مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 14، ص‌ص 190-198

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مطالعه عددی حل تشابهی جریان لایه مرزی جابجایی ترکیبی برای نانوسیال آب- مس از روی یک صفحه افقی

مسعود ضیائی راد[1*]، عباس کسایی پور[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
* اصفهان، صندوق پستی 73441-81746، m.ziaeirad@eng.ui.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 12 خرداد 1393
پذیرش: 29 تیر 1393
ارائه در سایت: 23 مهر 1393

کلید واژگان:
جریان لایه مرزی
جابجایی ترکیبی
حل عددی تشابهی
نانوسیال
صفحه افقی

چکیده

این مقاله به حل تشابهی لایه مرزی برای جریان جابجایی ترکیبی نانوسیال آب- مس عبوری از روی یک صفحه تخت افقی به صورت عددی پرداخته است. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم با بکارگیری متغیرهای تشابهی مناسب به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و همزمان با روابط تغییر خواص نانوسیال به‌کمک روش اختلاف محدود کلرباکس حل شده‌اند. تأثیر تغییر در دمای سطح، کسر حجمی نانوذره و پارامتر جابجایی ترکیبی بر ضریب اصطکاک در جریان، عدد نوسلت و پروفیل سرعت و دما بررسی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که عدد نوسلت جریان با افزایش کسرحجمی نانوذرات و پارامتر جابجایی ترکیبی افزایش می‌یابد، بطوریکه پارامتر معرف عدد نوسلت جریان برای نانوسیال آب- مس با کسر حجمی 4 درصدی نسبت به سیال خالص درحدود 10% افزایش داشته است. از طرفی پارامتر ضریب اصطکاک نیز در همین محدوده، در حدود 20% افزایش یافته است. با این وجود در مقادیر پائین‌تر پارامتر جابجائی ترکیبی، تاثیر حضور نانوذرات بر افزایش ضریب اصطکاک بیشتر خواهد شد. اثر دمای سطح نیز بر افزایش عدد نوسلت و کاهش ضریب اصطکاک، در کسر حجمی نانوذرات بالاتر و پارامتر جابجائی ترکیبی بالاتر، محسوس‌تر است. همچنین با افزایش دمای سطح، دمای نانوسیال در هر فاصله‌ای از سطح کاهش می‌یابد.

A Numerical study of similarity solution for mixed-convection copper-water nanofluid boundary layer flow over a horizontal plate

Masoud Ziaei-Rad[1*], Abass Kasaeipoor[2]

1-Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran
* P.O.B.73441-81746, Isfahan, Iran, m.ziaeirad@eng.ui.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 June 2014
Accepted 20 July 2014
Available Online 15 October 2014

Keywords:
Boundary layer flow
Mixed convection
Numerical similarity solution
Nanofluid
horizontal plate

ABSTRACT

This paper is concerned with a similarity solution for mixed-convection boundary layer copper-water nanofluid flow over a horizontal flat plate. Appropriate similarity variables are used to convert the Governing PDEs to ODEs and the resultant equations with the nanofluid properties relations are discretized and solved simultaneously using finite-difference Keller-Box method. The effects of change in plate temperature, the volume fraction of nanoparticles, and the mixed-convection parameter, on friction coefficient, Nusselt number and velocity and temperature profiles are investigated. The results show that, the Nusselt number increases as the mixed-convection parameter and the volume fraction of nanoparticles increases. This enhancement is about 10 percent for the nanofluid with 4% volume fraction of nanoparticles, compared with the pure water. Moreover, in this range the friction coefficient parameter increases about 20 percent. However, the lower the mixed-convection parameter is, the higher the effect of nanoparticles on the friction coefficient increment. The results also illustrate that the effect of the surface temperature on the increment of Nusselt number and on the reduction of friction coefficient is more considerable in higher mixed-convection parameter and volume fraction of nanoparticles. Also, by increasing surface temperature, the temperature of nanofluid decreases at any surface distance.

1- مقدمه

مکانیک سیالات، همچون بسیاری از علوم دیگر، پیشرفت خود را مدیون ایده‌های انقلابی همچون تئوری لایه مرزی و تئوری فیلم نازک می‌باشد. در بین این تئوری‌ها، بی‌شک تئوری لایه مرزی از جایگاه ویژه‌ای در این علم برخوردار است. لایه مرزی برای اولین بار توسط پرانتل[1] معرفی شد. پرانتل میدان جریان را به دو ناحیه تقسیم کرد و معادلات حاکم بر حرکت سیال را ساده سازی کرد[2]. این دو ناحیه شامل ناحیه داخلی درون لایه مرزی که در آن ویسکوزیته بر میدان جریان حاکم است و ناحیه خارجی که جریان به صورت پتانسیل می‌باشد. با کمک این تئوری، برای حل بسیاری از مسائل نیازی نیست معادلات بقا بطور کامل حل شوند[3-6].

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Ziaei-Rad, A. Kasaeipoor, A Numerical study of similarity solution for mixed-convection copper-water nanofluid boundary layer flow over a horizontal plate, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 14, pp. 190-198, 2015 (In Persian)

از طرفی مساله جریان جابجایی ترکیبی(ترکیب جریان‌های جابجایی اجباری و آزاد)، در بسیاری از فرآیندهای انتقال در دستگاه‌های مهندسی و در طبیعت بوجود می‌آیند، مساله جریان جابجایی ترکیبی دائم در لایه مرزی عبوری از یک صفحه افقی مسطح، برای مدت زمان طولانی موضوع اصلی در انتقال حرارت بوده است. به دلیل اهمیت آن، از هر دو دیدگاه تئوری و عملی به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته شده است[7-9]. در این مسأله، که در آن خاصیت شناوری دارای اثر قابل توجهی بر روی میدان جریان است، شیب فشار به‌طور کلی متفاوت است، به‌طوری‌که هرچند در لبه لایه مرزی از پیش تعیین شده است، ولی باید اثر آن در عمق لایه مرزی به‌عنوان بخشی از فرایند حل به همراه درجه حرارت و سرعت، درنظر گرفته شود. مطالعات تئوری پیشین بیشتر بر روی اثرات خاصیت شناوری در این مسائل روی جریان یکنواخت گرم و یا سرد شده توسط صفحات مسطح، متمرکز شده است[10-13]. در مقاله دیگری که توسط استینروک[14] در مورد جریان لایه مرزی جابجایی ترکیبی عبوری از یک صفحه سرد افقی ارائه شد، نشان داده شده است که در حالتی که جریان بالای یک صفحه گرم افقی مدنظر است، حل تشابهی معادلات لایه مرزی برای هنگامی که اثر خاصیت شناوری در جهت جریان می‌باشد وجود دارد و جریان در لایه مرزی با شتاب است؛ با این‌حال برای جریان بالای یک صفحه سرد (اثر خاصیت شناوری نامطلوب) جریان جلورونده دارای یک گرادیان فشار نامطلوب است، لذا انتظار می‌رود که جدایی جریان رخ دهد. جریان جابجایی ترکیبی در لایه مرزی عبوری از یک صفحه صاف افقی نفوذپذیر با توزیع درجه حرارت $T_w(x) \sim x^{-1/2}$ و مکش جانبی سیال، ابتدا توسط مگیاری و همکارانش[15] مورد بررسی قرار گرفت. در این تحقیق آنها به این نتیجه رسیدند که فقط در حالت نیروهای بویانسی در جهت جریان و مکش، جواب‌های یگانه بوجود می‌آید و در حالت نیروهای بویانسی در خلاف جهت جریان و تزریق، فقط در موارد خاصی جواب یگانه وجود خواهد داشت. دسویتا و همکارانش [16] حل تشابهی برای جابجایی ترکیبی لایه مرزی عبوری از یک صفحه افقی نفوذپذیر را بررسی کردند و دریافتند که با افزایش توان درجه حرارت دیوار، عدد نوسلت محلی افزایش می‌یابد. همچنین سابهاشینی و همکارانش [17] حل عددی به منظور بررسی اثر همزمان حرارت و غلظت در لایه مرزی جابجایی ترکیبی در یک صفحه افقی نفوذپذیر را مورد مطالعه قرار دادند. آنها دریافتند که نرخ انتقال حرارت با مکش، افزایش و با تزریق، کاهش می‌یابد.

عملکرد بالای خنک‌کاری، یکی از نیازهای حیاتی بسیاری از صنایع است. ضریب هدایت گرمایی پایین یکی از محدودیت‌های اولیه برای افزایش کارآمدی سیالات رایج در سیستم‌های حرارتی است. هدایت گرمایی این‌گونه سیالات را می‌توان با افزودن نانوذرات به آنها افزایش داد[18-20]. مفهوم نانوسیال، سوسپانسیونهای حاوی ذرات نانو، مواد فلزی وغیرفلزی را شامل می‌شود که به عنوان محیطهای انتقال حرارت استفاده می‌شوند. چنین سیالاتی پتانسیل زیادی برای افزایش نرخ انتقال حرارت از خود نشان می‌دهند. خصوصیات انتقال حرارت جابجایی نانوسیالات به خواص ترموفیزیکی سیال پایه و ذرات معلق در آن،کسر حجمی ذرات معلق و شکل و ابعاد این ذرات بستگی دارد[21-23]. در زمینه استفاده از نانوسیال در معادلات لایه مرزی، اودین و همکارانش [24] به مطالعه انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک صفحه تخت گرم جاسازی شده در یک محیط متخلخل پر شده از نانوسیال با شرط جابجایی در مرز پرداختند. آنها دریافتند که با افزایش کسر حجمی نانوذرات انتقال حرارت افزایش می‌یابد. همچنین رحمان و همکارانش [25] به بررسی انتقال حرارت جابجایی ترکیبی لایه مرزی نانوسیال عبوری از یک گوه با تولید(و یا جذب) انرژی داخلی پرداختند. آنها پی بردند سرعت نانوسیال کمتر از سرعت سیال خالص می‌باشد و حضور نانودرات منجر به نازک شدن لایه مرزی هیدرودینامیکی می‌شود. آریفین و همکارانش[26] به حل تشابهی انتقال حرارت جابجایی اجباری نانوسیال در لایه مرزی عبوری از یک صفحه تخت افقی پرداختند. نتایج نشان داد، افزایش نانوذرات TiO_2، نسبت به نانوذرات Al_2O_3 و Cu انتقال حرارت بیشتری را سبب می‌شود.

همانطور که ذکر شد، در مطالعات گذشته موارد محدودی از بررسی جریان لایه مرزی نانوسیال روی سطوح یافت می‌شود که در این تحقیقات نیز، بدلیل محدودیتهای معادلات لایه مرزی، تحلیل جامعی بر روی تأثیر پارامترهای مختلف بر انتقال حرارت در جریان سیال ارائه نشده است. در این مقاله با بکارگیری متغیرهای تشابهی مناسب و وارد کردن همزمان اثر دمای سطح و خواص نانوذرات در معادلات حاکم، مطالعه کاملی بر روی تأثیر این پارامترها در انتقال حرارت جریان جابجائی ترکیبی انجام شده است. با افزودن نانوسیال در این نوع از مسئله‌ها می‌توان خنک‌کاری را افزایش داد و سیستم را بهینه کرد. علاوه بر آن، تأثیر پارامتر جابجایی ترکیبی و کسرحجمی نانوذرات بر ضریب اصطکاک، عدد نوسلت و پروفیل‌های سرعت و دما نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

2- معادلات حاکم

جریان جابجایی ترکیبی لزج و تراکم‌ناپذیر را در لایه مرزی عبوری از یک صفحه صاف افقی در حالت دائم درنظر می‌گیریم. فرض می‌شود جریان آزاد یکنواخت با سرعت U_∞ و با دمای یکنواخت T_∞ از روی یک صفحه افقی در حال عبور است. دما در بالای صفحه گرم به صورت $\bar{T}_{\mathrm{w}}(x) > T_\infty$ و برای پایین صفحه تخت سرد به صورت $\bar{T}_{\mathrm{w}}(x) < T_\infty$ درنظر گرفته می شود. در حالت اول، نیروی خاصیت شناوری در خلاف جهت گرانش (جریان همسو) عمل می‌کند، درحالی‌که در مورد دوم هم‌جهت باگرانش (جریان مخالف) خواهد بود. با فرض عدم تولید گرما و صرفنظر از تلفات لزجت در جریان لایه مرزی و با استفاده از تقریب بوزینسک، معادلات لایه مرزی حالت دائم را می‌توان به صورت رابطه (1) نوشت[16]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$
$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{nf}}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + v_{\mathrm{nf}}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}$$
$$0 = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{nf}}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{(\rho\beta)_{\mathrm{nf}}}{\rho_{\mathrm{nf}}}g(\bar{T} - T_\infty)$$
$$\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_{\mathrm{nf}}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \qquad (1)$$

برای همه متغیرهای بعددار از علامت بار استفاده شده است. شرایط مرزی در این معادلات به صورت رابطه (2) نوشته می شوند:

$$\bar{u}=0\,,\ \bar{v} = 0\,,\ \bar{T} = \bar{T}_{\mathrm{w}}(x)\,,\ \text{at } \bar{y}=0$$
$$\bar{u}=U_\infty\,,\ \bar{T} = T_\infty\,,\ \bar{p} = p_\infty\,,\ \text{as } \bar{y}\to\infty \qquad (2)$$

که در این معادلات، $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مختصات اندازه‌گیری شده از ابتدای صفحه به ترتیب در امتداد طول و عمود بر آن هستند. $(\bar{u},\bar{v})$ مولفه‌های سرعت طولی و عرضی، $\bar{p}$ فشار، $\bar{T}$ دمای محلی سیال، ρ چگالی سیال، v لزجت سینماتیکی، g شتاب گرانشی، β ضریب انبساط حرارتی سیال و ضریب پخش حرارتی سیال می باشد.

با بکارگیری متغیرهای بی‌بعد رابطه (3):

$$\mathrm{x} = \frac{\bar{x}}{L},\ \mathrm{y} = \mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\bar{y}}{L}\right),\ \mathrm{u} = \frac{\bar{u}}{U_\infty},\ \mathrm{v} = \mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\bar{v}}{U_\infty}\right),$$
$$\mathrm{p} = \frac{(\bar{p}-p_\infty)}{\rho_{\mathrm{nf}}{U_\infty}^2},\ \mathrm{T} = \frac{(\bar{T}-T_\infty)}{\Delta T} \qquad (3)$$

که در آنها L طول صفحه، U_∞ سرعت مشخصه، $\mathrm{Re}=U_\infty L/\vartheta_f$ عدد رینولدز و $\Delta T=\bar{T}_w-T_\infty$ اختلاف دمای مشخصه است، شکل بدون‌بعد معادلات حاکم به صورت رابطه (4) خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\vartheta_{nf}}{\vartheta_f}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f}\lambda T$$
$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f}\frac{1}{\Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4)$$

شرایط مرزی بدون بعد نیز به صورت رابطه (5) بازنویسی می‌شوند:

$$u=0,\ v=0,\ T=1 \text{ at } y=0$$
$$u=1,\ T=0,\ p=0 \text{ as } y\to\infty \quad (5)$$

در معادلات بدون بعد فوق، Pr عدد پرانتل و λ ثابت جابجایی ترکیبی و یا پارامتر خاصیت شناوری است که به صورت رابطه (6) تعریف می‌شود:

$$\lambda=\frac{Gr}{Re^{5/2}} \quad (6)$$

که در آن $Gr=g\beta_f\Delta T L^3/\vartheta_f^2$، عدد گراشهف می‌باشد. قابل ذکر است که $\lambda>0$ خاصیت شناوری در جهت جریان، $\lambda<0$ خاصیت شناوری در خلاف جهت جریان و $\lambda=0$ برای جریان جابجایی اجباری (جریان غیرشناور) است.

با استفاده از متغیرهای تشابهی رابطه (7) می‌توان معادلات دیفرانسیل فوق با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد [16]:

$$\psi=\phi_1(x)\,f(\eta),\ P=\phi_2(x)\,P(\eta),$$
$$T=\phi_3(x)\,\theta(\eta),\ \eta=\phi_4(x)\,y \quad (7)$$

که در آن ψ تابع جریان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

و به‌طور خودکار معادله پیوستگی(4) را تأمین می‌کند. با جایگذاری رابطه (7) در روابط (4)، معادلات به معادلات دیفرانسیل معمولی رابطه (8) تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\vartheta_{nf}}{\vartheta_f}f'''+a_1ff''-(a_1+a_2)f'^2-a_3P-a_4\eta P'=0$$
$$P'=\frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f}\lambda\theta$$
$$\frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f}\frac{1}{\Pr}\theta''+a_1f\theta'-a_5f'\theta=0 \quad (8)$$

که در این معادلات، f تابع جریان بدون بعد، θ پروفیل دمای بدون بعد و P پروفیل فشار بدون بعد است. ثابت a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 به صورت رابطه (9)، (10) ، (11) و (12) تعریف شده است:

$$a_1=\frac{(\phi_1)_x}{\phi_4},\ a_2=\frac{\phi_1(\phi_4)_x}{\phi_4^2},\ a_3=\frac{(\phi_2)_x}{\phi_1\phi_4^3},$$
$$a_4=\frac{\phi_2(\phi_4)_x}{\phi_1\phi_4^4},\ a_5=\frac{\phi_1(\phi_3)_x}{\phi_3\phi_4} \quad (9)$$

و

$$(\phi_3)_x=\phi_2(x)\phi_4(x),\ T_w(x)=\phi_3(x),$$
$$U(x)=\phi_1(x)\phi_4(x),\ V_w(x)=-(\phi_3)_x \quad (10)$$

و همچنین:

$$\frac{a_1}{a_2}=\varepsilon \quad (11)$$

به‌طوری‌که

$$\frac{(\phi_1)_x}{\phi_1}=\varepsilon\frac{(\phi_4)_x}{\phi_4} \quad (12)$$

که در آن x زیرنویس نشان دهنده متمایز بودن از X است. بنابراین از رابطه (13) داریم :

$$\phi_1=a_6\phi_4^{\varepsilon} \quad (13)$$

که در آن a_6 ثابت ادغام شده است. بنابراین از رابطه (14) داریم:

$$\frac{d\phi_4}{dx}=\frac{a_2}{a_6}\phi_4^{2-\varepsilon}$$
$$\phi_4=[a_7+(\varepsilon-1)\frac{a_2}{a_6}x]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \quad (14)$$

که در آن a_7 ثابت ادغام شده است و $\varepsilon\neq 1$ می‌باشد، بنابراین از (15) داریم:

$$\phi_1=a_6[a_7+(\varepsilon-1)\frac{a_2}{a_6}x]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (15)$$

علاوه بر آن ما از رابطه (16) داریم:

$$\frac{d\phi_2}{dx}=a_3a_6[a_7+(\varepsilon-1)\frac{a_2}{a_6}x]^{\frac{(3+\varepsilon)}{\varepsilon-1}} \quad (16)$$

بنابراین از رابطه (17) داریم:

$$\phi_2=a_8+\frac{a_3a_6^2}{2(\varepsilon+1)a_2}[a_7+(\varepsilon-1)\frac{a_2}{a_6}x]^{\frac{2(\varepsilon+1)}{(\varepsilon-1)}} \quad (17)$$

که در آن a_8 ثابت ادغام شده است و $a_8=0$ می‌باشد. طبق رابطه (10)، (15) و (16)از رابطه (18) داریم :

$$U(x)=\phi_1\phi_4=a_6(a_7+\frac{x}{a_6})^n \quad (18)$$

که در آن $n=(\varepsilon+1)/(\varepsilon-1)$ ثابت است و $(\varepsilon-1)a_2=1$ می‌باشد، بنابراین $a_2=(n-1)/2$ و $a_1=\varepsilon\,a_2=(n+1)/2$ است. بنابراین از رابطه (19) داریم :

$$\phi_1=a_6(a_7+\frac{x}{a_6})^{\frac{n+1}{2}},\ \phi_4=a_6(a_7+\frac{x}{a_6})^{\frac{n-1}{2}} \quad (19)$$

علاوه بر این طبق رابطه (9) رابطه (20) به دست می‌آید:

$$\frac{(\phi_3)_x}{\phi_3}=\frac{a_5}{(a_7+x/a_6)} \quad (20)$$

طبق رابطه (10) و (20) رابطه (21) به دست می‌آید:

$$\phi_3=T_w(x)=a_9(a_7+x/a_6)^{a_5} \quad (21)$$

که a_9 ثابت ادغام شده است. همچنین طبق رابطه (10)، (17) و (19) رابطه (22) و (23) را داریم:

$$(\phi_2)_x=a_3a_6^2(a_7+\frac{x}{a_6})^{2n-1} \quad (22)$$

یا داریم:

$$\phi_2=a_{10}+\frac{a_3a_6^3}{2\pi}(a_7+\frac{x}{a_6})^{2n} \quad (23)$$

که در آن a_{10} ثابت ادغام شده است. از طرفی طبق رابطه (10) از رابطه (24) داریم:

$$\phi_3=\phi_2\phi_4=$$
$$a_6[a_{10}+\frac{a_3a_6^3}{2\pi}\left(a_7+\frac{x}{a_6}\right)^{2\pi}](a_7+\frac{x}{a_6})^{\frac{(n-1)}{2}} \quad (24)$$

در نتیجه از رابطه (25) داریم:

$$a_{10}=0,\ a_3=\frac{2\pi}{a_6^3},\ a_6=1 \quad (25)$$

پس ثابت $a_3=2n$ می‌باشد. بنابراین از رابطه (26)داریم:

$$\phi_3=(a_{11}+x)^{\frac{(5n-1)}{2}} \quad (26)$$

پس $a_9=1$ و $a_5=(5n-1)/2$ است. در نهایت از رابطه (13) داریم:

$$\phi_1(x)=(a_7+x)^{\frac{(n+1)}{2}},\ \phi_2(x)=(a_7+x)^{2n}$$
$$\phi_3(x)=T_w(x)=(a_7+x)^{\frac{(5n-1)}{2}}$$
$$\phi_4(x)=(a_7+x)^{\frac{(n-1)}{2}},\ U(x)=(a_7+x)^2 \quad (27)$$

و در نتایج آن $a_4=(n-1)/2$ است.

بنابراین همه ثابت‌های نشان داده شده طبق رابطه (9) به شکل (28) هستند:

$$a_1=\frac{n+1}{2},\ a_2=\frac{n-1}{2},\ a_3=2n,$$
$$a_4=\frac{n-1}{2},\ a_5=\frac{5n-1}{2} \quad (28)$$

با جایگزین کردن رابطه (28) در رابطه (8) رابطه (29) به دست می‌آید:

جدول 1 خواص ترموفیزیکی آب خالص و نانوذرات مس[27].

خواص ترموفیزیکی	نانو ذرات مس	آب خالص
ρ (kgm^{-3})	8933	997/1
C_p (Jkg^{-1}K^{-1})	385	4179
k (Wm^{-1}K^{-1})	401	0/613
$\beta\times10^5$ (K^{-1})	1/67	21

$$\frac{\vartheta_{nf}}{\vartheta_f}f''' + \frac{n+1}{2}ff'' - nf'^2 - 2nP - \frac{n-1}{2}\eta P' = 0$$
$$P' = \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f}\lambda\theta$$
$$\frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f}\frac{1}{Pr}\theta'' + \frac{n+1}{2}f\theta' - \frac{5n-1}{2}f'\theta = 0 \qquad (29)$$

شرایط مرزی برای متغیرهای موجود در معادلات دیفرانسیل معمولی[1] به صورت رابطه (30) بازنویسی می‌شوند:

$$f'(0) = 0\,, f(0) = 0\,, \theta(0) = 1\,,$$
$$f''(\infty) = 1\,, \theta(\infty) = 0\,, P(\infty) = 0 \qquad (30)$$

2-1- تغییرات خواص نانوسیال

برای تکمیل معادلات حاکم، محاسبه خواص ترموفیزیکی نانوسیال است، خواصی نظیر چگالی، ضریب انبساط حجمی، ظرفیت حرارتی و ضریب پخش حرارتی نانوسیال برحسب خواص سیال خالص و نانوذرات جامد به صورت رابطه (31) محاسبه می‌شوند وسایر خواص ترموفیزیکی آب و نانوذره مس در جدول 1 آورده شده است.[28]:

$$\rho_{nf} = (1-\varphi)\rho_f + \varphi\rho_s$$
$$(\rho\beta)_{nf} = (1-\varphi)(\rho\beta)_f + \varphi(\rho\beta)_s$$
$$(\rho c_p)_{nf} = (1-\varphi)(\rho c_p)_f + \varphi(\rho c_p)_s$$
$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}} \qquad (31)$$

در این رابطه (31) φ درصد حجمی نانوذرات است و اندیسهای f ، s و nf به ترتیب اشاره به سیال خالص، نانوذرات و نانوسیال دارد.

برای مدل کردن لزجت دینامیکی نانوسیال نیز می‌توان از رابطه معروف به "بریکمن" به صورت رابطه (32) استفاده کرد [28]:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}} \qquad (32)$$

برای محاسبه ضریب هدایت گرمایی نانوسیال (k_{eff}) هم مدلی پیشنهاد شده است. در این مدل برای دو جزء مستقل از ذرات کروی سوسپانسیون، k_{eff} به صورت رابطه (33) نوشته می‌شود [29]:

$$k_{eff} = k_f[1 + \frac{k_s A_s}{k_f A_f} + c k_s Pe\frac{A_s}{k_f A_f}] \qquad (33)$$

که در آن، $Pe = u_s d_s/\alpha_f$ و k_s و k_f به ترتیب ضرایب هدایت حرارتی نانوذرات مس و سیال خالص هستند. برای نانوسیال آب- مس، c=36000 پیشنهاد شده است و d_s=100 nm قطر نانوذرات جامد است. همچنین [30] از (34) و (35):

$$\frac{A_s}{A_f} = \frac{d_f}{d_s}\frac{\varphi}{1-\varphi} \qquad (34)$$

d_f اندازه مولکولی سیال مبنا نامیده می‌شود و برحسب انگستروم برابر است با:

$$d_f = 2\text{Å}, \text{Å} = 0.1\text{nm} \qquad (35)$$

در این روابط همچنین u_s، سرعت حرکت براونی نانوذرات، برابر است با(36):

$$u_s = \frac{2k_b\theta(\eta)}{\pi\mu_f {d_s}^2} \qquad (36)$$

$k_b = 1.3807\times10^{-23}\ JK^{-1}$ ثابت بولتزمن نامیده می‌شود. لزجت دینامیکی برای آب $\mu_f = 9.09452\times10^{-4}\ Pa.s$ و عدد پرانتل آن نیز $Pr = 6.2$ درنظر گرفته شده است.

1- Ordinary differential equation

2-2- محاسبه ضریب اصطکاک و عدد نوسلت

پس از حل عددی تشابهی معادلات حاکم و بکارگیری روابط مربوط به خواص نانوسیال، می‌توان با استفاده از نتایج خروجی حاصل، مقادیر $f_m = [\mu_{nf}/\mu_f]\, f''(0)$ و $Nu_m = -[k_{nf}/k_f]\,\theta'(0)$ را بدست آورد.

ضریب اصطکاک و عدد نوسلت محلی در جریان را می‌توان با استفاده از این دو پارامتر به صورت رابطه (37) و (38) محاسبه نمود:

$$Re_x^{\frac{1}{2}}\frac{C_{f_x}}{2} = (a_7 + x)^{\frac{3n-1}{2}} f_m \qquad (37)$$
$$Re_x^{\frac{-1}{2}}Nu_x = (a_7 + x)^{\frac{n-1}{2}} Nu_m \qquad (38)$$

که در آنها a_7 ثابت انتگرال‌گیری است [16].

3- روش حل عددی

معادلات حاکم با استفاده از گسسته سازی اختلاف محدود مرتبه اول به شکل جبری رابطه (39) نوشته می شوند:

$$\delta f_j - \delta f_{j-1} - \frac{h_j}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) = r_j$$
$$\delta u_{j+1} - \delta u_j - \frac{h_{j+1}}{2}(\delta v_{j+1} + \delta v_j) = t_{j+1}$$
$$\frac{h_j}{2}\frac{(n+1)}{2}\frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}}[v_j\delta f_j + v_{j-1}\delta f_{j-1}] - h_j n\frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}}[u_j\delta u_j + u_{j-1}\delta u_{j-1}]$$
$$+\left[\frac{h_j}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}}\right][f_j\delta v_j + f_{j-1}\delta v_{j-1}] + [\delta v_j - \delta v_{j-1}]$$
$$-nh_j\frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}}[\delta p_j + \delta p_{j-1}]$$
$$-\left[\frac{h_j}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\eta_j\lambda\frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}}\frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f}\right][\delta\theta_j + \delta\theta_{j-1}] = s_j$$
$$\delta p_{j+1} - \delta p_j - \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f}\lambda\frac{h_{j+1}}{2}(\delta\theta_{j+1} + \delta\theta_j) = z_{j+1}$$
$$\delta\theta_{j+1} - \delta\theta_j - \frac{h_{j+1}}{2}(\delta g_{j+1} + \delta g_j) = q_{j+1}$$
$$\left[\frac{h_j}{2}Pr\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\alpha_f}{\alpha_{nf}}\right][g_j\delta f_j + g_{j-1}\delta f_{j-1}]$$
$$-\left[\frac{h_j}{2}Pr\left(\frac{5n-1}{2}\right)\frac{\alpha_f}{\alpha_{nf}}\right][\theta_j\delta u_j + \theta_{j-1}\delta u_{j-1}]$$
$$-\left[\frac{h_j}{2}Pr\left(\frac{5n-1}{2}\right)\frac{\alpha_f}{\alpha_{nf}}\right][u_j\delta\theta_j + u_{j-1}\delta\theta_{j-1}]$$
$$+[\delta g_j - \delta g_{j-1}] + [\frac{h_j}{2}Pr\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\alpha_f}{\alpha_{nf}}][\delta g_j + \delta g_{j-1}] = k_j \qquad (39)$$

در روش حل عددی کلرباکس [31] معادلات جبری فوق با استفاده از روش نیوتن به صورت طولی درآمده و در قالب برداری- ماتریسی رابطه (40)و (41) بازنویسی می‌شوند:

$$A_j\delta_{j-1} + B_j\delta_j + C_j\delta_{j+1} = R_j \qquad (40)$$

که در آن A، B و C ماتریسهای 6x6 حاوی ضرایب معلوم هستند و

$$R_j = [r_j \quad s_j \quad t_{j+1}\, z_{j+1} \quad k_j \quad q_{j+1}]^T$$
$$\vec{\delta}_j = [\delta f_j \quad \delta u_j \quad \delta v_j\, \delta p_j \quad \delta\theta_j \quad \delta g_j]^T \qquad (41)$$

سپس با استفاده از روش حل ماتریس سه قطری تی‌دی‌ام‌ای[2] و با اعمال شرایط مرزی مربوطه، معادلات فوق برای محاسبه متغیرهای جریان حل می‌شوند [32]. برای اعمال روش حل عددی، برنامه‌ای کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شده است. دقت محاسبات نیز برای همگرایی حل عددی برای همه متغیرهای میدان برابر با 10^{-7} در نظر گرفته شده است.

4- بررسی و تحلیل نتایج

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و شرایط مرزی حاصل، با توجه به‌استفاده از حل‌تشابهی، استفاده از یک شبکه حل یک‌بعدی در راستای عرضی جریان برای محاسبه تغییرات میدان جریان کفایت می‌کند. لذا از یک شبکه غیریکنواخت در راستای عمود بر سطح استفاده شده است.(شکل 1) در

2- TDMA

این شبکه‌بندی، نسبت فاصله هر دو گره متوالی ثابت است رابطه (42):

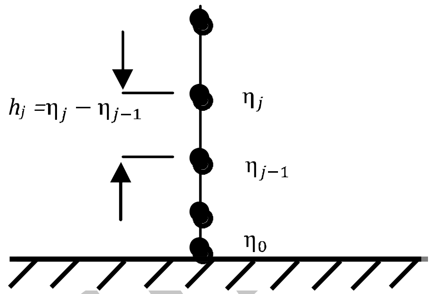
$$h_j = \mathrm{K}h_{j-1} \tag{42}$$

همچنین فاصله تا گره j ام از رابطه (43) بدست می‌آید:

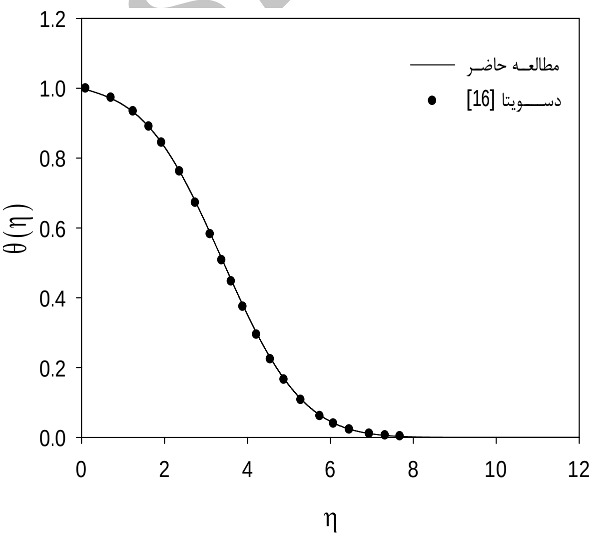
$$\eta_j = h_1 \frac{\mathrm{K}^j - 1}{\mathrm{K} - 1} \quad j = 1,2, \dots , M \quad \mathrm{K} > 1 \tag{43}$$

در رابطه (43)، h_1 طول اولین گام و K، ضریب کشیدگی یا نسبت فاصله هر دو گره متوالی است. در مسأله حاضر، از مقادیر زیر در حل عددی استفاده شده است:

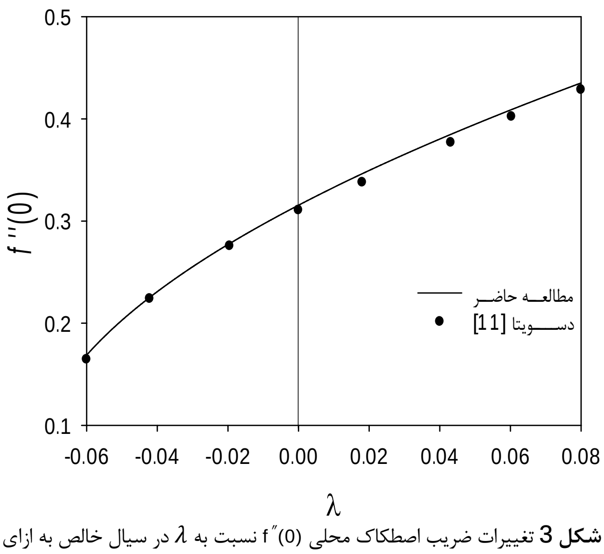
$$h_1 = 0.0001 \quad K = 1.01$$



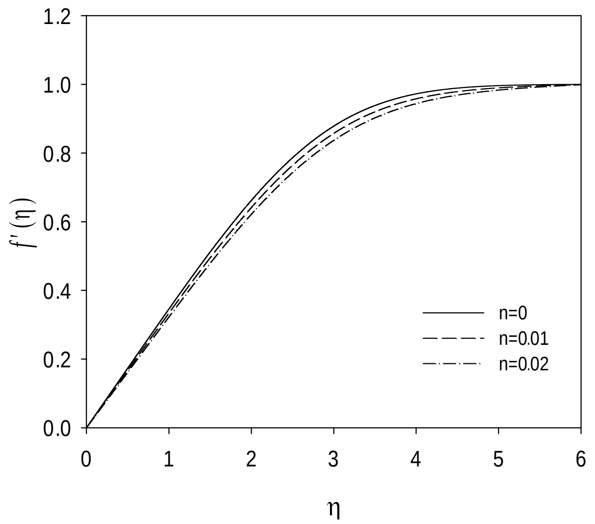
شکل 1 نمائی ساده از شبکه‌بندی یک‌بعدی عرضی و غیریکنواخت استفاده شده



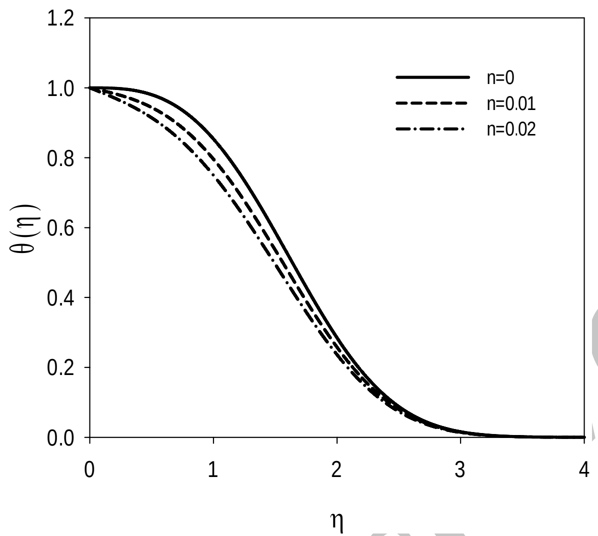
شکل 2 پروفیل دما در سیال خالص به ازای n=0.01، λ=-0.03 و Pr = 0.7



شکل 3 تغییرات ضریب اصطکاک محلی $f''(0)$ نسبت به λ در سیال خالص به ازای n=0.01 و Pr=0.7



شکل 4 پروفیل سرعت نانوسیال(φ=0.04) در دماهای سطح (n) مختلف در جریان جابجائی ترکیبی ($\lambda = -0.03$)



شکل 5 پروفیل دمای نانوسیال (φ=0.04) در دماهای سطح (n) مختلف در جریان جابجائی ترکیبی ($\lambda = -0.03$)

با در نظر گرفتن مقادیر فوق، تعداد گره‌های محاسباتی در این روش برابر 170 خواهد بود. همچنین به منظور بررسی صحت عملکرد کد عددی نوشته شده، مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده با تحقیقات مشابه گذشته صورت گرفته است. برای این منظور حل تشابهی لایه مرزی برای جریان سیال خالص با جابجایی ترکیبی عبوری از یک صفحه صاف افقی بررسی شده است. در شکل 2 پروفیل دما به ازای n=0.01، λ=-0.03 و Pr = 0.7 و در شکل 3 تغییر ضریب اصطکاک محلی $f''(0)$ با λ به ازای n=0.01 و Pr=0.7، با نتایج مطالعه دسویتا [16] مقایسه شده است. در هر دو شکل نتایج بدست آمده تطابق بسیار خوبی با مطالعه مشابه قبلی دارد که این تطابق می‌تواند موید دقت و کارائی روش انتخاب شده در حل مساله لایه مرزی با جابجائی ترکیبی باشد.

4-1- بررسی پروفیل‌های سرعت و دما

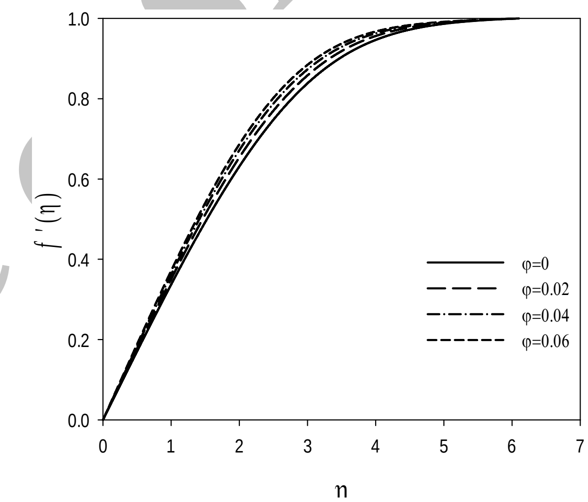
در شکل 4 پروفیل سرعت $f'(\eta)$ به ازای φ=0.04، $\lambda = -0.03$ در سه توان مختلف n (دمای سطح) رسم شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، در هر فاصله مشخصی از سطح (η)، با افزایش n سرعت در لایه مرزی کاهش می‌یابد. دلیل این امر، وجود خاصیت شناوری در جریان، بواسطه وجود

جابجایی آزاد در مساله می‌باشد که می‌تواند سبب کاهش سرعت با افزایش دمای دیوار می‌شود. با نزدیک شدن به دیوار یا به لبه لایه مرزی هیدرودینامیکی، تأثیر n بر پروفیل سرعت کمتر خواهد شد.

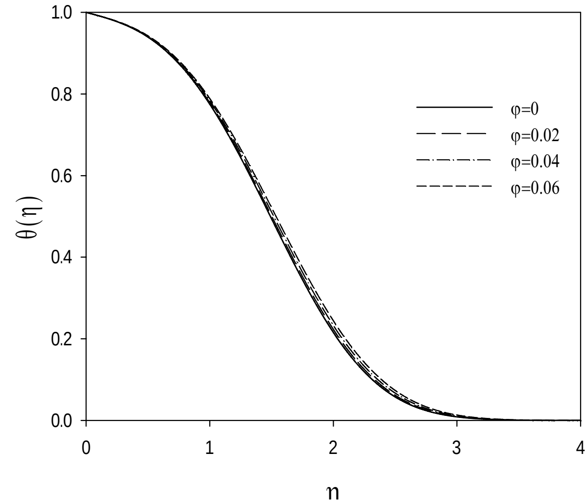
پروفیل دما $\theta(\eta)$ نیز در شکل 5 به ازای $\varphi=0.04$ و $\lambda = -0.03$ در سه توان مختلف n (دمای سطح) نشان داده شده است. دیده می‌شود که با افزایش n، مقدار $\theta(\eta)$ در هر فاصله‌ای از سطح کاهش می‌یابد. با نزدیک شدن به سطح آزاد و لبه لایه مرزی حرارتی، مجدداً تأثیر n بر پروفیل دما کمتر می‌شود. علاوه بر آن می‌توان گفت که تغییرات پروفیل دما ناشی از تغییر n، در نزدیکی دیوار محسوس‌تر بوده که البته قابل انتظار است.

در شکل 6، اثر کسر حجمی نانوذرات بر پروفیل سرعت در $\lambda = 0.04$ و n=0.01 مشاهده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، نانوسیال تأثیر ناچیزی بر سرعت می‌گذارد. افزایش نانوسیال به مقدار اندکی سرعت را در داخل لایه مرزی افزایش و ضخامت لایه مرزی را کاهش می‌دهد. دلیل این امر وجود نانوذرات مس در جریان می‌باشد که سبب می‌شود گرادیان فشار در جریان آزاد منفی‌تر شود و از رشد لایه مرزی جلوگیری نماید.

در شکل 7، اثر کسر حجمی نانوذرات بر پروفیل دما در $\lambda = 0.04$ و n=0.01 مشاهده می‌شود.



شکل 6 پروفیل سرعت نانوسیال در کسر حجمی نانوذرات مختلف در جریان جابجائی ترکیبی ($n = 0.01, \lambda = 0.04$)



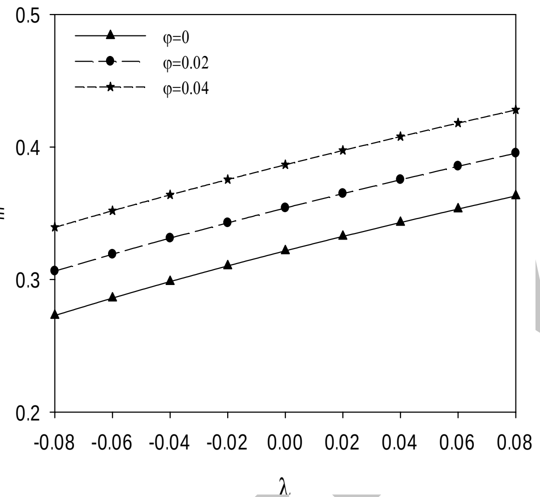
شکل 7 پروفیل دمای نانوسیال در کسر حجمی نانوذرات مختلف در جریان جابجائی ترکیبی ($n = 0.01, \lambda = 0.04$)

با توجه به این شکل دیده می‌شود که با افزایش کسر حجمی نانوسیال، ضخامت لایه مرزی حرارتی اندکی افزایش می‌یابد و شرط حرارتی روی سطح بهتر به‌داخل جریان نانوسیال نفوذ می‌کند به طوری که در یک فاصله مشخص از دیوار با افزایش کسر حجمی نانوسیال مقدار $\theta(\eta)$ بیشتر می‌شود. این رفتار یه این دلیل است که ضریب انتقال حرارت هدایتی نانوسیال با افزایش کسر حجمی نانوذردات بیشتر می‌شود و سبب می‌شود که حرارت از سطح دیوار بهتر به داخل جریان نانوسیال نفوذ کند.

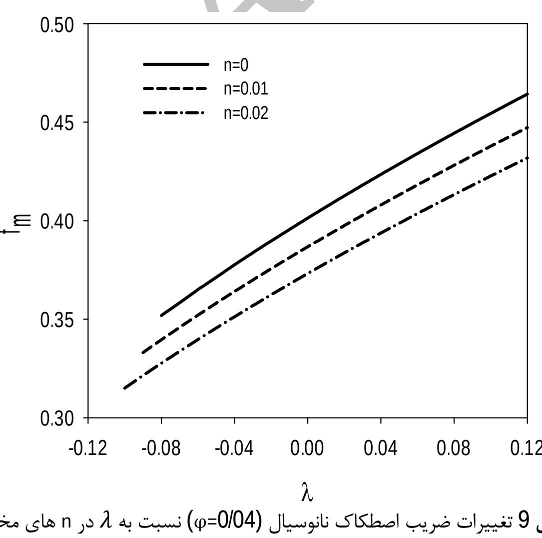
4-2- بررسی تغییرات ضریب اصطکاک

در شکل 8 تغییرات ضریب اصطکاک روی سطح با پارامتر جابجائی ترکیبی و تاثیر تغییر درصد حجمی نانوذرات بر این تغییرات به ازای n=0.01 نشان داده شده است. از این نمودار چنین بر می‌آید که همواره با افزایش λ، ضریب اصطکاک روند افزایشی خواهد داشت. این افزایش بدلیل افزایش گرادیان‌های سرعت در جریان با افزایش خاصیت شناوری موافق با جهت جریان در جریانهای جابجائی آزاد، که λ معیاری از آن است، قابل انتظار می‌باشد.

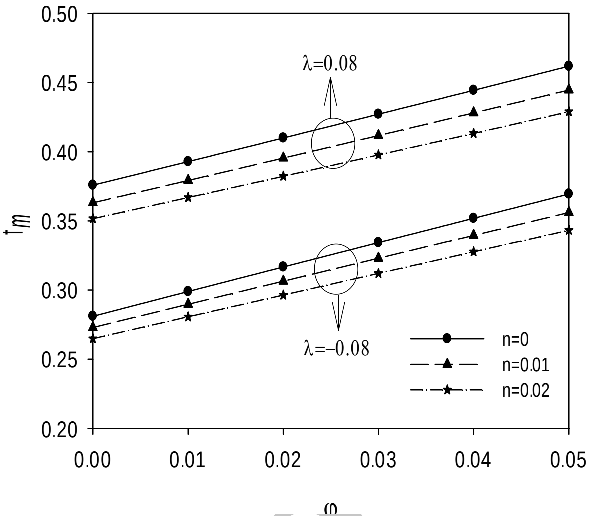
این شکل همچنین نشان می‌دهد که با افزایش درصد حجمی نانوذرات، ضریب اصطکاک به ازای تمامی مقادیر λ افزایش می‌یابد. دلیل این امر افزایش لزجت نانوسیال با توجه به افزایش کسر حجمی نانوذرات می‌باشد.



شکل 8 تغییرات پارامتر معرف ضریب اصطکاک نانوسیال f_m نسبت به λ در φ های مختلف برای n=0.01



شکل 9 تغییرات ضریب اصطکاک نانوسیال (φ=0/04) نسبت به λ در n های مختلف



شکل 10 پارامتر معرف ضریب اصطکاک f_m برحسب φ در n های مختلف برای جریان با شناوری هم‌جهت λ = 0.08 و شناوری خلاف جهت λ = −0.08

جدول 2 تغییرات ضریب اصطکاک نانوسیال f_m به ازای مقادیر مختلف λ، n و φ

λ	n		φ=0	φ=0/02	φ=0/04
-0/04	0	f_m =	0/3081	0/3428	0/3776
		%Δ_f =	0	11/26	22/55
	0/02	f_m =	0/2893	0/3202	0/3512
		%Δ_f =	0	10/68	21/39
0	0	f_m =	0/3324	0/3668	0/4013
		%Δ_f =	0	10/34	20/72
	0/02	f_m =	0/3116	0/3422	0/3731
		%Δ_f =	0	9/82	19/73
0/04	0	f_m =	0/3549	0/389	0/4235
		%Δ_f =	0	9/6	19/33
	0/02	f_m =	0/3323	0/3629	0/3938
		%Δ_f =	0	9/2	18/5

تغییرات ضریب اصطکاک با پارامتر جابجائی آزاد (λ) برای نانوسیالی با φ=0.04 به ازای دماهای مختلف سطح (n) در شکل 9 آمده است. می‌توان دید که با افزایش n، ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد. این کاهش با افزایش λ بیشتر هم می‌شود. دلیل آن ایجاد گرادیان فشار مطلوب بر اثر نیروهای شناوری هم‌جهت با جریان ($\lambda > 0$) است.

شکل 10 تأثیر تغییر کسر حجمی نانوذرات را بر تغییرات ضریب اصطکاک در دماهای سطح مختلف n برای جریان جابجائی ترکیبی هم‌جهت جریان با λ=0.08 و مخالف جهت جریان با λ=-0.08 نشان می‌دهد. برای حالتی که نیروی شناوری هم‌جهت با جریان است، با افزایش کسر حجمی نانوذرات، ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد که این ناشی از افزایش لزجت سیال حاوی نانوذرات و درنتیجه افزایش تنش برشی در جریان است. همچنین مشاهده می‌شود که در تمامی مقادیر φ، با افزایش n ضریب اصطکاک کاهش یافته است که نشان دهنده تأثیر دمای سطح بر کاهش لزجت سیال و درنتیجه کاهش ضریب اصطکاک مجاور سطح می‌باشد.

همچنین برای حالتی که نیروی شناوری در خلاف جهت جریان است، می‌توان دید که با افزایش کسر حجمی نانوذرات و همچنین با کاهش n، ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد. با این حال برای حالتی که نیروهای شناوری مخالف جهت جریان وجود دارد، مشاهده می‌شود که اثر دمای سطح بر تغییر ضریب اصطکاک در حضور مقادیر بیشتر نانوذرات، بیشتر است.

در جدول 2 ضرایب اصطکاک نانوسیال به ازای مقادیر مختلف λ و n و کسر حجمی نانوذرات جمع‌آوری شده است. در این جدول، %Δ_f بیانگر درصد افزایش ضریب اصطکاک ناشی از افزایش کسر حجمی نانوذرات در سیال پایه است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

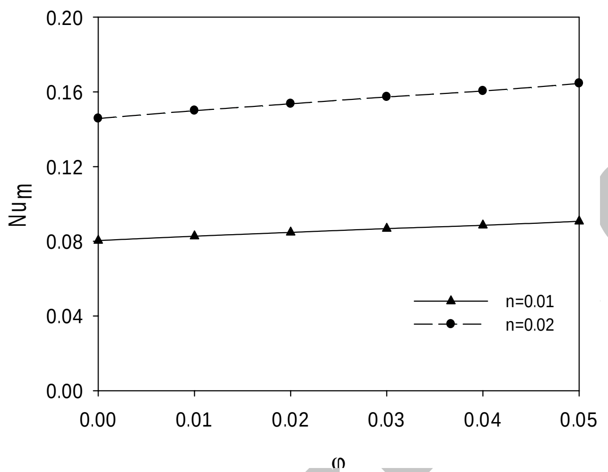
$$\%\Delta_f = [(f_{m_{nf}} - f_{m_f})/f_{m_f}] \times 100$$

دیده می‌شود که کمترین تأثیر حضور نانوذرات بر ضریب اصطکاک، در n=0.02 و به ازای λ=0.04 رخ می‌دهد. همچنین از داده‌های این جدول می‌توان نتیجه گرفت که بیشترین تاثیر افزایش کسر حجمی نانوذرات بر ضریب اصطکاک، در n=0 و به ازای λ=-0.04 است.

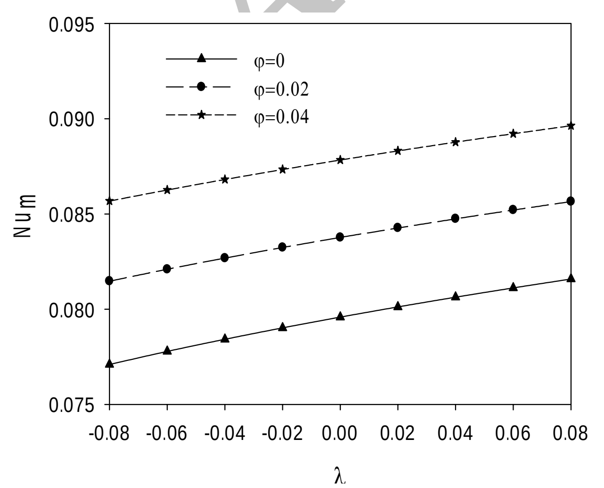
3-4- بررسی تغییرات عدد نوسلت

پارامتر معرف عدد نوسلت Nu_m برحسب کسر حجمی نانوذرات در دماهای سطح مختلف و به ازای λ=0.04 در شکل 11 آورده شده است.

همانگونه که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش کسرحجمی نانوذرات، نوسلت افزایش می‌یابد، که این بیانگر اثر حضور نانوذرات در افزایش انتقال حرارت از سطح می‌باشد. همچنین می‌توان دید که با افزایش دمای سطح دیوار، نوسلت نیز افزایش می‌یابد. این اثر افزایش در n=0.02، بیشتر است.



شکل 11 تغییرات پارامتر معرف عدد نوسلت Nu_m نسبت به φ در n=0.01,0.02 به ازای λ = 0.04



شکل 12 تغییرات پارامتر معرف عدد نوسلت Nu_m نسبت به λ در کسرهای حجمی مختلف نانوذرات برای n=0.01

جدول 3 تغییرات عدد نوسلت نانوسیال Nu_m به ازای مقادیر مختلف λ، n و φ

λ	n		φ=0	φ=0/02	φ=0/04
-0/04	0/01	Nu_m=	0/0784	0/0826	0/0868
		$\%\Delta_{Nu}$ =	0	5/35	10/71
	0/02	Nu_m=	0/1422	0/1498	0/1573
		$\%\Delta_{Nu}$ =	0	5/34	10/61
0	0/01	Nu_m=	0/0796	0/0837	0/0878
		$\%\Delta_{Nu}$ =	0	5/15	10/3
	0/02	Nu_m=	0/1443	0/1518	0/1592
		$\%\Delta_{Nu}$ =	0	5/19	10/32
0/04	0/01	Nu_m=	0/0806	0/0847	0/0887
		$\%\Delta_{Nu}$ =	0	5/08	10/05
	0/02	Nu_m=	0/1463	0/1537	0/1609
		$\%\Delta_{Nu}$ =	0	5/05	9/98

شکل 12 تاثیر پارامتر شناوری جریان λ را بر عدد نوسلت در کسرهای حجمی مختلف نانوذرات نشان می‌دهد. با افزایش λ مقدار عدد نوسلت افزایش یافته است که با توجه به افزایش خاصیت شناوری در جریان با افزایش λ امری قابل انتظار است. همچنین می‌توان مشاهده نمود که با افزایش کسر حجمی نانوذرات، انتقال حرارت در نانوسیال بدلیل اثرگذاری نانوذرات در تغییر ضریب هدایت حرارتی سیال پایه، افزایش یافته است. در جدول 3 مقادیر عدد نوسلت به ازای مقادیر مختلف λ و n به ازای کسرهای حجمی مختلف نانوذرات جمع‌آوری شده است.

در جدول 3 $\%\Delta_{Nu}$ بیانگر درصد افزایش نوسلت در اثر تغییر کسر حجمی نانوذرات است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\%\Delta_{Nu} = [(Nu_{m_{nf}} - Nu_{m_f})/Nu_{m_f}] \times 100)$$

همانگونه که از داده‌های جدول 3 برمی‌آید، بیشترین افزایش عدد نوسلت ناشی از حضور نانوذرات، در n=0.01 و به ازای λ=-0.04 رخ می‌دهد. همچنین کمترین تاثیر حضور نانوذرات بر افزایش نوسلت، در n=0.02 و به ازای λ=0.04 مشاهده می‌شود.

5- نتیجه گیری

جریان جابجایی ترکیبی نانوسیال در لایه مرزی بدلیل اهمیت و کاربرد جریان در مسائل متعدد مهندسی و در عین حال سادگی حل معادلات لایه مرزی نسبت به معادلات ناویر-استوکس از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است که در این مقاله مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت. معادلات لایه مرزی حاکم بر جریان نانوسیال به صورت عددی و با استفاده از طرح تفاضل محدود ضمنی، به روش کلرباکس حل شده‌اند و حل تشابهی و نتایج عددی در مورد تغییر در شکل پروفیل‌های سرعت و دما، ضریب اصطکاک و انتقال حرارت در جریان تحت تأثیر تغییر کسر حجمی نانوذرات، پارامتر شناوری و دمای سطح مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل از این مطالعه را می‌توان در موارد زیر خلاصه کرد:

- با افزایش n، مقدار θ(η) در هر فاصله‌ای از سطح کاهش می‌یابد. با نزدیک شدن به سطح آزاد و لبه لایه مرزی حرارتی، مجددا تاثیر n بر پروفیل دما کمتر می‌شود.

- با افزایش اثر شناوری در جریان جابجائی ترکیبی، ضریب اصطکاک افزایش یافته است. بطوریکه پارامتر معرف ضریب اصطکاک برای نانوسیال آب- مس با کسر حجمی 4 درصدی نسبت به سیال خالص درحدود 20% افزایش داشته است. با این وجود در مقادیر پائین‌تر پارامتر جابجائی ترکیبی، تاثیر حضور نانوذرات بر افزایش ضریب اصطکاک بیشتر خواهد شد.

- افزایش کسر حجمی نانوذرات و پارامتر جابجائی ترکیبی، هر دو منجر به افزایش عدد نوسلت و درنتیجه انتقال حرارت بیشتر در جریان می‌شود؛ بطوریکه پارامتر معرف عدد نوسلت جریان برای نانوسیال آب- مس با کسر حجمی 4 درصدی نسبت به سیال خالص درحدود 10% افزایش داشته است.

- افزایش دمای سطح موجب افزایش عدد نوسلت و کاهش ضریب اصطکاک می‌شود، با این حال اثر افزایش دمای سطح بر این تغییرات به ازای کسرهای حجمی بالاتر نانوذرات و در پارامترهای جابجائی ترکیبی بالاتر، محسوس‌تر است.

6- فهرست علائم

c	ثابت تجربی
C_{fx}	ضریب اصطکاک محلی
C_p	گرمای ویژه ($Jkg^{-1}K^{-1}$)
d_s	قطر نانوذرات جامد (nm)
d_f	اندازه مولکولی سیال مبنا (d_f = 2Å)
f	تابع جریان بدون بعد
f_m	پارامتر معرف ضریب اصطکاک
Gr	عدد گراشهف ($Gr = g\beta\Delta TL^3/\upsilon^2$)
k	ضریب هدایت حرارتی ($Wm^{-1}K^{-1}$)
k_b	ثابت بولتزمن $k_b = 1.3807 \times 10^{-23}$ (JK^{-1})
L	طول مشخصه (m)
N	توان دمای دیوار
Nu_m	پارامتر معرف عدد نوسلت
Nu_x	عدد نوسلت محلی
$\bar{p}$	فشار سیال (Pa)
P	فشار بدون بعد ($p = (\bar{p} - p_\infty)/\rho U_0^2$)
P	پروفیل فشار بدون بعد
Pr	عدد پرانتل ($Pr = \upsilon/\alpha$)
P_e	عدد پکلت ($Pe = u_s d_s/\alpha$)
Re	عدد رینولدز ($Re = U_0 L/\vartheta$)
$\bar{T}$	دما (K)
T	دمای بدون بعد ($T = (\bar{T} - T_\infty)/\Delta T$)
$\bar{u}, \bar{v}$	مولفه بردار سرعت در راستای $\bar{y}$و$\bar{x}$ (ms^{-1})
u, v	مولفه بدون بعد سرعت ($u = \bar{u}/U_0$, $v = Re^{1/2}(\bar{v}/U_0)$)
U_∞	سرعت مشخصه (ms^{-1})
u_s	سرعت حرکت براونی (ms^{-1})
$\bar{x}$ و $\bar{y}$	مختصات کارتزین (m)

علایم یونانی

α	ضریب پخش حرارتی (m^2s^{-1})
Β	ضریب انبساط گرمایی (1/K)
μ	لزجت دینامیکی (Pa.s)
ρ	چگالی (kgm^{-3})
υ	لزجت سینماتیکی (m^2s^{-1})
Λ	پارامتر جابجایی ترکیبی ($\lambda = Gr/Re^{5/2}$)
ΔT	دمای مشخصه ($\Delta T = \bar{T}_w - T_\infty$)
H	متغیر تشابهی

Θ	پروفیل دمای بدون بعد
Φ	کسر حجمی نانوذرات جامد

زیرنویس‌ها

Eff	موثر
F	سیال
Nf	نانو سیال
S	نانوذرات جامد
∞	جریان آزاد
W	دیوار
X	محلی

7- مراجع

[1] L. Prandtl, Uberflı ussigkeitsbewegung bei sehrkleiner Reibung, Verh. III. Intern.Math.Kongr., Heidelberg, 1904, S.484{491, Teubner, Leipzig, 1905.

[2] J.D. Anderson, Ludwig Prandtl's Boundary Layer, *Physics Today,* December, 2005.

[3] O. Aydin, A. Kaya, Laminar boundary layer flow over a horizontal permeable flat plate, *Applied Mathematics and Computation,* Vol. pp. 161, 229–240, 2005.

[4] P. D. Weidman, D. G. Kubitschek, A. M. J. Davis, The effect of transpiration on self-similar boundary layer flow over moving surfaces, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 44, pp. 730–737, 2006.

[5] A. Ishak, R. Nazar, I. Pop, Mixed convection boundary layers in the stagnation-point flow toward a stretching vertical sheet, *Meccanica,* Vol. 41, pp. 509–518, 2006.

[6] K. Venkatasubbaiah, T. K. Sengupta, Mixed convection flow past a vertical plate: Stability analysis and its direct simulation, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 48, pp. 461–474, 2009.

[7] O. D. Makinde, Similarity solution of hydromagnetic heat and mass transfer over a vertical plate with a convective surface boundary condition, *International Journal of the Physical Sciences,* Vol. 5, pp. 700–710, 2010.

[8] K. Vajravelu, K. V. Prasad, C. Ng, Unsteady convective boundary layer flow of a viscous fluid at a vertical surface with variable fluid properties, *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* Vol. 14, pp. 455–464, 2013.

[9] K. Bhattacharyya, S. Mukhopadhyay, G.C. Layek, Similarity solution of mixed convective boundary layerslip flow over a vertical plate, *Ain Shams Engineering Journal*,Vol. 4, pp. 299-305, 2013.

[10] N. Afzal, T. Hussain, Mixed convection over a horizontal plate, *J. Heat Trans.* 106, 240–241, 1986.

[11] W. Schneider, A similarity solution for combined forced and free convection flow over a horizontal plate, Int. *J. Heat Mass Trans,* Vol. 22, pp. 1401–1406, 1979.

[12] A. Ishak, R. Nazar, I. Pop, The Schneider problem for a micropolar fluid, *Fluid. Dyn.* Res, Vol. 38, pp. 489–502, 2006.

[13] A. Ridha, Aiding flows non-unique similarity solution of mixed-convection boundary-layer equation, *J. Appl. Math. Phys.* (ZAMP), Vol. 47, pp. 341–352, 1996.

[14] H. Steinrück, A review of the mixed convection boundary-layer flow over a horizontal cooled plate, *GAMM Mitteilung Heft,* Vol. 2, pp. 127–158, 2001.

[15] E. Magyari, I. Pop, B. Keller, Mixed convection boundary-layer flow past a horizontal permeable flat plate, *Fluid Dyn.* Res. Vol. 31, pp. 215-225, 2002.

[16] L. Deswita, R. Nazar , A. Ishak , R. Ahmad , I. Pop, Similarity solutions for mixed convection boundary layer flow over a permeable horizontal flat plate, *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 217, pp. 2619-2630, 2010.

[17] S. V. Subhashini, N. Samuel, I. Pop, Numerical investigation of dual solutions for double diffusive convection from a permeable horizontal flat plate*, International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 55, pp. 4981-4986, 20112.

[18] F. M. Allan, M. A. Hajji, On The Similarity Solution of Nano-Fluid Flow Over A Moving Flat Plate Using The Homotopy Analysis Method, *Numerical Analysis and Applied Mathematics,* Vol. 1479, pp. 1833-1837, 2012.

[19] A. M. Rashad, M. A. El-Hakiem, M. M. M. Abdou, Natural convection boundary layer of a non-Newtonian fluid about a permeable vertical cone embedded in a porous medium saturated with a nanofluid, *Computers and Mathematics with Applications,* Vol. 62, pp. 3140-3151, 2011.

[20] A.M. Rashad, A.J. Chamkha, M. Modather, Mixed convection boundary-layer flow past a horizental circular cylander embedded in a porous medium filled with a nanofluid under convective boundary condition, *Computers & Fluids,* Vol. 86,pp. 380-388, 2013.

[21] P. Rana, R. Bhargava, Numerical study of heat transfer enhancement in mixed convection flow along a vertical plate with heat source/sink utilizing nanofluids, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 16, pp. 4318-4334, 2011.

[22] M. M. Rashidi, O. Anwar Beg, M. Asadi, M. T. Rastegari, DTM- Padé Modeling of Natural Convective Boundary Layer Flow of a Nanofluid Past a Vertical Surface, *Int. J. of Thermal & Environmental Engineering,* Vol. 4, No. 1, pp. 13-24, 2012.

[23] Ch. RamReddy, P. V. S. N. Murthy, A. J. Chamkha, A. M. Rashad, Soret effect on mixed convection flow in a nanofluid under convective boundary condition, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 64, pp. 384-392, 2013.

[24] Md. J. Uddin, W. A. Khan, A. I. Md. Ismail, Free Convection Boundary Layer Flow from a Heated Upward Facing Horizontal Flat Plate Embedded in a Porous Medium Filled by a Nanofluid with Convective Boundary Condition, *Transp Porous Med,* Vol. 92, pp. 867-881, 2012.

[25] M. M. Rahman, M. A. Al-Lawatia, I. A. Eltayeb, N. Al-Salti, Hydromagnetic slip flow of water based nanofluids past a wedge with convective surface in the presence of heat generation (or) absorption, *International Journal of Thermal Sciences,* Vol. 57, pp. 172-182, 2012.

[26] N. Md. Arifin, R. Nazar, I. Pop, Similarity Solution of Marangoni Convection Boundary Layer Flow over a Flat Surface in a Nanofluid, *Journal of Applied Mathematics,* A. ID. 634746, pp. 8, 2013.

[27] A. Arefmanesh, M. Amini, M. Mahmoodi, M. Najafi, Buoyancy-driven heat transfer analysis in two-square duct annuli filled with a nanofluid, *European Journal of Mechanics B/Fluids,*Vol.33, pp. 95–104, 2012.

[28] H.C. Brinkman, The Viscosity of concentrated suspensions and solution, *Chem. Phys.*, Vol. 20, pp. 571–581, 1952.

[29] H.E. Patel, T. Sundararajan, T. Pradeep, A. Dasgupta, N. Dasgupta, S. K. Das, A micro-convection model for thermal conductivity of nanofluids, *Pramana, J. Phys,* Vol. 65, pp. 863–869, 2005.

[30] A. K. Santra, S. Sen, N. Chakraborty, Study of heat transfer due to laminar flow of copper-water nanofluid through two isothermally heated parallel plates, *Int. J. Therm. Sci*, Vol. 48, pp. 391–400, 2009.

[31] D.R. Jones, Free convection from a semi-infinite plate inclined at a small angle. *Quart. J. Mech. Appl. Math,* Vol. 26, pp. 77–98, 1973.

[32] T. Cebeci, P. Bradshaw, Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, *Springer,* New York, 1988.