{bmatrix} s_{xi} & s_{yi} & s_{zi} \end{bmatrix}^T$ بردار متصل کننده مبدأ دستگاه مختصات متصل به مجری نهایی و مفاصل چرخشی متصل کننده پایه‌ها و مجری نهایی می‌باشند. همچنین $r_i = \begin{bmatrix} r_{xi} & r_{yi} & r_{zi} \end{bmatrix}^T$ معرف بردار واصل مبدأ دستگاه مختصات ثابت به نقطه صفر حرکتی مفاصل کشویی $(\rho_i = 0)$ می‌باشد. پارامترهای به‌کار رفته در مدل‌سازی کوادراپترون و بردارهای s_{y1} و r_{y1} به‌عنوان نمونه در شکل ۴ نمایش داده شده است.



شکل ۳ مدل شماتیک، نوع مفاصل و چگونگی نام‌گذاری ابعاد لینک‌ها و زوایای مکانیزم تریپترون.



شکل ۴ مدل شماتیک، نوع مفاصل و چگونگی نام‌گذاری ابعاد لینک‌ها و زوایای مکانیزم کوادراپترون

۳- روند کلی

در این بخش یک روش کلی جهت مدل‌سازی دینامیکی مکانیزم‌های موازی ارایه می‌شود. در این روش، مکانیزم به زیرساختارهای تشکیل دهنده تقسیم می‌شود به‌طوری‌که هر زیر مجموعه یک نیروی محرک را به یک دسته نیروها و گشتاور های وارد شده بر روی مجری نهایی مرتبط سازد.

معادلات سینماتیکی هر یک از این زیر ساختارها با هدف به‌دست آوردن موقعیت و سرعت زاویه ای هر لینک نوشته خواهد شد. سپس مدل دینامیکی هر یک از پایه ها با کمک یکی از روش‌های معمول دینامیکی نظیر لاگرانژ، نیوتن-اویلر و یا اصل کار مجازی استخراج می‌شود. انتخاب روش مناسب از میان روش‌های مدل‌سازی دینامیکی به شرایط مسئله و ساختار مکانیزم بستگی دارد. روش‌های مدل‌سازی دینامیکی یاد شده، اکثرا در فضای مفصلی و با هدف یافتن گشتاورهای اعمالی به مفاصل نوشته می‌شود. به‌همین علت به‌منظور یافتن نیروهای اعمالی به مجری نهایی، این مدل‌ها با استفاده از ماتریس ژاکوبین به فضای وظیفه انتقال داده می‌شوند. سپس با استفاده از مقادیر سینماتیکی به‌دست آمده در این معادلات دینامیکی، نیروهای اعمال شده توسط هر پایه به مجری نهایی محاسبه می‌شود. این نیروهای اعمالی به مجری نهایی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

نیروهای محرک انتقال یافته: نیروهای اعمال شده به مجری نهایی توسط محرک

نیروهای قیدی: نیروهای اعمال شده به مجری نهایی به‌علت ایجاد سرعت و شتاب زاویه‌ای در لینک‌های زیرساختار

در انتها مدل دینامیکی مجری نهایی، به‌عنوان قید مرتبط کننده مسئله، با در نظر گرفتن نیروهای اعمالی توسط پایه‌ها نوشته شده و نیروی محرک‌ها و شتاب مجری نهایی را مرتبط خواهد نمود. به‌طور خلاصه روند حل یک مسئله دینامیکی معکوس در یک مکانیزم موازی در روش ارایه شده به پنج مرحله تقسیم می‌شود:

۱- جداسازی مکانیزم به زیر ساختارهای تشکیل دهنده با هدف ایجاد ارتباط بین نیروهای محرک و شتاب مجری نهایی
۲- استخراج معادلات قیدهای سینماتیکی هر زیرساختار به‌منظور ایجاد ارتباط بین خواص سینماتیکی و دینامیکی
۳- به‌دست آوردن مدل دینامیکی هر زیر ساختار با هدف یافتن نیروهای قیدی و نیروهای محرک انتقال یافته
۴- یافتن مدل دینامیکی مجری نهایی با توجه به نیروهای قیدی و نیروهای محرک انتقال یافته اعمالی بر مجری نهایی
۵- حل سیستم معادلات استخراج شده

٤- مدل دینامیکی تریپترون

۴-۱-تعریف زیرساختارها

جداسازی زیر ساختارها از مکانیزم اصلی به‌گونه‌ای صورت گرفته که نیروهای محرک به شتاب مجری نهایی مربوط شوند. در مورد تریپترون، با توجه به خاصیت مجزا بودن تأثیر نیروهای محرک در مجری نهایی، جداسازی مجری نهایی از سه پایه P̲RRR تشکیل دهنده به ایجاد ارتباط مورد نظر منجر خواهد شد. در نتیجه مکانیزم به سه پایه و یک مجری نهایی تقسیم خواهد شد.

۴-۲-مدل سینماتیکی پایه‌ها

در اولین گام و با هدف یافتن موقعیت‌های زاویه‌ای و سرعت‌ها زاویه‌ای، مدل سینماتیکی زیرساختارها نوشته می‌شود. همان‌گونه که پیش از این و در شکل ۲ نمایش داده شده است، ۱۲ متغیر، شامل θ_{x1} ، θ_{x2}، θ_{y1}، θ_{y2}، θ_{z1}، θ_{z2}، ρ_x، ρ_y، ρ_z، x، y و z در مدل‌سازی سینماتیکی ظاهر می‌شود. علاوه بر این، بر اساس معادله (۱) و به‌دلیل اینکه موقعیت مجری نهایی با تغییر طول لینک‌های کشویی یکسان است، در نتیجه تعداد مجهولات به ۹ عدد کاهش می‌یابد.

به‌منظور به‌دست آوردن مدل سینماتیکی این زیرساختارها، دو معادله قیدی برای هر پایه و با تصویر کردن موقعیت پایه مورد نظر در راستای دو پایه دیگر به‌دست می‌آید. برای مثال، با تصویر کردن پایه Y در راستای دو پایه دیگر، معادلات قیدی (۳) که تابعی از θ_{yx} و θ_{yz} هستند، به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x = L_{y1}\sin\theta_{y1} + L_{y2}\sin(\theta_{y1}+\theta_{y2}) + s_y \\ z = \delta_z - L_{y1}\cos\theta_{y1} - L_{y1}\cos(\theta_{y1}+\theta_{y2}) \end{cases} \quad (۳)$$

با انجام روند فوق برای پایه‌های Xو Z معادلات قیدی این دو پایه، (۴) و (۵)، به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} z = L_{x1}\sin\theta_{x1} + L_{x2}\sin(\theta_{x1}+\theta_{x2}) \\ y = L_{x1}\cos\theta_{x1} + L_{x2}\cos(\theta_{x1}+\theta_{x2}) + s_x \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} x = L_{z1}\sin\theta_{z1} + L_{z2}\sin(\theta_{z1}+\theta_{z2}) \\ y = \delta_y - L_{z1}\cos\theta_{z1} - L_{z2}\cos(\theta_{z1}+\theta_{z2}) + s_z \end{cases} \quad (۵)$$

که در این معادلات s_x، s_y و s_z همان‌گونه که در شکل ۳ یک نمونه از آن نمایش داده شده، به‌ترتیب فاصله مفصل سوم پایه x، y و z از مبدا مختصات متحرک می‌باشد.

با مشتق گرفتن از معادلات (۳) تا (۵) بر اساس زمان، معادلات سینماتیکی درجه اول (۶) تا (۸) استخراج می‌شود:

$$\begin{cases} G_1(t,\theta_{x1},\theta_{x2},\dot{\theta}x1,\dot{\theta}x2) = 0 \\ G_1(t,\theta_{x1},\theta_{x2},\dot{\theta}x1,\dot{\theta}x2) = 0 \end{cases} \quad (۶)$$

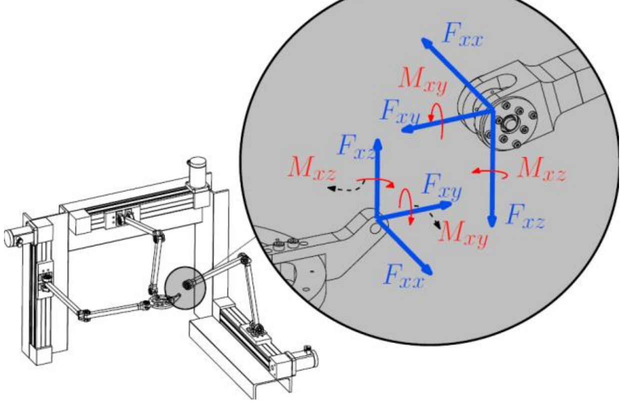
$$\begin{cases} H_1(t,\theta_{y1},\theta_{y2},\dot{\theta}y1,\dot{\theta}y2) = 0 \\ H_1(t,\theta_{y1},\theta_{y2},\dot{\theta}y1,\dot{\theta}y2) = 0 \end{cases} \quad (۷)$$

$$\begin{cases} L_1(t,\theta_{z1},\theta_{z2},\dot{\theta}z1,\dot{\theta}z2) = 0 \\ L_1(t,\theta_{z1},\theta_{z2},\dot{\theta}z1,\dot{\theta}z2) = 0 \end{cases} \quad (۸)$$

به‌منظور یافتن موقعیت‌های زاویه‌ای هر لینک معادلات (۳) تا (۵) حل شده و با جایگذاری روابط به‌دست آمده برای زوایا در معادلات (۶) تا (۸) سرعت زاویه‌ای هر لینک به‌دست می‌آید.

۴-۳-مدل دینامیکی پایه‌ها

در تریپترون، همان‌گونه که در شکل ۵ نمایش داده شده است، هر زیرساختار P̲RR سه نیرو و دو گشتاور به مجری نهایی وارد می‌کند.



شکل ۵ نحوه جداسازی پایه‌ها از عملگر نهایی و نیروهای وارده.

در اولین گام، *نیروهای محرک انتقال یافته* به‌دست خواهند آمد. بدین منظور، رابطه بین نیروهای محرک و شتاب مجری نهایی با استفاده از روش نیوتن-اویلر در راستای حرکت انتقالی هر زیرساختار نوشته می‌شود. این امر منجر به معادلات دینامیکی (۹) تا (۱۱)، در راستای پایه‌های X، Y و Z می‌شود.

$$f_{xx} - f_{xa} - (m_{x1} + m_{x2} + m_{px})\ddot{x} = 0 \tag{۹}$$

$$f_{yy} - f_{ya} - (m_{y1} + m_{y2} + m_{py})\ddot{y} = 0 \tag{۱۰}$$

$$f_{zz} - f_{za} - (m_{z1} + m_{z2} + m_{pz})\ddot{z} = 0 \tag{۱۱}$$

در روابط (۹) تا (۱۱)، m_{x1} و m_{x2} به‌ترتیب جرم لینک‌های اول و دوم و m_{pz} جرم مفصل کشویی هر پایه می‌باشد. علاوه بر این f_{xx}، f_{yy} و f_{zz} نمایانگر *نیروهای محرک انتقال یافته* اعمال شده به مجری نهایی به‌وسیله محرک‌های کشویی هستند.

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در معادلات (۳) تا (۸) مدل دینامیکی هر قسمت RR از زیرساختار P̲RR در صفحه حرکتی مربوط به آن نوشته می‌شود. به‌عنوان مثال، مدل دینامیکی پایه X در صفحه PR نوشته می‌شود. در مرحله بعدی و به‌منظور محاسبه *نیروهای قیدی* که در صفحه حرکتی هر پایه وجود دارند و در شکل ۵ با نام‌های f_{xy} و f_{xx} نمایش داده شده‌اند، نیاز به مدل‌سازی دینامیکی یک مکانیزم RR می‌باشد.

از نتایج حاصل شده در [۴] که از بسط روش مدل‌سازی دینامیکی لاگرانژ به‌دست آمده است، مدل دینامیکی یک ساختار RR، رابطه (۱۲)، به‌دست می‌آید:

$$\tau_n = I(\theta) + V(\theta, \dot{\theta}) + \frac{\partial G}{\partial \theta} \tag{۱۲}$$

در معادله (۱۲)، V از رابطه (۱۳) به‌دست می‌آید.

$$V = \dot{I}(\theta, \dot{\theta}) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\dot{I\theta})}{\partial \theta}\right]^{T} \dot{\theta} \tag{۱۳}$$

I که با عنوان ماتریس اینرسی شناخته می‌شود، یک ماتریس 2×2 می‌باشد که نشان دهنده ضرایب معادله انرژی جنبشی با توجه به بردار سرعت است. علاوه بر این، G انرژی پتانسیل مکانیزم و τ_n یک بردار 2×1 می‌باشد که نشان دهنده گشتاورهای وارده به هر مفصل است. در [۲۱] با ایجاد تغییراتی و با استفاده از ماتریس ژاکوبین به فضای وظیفه (کارتزین) برده می‌شود (رابطه (۱۴)).

$$f = I_c(\theta) + V_c(\theta, \dot{\theta}) + G_c(\theta) \tag{۱۴}$$

کمیت‌های رابطه (۱۴) در روابط (۱۵) تا (۱۷) معرفی شده‌اند.

$$I_c = J^{-1}(\theta)\, I(\theta)\, J^{-1}(\theta) \tag{۱۵}$$

$$V_c = J^{-T}(\theta)\left(V(\theta,\dot{\theta}) - I(\theta)J^{-1}(\theta)\dot{J}(\theta)\dot{\theta}\right) \tag{۱۶}$$

$$G_c = J^{-T}(\theta)\frac{\partial G}{\partial \theta} \tag{۱۷}$$

θ ماتریس زوایا و J ماتریس ژاکوبین در دستگاه متحرک متصل به مجری نهایی می‌باشد.

معادله (۱۴) برای هر سه ساختار P̲RR نوشته شده و نیروهای اعمالی توسط ساختار RR هر پایه به مجری نهایی به‌دست آمده است. همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، این نیروها با عنوان *نیروهای قیدی* نام‌گذاری شده‌اند.

به‌منظور به‌دست آوردن نیروهای قیدی، ماتریس‌های I، G و J محاسبه می‌شوند. به‌دلیل محدودیت در فضا، مقادیر فوق تنها برای پایه X نوشته شده است. در ابتدا ماتریس اینرسی، رابطه (۱۸)، محاسبه خواهد شد:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$$

$$I_{11} = m_{x2}L_{x1}^2 + \frac{1}{4}m_{x1}L_{x1}^2 + \frac{1}{4}m_{x2}L_{x1}L_{x2}\cos\theta_{x2} + I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_{12} = I_{21} = \frac{1}{2}m_{x2}\left(\frac{1}{2}L_{x2}^2 + L_{x1}L_{x2}\cos\theta_{x2}\right) + I_{x2}$$

$$I_{22} = \frac{1}{4}m_{x2}L_{x2}^2 + I_{x2} \tag{۱۸}$$

ماتریس انرژی پتانسیل نیز با مشتق‌گیری از عبارت انرژی پتانسیل محاسبه می‌شود (روابط (۱۹) و (۲۰)).

$$G = m_{x2}g\left(L_{x1}\sin\theta_{x2} + \frac{1}{2}L_{x2}\sin(\theta_{x1} + \theta_{x2})\right) + \frac{1}{2}L_x g m_{x1}\sin\theta_{x2} \tag{۱۹}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial G}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

ماتریس ژاکوبین در دستگاه مختصات متحرک متصل به عملگر نهایی مطابق رابطه (۲۱) تعریف می‌شود:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = -L_{x1} - L_{x2}\sin(\theta_{x1} + \theta_{x2})$$

$$J_{12} = -L_{x2}\sin(\theta_{x1} + \theta_{x2})$$

$$J_{21} = L_{x2}\cos(\theta_{x1} + \theta_{x2}) + L_{x1}\cos\theta_{x1}$$

$$J_{22} = L_{x2}\cos(\theta_{x1} + \theta_{x2}) \tag{۲۱}$$

با توجه به معادله (۱۳) مقدار V نیز قابل محاسبه می‌باشد. سپس با به‌کار بردن معادلات (۱۷-۱۵) مقادیر V_c، I_c و G_c به‌دست می‌آیند. با استفاده از مقادیر اخیر در معادله (۱۴) نیروهای قیدی محاسبه می‌شوند. به‌عنوان مثال، نیروهای قیدی پایه X که در راستای محورهای Y و Z به مجری نهایی

وارد و به‌ترتیب با نام‌های f_{xy} و f_{xx} نام‌گذاری شده‌اند، از رابطه (۲۲) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} f_{xy} \\ f_{xz} \end{bmatrix} = \mathrm{I_{cx}}(\theta)\ddot{\mathrm{r}}_{\mathrm{x}} + \mathrm{V_{cx}}(\theta,\dot{\theta}) + \mathrm{G_{cx}}(\theta) \quad (۲۲)$$

که در این معادله اندیس x نشان دهنده محاسبه ماتریس‌ها برای زیرساختار x می‌باشد.

با محاسبه ماتریس‌های فوق برای دو پایه دیگر، مقادیر *نیروهای قیدی* اعمال شده توسط پایه های Y و Z نیز به روش مشابه از روابط (۲۳) و (۲۴) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} f_{yx} \\ f_{zx} \end{bmatrix} = I_{cy}(\theta)\ddot{r}_y + V_{cy}(\theta,\dot{\theta}) + G_{cy}(\theta) \quad (۲۳)$$

$$\begin{bmatrix} f_{zx} \\ f_{zy} \end{bmatrix} = I_{cz}(\theta)\ddot{r}_z + V_{cz}(\theta,\dot{\theta}) + G_{cz}(\theta) \quad (۲۴)$$

که در این معادلات اندیس های y و z به‌ترتیب نشان دهنده محاسبه مقادیر ماتریس‌های I_z، V_z و G_z با توجه به موقعیت و اندازه‌های پایه‌های Y و Z می‌باشند. با توجه به معادلات (۹) تا (۱۱) و معادلات (۲۲) تا (۲۴)، تاکنون ۹ معادله دینامیکی برای زیرساختارهای این مکانیزم به‌دست آمده است.

این معادلات شامل ۱۲ مجهول f_{xx} ، f_{xy} ، f_{xz} ، f_{yy} ، f_{yx} ، f_{yz} ، f_{zz} ، f_{zx} ، f_{zy} ، f_{xa} ، f_{ya} و f_{za} می‌باشند. به‌منظور ایجاد ارتباط بین این معادلات و حل آن‌ها نیاز به سه معادله دیگر وجود دارد که با نوشتن سه معادله دینامیکی برای مجری نهایی در راستای سه حرکت انتقالی آن این امر میسر خواهد شد.

۴-۴-مدل دینامیکی مجری نهایی

همان‌گونه که پیش از این بیان شد، مجری نهایی در تریپترون دارای سه درجه آزادی انتقالی می‌باشد و معادلات دینامیکی می‌توانند در این سه راستا نوشته شوند. این معادلات دینامیکی با استفاده از روش نیوتن-اویلر، رابطه (۲۵)، نوشته می‌شود:

$$\sum \mathrm{F} = \mathrm{M}\ddot{\mathrm{r}} \quad (۲۵)$$

که در این معادلات F بردار نیروهای وارده بر مجری نهایی، $\ddot{\mathrm{r}}$ شتاب انتقالی مجری نهایی حول مرکز جرم و M ماتریس جرم مجری نهایی می‌باشد. سه معادله دینامیکی حاصل از حرکت انتقالی مجری نهایی با استفاده از معادله (۲۶) به‌دست خواهند آمد:

$$\mathrm{f_a} + \mathrm{f_w} + \mathrm{f_x} = \mathrm{M}\ddot{\mathrm{r}} \quad (۲۶)$$

در معادله (۲۶)، $\mathrm{f_a}$، $\mathrm{f_w}$ و $\mathrm{f_x}$ به‌ترتیب نشان دهنده نیروهای عملگری، نیروی گرانش و *نیروهای قیدی* وارد شده از طرف سایر زیرساختارها می‌باشند، و از روابط (۲۷) تا (۲۹) محاسبه می‌شوند:

$$\mathrm{f_a} = \begin{bmatrix} f_{xa} \\ f_{ya} \\ f_{za} \end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

$$\mathrm{f}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_{z1} + m_{z2} + m_{pz})g \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

$$\mathrm{f_c} = \begin{bmatrix} f_{xy} + f_{xz} \\ f_{yx} + f_{yz} \\ f_{zx} + f_{zy} \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

۴-۵-نتایج و بحث

در این بخش صحت نتایج به‌دست آمده از حل معادلات مدل دینامیکی حاصله در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است و این نتایج با نتایجی که از یک نرم‌افزار شبیه ساز دینامیکی، ادمز[1]، به‌دست آمده مقایسه می‌شوند.

با حل ۱۲ معادله به‌دست آمده از مدل‌سازی دینامیکی پایه‌ها و مجری نهایی، که شامل معادلات (۹) تا (۱۱)، (۲۲) تا (۲۴) و (۲۶) می‌باشد، مقادیر مجهولات ظاهر شده در این معادلات از جمله سه نیروی محرک وارده بر سه پایه که به‌صورت f_{xa}، f_{ya} و f_{za} معرفی شده‌اند، محاسبه خواهد شد.

نتایج به‌دست آمده از حل معادلات اشاره شده با نتایج ادمز که یک شبیه ساز دینامیکی می‌باشد، مقایسه شده است. نرم افزار ادمز در حل مسایل دینامیک معکوس ناتوان است و امکان استخراج نیروهای محرک از طریق تعریف یک مسیر برای مجری نهایی امکان پذیر نمی‌باشد.

به‌منظور غلبه بر این مشکل و با حل سینماتیک معکوس مکانیزم، مسیرهای حرکتی برای مفصل‌های محرک مکانیزم تعریف می شود. حرکت مجری‌نهایی به حرکت مفاصل کشویی منجر می‌شود و در نتیجه حرکت مفصل کشویی به اولین لینک پایه نیرویی وارد می‌کند که با اندازه گیری آن می‌توان به نیروی محرک دست یافت. به بیان دیگر به‌منظور غلبه بر ناتوانی نرم‌افزار به اندازه‌گیری نیروهای عمل و عکس العمل اقدام می‌شود.

در این قسمت و به‌منظور مقایسه بین نتایج حل معادلات به‌دست آمده و نرم افزار ادمز یک مسیر برای مجری نهایی تعریف شده است. معادلات (۳۰) به‌عنوان مسیر مجری نهایی مورد بررسی قرار گرفته است:

$$\begin{cases} x = 0.14 + 0.1\sin t \\ y = 0.29 + 0.15\sin^2 t \\ z = 0.15 + 0.3\cos t \sin t \end{cases} \quad (۳۰)$$

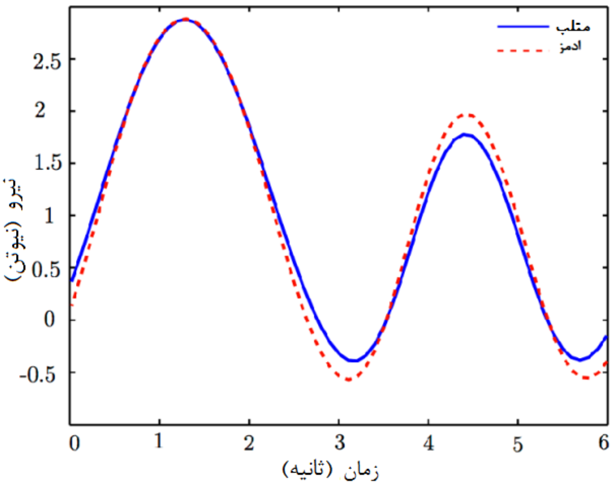
همان‌گونه که در شکل‌های ۶ تا ۸ نمایش داده شده است، هم‌خوانی مناسبی بین نتایج حاصله از نرم‌افزار شبیه‌ساز دینامیکی و روش تحلیل وجود دارد.

۵- مدل دینامیکی کوادراپترون

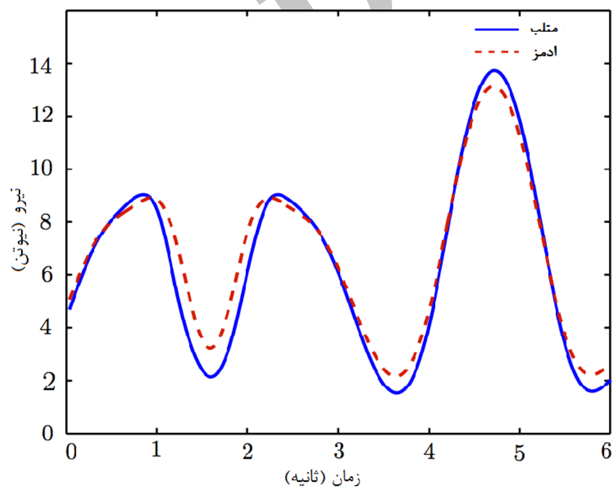
۵-۱-تعریف زیرساختارها

در کوادراپترون نیز همانند تریپترون تقسیم مکانیزم اصلی به زیرساختارها به گونه‌ای صورت گرفته که نیروهای محرک به شتاب مجری‌نهایی مرتبط شوند. در کوادراپترون، جداسازی به چهار زیرساختار P̲RR و مجری‌نهایی منتج خواهد شد.

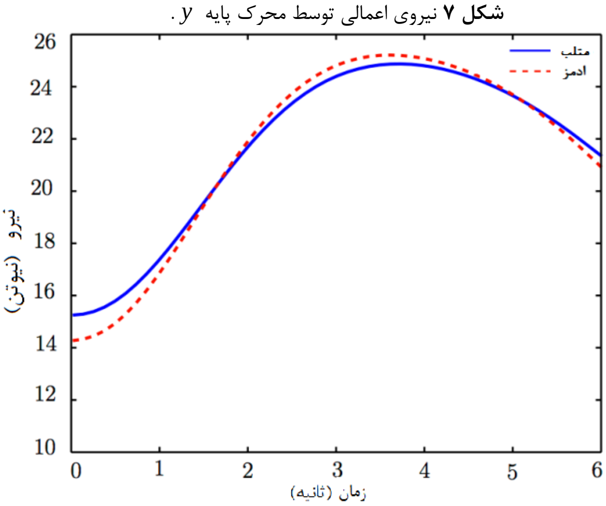
1- ADAMS



شکل ۶ نیروی اعمالی توسط محرک پایه x.



شکل ۷ نیروی اعمالی توسط محرک پایه y.



شکل ۸ نیروی اعمالی توسط محرک پایه z.

۲-۵-مدل سینماتیکی پایه‌ها

به‌منظور مدل‌سازی دینامیکی کوادراپترون نیز اولین گام مدل‌سازی سینماتیکی زیرساختارها می‌باشد. همان‌گونه که این روند برای تریپترون بیان شد، دو معادله قیدی برای هر پایه و با تصویر کردن موقعیت پایه مورد نظر در صفحه حرکتی آن به‌دست می‌آید. برای مثال، با تصویر کردن پایه‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند در راستای محورهای y و z، دو معادله قیدی آن که تابعی از θ_{x1} و θ_{x2} هستند، از رابطه (۳۱) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} z = L_{x1}\sin\theta_{x1} + L_{x2}\sin(\theta_{x1}+\theta_{x2}) \\ y = L_{x1}\cos\theta_{x1} + L_{x2}\cos(\theta_{x1}+\theta_{x2}) + s_x\cos\varphi \end{cases} \quad (۳۱)$$

با انجام روند فوق برای دو پایه‌ای که در راستای محور y و همچنین پایه‌ای که در راستای محور z قرار دارند، سه دسته معادله قیدی دیگر، روابط (۳۲) تا (۳۴)، حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} x = L_{1_{y1}}\sin\theta_{y11} + L_{y21}\sin(\theta_{y11}+\theta_{y21}) + s_{y1}\cos\varphi \\ z = \delta_z - L_{y11}\cos\theta_{y11} - L_{y21}\cos(\theta_{y11}+\theta_{y21}) \end{cases} \quad (۳۲)$$

$$\begin{cases} x = -L_{y21}\sin\theta_{y12} - L_{y2}\sin(\theta_{y12}+\theta_{y22}) + s_{y2}\cos\varphi \\ z = \delta_z - L_{y12}\cos\theta_{y12} - L_{y22}\cos(\theta_{y12}+\theta_{y22}) \end{cases} \quad (۳۳)$$

$$\begin{cases} x = L_{z1}\sin\theta_{z1} + L_{z2}\sin(\theta_{z1}+\theta_{z2}) + s_z\sin\phi \\ y = \delta_y - L_{z1}\cos\theta_{z1} - L_{z2}\cos(\theta_{z1}+\theta_{z2}) + s_z\cos\phi \end{cases} \quad (۳۴)$$

که در این معادلات s_x، s_{y1}، s_{y2} و s_z همان‌گونه که در شکل ۴ یک نمونه از آن نمایش داده شده، به‌ترتیب فاصله مفصل سوم پایه x، y اول، y دوم و z از مبدا مختصات متحرک می‌باشد.

با حل معادلات فوق موقعیت زاویه‌ای هر لینک به‌دست خواهد آمد. سپس با مشتق گرفتن از معادلات (۳۱) تا (۳۴) نسبت به زمان، معادلات سینماتیکی درجه اول به‌صورت روابط (۳۵) تا (۳۸) استخراج می‌شود:

$$\begin{cases} G_1(t,\theta_{x1},\theta_{x2},\dot\theta x1,\dot\theta x2) = 0 \\ G_1(t,\theta_{x1},\theta_{x2},\dot\theta x1,\dot\theta x2) = 0 \end{cases} \quad (۳۵)$$

$$\begin{cases} K_1(t,\theta_{y1},\theta_{y2},\dot\theta y1,\dot\theta y2) = 0 \\ K_1(t,\theta_{y1},\theta_{y2},\dot\theta y1,\dot\theta y2) = 0 \end{cases} \quad (۳۶)$$

$$\begin{cases} H_1(t,\theta_{y1},\theta_{y2},\dot\theta y1,\dot\theta y2) = 0 \\ H_1(t,\theta_{y1},\theta_{y2},\dot\theta y1,\dot\theta y2) = 0 \end{cases} \quad (۳۷)$$

$$\begin{cases} L_1(t,\theta_{z1},\theta_{z2},\dot\theta z1,\dot\theta z2) = 0 \\ L_1(t,\theta_{z1},\theta_{z2},\dot\theta z1,\dot\theta z2) = 0 \end{cases} \quad (۳۸)$$

با جایگذاری روابط به‌دست آمده برای زوایا در معادلات (۳۵) تا (۳۸) سرعت زاویه‌ای هر لینک به‌دست می‌آید.

۳-۵-مدل دینامیکی پایه‌ها

در کوادراپترون، همان‌گونه که در شکل ۹ نمایش داده شده است، زیرساختارهایی که در راستای محورهای x و y حرکت می‌کنند سه نیرو و یک گشتاور به مجری نهایی وارد می‌کنند. این درحالیست که پایه Z به‌علت اتصال با مفصل چرخشی سه نیرو و دو گشتاور به مجری نهایی وارد می‌آورد.

به‌منظور یافتن *نیرو های انتقال یافته* رابطه بین نیروهای محرک و شتاب مجری نهایی نوشته می‌شود. این امر منجر به معادلات دینامیکی در راستای پایه های X، Y و Z، به‌صورت روابط (۳۹) تا (۴۲) می‌شوند:

$$f_{xx} - f_{xa} - (m_{x1} + m_{x2} + m_{px})\ddot{x} = 0 \quad (۳۹)$$

$$f_{yy1}-f_{ya}-(m_{1y1}+m_{2y1}+m_{py1})\ddot{y}=0 \qquad (۴۰)$$

$$f_{yy2}-f_{ya}-(m_{1y2}+m_{2y2}+m_{py2})\ddot{y}=0 \qquad (۴۱)$$

$$f_{zz}-f_{za}-(m_{z1}+m_{z2}+m_{pz})\ddot{z}=0 \qquad (۴۲)$$

که در این روابط m_{1i} و m_{2i} به‌ترتیب جرم لینک‌های اول و دوم و m_{pi} جرم مفصل کشویی هر پایه می‌باشد. علاوه بر این f_{xa}، f_{ya} و f_{za} نمایانگر نیروهای محرک اعمال شده به وسیله محرک‌های کشویی هستند.

سپس همانند روش اجرا شده در مدل‌سازی دینامیکی تریپترون مدل دینامیکی قسمت RR هر زیرساختار PRR، از رابطه (۴۳) به‌دست می‌آید:

$$\tau_n=I(\ddot{\theta})+V(\theta,\dot{\theta})+\frac{\partial G}{\partial\theta} \qquad (۴۳)$$

در معادله (۴۳)، V از رابطه (۴۴) به‌دست می‌آید.

$$V=\dot{I}(\theta,\dot{\theta})-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(I\dot{\theta})}{\partial\theta}\right]^{T}\dot{\theta} \qquad (۴۴)$$

پس از محاسبه ماتریس‌های اینرسی، کریولیس و گرانش در معادله (۴۳)، ممان‌ها و نیروهای وارده از طرف مجری نهایی بر هر زیرساختار، که در شکل ۹ نمایش داده شده‌اند، با استفاده از ماتریس ژاکوبین به فضای مفصلی منتقل می‌شود (رابطه (۴۵)):

$$\tau=J^{T}w \qquad (۴۵)$$

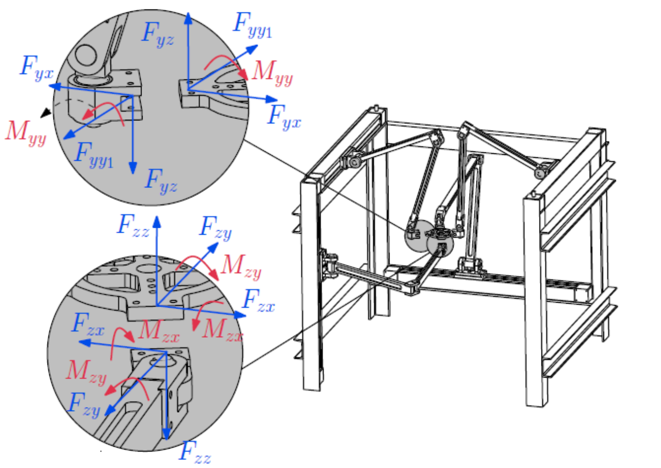
در این معادله J ماتریس ژاکوبین بوده و w ماتریس نیروها وارده بر زیرساختار می‌باشد که از رابطه (۴۶) به‌دست می‌آید:

$$w=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix} \qquad (۴۶)$$

τ ماتریس گشتاورهای وارده به هر مفصل است، که در این مکانیزم RR یک ماتریس 2×1 خواهد بود، و با رابطه (۴۷) نمایش داده خواهد شد:

$$\tau=\begin{bmatrix}\tau_1\\\tau_2\end{bmatrix} \qquad (۴۷)$$

در اینجا اشاره به این نکته بسیار ضروری است، که در صفحه حرکتی هر زیرساختار RR، هیچ گشتاوری به زیرساختارها اعمال نمی‌شود و بنابراین



شکل ۹ نحوه جداسازی پایه‌ها از عملگر نهایی و نیروهای وارده در مکانیزم کوادراپترون

ممان‌ها تاثیری در حرکت زیرساختارها ندارند. به‌عنوان مثال در زیرساختاری که در جهت z حرکت می‌کند، گشتاورهای وارده بر مجری نهایی در راستای محور های x و y بوده و بنابراین در معادلات (۴۳) و (۴۵) تاثیری نخواهند گذاشت.

بدلیل اینکه مفاصل چرخشی در هیچ یک از زیرساختارها محرک نمی‌باشند و گشتاوری اعمال نمی‌کنند، می‌توان بیان نمود که در مدل دینامیکی بیان شده در معادله (۴۵)، رابطه (۴۸) برقرار است.

$$\tau=\tau_n \qquad (۴۸)$$

به بیان دیگر τ به‌دست آمده از معادله (۴۵) به‌عنوان گشتاور وارده بر هر مفصل در معادله (۴۳) لحاظ شده و تبدیل به معادله (۴۹) می‌شود:

$$J_i^{T}w_i=I_i(\ddot{\theta})+V_i(\theta,\dot{\theta})+\frac{\partial G_i}{\partial\theta} \qquad (۴۹)$$

با انجام این روند برای هر چهار زیرساختار، در مجموع ۸ معادله برای *نیروهای قیدی* به‌دست خواهد آمد (رابطه (۵۰) تا (۵۳)):

$$w_x=J_x^{-T}\left(I_x(\ddot{\theta})+V_x(\theta,\dot{\theta})+\frac{\partial G_x}{\partial\theta}\right) \qquad (۵۰)$$

$$w_{y1}=J_{y1}^{-T}\left(I_{y1}(\ddot{\theta})+V_{y1}(\theta,\dot{\theta})+\frac{\partial G_{y1}}{\partial\theta}\right) \qquad (۵۱)$$

$$w_{y2}=J_{y2}^{-T}\left(I_{y2}(\ddot{\theta})+V_{y2}(\theta,\dot{\theta})+\frac{\partial G_{y2}}{\partial\theta}\right) \qquad (۵۲)$$

$$w_z=J_z^{-T}\left(I_z(\ddot{\theta})+V_z(\theta,\dot{\theta})+\frac{\partial G_z}{\partial\theta}\right) \qquad (۵۳)$$

که در معادلات (۵۰) تا (۵۳) از رابطه (۵۴) استفاده می‌شود.

$$w_x=\begin{bmatrix}f_{xy}\\f_{xz}\end{bmatrix},\qquad w_{y1}=\begin{bmatrix}f_{yx_1}\\f_{yz_1}\end{bmatrix},\qquad w_{y2}=\begin{bmatrix}f_{yx_2}\\f_{yz_2}\end{bmatrix},\qquad w_z=\begin{bmatrix}f_{zy}\\f_{zx}\end{bmatrix}. \qquad (۵۴)$$

نمونه‌ای از محاسبات به‌منظور محاسبه ماتریس‌های اینرسی، کریولیس و گرانش برای مدل‌سازی دینامیکی تریپترون مورد بررسی قرار گرفته است که با توجه به شباهت این دو مکانیزم، در مورد کوادراپترون نیز یکسان می‌باشد و به‌همین علت از تکرار آن در این بخش خودداری می‌شود. پس از به‌دست آوردن معادلات (۳۹) تا (۴۲) و با توجه به معادلات (۵۰) تا (۵۴) تعداد معادلات به‌دست آمده برای مدل‌سازی چهار پایهٔ کوادراپترون به ۱۲ معادله افزایش می‌یابد. این معادلات شامل ۱۶ مجهول f_{xx}، f_{xy}، f_{xz}، f_{yy1}، f_{yx1}، f_{yz1}، f_{yy2}، f_{yx2}، f_{yz2}، f_{zz}، f_{zx}، f_{zy}، f_{xa}، f_{ya1}، f_{ya2} و f_{za} می‌باشند. به‌منظور یافتن این ۱۶ مجهول و ایجاد ارتباط بین ۱۲ معادله اشاره شده، نیاز به چهار معادله دیگر وجود دارد که با استخراج معادلات دینامیکی مجری نهایی نسبت به چهار درجه آزادی آن این معادلات به‌دست می‌آید.

۵-۴-مدل دینامیکی مجری نهایی

با توجه به چهار درجه آزادی که مجری نهایی در کوادراپترون دارا می‌باشد، معادلات دینامیکی این زیرساختار نیز در این چهار راستا نیز نوشته می‌شود. این معادلات شامل سه حرکت انتقالی در راستای سه محور مختصات دستگاه ثابت و حرکت دورانی مجری نهایی در راستای محور z این دستگاه می‌باشد. بدلیل سادگی استفاده از روش نیوتن-اویلر برای به‌دست آوردن مدل

دینامیکی مجری نهایی، این روش در مدل‌سازی دینامیکی انتخاب گشته و برای یافتن چهار معادله اشاره شده به‌کار گرفته خواهد شد (روابط (۵۵) و (۵۶)):

$$\sum \mathrm{F} = \mathrm{M}\ddot{\mathrm{r}} \qquad (۵۵)$$

$$\sum \mathrm{H} = \mathrm{I}_e \ddot{\alpha} \qquad (۵۶)$$

که در این معادلات F بردار نیروهای وارده بر مجری نهایی، $\ddot{\mathrm{r}}$ شتاب انتقالی مجری نهایی حول مرکز جرم و M ماتریس جرم مجری نهایی می‌باشد همچنین H بردار ممان‌های وارده بر مجری نهایی، α شتاب دورانی مجری نهایی حول مرکز جرم و $\mathrm{I_e}$ ماتریس ممان اینرسی مجری نهایی می‌باشد.

سه معادله دینامیکی حاصل از حرکت انتقالی مجری نهایی با استفاده از معادله (۵۵) به‌دست خواهند آمد:

$$\mathrm{f_a} + \mathrm{f_w} + \mathrm{f_x} = \mathrm{M}\ddot{\mathrm{r}} \qquad (۵۷)$$

که در آن $\mathrm{f_a}$، $\mathrm{f_w}$ و $\mathrm{f_x}$ به‌ترتیب نشان دهنده نیروهای عملگری، نیروی گرانش و *نیروهای قیدی* وارد شده از طرف سایر زیرساختارها می‌باشند که با روابط (۵۸) تا (۶۰) محاسبه می‌شوند:

$$\mathrm{f_a} = \begin{bmatrix} f_{xa} \\ f_{ya} \\ f_{za} \end{bmatrix} \qquad (۵۸)$$

$$\mathrm{f_w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_{z1} + m_{z2} + m_{pz})g \end{bmatrix} \qquad (۵۹)$$

$$\mathrm{f_c} = \begin{bmatrix} f_{xy} + f_{xz} \\ f_{yx} + f_{yz} \\ f_{zx} + f_{zy} \end{bmatrix} \qquad (۶۰)$$

همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، $\ddot{\mathrm{r}}$ بردار شتاب انتقالی مجری نهایی در راستای سه محور مختصات دستگاه ثابت، متشکل از سه پارامتر $\ddot{x}$، $\ddot{y}$ و $\ddot{z}$ بوده و M نیز ماتریس جرم این زیرساختار خواهند بود که به شکل رابطه (۶۱) نمایش داده می‌شوند:

$$\ddot{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{bmatrix}. \qquad (۶۱)$$

معادله چهارم که مربوط به حرکت دورانی مجری نهایی می‌باشد نیز با استفاده از معادله (۵۶) محاسبه می‌شود. این مقادیر برای مجری نهایی، از رابطه (۶۲) محاسبه می‌شود.

$$r_x \times f_x + r_{y1} \times f_{y1} + r_{y2} \times f_{y2} + r_z \times f_z = I_e \alpha_e \qquad (۶۲)$$

در معادله (۶۲) r_x، r_{y1}، r_{y2} و r_z به‌ترتیب، بردار فاصلهٔ مرکز جرم مجری نهایی تا مفصل متصل کنندهٔ مجری نهایی به هر یک از زیرساختارهای x، y_1، y_2 و z در دستگاه ثابت می‌باشند و همچنین f_x، f_{y1}، f_{y2} و f_z نیز بردارهای نیروهای وارده از طرف زیرساختارهای x، y_1، y_2 و z به مجری نهایی ثابت خواهند بود.

همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، هیچ یک از گشتاورهای وارده بر مجری نهایی از طرف زیرساختارها در راستای محور z نبوده و تاثیری در حرکت دورانی مجری نهایی ندارند و به همین علت در معادله (۶۱) ظاهر نشده‌اند.

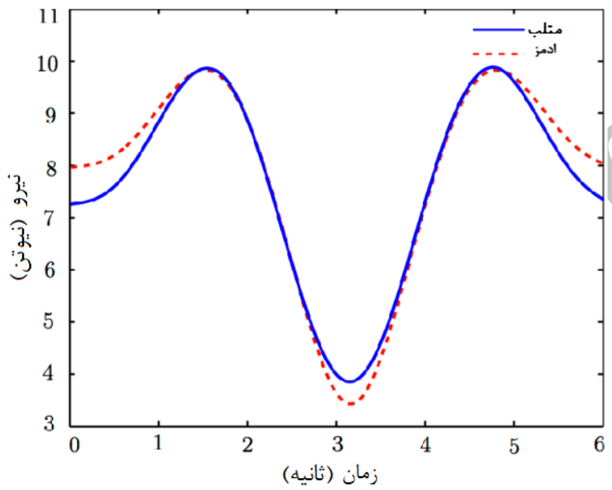
با مدل‌سازی دینامیکی مجری نهایی و به‌دست آمدن معادلات (۵۷) تا (۶۲) تعداد مجهولات و معادلات برابر شده و امکان حل این معادلات به وجود خواهد آمد.

۵-۵-نتایج و بحث

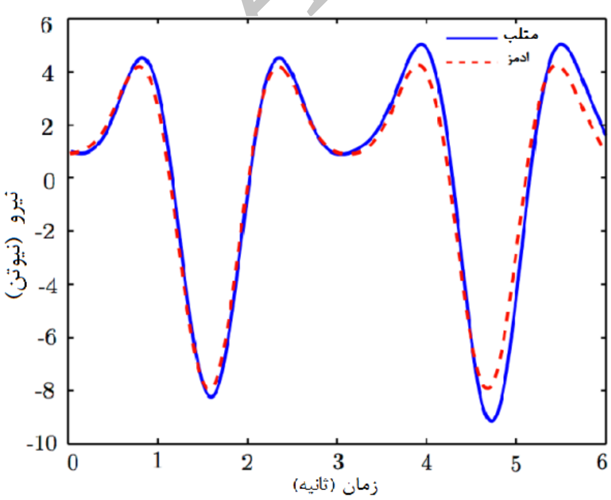
در این قسمت نیز به مقایسه نتایج حاصله از مدل‌سازی کوادراپترون و نرم‌افزار مدل‌سازی دینامیکی، ادمز پرداخته می‌شود. یک مسیر برای مجری نهایی فرض شده و با توجه به معادله (۶۳) سینماتیک معکوس مکانیزم حل شده و مقادیر جابه‌جایی هر مفصل کشویی محاسبه می‌شود. این مقادیر به‌عنوان ورودی در نرم‌افزار تعریف شده سپس نیروهای عملگری محاسبه می‌شود. بدین منظور یک مسیر فرض شده است:

$$\begin{cases} x = 0.25 + 0.1\sin^8 t \\ y = 0.12 + 0.15\cos^2 t \sin^2 t \\ z = 0.15 + 0.3\cos^4 t \sin^4 t \\ \varphi = 0.1\sin t \end{cases} \qquad (۶۳)$$

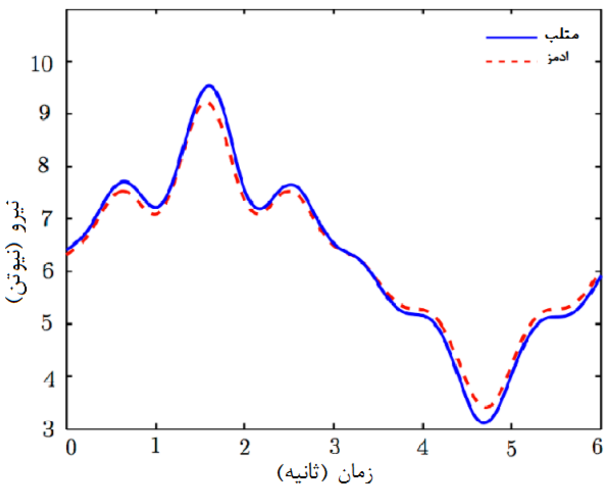
نتایج حاصل در شکل‌های ۱۰ تا ۱۳ نمایش داده شده است.



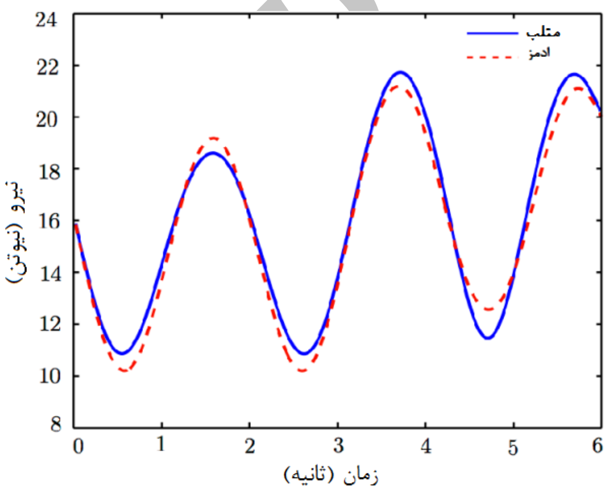
شکل ۱۰ نیروی اعمالی توسط محرک پایه x.



شکل ۱۱ نیروی اعمالی توسط محرک پایه y_1.



شکل ۱۲ نیروی اعمالی توسط محرک پایه y_2 y_2.



شکل ۱۳ نیروی اعمالی توسط محرک پایه z.

٦- نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارایه یک الگوریتم برای حل دینامیک معکوس دو مکانیزم موازی با سه و چهار درجه آزادی پرداخته شد. مکانیزم ها به زیرساختارهایی، متشکل از پایه‌ها و مجری نهایی، تقسیم شده‌اند. این نوع جداسازی شتاب مجری نهایی را به‌صورت مستقیم به نیروی محرک مربوط ساخته و تعداد معادلات مورد نیاز برای دست یابی به مدل دینامیکی را نیز کاهش می‌دهد. چهارچوبی به‌منظور مدل‌سازی دینامیکی زیرساختارها و روشی جهت مرتبط کردن این زیرساختار ارایه شده است. همچنین انواع مختلف نیروها نظیر *نیروی محرک انتقال یافته* و *نیروی قیدی* دسته بندی و معرفی شده‌اند. در پایان، معادلات دینامیک معکوس برای هر یک از مکانیزم‌ها به‌دست آمده، برای یک مسیر مشخص مجری نهایی به حل سه معادله مستقل منتج شده و نتایج حاصله با یک نرم‌افزار شبیه‌ساز دینامیکی مقایسه شده است که نشان‌دهنده مطابقت نتایج می‌باشد. در نهایت در روش ارایه شده در این مقاله ۱۲ و ۱۵ معادله به‌ترتیب برای مدل دینامیکی مکانیزم‌های تریپترون و کوادراپترون استخراج می‌شود که از تعداد معادلات به‌دست آمده از روش نیوتن-اویلر که ۴۲ و ۵۴ عدد می‌باشد کمتر بوده و در نتیجه دارای حل بسیار ساده‌تری می‌باشد.

۷- تشکر و قدردانی

نویسندگان بر خود لازم می‌دانند که از *صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور* (INSF) به‌دلیل حمایت از این پروژه به شماره ۹۱۰۰۱۲۷۳ تشکر و قدردانی نمایند.

۸- مراجع

[1] X. Kong, C. M. Gosselin, *Type synthesis of parallel mechanisms.* Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.
[2] J. P. Merlet, *Parallel robots.* Springer, 2006.
[3] B. Siciliano, Kh. Oussama, eds. *Springer handbook of robotics.* Springer, 2008.
[4] J. Angeles, *Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods, and algorithms*, Springer, 2007.
[5] S. Y. Nof, *Handbook of industrial robotics.* John Wiley & Sons, 1999.
[6] Y. Jiang, T. Li, L. Wang, Research on the Dynamic Model of an Over-constrained Parallel Mechanism. *Journal of Mechanical Engineering*,Vol. 17, No. 1 ,pp 213-217, 2013.
[7] Y. Zhao, Dimensional synthesis of a three translational degrees of freedom parallel robot while considering kinematic anisotropic property. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 29, No. 2, pp 169-179, 2013.
[8] J. X. Yang, Z. T. Liu, J.W. Sun, Dynamic Modeling of Overconstrained Parallel Robot. *Applied Mechanics and Materials,* Vol. 17, No. 1, pp. 34-37, 2013.
[9] E. Yime, R. Saltaren, C. Garcia, J. M. Sabater, Robot based on task-space dynamical model. *IET control theory & applications*, Vol. 12, No. 2, pp 2111-2119, 2011.
[10] M. Mahboubkhah, M. J. Nategh, S. E. Khadem, Inverse dynamic analysis of a hexapod tool machine and comparitive disscussion of actuation forces, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 9, No. 3, pp. 29-38, 2009. (In Persian).
[11] C. Yang, J. Han, S. Zheng, O.O. Peter, Dynamic modeling and computational efficiency analysis for a spatial 6-DOF parallel motion system. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 17, No. 3, pp 1007-1022, 2012.
[12] M. J. Liu, C. X. Li and N. C. Li, Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, Vol. 16, No. 1, pp. 94-98, 2000.
[13] D. Thanh, J. K. Trung, B. Heimann and T. Ortmaier, On the inverse dynamics problem of general parallel robots. In, *IEEE International Conference on Mechatronics*, Vol. 24, No. 3, pp 1-6, 2009.
[14] J. F. Allan , *Analyse dynamique de mécanismes parallèles à 3 et 4 degrés de liberté*, M.Sc. Thesis , Québec ,Université Laval, 2000.
[15] F. Caron, *Analyse et conception d'un manipulateur parallèle sphérique à deux degrés de liberté pour l'orientation d'une caméra,* M.Sc. Thesis, Québec ,Université Laval, 1997.
[16] T. Bonnemains, H. Chanal, B. C. Bouzgarrou, P. Ray, Dynamic model of an overconstrained PKM with compliances: The Tripteor X7. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 29, No. 11, pp 180-191, 2013.
[17] S. Briot, W. Khalil, Recursive and symbolic calculation of the elastodynamic model of flexible parallel robots. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 25, No. 1, pp 45-58, 2013.
[18] Y. Yu, Z. Du, J. Yang, Y. Li, An experimental study on the dynamics of a 3-RRR flexible parallel robot. *Robotics, IEEE Transactions on*, Vol. 25, No. 5, pp 992-997, 2011.
[19] B. Gherman, D. Pisla, C. Vaida, N. Plitea, Development of inverse dynamic model for a surgical hybrid parallel robot with equivalent lumped masses. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 11, No. 3, pp 402-415, 2012.
[20] C. Gosselin, Compact dynamic models for the Tripteron and Quadrupteron parallel manipulators. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, No. 1, pp 1-12, 2009.
[21] X. Kong and C. M. Gosselin, Kinematics and singularity analysis of a novel type of 3-CRR 3-DOF translational parallel manipulator. *The International Journal of Robotics Research,* Vol. 3, No. 3, pp 791-798, 2002.
[22] C. M. Gosselin, X. Kong, S. Foucault and I. A. Bonev, A fully-decoupled 3-DOF translational parallel mechanism. *In Parallel Kinematic Machines in Research and Practice, 4th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, pp. 595-610, 2004.
[23] P. L. Richard, C. M. Gosselin and X. Kong, Kinematic analysis and prototyping of a partially decoupled 4-DOF 3T1R parallel manipulator. *Journal of Mechanical Design* Vol. 129, No. 1, pp. 611, 2007.