



## محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی ترک سه بعدی مواد تابعی با استفاده از روش انتگرال تعاملی

رحمت اله قاجار<sup>1\*</sup>، صفا پیمان<sup>2</sup>، علی شقاقی مقدم<sup>3</sup>

- 1- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
 2- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
 3- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد واحد تاکستان، تاکستان  
 \*تهران، صندوق پستی 19395-1999، ghajar@kntu.ac.ir

### چکیده

ضرایب شدت تنش دینامیکی از پارامترهای مهم برای بررسی، شناخت و پیش‌بینی رفتار دینامیکی شکست در اجسام دارای ترک می‌باشند. در این مقاله، روش انتگرال تعاملی برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد تابعی با ترک سه بعدی به کار گرفته می‌شود. با تعریف مناسبی از میدان‌های کمکی جایجایی، کرنش و تنش، انتگرال تعامل بدون هرگونه وابستگی به مشتق‌گیری از تغییرات خواص مواد مزبور، به دست می‌آید. حل عددی با در نظر گرفتن تغییرات پیوسته ضریب ارتجاعی ماده و با استفاده از روش اجزای محدود انجام می‌گیرد. اعتبارسنجی روش مورد استفاده با حل مسئله‌های همگن و تابعی با ترک مرکزی، بیضوی و لبه‌ای تحت اثر بارهای استاتیکی و دینامیکی انجام می‌شود. در ادامه با در نظر گرفتن تغییرات خواص مواد به صورت نمایی در دو جهت داخل و عمود بر صفحه ترک، اثرات گرادپان ضریب الاستیسیته بر ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی مواد تابعی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود، که تغییر خواص ماده همواره موجب کاهش قابل توجه ضریب شدت تنش دینامیکی جسم تابعی نسبت به ماده همگن می‌گردد. درحالی‌که مشخص می‌شود، با توجه به راستای تغییر خواص ماده، ضریب شدت تنش استاتیکی جسم تابعی نسبت به ماده همگن ممکن است افزایش یا کاهش یابد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 09 تیر 1393  
 پذیرش: 28 مرداد 1393  
 ارائه در سایت: 19 مهر 1393  
 کلید واژگان:  
 ضرایب شدت تنش دینامیکی  
 روش انتگرال تعامل  
 مواد تابعی  
 روش اجزای محدود

## Computation of dynamic stress intensity factors for three-dimensional cracks in functionally graded materials using interaction integral method

Rahmatollah Ghajar<sup>1\*</sup>, Safa Peyman<sup>2</sup>, Ali Shaghaghimoghadam<sup>3</sup>

- 1- Department of Mechanical Engineering, KNTU, Tehran, Iran  
 2- Department of Aero Space Engineering, KNTU, Tehran, Iran  
 3- Department of Mechanical Engineering, IAU, Takestan Branch, Takestan, Iran  
 \*P.O.B. 19359-1999 Tehran, Iran, ghajar@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 30 June 2014  
 Accepted 19 August 2014  
 Available Online 11 October 2014

**Keywords:**  
 Dynamic stress intensity factors (DSIFs)  
 Interaction integral method  
 Functionally graded materials (FGMs)  
 Finite element method

### ABSTRACT

To investigate understanding and prediction of dynamic fracture behavior of a cracked body, dynamic stress intensity factors (DSIFs) are important parameters. In the present work interaction integral method is presented to compute static and dynamic stress intensity factors for three-dimensional cracks contained in the functionally graded materials (FGMs), and is implemented in conjunction with the finite element method (FEM). By a suitable definition of the auxiliary fields, the interaction integral method, which is not related to derivatives of material properties, can be obtained. For the sake of comparison, center, edge and elliptical cracks in homogeneous and functionally graded materials under static and dynamic loading are considered. Then, material gradation is introduced in an exponential form in the two directions in and normal to the crack plane. Next, the influence of the graded modulus of elasticity on static and dynamic stress intensity factors is investigated. It has been shown that, material gradation has considerable reduction influence on DSIFs of functionally graded material in comparison with homogenous material, while static stress intensity factors can decrease or increase, depending on the direction of gradation material property.

### 1- مقدمه

گسیختگی غالب در این مواد شکست ناشی از وجود ترک است [1]. بر این اساس، تحقیقات گسترده‌ای برای محاسبه و پیش‌بینی رفتار سازه‌های با مواد تابعی حاوی ترک انجام شده است. بیشتر تحقیقات صورت گرفته شکست دو

در سال‌های اخیر استفاده از مواد تابعی در صنایع مختلف نظامی و غیرنظامی افزایش یافته است. نتایج تحقیقات تجربی و عددی نشان می‌دهند که

بعدی این مواد را بررسی نموده‌اند. در حوزه شکست سه بعدی مواد تابعی، والتر و همکاران [2] حالت ترکیبی شکست ورق تابعی با ترک صفحه‌ای نیم بیضی را، با روش انتگرال تعاملی بررسی نمودند. آی‌هان [3] با به‌کارگیری روش اجزای محدود غنی شده ضرایب شدت تنش مواد تابعی با ترک صفحه-ای نیم بیضی زاویه‌دار را محاسبه کرد. شقاقی و همکاران [4] و قاجار و همکاران [5]، ضرایب شدت تنش حالت ترکیبی شکست مواد تابعی با ترک سه بعدی غیر صفحه‌ای و انحنا دار را به دست آوردند. تمامی این پژوهش‌ها رفتار مواد تابعی ترک‌دار را، تحت اثر بارگذاری استاتیکی بررسی کرده‌اند. از سوی دیگر، شکست دینامیکی سه بعدی مواد همگن توسط محققین مورد بررسی قرار گرفته است. چن [6]، با استفاده از روش تفاضل محدود، ضریب شدت تنش دینامیکی ورق مستطیلی با ترک مرکزی را، به دست آورد. آوکی و همکارانش [7] با توسعه یک جزء تکین نزدیک نوک ترک، با استفاده از روش اجزای محدود، رابطه بین ضریب شدت تنش دینامیکی و جابجایی در نوک ترک را ارائه کردند. نیشی‌اوکا و همکاران [8]، ضرایب شدت تنش دینامیکی میله همگن مستطیلی با ترک بیضی شکل مرکزی را با روش اجزای محدود به دست آوردند.

## 2- میدان‌های کمکی مواد ناهمگن تابعی

برای محاسبه انتگرال تعاملی، میدان‌های واقعی و کمکی جابجایی، کرنش و تنش استفاده می‌شوند. میدان‌های کمکی بر پایه رابطه‌های شناخته شده‌ای مانند توابع بسط یافته ویلیامز [14] بنا می‌شوند. درحالی‌که میدان‌های واقعی با استفاده از حل عددی یا تحلیلی مسئله مورد نظر به دست می‌آیند.

دلالی و اردوگان [19] نشان دادند که برای مواد ناهمگن با پیوستگی ضرایب الاستیک و مشتقات آن‌ها، ویژگی تکین بودن تنش در نوک ترک همانند مواد همگن است. ایسچن [20] میدان‌های استاتیکی نوک ترک مواد ناهمگن را با استفاده از روش ویلیامز [14] مورد بررسی قرار داد. او نتیجه گرفت، اگر خواص مواد تابعی از قبیل مدول الاستیسته و ضریب پواسون، توابعی پیوسته، محدود و مشتق پذیر در تمام فضای مورد نظر باشند، جمله اول تکنیکی تنش و جمله نظیر جابجایی در اطراف نوک ترک، در این مواد، مشابه مواد همگن است. پارامسواران و شکولا [21]، نشان دادند که میدان‌های تنش مواد ناهمگن تحت بارگذاری دینامیکی مشابه میدان‌های مواد همگن تحت اثر بارگذاری شبه استاتیکی می‌باشند. به این ترتیب، در رابطه سازی انتگرال تعاملی از میدان‌های جابجایی و تنش ویلیامز [14]، به عنوان میدان‌های کمکی استفاده می‌شود. وقتی دامنه محدودی برای محاسبه انتگرال تعاملی مواد با خواص ناهمگن در نظر گرفته می‌شود، این میدان‌های کمکی جز در نزدیکی نوک ترک مناسب نمی‌باشند. بنابراین در فرمول‌بندی جمله‌های دیگری استفاده می‌شوند، تا تغییرات ناهمگنی مواد جبران شود [15].

## 2-1- رابطه‌سازی ناسازگاری

در فرمول‌بندی ناسازگاری، میدان‌های کمکی تغییرمکان  $u_i^{aux}$  و تنش  $\sigma_{ij}^{aux}$  به طور مستقیم از رابطه ویلیامز [14] و بر مبنای خواص ماده نوک ترک محاسبه می‌شوند. سپس میدان‌های کمکی کرنش  $\varepsilon_{ij}^{aux}$  بر مبنای معادلات رفتاری مواد ناهمگن و از رابطه بین کرنش و تنش به دست می‌آیند. طبق رابطه (1) داریم:

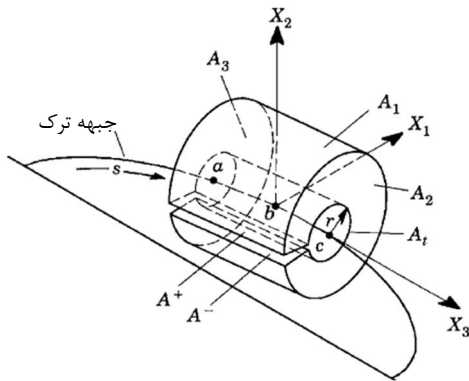
$$\varepsilon_{ij}^{aux} = S_{ijkl}(x)\sigma_{kl}^{aux} \quad (1)$$

$S_{ijkl}(x)$  تانسور نرمی مواد ناهمگن است، که وابسته به مختصات نقاط است. در این حالت، رابطه تعادل برقرار است، اما رابطه بین میدان‌های کمکی کرنش و جابجایی ارضاء نمی‌شود. طبق رابطه (2) داریم:

ون و همکاران [9]، از روش اجزای مرزی برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی ترک صفحه‌ای بیضی شکل استفاده نمودند. کریسل و بلیسچکو [10]، پایداری و رشد ترک جسم سه بعدی را بررسی نمودند. آن‌ها با روش جزء آزاد گالرکین و انتگرال‌گیری زمانی صریح، مدل‌سازی رشد دینامیکی ترک را انجام دادند. اندرلین و همکاران [11]، بر پایه شبیه‌سازی اجزای محدود، از روش‌های انتگرال / دینامیکی، بسته شدن مجازی ترک و جابجایی برای محاسبه ضریب شدت تنش دینامیکی استفاده نمودند. گو و نایرن [12] با استفاده از روش نقاط مادی، ضرایب شدت تنش دینامیکی استوانه‌ای تو خالی با ترک نیم بیضی را به دست آوردند.

روسو و تیپر [13]، ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد تابعی دو بعدی را با روش‌های عددی و تجربی به دست آوردند. آن‌ها از میدان‌های کمکی ویلیامز [14]، که معادل میدان‌های ایستا می‌باشند، استفاده نمودند. سانگ و پائولینو [15]، توانستند با استفاده از روش انتگرال تعاملی و اجزای محدود، ضرایب شدت تنش دینامیکی صفحات تابعی دو بعدی را به دست آورند. کیم و پائولینو [16]، با استفاده از فرایند اصلاح مش شبیه‌سازی عددی رشد ترک مواد تابعی دو بعدی را انجام دادند. رشد ترک در بارگذاری حالت ترکیبی رخ می‌دهد، و در هر گام ضرایب شدت تنش حالت ترکیبی با استفاده از رابطه انتگرال تعاملی به دست می‌آید. شریعتی و مهدی‌زاده [17] شکست دینامیکی دو بعدی مواد تابعی را با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته بررسی نمودند. ژیانگ و همکاران [18] نیز ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد تابعی دو بعدی را با استفاده از روش انتگرال تعاملی به دست آوردند. آن‌ها از روش اجزای محدود توسعه یافته برای حل عددی مسئله‌های مورد بررسی استفاده نمودند.

بررسی تحقیقات انجام شده، نشان می‌دهد که شکست دینامیکی سه بعدی مواد تابعی، به طور کامل مورد تجزیه و تحلیل قرار نگرفته است و تحقیقات بیشتری را می‌طلبد. در این مقاله، ابتدا بر مبنای پژوهش‌های موجود، رابطه سازی انتگرال تعاملی برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی ترک سه بعدی مواد تابعی، انجام می‌شود. سپس با تعریف مناسبی از میدان‌های کمکی جابجایی، کرنش و تنش، انتگرال تعاملی بدون هرگونه وابستگی به مشتق‌گیری از تغییرات خواص مواد تابعی به دست می‌آید. در ادامه با حل چند مسئله، اعتبارسنجی روش مورد استفاده انجام می‌گیرد.



شکل 1 میدان حجمی محاسبه انتگرال تعاملی برای تعیین ضرایب شدت تنش مربوط به نقطه  $b$  روی جبهه ترک [2].

برای به دست آوردن  $K_I^{aux}$  مقدار  $K_I$  برابر یک و سایر ضرایب شدت تنش کمکی صفر در نظر گرفته می‌شوند. به این ترتیب، با محاسبه مقدار انتگرال تعاملی ضریب شدت تنش شکست نوع اول به دست می‌آید. با طی فرایندی مشابه، سایر ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شوند.

#### 4- انتگرال تعاملی مستقل از مشتق خواص مواد تابعی

در رابطه (3) عبارت  $C_{ijkl,1}(x)\varepsilon_{kl}^{aux}\varepsilon_{ij}$  وجود دارد، که تعیین آن نیازمند مشتق گیری از خواص مواد تابعی است. با توجه به گرادیانی بودن خواص مواد تابعی، این مشتق گیری، محاسبه انتگرال تعاملی و فرایند کدنویسی مربوط به آن را پیچیده می‌کند. بر این اساس، این جمله به گونه‌ای نوشته می‌شود، که مشتق خواص مواد در آن وجود نداشته باشد. با توجه به تقارن ماتریس سختی، تساوی (9) برقرار است.

$$C_{ijkl,1}(x)\varepsilon_{kl}^{aux}\varepsilon_{ij} = C_{ijkl,1}(x)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}^{aux} \quad (9)$$

از سوی دیگر، رابطه (10) را می‌توان نوشت.

$$(C_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij})_{,1} = C_{ijkl,1}(x)\varepsilon_{ij} + C_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij,1} \quad (10)$$

به این ترتیب، عبارت مورد نظر به صورت رابطه (11) بازنویسی می‌شود.

$$C_{ijkl,1}(x)\varepsilon_{kl}^{aux}\varepsilon_{ij} = (C_{ijkl,1}(x)\varepsilon_{ij} + C_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij,1})\varepsilon_{kl}^{aux} \quad (11)$$

با توجه به تقارن بودن ماتریس سختی، این رابطه را می‌توان به صورت رابطه (12) نوشت.

$$C_{ijkl,1}(x)\varepsilon_{kl}^{aux}\varepsilon_{ij} = \sigma_{kl,1}\varepsilon_{kl}^{aux} - \sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij,1} \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه (12) در رابطه (3) مقدار انتگرال تعاملی بدون نیاز به مشتق گیری از خواص ماده به دست می‌آید. (رابطه (13))

$$M = \int_V \{(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} + \sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}) - \sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}\delta_{1j}\}q_j dV + \int_V \{\sigma_{ij}(u_{i,1j}^{aux} - \varepsilon_{ij,1}^{aux}) + \rho\ddot{u}_{i,1}^{aux} - \sigma_{kl,1}\varepsilon_{kl}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij,1}\}q dV \quad (13)$$

#### 5- تحلیل اجزای محدود بر مبنای خواص گرادیانی

برای در نظر گرفتن تغییرات خواص مواد می‌توان از اجزای همگن یا از اجزای تابعی استفاده نمود.

اجزای تابعی تغییر خواص مواد را در نظر می‌گیرند، ولی اجزای همگن از یک فرایند پله‌ای تقریبی مانند آنچه که در شکل 2 نشان داده شده است،

$$\varepsilon_{ij}^{aux} \neq \frac{1}{2}(u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux}) \quad (2)$$

زیرا میدان‌های کمکی جابجایی بر مبنای خواص ثابت نوک ترک به دست می‌آیند، درحالی‌که میدان‌های کمکی کرنش با استفاده از تانسور نرمی تابعی هر نقطه محاسبه می‌شوند. این شرایط سبب می‌شود که رابطه‌های سازگاری برقرار نشوند.

#### 3- رابطه سازی انتگرال تعاملی

انتگرال تعاملی یکی از روش‌هایی است که به طور گسترده برای محاسبه ضرایب شدت تنش مواد همگن و ناهمگن مورد استفاده قرار می‌گیرد. مبنای روش انتگرال تعاملی بر پایه روش انتگرال  $J$  است [2]. سانگ و پائولینو [15] انتگرال تعاملی برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد تابعی دو بعدی حاوی ترک را به دست آوردند. بر مبنای رابطه آن‌ها و رابطه ارائه شده توسط والتر و همکاران [2] برای محاسبه انتگرال تعاملی ترک سه بعدی مواد تابعی تحت بار استاتیکی، رابطه انتگرال تعاملی دینامیکی ترک سه بعدی مواد مزبور به دست می‌آید. بر این اساس، مقدار انتگرال تعاملی  $M$  نقطه  $b$  بر روی جبهه ترک نشان داده شده در شکل 1، با استفاده از کانتور حجمی قرار گرفته بین سطوح  $A_1, A_2, A_3, A_t$  و سطوح ترک  $A^+$  و  $A^-$  با رابطه (3) به دست می‌آید.

$$M = \int_V \{(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} + \sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}) - \sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}\delta_{1j}\}q_j dV + \int_V \{\sigma_{ij}(u_{i,1j}^{aux} - \varepsilon_{ij,1}^{aux}) + \rho\ddot{u}_{i,1}^{aux} - C_{ijkl,1}(x)\varepsilon_{kl}^{aux}\varepsilon_{ij}\}q dV \quad (3)$$

در این رابطه  $C_{ijkl}(x)$  تانسور سختی مواد تابعی و  $q$  تابع وزن است، که مقدار آن روی سطوح کانتور به صورت رابطه (4) به دست می‌آید [5].

$$q_k = \begin{cases} l_k, & \text{در } A_t \\ 0, & \text{در } A_1, A_2, A_3 \end{cases} \quad (4)$$

مقدار  $q$  در نقاط میانی حجم مورد بررسی، مانند نقاط گوس با استفاده از رابطه (5) به دست آید [5].

$$q_k = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=j} N^\alpha q_k^\alpha \quad (5)$$

$\alpha$  نشان‌دهنده گره‌های هر جزء و  $N^\alpha$  تابع شکل مربوط به گره است. شی و همکاران [22] نشان دادند، که نرخ رهایش انرژی را می‌توان با استفاده از رابطه (6) به دست آورد. که در این رابطه  $q(s)$  تابعی پیوسته روی جبهه ترک، در فاصله  $a$  تا  $c$  است [22]. قاجار و همکاران [5] نشان دادند، که برای اجزای بیست گرهی سه بعدی رابطه (7) مناسب است.

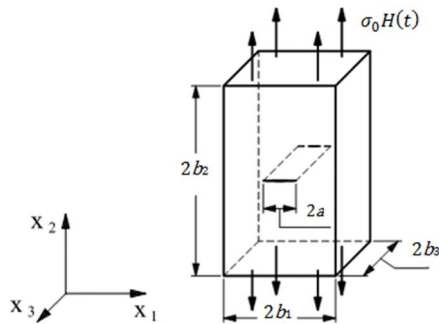
$$\bar{M} = \frac{M}{\int_{L_c} q(s) ds} \quad (6)$$

$$\int_{L_c} q(s) ds = \int_{-L_c/2}^{L_c/2} \left(1 - \frac{1}{L_c}s\right)^{2.06} ds = 1.01 \left(\frac{2}{3}L_c\right) \quad (7)$$

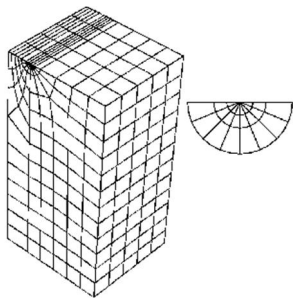
از سوی دیگر، رابطه بین ضرایب شدت تنش و نرخ رهایش انرژی به صورت رابطه (8) است [5].

$$\bar{M} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) + \frac{2(1+\nu)}{E} K_{III} K_{III}^{aux} \quad (8)$$

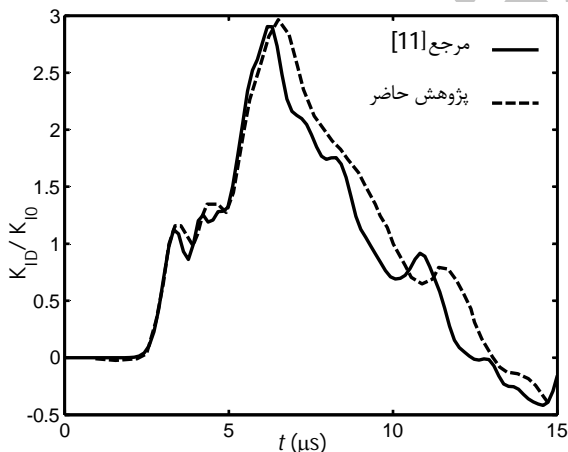
جدول 1 خواص ماده میله با ترک مرکزی دررو		
ضریب الاستیسیته	ضریب پواسون	جرم حجمی $\rho(\text{kg/m}^3)$
$E(\text{GPa})$	$\nu$	5000
200	0/3	



شکل 3 میله همگن مستطیلی با ترک مرکزی دررو [11]



شکل 4 مش بندی اجزای محدود قسمتی از میله همگن با ترک دررو

شکل 5 مقایسه نمودار تاریخچه زمانی  $K_{ID}/K_{I0}$  روش حاضر و نتایج اندرلین و همکاران [11] برای میله همگن با ترک مرکزی دررو

## 2-6- میله همگن با مقطع مستطیل با ترک بیضی شکل در مرکز

در شکل 6 میله‌ای با مقطع مستطیل و دارای ترک بیضی شکل در مرکز آن نشان داده شده است. مقادیر  $b_1, b_2, b_3, a_1, a_2$  به ترتیب به ترتیب 45، 75، 30، 17/5 و 10 میلیمتر می‌باشند. بر دو انتهای این میله بار دینامیکی  $\sigma_0 H(t)$  وارد می‌شود. خواص مواد این میله در جدول 2 آورده شده است. فرایند مدل‌سازی و مش بندی این مسئله نیز همانند مسئله پیشین می‌باشد و برای تحلیل عددی کل مسئله شبیه‌سازی شده است.

استفاده می‌کنند. به عبارت دیگر، خواص اجزای همگن با خواص مرکز اجزای تابعی انطباق داده شده است.

روشن است که اجزای تابعی خواص گرادیانی مواد را بهتر از اجزای همگن تقریب می‌زنند. بر این اساس، بهتر است که در تحلیل عددی از آن‌ها استفاده شود. در صورتی که حل عددی با یک نرم‌افزار اجزای محدود انجام شود، لازم است این قابلیت در نرم‌افزار وجود داشته باشد و یا اینکه با نوشتن کدهای لازم به آن اضافه شود. نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس این قابلیت را دارد که با اضافه کردن زیر روال‌هایی بتوان خواص گرادیانی مواد تابعی را اعمال نمود. در این پژوهش زیر روال مزبور به گونه‌ای نوشته شده است، که خواص ماده برای نقاط گوس، با توجه به تغییرات خواص مواد تابعی به دست می‌آیند.

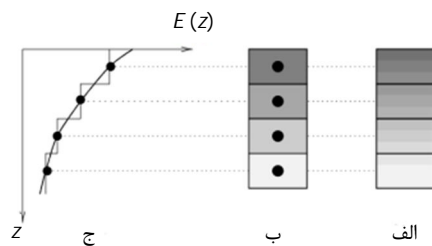
## 6- اعتبارسنجی

برای نشان دادن درستی روش ارائه شده، در این قسمت مسئله‌های همگن و تابعی دارای ترک مرکزی، بیضی و لبه‌ای تحت اثر بارهای استاتیکی و دینامیکی، تحلیل می‌شوند.

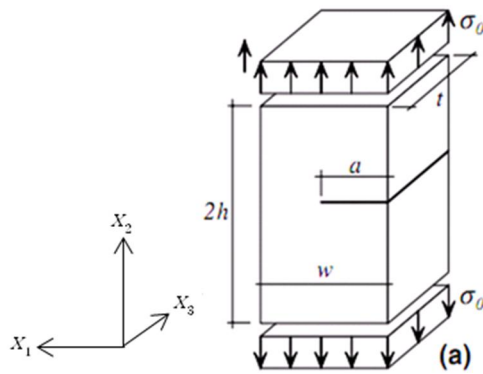
### 6-1- میله همگن با مقطع مستطیل با ترک مرکزی دررو

در شکل 3 میله‌ای با مقطع مستطیل و ترک مرکزی دررو نشان داده شده است. مقادیر  $b_1, b_2, b_3, a$  به ترتیب 10، 20، 10 و 2/4 میلیمتر می‌باشند. بر دو انتهای این میله بار دینامیکی  $\sigma_0 H(t)$  وارد شده است. تابع پله‌ای هوی ساید است. همان‌گونه که در شکل 4 دیده می‌شود، برای شبیه‌سازی عددی، از المان‌های آجری مرتبه دو بیست گرهی و در اطراف جبهه ترک نیز المان‌های گوه‌ای مرتبه دو 15 گرهی از نوع یک چهارم استفاده می‌گردد. با توجه به تکینگی تنش در جبهه ترک، اندازه المان‌ها در اطراف آن به حد کافی کوچک انتخاب می‌شود، تا دقت پاسخ‌های به دست آمده قابل قبول باشد. از سوی دیگر، چون نرم‌افزار آباکوس نمی‌تواند ضرایب شدت تنش مواد تابعی را محاسبه نماید، برای مدل‌سازی ترک کافی است، محل آن مشخص شود. لازم به ذکر است، در شبیه‌سازی عددی کل میله مدل‌سازی شده و بار دینامیکی به سطوح بالا و پایین آن در راستای محور  $X_2$  وارد می‌شود. حل عددی با استفاده از روش تحلیل دینامیکی ضمنی که همواره پایدار می‌باشد، انجام شده است.

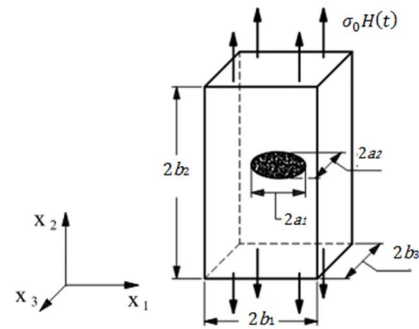
در شکل 5 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد نقطه میانی جبهه ترک میله شکل 3 که با روش پژوهش حاضر به دست آمده است، با جواب اندرلین [11] مقایسه می‌گردد. در این شکل  $K_{ID}$  ضریب شدت تنش دینامیکی، و  $K_{I0} = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین جواب‌های دو روش وجود دارد.



شکل 2 مقایسه بین جزء همگن و جزء گرادیانی. الف) اجزای تابعی ب) اجزای همگن. ج) تغییرات گرادیانی خواص در راستای محور [15].



شکل 8 میله مکعبی تابعی با ترک لبه‌ای در رو



شکل 6 میله همگن مستطیلی با ترک بیضی شکل [11]

جدول 2 خواص ماده میله با ترک بیضی شکل مرکزی

ضریب	ضریب	جرم حجمی
الاستیسیته	پواسون	$\rho(\text{kg/m}^3)$
$E(\text{GPa})$	$\nu$	
187	0/216	7900

$$E(X_1) = E_1 e^{\delta X_1} \quad (14)$$

$\delta$  که به آن ضریب ناهمگنی مواد گفته می‌شود، با رابطه (15) تعیین می‌شود.

$$\delta = \frac{1}{W} \log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \quad (15)$$

در این رابطه  $E_1$  ضریب ارتجاعی ماده در صفحه قائم سمت راست، یا صفحه با  $X_1$  صفر، و  $E_2$  ضریب ارتجاعی ماده در سمت دیگر یا صفحه با  $X_1 = W$  است. ضریب پواسون این ماده ثابت و برابر  $0/3$  در نظر گرفته می‌شود. در جدول 3، ضریب شدت تنش استاتیکی بدون بعد  $K_{IS}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$  بعد  $K_{IS}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$  [23] مقایسه روش انتگرال تعاملی این پژوهش با جواب‌های اردوگان و وو [23] مقایسه شده است.  $K_{IS}$  ضریب شدت تنش استاتیکی شکست نوع اول،  $\sigma_0$  تنش کششی استاتیکی اعمال شده بر دو انتهای میله و  $a$  طول ترک لبه‌ای می‌باشد. مشاهده می‌شود، که نتایج به دست آمده با این روش، با تقریب مناسب به پاسخ مرجع [23] نزدیک می‌باشند.

مقایسه نتایج پژوهش حاضر که با استفاده از روش انتگرال تعاملی به دست آمده‌اند، با نتایج سایر محققین در شکل‌های 5 و 7 و جدول 3 نشان می‌دهند، که روش انتگرال تعاملی دینامیکی ارائه شده در این مقاله از دقت خوبی برای بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی مواد همگن و تابعی دارای ترک سه بعدی برخوردار است.

#### 7- بررسی تغییرات گرادینانی خواص مواد بر رفتار استاتیکی و

##### دینامیکی ترک سه بعدی مواد تابعی

در ادامه ضرایب شدت تنش دینامیکی مسئله‌های بخش‌های 6-1 و 6-2 با در نظر گرفتن تغییرات خواص مواد تابعی به صورت رابطه‌ای نمایی از مختصه‌های  $X_1$  و  $X_2$  به دست می‌آیند. طبق رابطه (16) داریم:

$$E(X_1, X_2) = E_0 e^{(\delta_1 X_1 + \delta_2 X_2)} \quad (16)$$

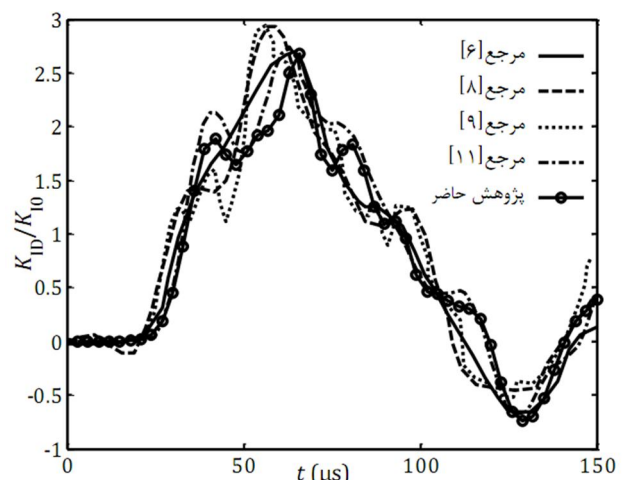
جدول 3 مقایسه نتایج پژوهش حاضر با نتایج مرجع [23] برای ضریب شدت تنش استاتیکی بدون بعد  $K_{IS}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$  میله تابعی

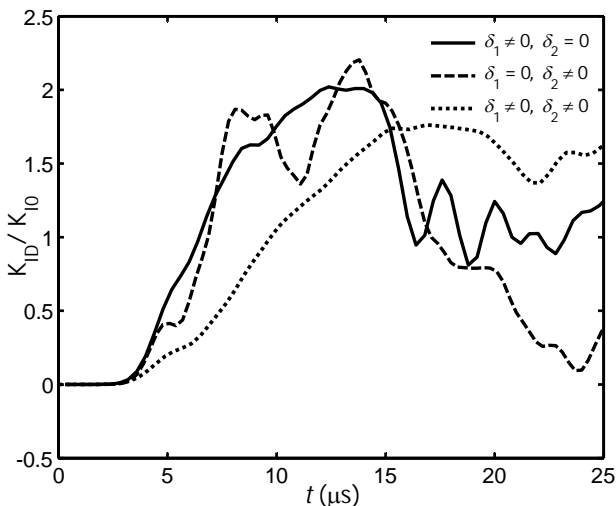
$E_2/E_1$	مرجع [21]	پژوهش حاضر
0/1	2/570	2/361
0/2	2/443	2/291
5	1/748	1/675
10	1/588	1/540

در شکل 7 نتایج این پژوهش برای گره واقع بر انتهای قطر کوچک بیضی میله همگن شکل 6 با نتایج چن [6]، نیشی‌اوکا [8]، ون [9] و اندرلین [11] مقایسه شده است. این مقایسه دقت خوب روش مورد استفاده را نشان می‌دهد. در این شکل  $K_{I0} = 2\sigma_0\sqrt{a/\pi}$  مشاهده می‌شود. نمودارهای روش‌های مختلف در شکل 7 بر هم منطبق نیستند. دلیل این عدم تطابق، ماهیت شبیه‌سازی مسئله‌های دینامیکی، که تابع متغیرهای زیادی از قبیل فاصله بین گام‌های زمانی متوالی است، می‌باشد. به این ترتیب، مشخص می‌شود، که روش انتگرال تعاملی ارائه شده در این پژوهش، ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد همگن را با دقت مناسبی محاسبه می‌کند.

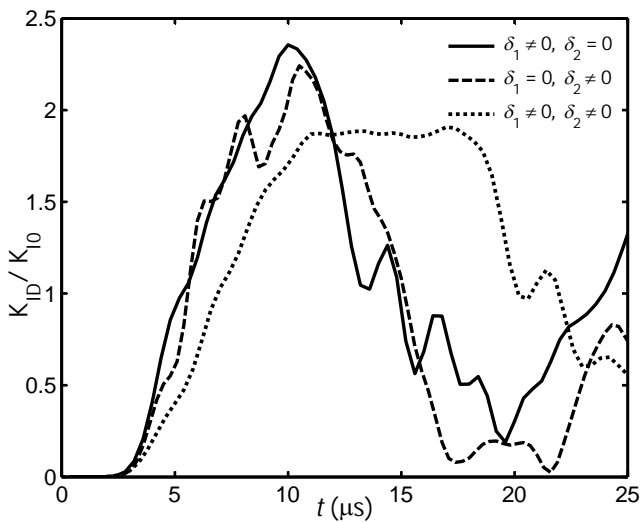
#### 6-3- میله تابعی با مقطع مستطیل و ترک لبه‌ای در کل ضخامت

شکل 8 میله‌ای تابعی با مقطع مستطیل و دارای ترک لبه‌ای در رو را نشان می‌دهد. مقادیر  $h$ ،  $t$ ،  $a$  به ترتیب 1، 4، 1 و 0/4 میلیمتر می‌باشند. این میله تحت بار استاتیکی کششی قرار دارد. مبداء مختصات در وسط صفحه قائم سمت راست یعنی ابتدای ترک قرار دارد و تغییرات ضریب الاستیسیته به صورت رابطه (14) در نظر گرفته می‌شود.

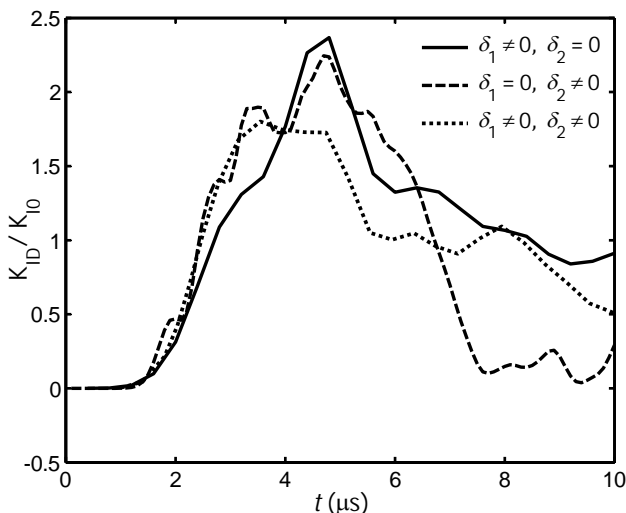
شکل 7 مقایسه نمودار تاریخچه زمانی  $K_{ID}/K_{I0}$  روش حاضر و نتایج اندرلین و همکاران [11] برای میله همگن با ترک مرکزی بیضی شکل



شکل 9 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{I0}$  میله تابعی با ترک مرکزی دررو برای حالت  $E_2/E_1 = 0.1$



شکل 10 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{I0}$  میله تابعی با ترک مرکزی دررو برای حالت  $E_2/E_1 = 0.2$



شکل 11 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{I0}$  میله تابعی با ترک مرکزی دررو برای حالت  $E_2/E_1 = 5$

ضریب  $E_0$  ضریب الاستیسته ماده همگن مسئله‌های مورد نظر است. سطوح سمت چپ هر دو مسئله دارای  $X_1$  صفر و سطوح پایینی آن‌ها دارای  $X_2$  صفر می‌باشند.  $\delta_1$  و  $\delta_2$  نیز از رابطه (17) تعیین می‌شوند. ضریب پواسون در تحلیل عددی ثابت در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta_1 = \frac{1}{2b_1} \log\left(\frac{E_2}{E_0}\right), \quad \delta_2 = \frac{1}{2b_2} \log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \quad (17)$$

در این راستا ابتدا،  $\delta_2$  برابر صفر و برای  $\delta_1$  های مختلف، ضرایب شدت تنش دینامیکی به دست می‌آیند. سپس با فرض صفر بودن  $\delta_1$ ، ضرایب مزبور برای  $\delta_2$  های مختلف محاسبه می‌شوند. در ادامه با فرض خواص گرا دیانی در هر دو راستای  $X_1$  و  $X_2$  ضرایب شدت تنش دینامیکی به دست می‌آیند.

#### 7-1- میله تابعی با مقطع مستطیل با ترک مرکزی دررو

در این قسمت با در نظر گرفتن تغییرات ضریب الاستیسته میله بخش 6-1 به صورت تابعی پیوسته (رابطه 16)، ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی به دست می‌آیند. نسبت ضریب شدت تنش استاتیکی میله تابعی به میله همگن  $K_{IS}^F/K_{IS}^H$  برای مقادیر مختلف ضرایب ناهمگنی  $\delta_1$  و  $\delta_2$ ، در جدول 4، ارائه شده است. در این جدول  $K_{IS}^F$  ضریب شدت تنش استاتیکی جبهه سمت راست ترک میله تابعی و  $K_{IS}^H$  ضریب شدت تنش استاتیکی میله همگن می‌باشد. مشاهده می‌شود، برای حالتی که تغییرات خواص مواد در راستای طول ترک (محور  $X_1$ ) است، ضریب شدت تنش استاتیکی شکست نوع اول ماده تابعی نسبت به ماده همگن افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، تغییرات خواص در راستای عمود بر صفحه ترک سبب کم شدن این ضریب می‌شود. همچنین اگر تغییر خواص مواد به طور توأمان در هر دو راستا وجود داشته باشد، ضریب شدت تنش استاتیکی افزایش می‌یابد. در ادامه نمودارهای تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{I0}$  میله تابعی مورد بررسی، برای مقادیر مختلف ضرایب ناهمگنی  $\delta_1$  و  $\delta_2$ ، در شکل‌های 9 تا 12 نشان داده می‌شود. از مقایسه نمودارهای شکل‌های 9 تا 12 با نمودار شکل 5 مشاهده می‌شود، برای حالتی که تغییرات خواص مواد در راستای  $X_1$  یا راستای  $X_2$  و یا به صورت توأمان در هر دو راستا باشد، بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی میله تابعی نسبت به میله همگن کاهش می‌یابد. در جدول 5 نسبت بیشینه مقدار ضریب مزبور برای میله تابعی به میله همگن آورده شده است. بررسی نتایج این جدول نشان می‌دهد، تغییرات خواص ماده در راستای طول ترک سبب کاهش 19 تا 30 درصدی بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی میله تابعی نسبت به میله همگن می‌شود. درحالی‌که با توجه به مقادیر جدول 4 مشخص می‌گردد، که برای این تغییرات، ضریب شدت تنش استاتیکی میله تابعی نسبت به میله همگن حدود 1 تا 30 درصد افزایش می‌یابد

جدول 4 نسبت ضریب شدت تنش استاتیکی میله تابعی به ضریب شدت تنش

استاتیکی میله همگن  $K_{IS}^F/K_{IS}^H$  با ترک مرکزی دررو

$E_2/E_1$	$\delta_1 \neq 0, \delta_2 = 0$	$\delta_1 = 0, \delta_2 \neq 0$	$\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0$
0/1	1/294	0/975	1/267
0/2	1/153	0/988	1/140
1	1	1	1
5	1/048	0/988	1/037
10	1/099	0/975	1/078

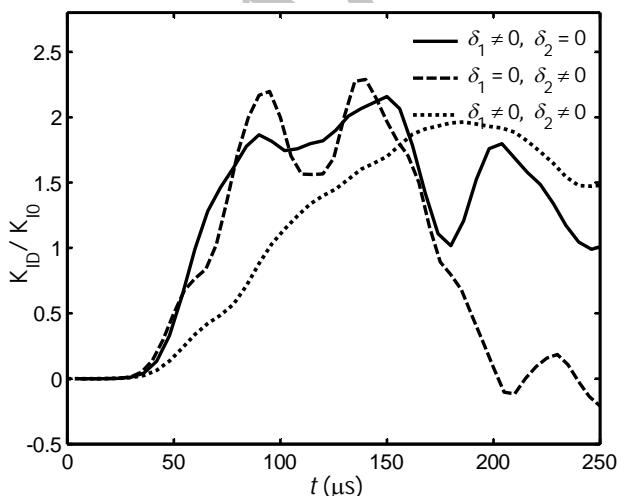
با ترک بیضی نیز همانند میله تابعی با ترک دررو، هنگامی که تغییرات خواص در راستای  $X_1$  یا راستای  $X_2$  و یا به صورت توأمان در هر دو راستا باشد، بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی این میله نسبت به میله همگن کاهش می‌یابد. در جدول 7 نسبت بیشینه مقدار ضریب مزبور برای میله تابعی به میله همگن آورده شده است. مقادیر این جدول، نشان می‌دهند که تغییرات خواص مواد در راستای قطر بزرگ بیضی، در راستای عمود بر صفحه ترک و در هر دو این راستاها به صورت توأمان به ترتیب موجب کاهش 18 تا 25، 13 تا 19 و 26 تا 33 درصدی ضریب شدت تنش دینامیکی میله تابعی نسبت به میله همگن می‌شوند. درحالی‌که با بررسی مقادیر جدول 6 مشخص شد، که تغییرات خواص در راستای عمود بر صفحه ترک مورد بررسی، سبب کاهش حدود 2 درصدی و در دیگر حالت‌ها، افزایش حدود 8 تا 18 درصدی ضریب شدت تنش استاتیکی می‌شود.

جدول 5 نسبت بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی میله تابعی به میله همگن با ترک مرکزی دررو

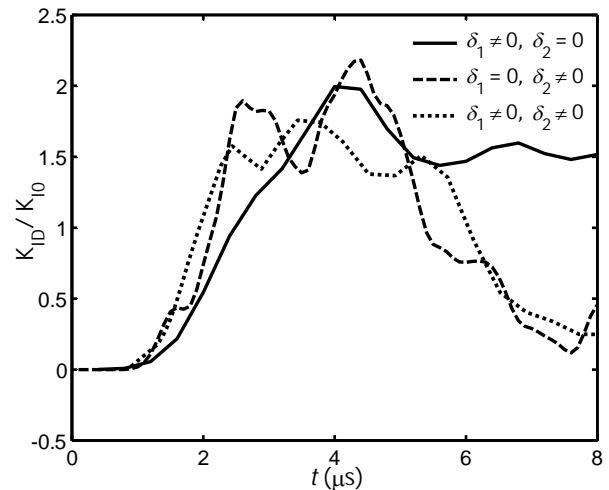
$E_2/E_1$	$\delta_1 \neq 0, \delta_2 = 0$	$\delta_1 = 0, \delta_2 \neq 0$	$\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0$
0/1	0/695	0/759	0/606
0/2	1/779	0/772	1/657
1	1	1	1
5	0/810	0/773	0/662
10	0/751	0/789	0/676

جدول 6 نسبت ضریب شدت تنش استاتیکی میله تابعی به ضریب شدت تنش استاتیکی میله همگن  $K_{IS}^F/K_{IS}^H$  با ترک مرکزی بیضی شکل

$E_2/E_1$	$\delta_1 \neq 0, \delta_2 = 0$	$\delta_1 = 0, \delta_2 \neq 0$	$\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0$
0/1	1/183	0/983	1/166
0/2	1/095	0/992	1/086
1	1	1	1
5	1/086	0/992	1/076
10	1/165	0/983	1/146



شکل 13 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{I0}$  میله تابعی با ترک مرکزی بیضی شکل برای حالت  $E_2/E_1 = 0.1$



شکل 12 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{I0}$  میله تابعی با ترک مرکزی دررو برای حالت  $E_2/E_1 = 10$

از سوی دیگر، گرادپان خواص در راستای عمود بر صفحه ترک سبب کاهش 21 تا 24 درصدی بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی میله تابعی نسبت به میله همگن می‌شود. تغییرات گرادپانی مزبور در حالت استاتیکی نیز سبب کاهش اندک 1 تا 2/5 درصدی ضریب شدت تنش استاتیکی میله تابعی نسبت به میله همگن شده است (جدول 4). همچنین بررسی نتایج جدول 5 نشان می‌دهد، گرادپانی شدن خواص در هر دو راستا به طور توأمان موجب کاهش 33 تا 40 درصدی بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی میله تابعی نسبت به میله همگن شده است. در این حالت نیز با توجه به مقادیر جدول 4 مشاهده می‌شود، که ضریب شدت تنش استاتیکی میله تابعی نسبت به میله همگن بین 2 تا 27 درصد افزایش می‌یابد. به این ترتیب مشخص می‌شود که تغییرات خواص مواد، اثر قابل توجهی بر رفتار استاتیکی و دینامیکی جسم تابعی دارای ترک سه بعدی دارد.

#### 7-2- میله تابعی با مقطع مستطیل و ترک بیضی شکل در مرکز

در این قسمت ضریب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی میله بخش 6-2 با فرض اینکه خواص مواد آن در راستای محورهای مختصات به صورت رابطه (16) تغییر نماید، به دست می‌آید. در جدول 6، نسبت ضرایب شدت تنش استاتیکی گره واقع بر انتهای قطر کوچک بیضی میله تابعی به میله همگن آورده می‌شود. بررسی مقادیر جدول 6، نشان می‌دهد، اثر تغییرات خواص مواد در راستای محورهای مختصات بر ضریب شدت تنش استاتیکی مشابه میله با ترک دررو است. برای این میله، گرادپانی شدن خواص مواد در راستای قطر بزرگ بیضی موجب افزایش 9 تا 18 درصدی ضریب شدت تنش استاتیکی می‌شود. از سوی دیگر، تغییر خواص مواد در راستای عمود بر صفحه ترک سبب کاهش حدود 2 درصدی این ضریب می‌گردد. همچنین گرادپانی شدن به صورت توأمان در هر دو این راستاها، سبب افزایش حدود 8 تا 17 درصدی مقدار ضریب شدن تنش استاتیکی میله تابعی مورد بررسی نسبت به میله همگن شده است.

در ادامه نمودارهای تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{I0}$  گره واقع بر انتهای قطر کوچک بیضی میله تابعی مورد بررسی، برای مقادیر مختلف ضرایب ناهمگنی  $\delta_1$  و  $\delta_2$ ، در شکل‌های 13 تا 16 نشان داده می‌شوند. بررسی نمودارهای این شکل‌ها نشان می‌دهد، برای میله تابعی

جدول 7 نسبت بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی میله تابعی به میله همگن با ترک مرکزی بیضی شکل

$E_2/E_1$	$\delta_1 \neq 0, \delta_2 = 0$	$\delta_1 = 0, \delta_2 \neq 0$	$\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0$
0/1	0/801	0/853	0/732
0/2	0/777	0/871	0/736
1	1	1	1
5	0/822	0/810	0/717
10	0/744	0/848	0/686

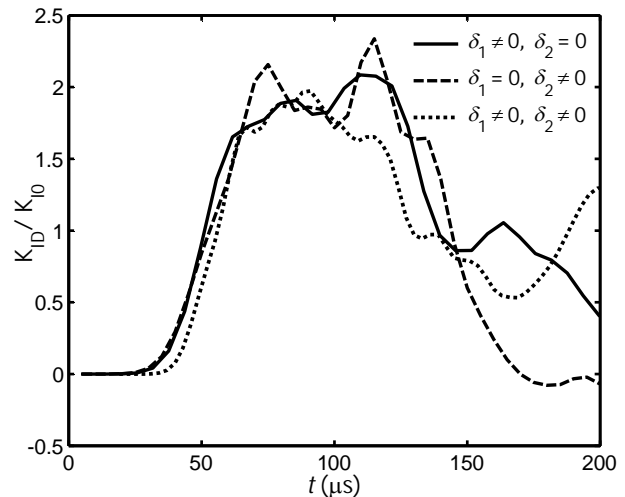
کم شدن ضریب شدت دینامیکی حتی برای حالت‌هایی از تغییرات خواص مواد، که سبب زیاد شدن ضریب شدت تنش استاتیکی می‌شود، جالب و حائز اهمیت است. این موضوع می‌تواند، در تحلیل سازه‌های تابعی مورد توجه قرار گیرد.

### 8- نتیجه‌گیری

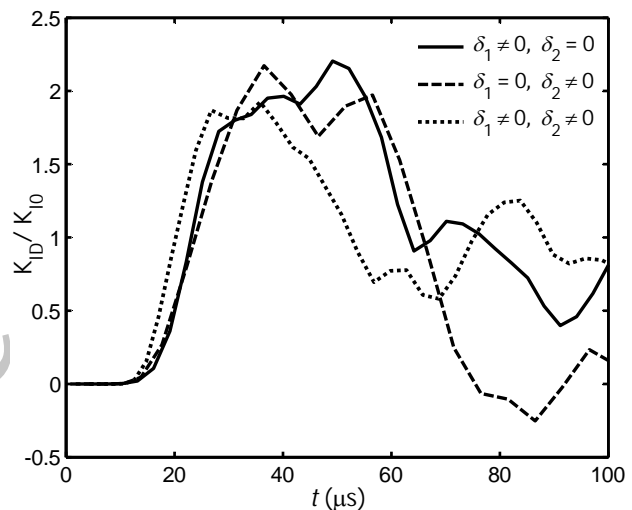
در این مقاله ابتدا با تعریف مناسبی از میدان‌های کمکی جابجایی، کرنش و تنش، انتگرال تعاملی برای محاسبه ضرایب شدت دینامیکی ترک سه بعدی مواد تابعی بدون هرگونه وابستگی به مشتق‌گیری از تغییرات خواص مواد مزبور به دست آمد. در ادامه اعتبارسنجی روش انتگرال تعاملی ارائه شده، با حل مسئله‌های همگن و تابعی دارای ترک مرکزی، لبه‌ای و بیضوی تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی انجام گردید. نشان داده شد که انتگرال تعاملی روشی کارآمد برای محاسبه ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی مواد همگن و تابعی دارای ترک سه بعدی است. سپس اثرات تغییرات نمای ضریب الاستیسیته در راستاهای درون صفحه ترک، عمود بر صفحه ترک و در هر دو راستا به صورت توأمان بر ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی مواد تابعی، با حل مسائل مختلف بررسی گردید. در این راستا، نمودارهای تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش بدون بعد و جدول‌های نسبت بیشینه مقدار ضریب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی ماده تابعی به ماده همگن، برای مقادیر مختلف ضرایب ناهمگنی به دست آمدند. مشخص شد، که تغییر خواص مواد موجب کاهش قابل توجه بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی ماده تابعی نسبت به ماده همگن در مسئله‌های مورد بررسی می‌شود. همچنین مشاهده شد، که گرادینتی شدن خواص مواد در دو راستای عمود و داخل صفحه ترک به صورت توأمان، سبب کاهش بیشتر بیشینه مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی نسبت به حالتی که تغییرات مزبور در یک راستا باشد، شده است. از سوی دیگر، با بررسی جدول‌های نسبت ضریب شدت تنش استاتیکی میله تابعی به میله همگن نشان داده شد، که تغییرات ضریب الاستیسیته در راستای عمود بر صفحه ترک سبب کاهش ناچیز ضریب شدت تنش استاتیکی ماده تابعی نسبت به ماده همگن در مسئله‌های مورد بررسی می‌گردد. درحالی‌که تغییرات خواص مواد درون صفحه ترک موجب افزایش قابل توجه این ضریب برای مواد تابعی نسبت به ماده همگن می‌گردد.

### 9- مراجع

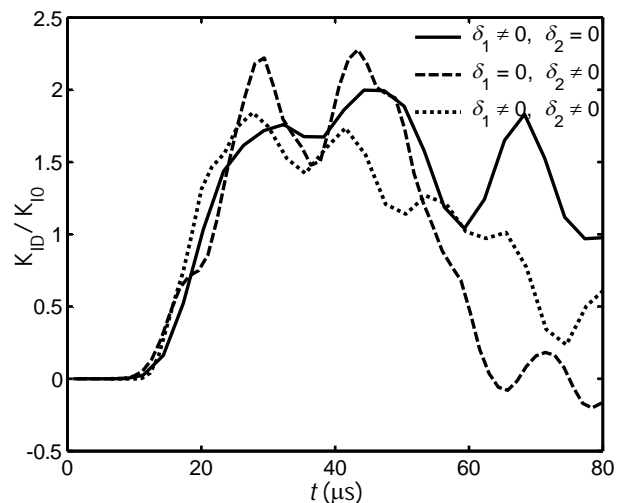
- [1] L. C. Guo, N. Noda, Fracture mechanics analysis of functionally graded layered structures with a crack crossing the interface. *Mechanics of Materials*, Vol. 40, No. 1, pp. 81-99, 2008.
- [2] M. C. Walters, G. H. Paulino, R. H. Dodds, Computation of mixed-mode stress intensity factors for cracks in three-dimensional functionally graded solids. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 132, pp. 1-15, 2006.



شکل 14 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{10}$  میله تابعی با ترک مرکزی بیضی شکل برای حالت  $E_2/E_1 = 0.2$



شکل 15 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{10}$  میله تابعی با ترک مرکزی بیضی شکل برای حالت  $E_2/E_1 = 5$



شکل 16 نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد  $K_{ID}/K_{10}$  میله تابعی با ترک مرکزی بیضی شکل برای حالت  $E_2/E_1 = 10$



- the material point method, *CMES*, Vol. 1, No.1 pp. 11-25, 2006.
- [13] C. E. Rousseau, H. V. Tippur, Dynamic fracture of compositionally graded materials with cracks along the elastic gradient experiment and analysis, *Mechanics of Materials*, Vol. 33, No. 7, pp. 403-421, 2001.
- [14] M. L. Williams, On the stress distribution at the base of stationary crack. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, No. 3, pp. 109-114, 1957.
- [15] S. H. Song, G. H. Paulino, Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 4830-4866, 2006.
- [16] J. H. Kim, G. H. Paulino, On Fracture Criteria for mixed mode Crack propagation in functionally graded materials, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 14, pp. 227-244, 2007.
- [17] M. Shariati, M. M. Rokhi, Dynamic fracture analysis of functionally graded material, *Journal of structures and fluids mechanics*, No. 3, pp. 1-16, 2011-2012. (In Persian)
- [18] Z. Wang, L. Ma, H. Yu, L. Wu, Dynamic stress intensity factors for homogeneous and non-homogeneous materials using the interaction integral method, *Engineering fracture mechanics*, No. 1, pp. 1-16, 2014.
- [19] F. Delale, F. Erdogan, The crack problem for nonhomogeneous plane, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 609-614, 1983.
- [20] J.W. Eischen, Fracture of non-homogeneous materials. *International Journal of Fracture*, Vol. 34, No. 1, pp. 3-22, 1987,
- [21] V. Parameswaran, A. Shukla, Crack tip stress fields for dynamic fracture in functionally gradient materials, *Mechanics of Materials*, Vol. 31, No. 9, pp. 579-596, 1999.
- [22] C. F. Shih, B. Moran, T. Nakamu, Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body, *International Journal of Fracture*, Vol. 30, pp. 79-102, 1986.
- [23] F. Erdogan, B. H. Wu, The surface crack problem for a plate with functionally graded properties. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 449-456, 1997
- [3] A. O. Ayhan, Three-dimensional mixed-mode stress intensity factors for cracks in functionally graded materials using enriched finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 796-810, 2009.
- [4] A. Shaghghi, R. Ghajar, M. Alfano, Finite element evaluation of stress intensity factors in curved non-planar cracks in FGMs, *Mechanics research communications*, Vol. 38, pp. 17-23, 2011.
- [5] R. Ghajar, A. Shaghghi, M. Alfano, An improved numerical for computation of stress intensity factors along curved non-planar cracks in FGMs, *International journal of Solids and structures*, Vol. 48, pp. 208-216, 2011.
- [6] Y. M. Chen, Numerical computation dynamic stress intensity factors by a lagrangian finite-difference method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 7, pp. 653-660, 1975.
- [7] S. Aoki, K. Kishimoto, H. Kondo, M. Sakata, Elasto dynamic analysis of crack by finite element method using singular element, *International Journal of Fracture*, Vol. 14, No. 1, 1978.
- [8] T. Nishioka, Recent developments in computational dynamic fracture mechanics. In: Aliabadi, M. H. (Ed.), *Dynamic Fracture Mechanics. Computational Mechanics Publications*, Southampton, UK and Boston, USA. 1995
- [9] P. H. Wen, M. H. Aliabadi, A. Young, Dual boundary element methods for three-dimensional dynamic crack problems, *Journal Strain Anal*, Vol. 34 No. 6, pp. 373-394, 1999.
- [10] P. Krysl, T. Belytschko, The Element free galerkin methods for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, No. 6, pp. 767-800, 1999.
- [11] M. Enderlein, A. Ricoeur, M. Kuna, Comparison of finite element technique for 2D and 3D crack analysis under impact loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 13-14, pp. 3425-3437, 2003.
- [12] Y. J. Guo, J. A. Nairn Three dimensional dynamic fracture analysis using

Archive of SID