



## تحلیل ارتعاشی تیر تیموشنکوی چند تکه دارای قیود انعطاف پذیر میانی تحت عبور سیستم دو درجه آزادی از روی آن

امیر مسعود بخششی<sup>1</sup>، علیرضا آریایی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان  
2- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان  
\* اصفهان، صندوق پستی 81746-73441، ariyai@eng.ui.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 26 دی 1392  
پذیرش: 19 اسفند 1392  
ارائه در سایت: 08 مهر 1393  
کلید واژگان:  
تیرهای چند تکه  
ترک  
تئوری تیر تیموشنکو  
روش ماتریس انتقال  
عبور سیستم چند درجه آزادی

### چکیده

روشی تحلیلی برای تعیین اثر شکستگی روی رفتار ارتعاشی تیرهای تیموشنکوی چند تکه دارای قیود انعطاف پذیر میانی تحت عبور سیستم دو درجه آزادی بسط داده شده است. در تیرهای چند تکه دارای قیود انعطاف پذیر میانی علاوه بر ناپیوستگی‌ها در محل قیود انعطاف پذیر، ناپیوستگی‌هایی هم در محل زاویه شکستگی وجود دارد. با بررسی شرایط سازگاری در محل هر شکستگی و ترک، روابط بین ضرایب شکل مود هر دو تکه به دست می‌آید. در ادامه با استفاده از روش تحلیلی ماتریس انتقال، حل‌های ویژه سیستم چند تکه به طور صریح قابل محاسبه است. پاسخ اجباری را می‌توان با استفاده از توابع ویژه تئوری بسط مودال به دست آورد. برای تعیین پاسخ اجباری از تعامد مودها استفاده می‌شود. از این رو با بررسی روابط، رابطه‌ای جدید در حالت وجود شکستگی برای تعامد مودها اثبات می‌شود. مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه شکستگی بر مقدار فرکانس‌های طبیعی افزوده می‌شود و بیشینه جابجایی تیر کاهش می‌یابد. همچنین وجود ترک باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی و افزایش جابجایی بیشینه در تیر می‌شود. اعتبار تکنیک بیان شده با مقایسه نتایج با دیگر مقالات و نتایج به دست آمده از حل‌های عددی فراهم شده است.

## Vibration analysis of a multi-span Timoshenko beam with flexible constraints subjected to a two degrees-of-freedom moving system

Amir Masoud Bakhshi, Ali Reza Ariai\*

Department of Mechanical engineering, Faculty of engineering, University of Isfahan, Iran  
\* P.O. Box 81746-73441, Isfahan, Iran, ariyai@eng.ui.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 16 January 2014  
Accepted 10 March 2014  
Available Online 30 September 2014

**Keywords:**  
Serial-Frame Structures  
Crack  
Timoshenko Beam Theory  
Transfer Matrix Method  
Moving System

### ABSTRACT

An analytical method is developed to determine the effects of the frame angle on the behavior of multi span Timoshenko beams with flexible constraints subjected to a two degrees-of-freedom moving system. In a multi-span beam, there are discontinuities in each frame angle in addition to discontinuities in flexible constraints. The correlation among every segment can be obtained considering the compatibility equations in frame angles and cracks. Eigen solutions of the serial-frame system can be calculated explicitly, using the analytical transfer matrix method. The forced responses can be determined by the modal expansion theory using the eigen functions. The orthogonality of the mode shapes is applied to calculate the forced response. A new formulation is introduced and confirmed for the orthogonality of the mode shapes for the case of a beam with the frame angle. It is observed that the natural frequencies will be increased by increasing the frame angles, while the maximum deflection of the beam will be decreased. The crack modeling leads to lower natural frequencies and higher maximum deflection for the beam in compared with the no crack model. The validity of the developed technique is probed by comparing the results with the analytical results reported in other articles and those from numerical solutions.

### 1- مقدمه

به عنوان یک کار مروری، فرایا [4] کتابی را در زمینه تحلیل عبور بارهای متحرک از روی تیر تحت شرایط مختلف بارگذاری منتشر کرد. چن [5] نشان داد که چگونه یک کد عمومی المان محدود<sup>1</sup> (FEM) می‌تواند به کار برده شود تا به طور کارآمدی سازه‌های پل (مثل تیر آهن I شکل) تحت بار عبوری متغیر را مدل کند. ضیائی [6] این کار را با استفاده از تکنیک المان مجزا<sup>2</sup> (DET) برای

برای بیش از یک قرن، سیستم‌های الاستیک تحت عبور بارهای متحرک در علوم مختلفی همچون مهندسی عمران، هوافضا و مکانیک مورد توجه بوده است. از نظر تاریخی این مسأله برای اولین بار در طراحی پل‌های راه‌آهن و پس از آن در سایر زمینه‌های مهندسی حمل و نقل همچون طراحی پل، بزرگراه، راه‌های کابلی، تونل‌ها و خطوط لوله‌ای مطرح شده است. برخی از اولین مطالعات توسط استوکس [1]، آیره و همکاران [2] و اینگلیس [3] انجام شد.

1- Finite Element Method  
2- Discrete Element Technique

Please cite this article using:

A.M. Bakhshi, A.R. Ariai, Vibration analysis of a multi-span Timoshenko beam with flexible constraints subjected to a two degrees-of-freedom moving system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 282-290, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

کمک روش ماتریس انتقال، پاسخ اجباری آن نیز تحت عبور یک سیستم دو درجه آزادی مطالعه می‌شود. سیستم دو درجه آزادی مذکور مدل یک چهارم خودرو است که با سرعت ثابت از روی یک پل، در حال حرکت می‌باشد. در کار حاضر هر قسمت از تیر به صورت تیری پیوسته فرض می‌شود که از تئوری تیر تیموشنکو پیروی می‌کند. ابتدا به کمک معادلات پیوستگی، ارتباط ضرایب شکل مود هر دو تکه به‌دست می‌آید و سپس با حل یک مسأله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر تعیین می‌شود. در ادامه پاسخ اجباری با استفاده از تئوری آنالیز مودال به‌دست می‌آید. در این راستا از رابطه تعامد مودها استفاده می‌شود که در صورت وجود زاویه شکستگی این رابطه شکل تازه‌ای به خود می‌گیرد. به این منظور در این مطالعه رابطه‌ای جدید برای تعامد مودها در حالت وجود زاویه شکستگی در تیر اثبات می‌شود. در نهایت با حل چند مثال عددی تکنیک بیان شده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه شکستگی بر مقدار فرکانس‌های طبیعی افزوده می‌شود و بیشینه جابجایی تیر کاهش می‌یابد. همچنین وجود ترک باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی و افزایش جابجایی بیشینه در تیر می‌شود. در این مقاله یک فرمولاسیون کلی برای هر نوع سختی داخلی و خارجی و همچنین زاویه شکستگی در تیر ارائه شده است و قادر است دسته وسیعی از مسائل همچون تیرهای دارای ترک، دارای زاویه شکستگی و یا پل‌های چند دهانه تحت عبور بار را که در کارهای قبلی مورد بررسی شده‌اند، مورد مطالعه قرار دهد.

## 2- فرمول بندی

### 2-1- ارتعاش آزاد

تیر چند تکه ترک‌دار با  $K$  زاویه شکستگی  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$  و  $n$  قید انعطاف‌پذیر میانی در شکل 1 نشان داده شده است. این سازه به  $K+n+1$  قسمت در موقعیت هر زاویه و هر قید تقسیم شده است. بنابراین  $K+n+1$  تکه تیر با طول‌های  $L_1, L_2, \dots, L_{K+n+1}$  وجود دارد که موقعیت زوایا و قیده‌ها در  $X_1, X_2, \dots, X_{K+n}$  می‌باشند. به منظور تحلیل ارتعاشی این سیستم، هر تکه تیر با حرکات عرضی و طولی خود تحلیل می‌شود که محور  $X$  معرف حرکت طولی و محور  $Y$  معرف حرکت عرضی هر تکه می‌باشد. حال از تئوری تیر تیموشنکو برای تحلیل ارتعاشات این سیستم استفاده می‌شود. دامنه ارتعاشی حرکات طولی و عرضی تکه  $i$ ام به ترتیب با  $U_i(X, T)$  و  $Y_i(X, T)$  در محدوده  $X_{i-1} < X < X_i$  نشان داده شده است که اندیس  $i$  نشان‌دهنده تکه  $i$ ام و  $i=1, 2, \dots, K+n$  می‌باشد. طول کل این سیستم مقطع یکنواخت و ارتعاش آزاد با معادلات (1) بیان می‌شود [18].

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 Y_i(X, T)}{\partial T^2} - \kappa A G \left( \frac{\partial^2 Y_i(X, T)}{\partial X^2} - \frac{\partial \Phi_i(X, T)}{\partial X} \right) &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 \Phi_i(X, T)}{\partial X^2} + \kappa A G \left( \frac{\partial Y_i(X, T)}{\partial X} - \Phi_i(X, T) \right) - \rho I \frac{\partial^2 \Phi_i(X, T)}{\partial T^2} &= 0 \\ EA \frac{\partial^2 U_i(X, T)}{\partial X^2} - \rho A \frac{\partial^2 U_i(X, T)}{\partial T^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

که  $\Phi_i(X, T)$ ،  $U_i(X, T)$ ،  $i=1, 2, \dots, K+n+1$  و  $X_{i-1} < X < X_i$  در روابط (1)، زاویه چرخش مقطع المان نسبت به تار خنثی در اثر تغییر شکل برشی،  $E$  مدول الاستیسیته یانگ،  $I$  ممان اینرسی سطح مقطع،  $\rho$  چگالی ماده،  $A$  مساحت سطح مقطع تیر،  $G$  مدول برشی،  $\kappa$  ضریب تصحیح برش و  $T$  زمان است. حرکات طولی و عرضی در انتهای هر تکه قبل از هر شکستگی به کمک معادلات پیوستگی با حرکات تکه بعدی مرتبط می‌شوند. برای شرایط سازگاری در میدان جابجایی طولی ( $U$ )، عرضی ( $Y$ )، شیب ( $Y'$ )، ممان خمشی ( $M$ )، نیروی برشی ( $V$ ) و نیروی محوری ( $F$ ) در هر شکستگی، مطابق شکل 2- الف برای جابجایی‌ها و 2- ب برای نیروها می‌توان نوشت [18].

تحلیل ارتعاشی تیرهای تیموشنکو تحت جرم عبوری گسترده توسعه داد. هایاشیکوا و واتانابه [7]، روشی را شبیه به روش سختی دینامیکی توسعه دادند تا بتوانند فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای چنین تیرهایی را به‌دست آورند و سپس آنها را برای پیش‌بینی رفتار تیرهای چند دهانه تحت عبور بارهای متحرک به‌کار برند. روش دیگری توسط استانیسیک [8] گزارش شد که راهی را برای محاسبه شکل مودهایی که برای حرکت جرم به حساب می‌آیند، توسعه داد. یک حل عددی برای مسأله مشابهی توسط خلیلی و همکاران [9] پیشنهاد شد. اوگوامانا و همکاران [10]، یک تیر اویلر-برنولی حامل جرم (تاقک و بار) را که یکنواخت و دو سر مفصل بود، مدل کردند. اسماعیل‌زاده و جلیلی [11] ارتعاشات ناشی از عبور خودرویی را از روی پل در سرعت‌های مختلف بررسی کردند که در مدل ایشان پل با استفاده از تئوری اویلر-برنولی و خودرو به صورت یک چهارم و یک دوم خودروی کامل مدل شده است.

در مراجع کمتر به عبور بار از روی تیرهای چند تکه<sup>1</sup> اشاره شده است. لی [12] ارتعاشات عرضی تیر دارای قیود میانی تحت عبور بار را مورد بررسی قرار داد. چاترجی [13] با در نظر گرفتن جرم و فنر برای مدل یک خورو، پاسخ دینامیکی یک پل چند تکه را تحت عبور خودرو به‌دست آورد. ایچیکاوا [14] پاسخ دینامیکی تیر اویلر-برنولی چند تکه تحت عبور جرم را بررسی کرد. لین و رو [15] با استفاده از روش ماتریس انتقال<sup>2</sup>، فرکانس‌های طبیعی یک قاب را با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی محاسبه و نتایج به‌دست آمده را به ازای شرایط مرزی مختلف مقایسه کردند. در بیشتر این کارها از مدل تیر اویلر-برنولی استفاده شده است که به‌خصوص برای تیرهای کوتاه دارای خطای زیادی است؛ به همین دلیل بعضی از محققان مدل تیر تیموشنکو را مورد استفاده قرار داده‌اند. وانگ [16] پاسخ ارتعاشی تیرهای تیموشنکو را چند تکه را مطالعه کرد. لین و چانگ [17] تأثیر سختی فنرهای میانی روی ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو را مطالعه کردند. در تحلیل ایشان صرف‌نظر از تعداد فنرهای میانی، تنها نیاز به تعیین چهار ثابت مجهول برای تعیین فرکانس‌های طبیعی است. لین و وو [18] با استفاده از روش ماتریس انتقال، فرکانس‌های طبیعی قاب بسته‌ای را با به‌کارگیری تئوری تیر تیموشنکو محاسبه و نتایج حاصل را با نتایج به‌دست آمده از آزمایش مقایسه نمودند.

به عنوان موردی خاص از تیرهای چند تکه می‌توان به تیرهای دارای ترک اشاره کرد. تئوری ارتعاشی کاملی جهت مدل کردن تیر ترک‌دار توسط کاندروس و دیماروگواناس [19] برای ارتعاش جانبی تیر ترک‌دار اویلر-برنولی همراه با ترک باز یک لبه‌ای یا دو لبه‌ای توسعه داده شد. لویا [20] فرکانس‌های طبیعی را برای ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار تیموشنکو با شرایط مرزی ساده بررسی کرد. محمود و زید [21] تحلیل مودال تکراری را به منظور یافتن پاسخ تیر ترک‌دار دو سر مفصل تحت جرم عبوری به‌کار گرفتند. لین و چانگ [22] روشی تحلیلی را مورد استفاده قرار دادند که امکان محاسبه پاسخ اجباری تیر ترک‌دار یک سر گیردار اویلر-برنولی تحت بار عبوری متمرکز را فراهم می‌کرد. طالبی و آریایی [23] ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی ترک‌دار در حال دوران را به روش انتقال دیفرانسیل بررسی کردند. ایشان در کار دیگری روش انتقال دیفرانسیل را جهت تحلیل ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو دارای ترک به‌کار بردند [24].

در کلیه کارهای گذشته پاسخ اجباری تیر بدون زاویه شکستگی تحت عبور بار و یا ارتعاشات آزاد تیر دارای زاویه شکستگی بررسی شده است. در این مقاله ضمن بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر تیموشنکو چند تکه به

1- Serial-Frame Structures  
2- Transfer Matrix Method

شیب است؛ از طرف دیگر به کمک مورد سوم و با در نظر گرفتن مقدار بسیار زیاد برای فنر خطی خارجی می‌توان یک تکیه‌گاه مفصلی میانی را مدل کرد. با وجود دو یا چند فنر در محل هر قید، ترکیبی از حالت‌های بالا می‌تواند برای آن مدل به کار گرفته شود.

با توجه به روابط بیان شده، کمیت‌های معادله (4) تعریف می‌شوند.

$$y_i = \frac{Y_i}{L}, x = \frac{X}{L}, l_i = \frac{L_i}{L}, x_i = \frac{X_i}{L}, t = \frac{T}{\sqrt{L}},$$

$$u_i = \frac{U_i}{L}, \phi_i = \Phi_i, y_1 = \frac{Y_1}{L}, y_2 = \frac{Y_2}{L} \quad (4)$$

بنابراین در هر تکه، معادلات (1) را می‌توان به صورت بی‌بعد بیان کرد:

$$\rho A \frac{\partial^2 y_i(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\kappa A G}{L} \left( \frac{\partial^2 y_i(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial x} \right) = 0$$

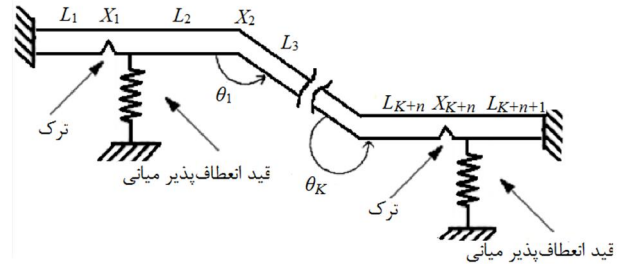
$$\frac{EI}{L^2} \frac{\partial^2 \phi_i(x,t)}{\partial x^2} + \kappa A G \left( \frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} - \phi_i(x,t) \right) - \frac{\rho I}{L} \frac{\partial^2 \phi_i(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{EA}{L} \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

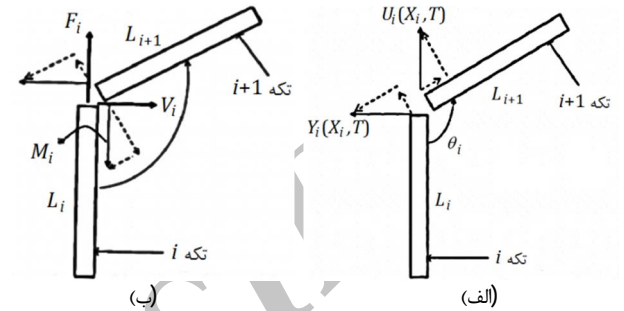
که  $x_{i-1} < x < x_i$  و  $i=1,2,\dots,K+n+1$  می‌باشد. همچنین شرایط سازگاری بی‌بعد در هر زاویه شکستگی را می‌توان با معادلات (6) بیان نمود:

جدول 1 فنرهای میانی و زاویه شکستگی همراه با سختی آنها

نوع فنر	سختی فنرها و زاویه شکستگی
	$k_{ti} \neq 0$ $k_{\theta i} = 0$ $k_{te} = 0$ $k_{\theta e} = 0$ $\theta = \pi$
	$k_{ti} = 0$ $k_{\theta i} \neq 0$ $k_{te} = 0$ $k_{\theta e} = 0$ $\theta = \pi$
	$k_{ti} \rightarrow \infty$ $k_{\theta i} \rightarrow \infty$ $k_{te} \neq 0$ $k_{\theta e} = 0$ $\theta = \pi$
	$k_{ti} \rightarrow \infty$ $k_{\theta i} \rightarrow \infty$ $k_{te} = 0$ $k_{\theta e} \neq 0$ $\theta = \pi$
	$k_{ti} \rightarrow \infty$ $k_{\theta i} \rightarrow \infty$ $k_{te} = 0$ $k_{\theta e} = 0$ $\theta \neq \pi$



شکل 1 تیر چند تکه صفحه‌ای با K زاویه شکستگی  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$  و قید انعطاف‌پذیر میانی در موقعیت‌های  $X_1, X_2, \dots, X_{K+n}$



شکل 2 الف- شرایط سازگاری برای جابجایی ب- شرایط سازگاری برای نیرو

$$Y_{i+1}(X_i^+, T) = -Y_i(X_i^-, T) \cos \theta_i + U_i(X_i^-, T) \sin \theta_i$$

$$U_{i+1}(X_i^+, T) = -Y_i(X_i^-, T) \sin \theta_i - U_i(X_i^-, T) \cos \theta_i$$

$$Y'_{i+1}(X_i^+, T) = Y'_i(X_i^-, T)$$

$$\Phi'_{i+1}(X_i^+, T) = \Phi'_i(X_i^-, T)$$

$$-\kappa A G [Y'_{i+1}(X_i^+, T) - \Phi'_{i+1}(X_i^+, T)]$$

$$= \kappa A G [Y'_i(X_i^-, T) - \Phi'_i(X_i^-, T)] \cos \theta_i$$

$$-E A U'_{i+1}(X_i^+, T) \sin \theta_i$$

$$E A U'_{i+1}(X_i^+, T)$$

$$= -\kappa A G [Y'_i(X_i^-, T) - \Phi'_i(X_i^-, T)] \sin \theta_i$$

$$-E A U'_i(X_i^-, T) \cos \theta_i \quad (2)$$

که نمادهای  $X_i^+$  و  $X_i^-$  بیان‌کننده موقعیت‌های قبل و بعد از شکستگی  $X_i$  هستند. فرض می‌شود که زوایای شکستگی در طی حرکت سازه بدون تغییر باقی می‌ماند.

همچنین در محل هر قید میانی، هر قسمت از تیر به وسیله دو فنر الاستیک (یک فنر خطی و دیگری پیچشی) به قسمت بعدی متصل شده است که هر حالت از آن در جدول 1 توصیف شده است. پارامترهای  $k_{\theta i}, k_{\theta e}, k_{te}$  و  $k_{ti}$  به ترتیب سختی فنرهای خطی داخلی، پیچشی داخلی، خطی خارجی، پیچشی خارجی و زاویه شکستگی هستند. شرایط پیوستگی در محل هر قید میانی نیز با معادلات (3) بیان می‌شود [25].

$$EI \Phi'_{i+1}(X_i^+, T) - EI \Phi'_i(X_i^-, T) = k_{\theta e} \Phi_{i+1}(X_i^+, T)$$

$$\{ \kappa A G [Y'_{i+1}(X_i^+, T) - \Phi'_{i+1}(X_i^+, T)] \}$$

$$- \{ \kappa A G [Y'_i(X_i^-, T) - \Phi'_i(X_i^-, T)] \}$$

$$= k_{te} Y_{i+1}(X_i^+, T)$$

$$Y_{i+1}(X_i^+, T) - Y_i(X_i^-, T)$$

$$= \frac{1}{k_{ti}} \kappa A G [Y'_{i+1}(X_i^+, T) - \Phi'_{i+1}(X_i^+, T)]$$

$$\Phi_{i+1}(X_i^+, T) - \Phi_i(X_i^-, T) = \frac{1}{k_{\theta i}} EI \Phi'_{i+1}(X_i^+, T)$$

$$U_{i+1}(X_i^+, T) - U_i(X_i^-, T) = 0$$

$$E A U'_{i+1}(X_i^+, T) - E A U'_i(X_i^-, T) = 0 \quad (3)$$

که  $X_{i-1} < X < X_i$  و نمادهای  $X_i^+$  و  $X_i^-$  بیانگر موقعیت‌های قبل و بعد از قید می‌باشند. به کمک جدول 1 می‌توان دسته وسیعی از مسائل را مدل کرد. به عنوان مثال به کمک موارد اول و دوم این جدول می‌توان تیر تیموشنکوی دارای ترک را در نظر گرفت؛ بدین منظور در محل ترک یک فنر خطی داخلی (مورد اول) و یک فنر پیچشی داخلی (مورد دوم) جایگزین می‌شود که فنر خطی بیانگر ناپیوستگی در جابجایی عرضی و فنر پیچشی ناپیوستگی در

توجه به نوع پیوستگی (شکستگی یا قید میانی داخلی و خارجی) انتخاب می‌شود [18,25] و در نهایت حاصل ضرب آنها به  $T_{6 \times 6}$  ختم می‌شود. با به کارگیری رابطه (10)، شش ضریب ثابت از تکه اول  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  و  $F_1$  به شش ضریب ثابت تکه آخر نگاشت می‌شود. بنابراین تعداد ضرایب مستقل به شش عدد کاهش می‌یابد که این شش ضریب باقی‌مانده با ارضای شرایط مرزی قابل محاسبه هستند [18,25].

2-2- ارتعاش اجباری

به منظور محاسبه پاسخ اجباری، از تئوری آنالیز مودال استفاده می‌شود. با استفاده از این تئوری، پاسخ اجباری  $y(x,t)$ ،  $\phi(x,t)$  و  $u(x,t)$  سیستم را می‌توان با معادلات (11) بسط داد:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^N w_k(x)p_k(t) \tag{11-الف}$$

$$\phi(x,t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x)p_k(t) \tag{11-ب}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^N v_k(x)p_k(t) \tag{11-ج}$$

که در آن  $p_k(t)$  مختصات تعمیم یافته است. در معادلات (11-الف و ب) برای جابجایی و شیب تابع یکسان زمانی در نظر گرفته می‌شود. دادرینیا و همکاران [26] نشان دادند که استفاده از تابع یکسان زمانی خطای بسیار ناچیزی را وارد معادلات می‌کند که قابل چشم‌پوشی است. از آنجا که شرایط پیوستگی بین  $w$  و  $v$  برقرار است و بایستی در هر لحظه بین  $y$  و  $u$  نیز برقرار باشد بنابراین برای  $y$  و  $u$  هم تابع یکسان زمانی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه هر سه تابع  $y$ ،  $\phi$  و  $u$  یک تابع زمانی خواهند داشت که این امر باعث تغییراتی در رابطه تعامد شکل مودها در تیرهای چند تکه می‌شود. در ادامه رابطه تعامد مودها در این تیرها بررسی می‌شود.

2-2-1- رابطه تعامد مودها

برای به دست آوردن رابطه تعامد، معادلات ارتعاش آزاد تیر یک بار برای شکل مود  $n$ ام و بار دیگر برای شکل مود  $m$ ام به صورت بی‌بعد نوشته می‌شود. در این قسمت، به منظور خلاصه‌نویسی در روابط، به جای  $w(x)$  از  $w$ ، به جای  $\phi(x)$  از  $\varphi$  و به جای  $v(x)$  از  $v$  استفاده می‌شود.

$$\rho A \omega_r^2 w_r + \frac{\kappa A G}{L} (w_r'' - \varphi_r') = 0 \tag{12-الف}$$

$$\frac{EI}{L^2} \varphi_r'' + \kappa A G (w_r' - \varphi_r) + \frac{\rho I}{L} \omega_r^2 \varphi_r = 0 \tag{12-ب}$$

$$\frac{EA}{L} v_r'' + \rho A \omega_r^2 v_r = 0 \tag{12-ج}$$

حال روابط فوق به  $\rho A$  تقسیم و پس از آن (12-الف) در  $w_s$ ، (12-ب) در  $\varphi_s$  و (12-ج) در  $v_s$  ضرب شده و از 0 تا 1 انتگرال گیری می‌شود:

$$\int_0^1 -\frac{\kappa G}{\rho L} (w_r'' - \varphi_r') w_s dx = \int_0^1 \omega_r^2 w_r w_s dx \tag{13-الف}$$

$$-\int_0^1 \frac{EI}{\rho A L^3} \varphi_r'' \varphi_s dx - \int_0^1 \frac{\kappa G}{\rho L} (w_r' - \varphi_r) \varphi_s dx$$

$$= \int_0^1 \frac{I}{A L^2} \omega_r^2 \varphi_r \varphi_s dx \tag{13-ب}$$

$$-\int_0^1 \frac{E}{\rho L} v_r'' v_s dx = \int_0^1 \omega_r^2 v_r v_s dx \tag{13-ج}$$

اینک روابط (13-الف) و (13-ب) با هم جمع می‌شوند:

$$\begin{aligned} y_{i+1}(x_i^+, t) &= -y_i(x_i^-, t) \cos \theta_i + u_i(x_i^-, t) \sin \theta_i \\ u_{i+1}(x_i^+, t) &= -y_i(x_i^-, t) \sin \theta_i - u_i(x_i^-, t) \cos \theta_i \\ y'_{i+1}(x_i^+, t) &= y'_i(x_i^-, t) \\ \phi'_{i+1}(x_i^+, t) &= \phi'_i(x_i^-, t) \\ [y'_{i+1}(x_i^+, t) - \phi'_{i+1}(x_i^+, t)] &= -[y'_i(x_i^-, t) - \phi'_i(x_i^-, t)] \cos \theta_i \\ &+ \frac{E}{\kappa G} u'_i(x_i^-, t) \sin \theta_i \\ u'_{i+1}(x_i^+, t) &= -\frac{\kappa G}{E} [y'_i(x_i^-, t) - \phi'_i(x_i^-, t)] \sin \theta_i \\ &- u'_i(x_i^-, t) \cos \theta_i \end{aligned} \tag{6}$$

شرایط پیوستگی بی‌بدر در محل قید میانی نیز با معادلات (7) بیان می‌شود [25]:

$$\begin{aligned} EI \phi'_{i+1}(x_i^+, t) - EI \phi'_i(x_i^-, t) &= k_{\theta e} \frac{L}{EI} \phi_{i+1}(x_i^+, t) \\ [y'_{i+1}(x_i^+, t) - \phi'_{i+1}(x_i^+, t)] &= k_{te} \frac{L}{\kappa A G} y_{i+1}(x_i^+, t) \\ y_{i+1}(x_i^+, t) - y_i(x_i^-, t) &= \frac{1}{k_{ti}} \frac{\kappa A G}{L} [y'_{i+1}(x_i^+, t) - \phi'_{i+1}(x_i^+, t)] \\ \phi_{i+1}(x_i^+, t) - \phi_i(x_i^-, t) &= \frac{1}{k_{\theta i}} \frac{EI}{L} \phi'_{i+1}(x_i^+, t) \\ u_{i+1}(x_i^+, t) - u_i(x_i^-, t) &= 0 \\ u'_{i+1}(x_i^+, t) - u'_i(x_i^-, t) &= 0, x_{i-1} < x < x_i \end{aligned} \tag{7}$$

با استفاده از روش ماتریس انتقال و با حل بسته‌ای از مسأله مقدار ویژه، معادلات شکل مود هر تکه از تیر به صورت معادلات (8) خواهند بود [18]:

$$\begin{aligned} w_i(x) &= A_i \cosh \lambda_1 (x - x_{i-1}) + B_i \sinh \lambda_1 (x - x_{i-1}) \\ &+ C_i \cos \lambda_2 (x - x_{i-1}) + D_i \sin \lambda_2 (x - x_{i-1}) \\ \varphi_i(x) &= A_i q_1 \sinh \lambda_1 (x - x_{i-1}) + B_i q_1 \cosh \lambda_1 (x - x_{i-1}) \\ &+ C_i q_2 \sin \lambda_2 (x - x_{i-1}) - D_i q_2 \cos \lambda_2 (x - x_{i-1}) \\ v_i(x) &= E_i \sin \gamma (x - x_{i-1}) + F_i \cos \gamma (x - x_{i-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

که  $w_i(x)$  شکل مود  $n$ ام،  $\varphi_i(x)$  شکل مود  $n$ ام پیچشی و  $v_i(x)$  شکل مود  $n$ ام محوری است. در معادله (8)،  $i=1,2,\dots,K+n+1, x_{i-1} < x < x_i$  مربوط به جابجایی عرضی،  $\varphi_i(x)$  شکل مود  $n$ ام پیچشی و  $v_i(x)$  شکل مود  $n$ ام محوری است.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left[ \sqrt{\left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right)^2 + \alpha} - \frac{\sigma+\tau}{2} \right]^{1/2}, \lambda_2 = \left[ \sqrt{\left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right)^2 + \alpha} + \frac{\sigma+\tau}{2} \right]^{1/2}, \\ \lambda_3 &= \sqrt{\tau}, q_1 = \frac{\lambda_3^2 + \lambda_1^2}{\lambda_1}, q_2 = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2}, \sigma = \frac{\rho L \omega^2}{E}, \\ \tau &= \frac{\rho L \omega^2}{\kappa G}, \alpha = \frac{\rho A L^3 \omega^2}{EI}, \gamma = \sqrt{\frac{\rho L \omega^2}{E}} \end{aligned} \tag{9}$$

$A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$  و  $F_i$  ضرایب شکل مود در تکه  $n$ ام هستند. ثابت‌های آخرین قسمت تیر  $(A_{K+n+1}, B_{K+n+1}, C_{K+n+1}, D_{K+n+1}, E_{K+n+1}, F_{K+n+1})$  با استفاده از شرایط سازگاری در معادلات (6) و (7) به ثابت‌های اولین تکه تیر  $(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1)$  و مرتبط می‌شوند که با معادلات (10) بیان می‌گردد [18 و 25]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{K+n+1} \\ B_{K+n+1} \\ C_{K+n+1} \\ D_{K+n+1} \\ E_{K+n+1} \\ F_{K+n+1} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{61} & \dots & t_{66} \end{bmatrix}_{K+n} \begin{Bmatrix} A_{K+n} \\ B_{K+n} \\ C_{K+n} \\ D_{K+n} \\ E_{K+n} \\ F_{K+n} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{61} & \dots & t_{66} \end{bmatrix}_{K+n} \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{61} & \dots & t_{66} \end{bmatrix}_{K+n-1} \begin{Bmatrix} A_{K+n-1} \\ B_{K+n-1} \\ C_{K+n-1} \\ D_{K+n-1} \\ E_{K+n-1} \\ F_{K+n-1} \end{Bmatrix} \\ &\dots \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{61} & \dots & t_{66} \end{bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ E_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \\ &= (T_{6 \times 6})_{K+n} \dots (T_{6 \times 6})_1 \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ E_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} = T_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ E_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

که  $T_{6 \times 6}$  ماتریس انتقال  $6 \times 6$  است که به مقدار ویژه  $\omega$  وابسته است و با

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\kappa G}{\rho L}(w'_r - \varphi_r)w_s|_0^- + \frac{\kappa G}{\rho L}(w'_s - \varphi_s)w_r|_0^- \\
 & -\frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_r\varphi_s|_0^- + \frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_s\varphi_r|_0^- \\
 & -\left[-\frac{\kappa G}{\rho L}(w'_r - \varphi_r)\cos\theta + \frac{E}{\rho L}v'_r\sin\theta\right. \\
 & \left.(-w_s\cos\theta + v_s\sin\theta)\right]_{c^+}^1 \\
 & +\left[-\frac{\kappa G}{\rho L}(w'_s - \varphi_s)\cos\theta + \frac{E}{\rho L}v'_s\sin\theta\right. \\
 & \left.(-w_r\cos\theta + v_r\sin\theta)\right]_{c^+}^1 \\
 & -\frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_r\varphi_s|_{c^+}^1 + \frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_s\varphi_r|_{c^+}^1 \\
 & -\frac{E}{\rho L}v'_r v_s|_0^- + \frac{E}{\rho L}v'_s v_r|_0^- \\
 & -\left[-\frac{\kappa G}{\rho L}(w'_r - \varphi_r)\sin\theta - \frac{E}{\rho L}v'_r\cos\theta\right. \\
 & \left.(-w_s\sin\theta - v_s\cos\theta)\right]_{c^+}^1 \\
 & +\left[-\frac{\kappa G}{\rho L}(w'_s - \varphi_s)\sin\theta - \frac{E}{\rho L}v'_s\cos\theta\right. \\
 & \left.(-w_r\sin\theta - v_r\cos\theta)\right]_{c^+}^1 \\
 & = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^1 (w_r w_s + \frac{I}{AL^2} \varphi_r \varphi_s + v_r v_s) dx \quad (19)
 \end{aligned}$$

با ساده‌سازی رابطه فوق به ازای شرایط مرزی مفصلی، گیردار و آزاد، رابطه بی‌بعد شده تعامد شکل مودها به‌دست می‌آید که با معادله (20) بیان می‌گردد:

$$\int_0^1 (w_r w_s + \frac{I}{AL^2} \varphi_r \varphi_s + v_r v_s) dx = \delta_{rs} \quad (20)$$

در این معادله  $\delta_{rs}$  دلتای کرونیگر و  $r, s=1, 2, \dots, N$  که  $N$  تعداد مودهای به‌کار گرفته شده است. همان‌گونه که ذکر شد این رابطه به ازای شرایط مرزی مفصلی، گیردار و آزاد صادق است. با پیمودن فرایندی مشابه می‌توان نشان داد که به ازای تعداد زوایای شکستگی بیشتر نیز این رابطه صادق است.

### 2-2-2- پاسخ اجباری به عبور سیستم دو درجه آزادی

به منظور محاسبه پاسخ اجباری برای عبور سیستم دو درجه آزادی شکل 3 از روی تیر فرض می‌شود که این سیستم همواره بر خط افق عمود است. این سیستم دو درجه آزادی می‌تواند بیانگر مدل یک چهارم خودرو باشد که با سرعت ثابت از روی یک پل در حال حرکت است. معادلات حرکت با روابط (21) بیان می‌شوند [11]:

$$\begin{aligned}
 & \rho A \frac{\partial^2 y_i(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\kappa A G}{L} \left( \frac{\partial^2 y_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_i(x, t)}{\partial x} \right) \\
 & = -[k_1(y_i \cos\theta + u_i \sin\theta - y_1) \\
 & + c_1 \left( \frac{dy_i}{dt} \cos\theta + \frac{du_i}{dt} \sin\theta - \frac{dy_1}{dt} \right) \\
 & + (m_1 + m_2)g] \cos\theta \delta(x - \xi(t)) \\
 & \frac{EI}{L^3} \frac{\partial^2 \phi_i(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\kappa A G}{L} \left( \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial x} - \phi_i(x, t) \right) - \frac{\rho I}{L^2} \frac{\partial^2 \phi_i(x, t)}{\partial t^2} = 0 \\
 & \frac{EA}{L} \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} \\
 & = -[k_1(y_i \cos\theta + u_i \sin\theta - y_1) \\
 & + c_1 \left( \frac{dy_i}{dt} \cos\theta + \frac{du_i}{dt} \sin\theta - \frac{dy_1}{dt} \right) \\
 & + (m_1 + m_2)g] \sin\theta \delta(x - \xi(t)) \\
 & m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k_2(y_1 - y_2) + c_2 \left( \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) \\
 & = c_1 \left( \frac{dy_i}{dt} \cos\theta + \frac{du_i}{dt} \sin\theta - \frac{dy_1}{dt} \right) \\
 & + k_1(y_i \cos\theta + u_i \sin\theta - y_1) \\
 & m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = c_2 \left( \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) + k_2(y_1 - y_2) \quad (21)
 \end{aligned}$$

که  $i=1, 2, \dots, K+n+1$  و  $\xi$  تابعی از  $t$  می‌باشد و معرف مکان جرم در حال حرکت است. با جایگذاری معادلات (11) در (21) معادلات (22) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^1 \frac{\kappa G}{\rho L}(w'_r - \varphi'_r)w_s dx - \int_0^1 \frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_r\varphi_s dx - \int_0^1 \frac{\kappa G}{\rho L}(w'_r - \varphi_r)\varphi_s dx \\
 & = \omega_r^2 \int_0^1 (w_r w_s + \frac{I}{AL^2} \varphi_r \varphi_s) dx - \int_0^1 \frac{E}{\rho L}v'_r v_s dx = \omega_r^2 \int_0^1 v_r v_s dx \quad (14)
 \end{aligned}$$

با پیمودن روندی مشابه برای شکل مود  $s$ ام، روابطی مشابه با روابط (14) به‌دست می‌آید که در آن جای اندیس‌های  $r$  و  $s$  عوض شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^1 \frac{\kappa G}{\rho L}(w'_s - \varphi'_s)w_r dx - \int_0^1 \frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_s\varphi_r dx \\
 & -\int_0^1 \frac{\kappa G}{\rho L}(w'_s - \varphi_s)\varphi_r dx = \omega_s^2 \int_0^1 (w_r w_s + \frac{I}{AL^2} \varphi_r \varphi_s) dx \\
 & -\int_0^1 \frac{E}{\rho L}v'_s v_r dx = \omega_s^2 \int_0^1 v_r v_s dx \quad (15)
 \end{aligned}$$

حال روابط (15) از روابط (14) کسر می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\kappa G}{\rho L} \int_0^1 [(w'_r - \varphi'_r)w_s - (w'_s - \varphi'_s)w_r] dx \\
 & -\frac{EI}{\rho AL^3} \int_0^1 [\varphi''_r\varphi_s - \varphi''_s\varphi_r] dx \\
 & -\frac{\kappa G}{\rho L} \int_0^1 [(w'_r - \varphi_r)\varphi_s - (w'_s - \varphi_s)\varphi_r] dx \\
 & = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^1 (w_r w_s + \frac{I}{AL^2} \varphi_r \varphi_s) dx \\
 & -\frac{E}{\rho L} \int_0^1 (v'_r v_s - v'_s v_r) dx = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^1 v_r v_s dx \quad (16)
 \end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و ساده‌سازی روابط می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\kappa G}{\rho L}(w'_r - \varphi_r)\varphi_s|_0^1 + \frac{\kappa G}{\rho L}(w'_s - \varphi_s)\varphi_r|_0^1 \\
 & -\frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_r\varphi_s|_0^1 + \frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_s\varphi_r|_0^1 \\
 & = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^1 (w_r w_s + \frac{I}{AL^2} \varphi_r \varphi_s) dx \quad (17-الف)
 \end{aligned}$$

$$-\frac{E}{\rho L}v'_r v_s|_0^1 + \frac{E}{\rho L}v'_s v_r|_0^1 = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^1 v_r v_s dx \quad (17-ب)$$

بدون از دست دادن کلیت مسأله با فرض داشتن تنها یک شکستگی در فاصله  $c$  از ابتدای تیر که  $0 < c < 1$  است، روابط (17-الف) و (17-ب) با هم جمع و انتگرال‌گیری یک‌بار روی تکه اول و بار دیگر روی تکه دوم تیر انجام می‌شود و سپس نتایج با هم جمع می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\kappa G}{\rho L}(w'_r - \varphi_r)w_s|_0^- + \frac{\kappa G}{\rho L}(w'_s - \varphi_s)w_r|_0^- \\
 & -\frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_r\varphi_s|_0^- + \frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_s\varphi_r|_0^- \\
 & -\frac{\kappa G}{\rho L}(w'_r - \varphi_r)w_s|_{c^+}^1 + \frac{\kappa G}{\rho L}(w'_s - \varphi_s)w_r|_{c^+}^1 \\
 & -\frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_r\varphi_s|_{c^+}^1 + \frac{EI}{\rho AL^3}\varphi'_s\varphi_r|_{c^+}^1 \\
 & -\frac{E}{\rho L}v'_r v_s|_0^- + \frac{E}{\rho L}v'_s v_r|_0^- \\
 & -\frac{E}{\rho L}v'_r v_s|_{c^+}^1 + \frac{E}{\rho L}v'_s v_r|_{c^+}^1 \\
 & = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^1 (w_r w_s + \frac{I}{AL^2} \varphi_r \varphi_s + v_r v_s) dx \quad (18)
 \end{aligned}$$

با اعمال روابط پیوستگی (6) در محل شکستگی در رابطه (18) می‌توان نوشت:

رابطه (24- الف) در  $w_j$ ، (24- ب) در  $\varphi_j$  و (24- ج) در  $v_j$  ضرب می‌شود. با تقسیم هر سه رابطه به  $\rho A$  و انتگرال‌گیری از 0 تا 1 می‌توان نوشت:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^N (w_k w_j \ddot{p}_k + \omega_k^2 w_k w_j p_k(t)) dx$$

$$= -\frac{1}{\rho A} \int_0^1 \sum_{k=1}^N w_j [k_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) + c_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) + (m_1 + m_2)g] \cos \theta \delta(x - \xi(t)) dx$$

(25- الف)

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^N \left( \frac{I}{AL^2} \varphi_k \varphi_j \ddot{p}_k + \frac{I}{AL^2} \varphi_k \varphi_j \omega_k^2 p_k \right) dx = 0$$

(25- ب)

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^N (v_k v_j \ddot{p}_k + v_k v_j \omega_k^2 p_k) dx$$

$$= -\frac{1}{\rho A} \int_0^1 \sum_{k=1}^N v_j [k_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) + c_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) + (m_1 + m_2)g] \sin \theta \delta(x - \xi(t)) dx$$

(25- ج)

اینک روابط (25- الف و ج) با هم جمع و از رابطه تعامد (20) استفاده می‌شود.

$$\ddot{p}_j(t) + \omega_j^2 p_j(t)$$

$$= -\frac{1}{\rho A} \int_0^1 \sum_{k=1}^N (w_j \cos \theta + v_j \sin \theta) [k_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) + c_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) + (m_1 + m_2)g] \delta(x - \xi(t)) dx$$

(26- الف)

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_2 (y_1 - y_2) + c_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

$$= c_1 \left( \sum_{k=1}^N ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) \right) + k_1 \left( \sum_{k=1}^N ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) \right)$$

(26- ب)

$$m_2 \ddot{y}_2 = c_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2 (y_1 - y_2)$$

(26- ج)

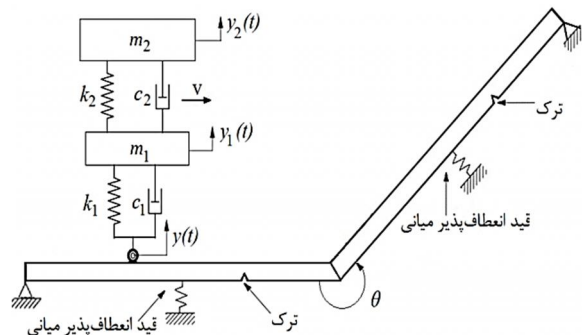
با استفاده از انتگرال‌گیری رانج کوتاه در نرم‌افزار متلب، می‌توان  $p_k(t)$  را از معادلات (26) به‌دست آورد و پس از آن با به‌کارگیری روابط (11- الف-ج) پاسخ اجباری سیستم را تعیین نمود.

### 3- نتایج عددی

در این قسمت با ذکر مثال‌های عددی، نتایج به‌دست آمده از روش تحلیلی بیان شده با نتایج به‌دست آمده از حل‌های عددی مقایسه و دقت آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ابتدا قاب بسته‌ای مطابق شکل 4 در نظر گرفته می‌شود که طول هر ضلع  $L=(L_1+L_2+L_3+L_4)=0.96$  m و طول کل  $L_1=L_2=L_3=L_4=0.24$  m،  $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4=\pi/2$ ،  $B=1.27$  cm، پهنای تیر  $H=1.27$  cm، چگالی آن  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>، مدول یانگ  $E=2.06 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>، ضریب پواسون  $\nu=0.3$ ، ضریب تصحیح برش  $\kappa=0.7$  و مدول برش الاستیسیته  $G=E/(2 \times (1+\nu))$  می‌باشد. همچنین در مراکز اضلاع ترک‌هایی به عمق  $a_1=a_2=a_3=a_4=H/2$  قرار دارند.

سه فرکانس طبیعی اول در این مطالعه به کمک روشی تحلیلی با استفاده از نرم‌افزار متلب برای شکل 4 به‌دست آمده و با نتایج مقاله لین [18] برای قاب بدون ترک و قید میانی مقایسه شده است که نتایج در جدول 2 آمده است.



شکل 3 عبور سیستم دو درجه آزادی از روی تیر

$$\sum_{k=1}^N \left[ \rho A w_k(x) \ddot{p}_k(t) - \frac{\kappa AG}{L} (w_k''(x) - \varphi_k'(x)) p_k(t) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^N -[k_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) + c_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) + (m_1 + m_2)g] \cos \theta \delta(x - \xi(t))$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{EI}{L^3} \varphi_k''(x) p_k(t) + \frac{\kappa AG}{L} (w_k'(x) - \varphi_k(x)) p_k(t) - \frac{\rho I}{L^2} \varphi_k(x) \ddot{p}_k(t) = 0$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{EA}{L} v_k''(x) p_k(t) - \rho A v_k(x) \ddot{p}_k(t)$$

$$= \sum_{k=1}^N -[k_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) + c_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) + (m_1 + m_2)g] \sin \theta \delta(x - \xi(t))$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_2 (y_1 - y_2) + c_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

$$= c_1 \left( \sum_{k=1}^N ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) \right) + k_1 \left( \sum_{k=1}^N ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) \right)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = c_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2 (y_1 - y_2)$$

(22)

برای ارتعاشات آزاد می‌توان نوشت:

$$-\frac{\kappa AG}{L} (w_k''(x) - \varphi_k'(x)) = \rho A \omega_k^2 w_k(x)$$

$$\frac{EI}{L^3} \varphi_k''(x) + \frac{\kappa AG}{L} (w_k'(x) - \varphi_k(x)) = -\frac{\rho I}{L^2} \omega_k^2 \varphi_k(x)$$

$$\frac{EA}{L} v_k''(x) = -\rho A \omega_k^2 v_k(x)$$

(23)

که در آن  $\omega_k$  فرکانس طبیعی  $k$ ام تیر است. جایگذاری معادلات (23) در سه رابطه اول معادلات (22) نتیجه می‌دهد:

$$\rho A \sum_{k=1}^N w_k(x) (\ddot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t))$$

$$= \sum_{k=1}^N -[k_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) + c_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) + (m_1 + m_2)g] \cos \theta \delta(x - \xi(t))$$

(24- الف)

$$\frac{\rho I}{L^2} \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) (\ddot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t)) = 0$$

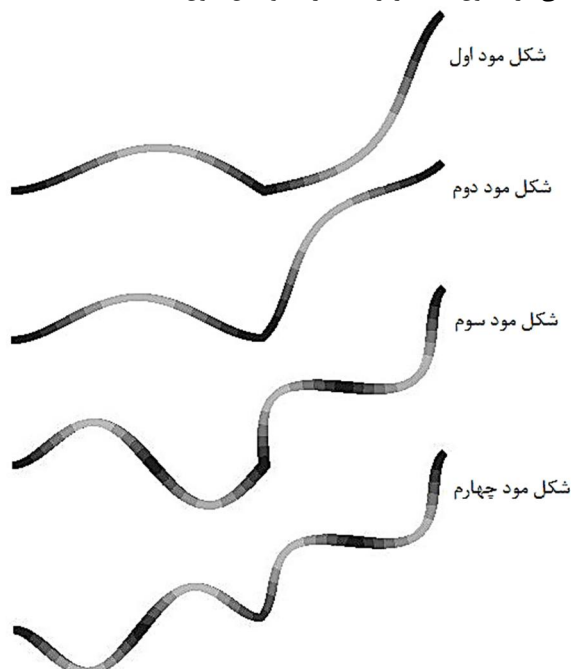
(24- ب)

$$\rho A \sum_{k=1}^N v_k(x) (\ddot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t))$$

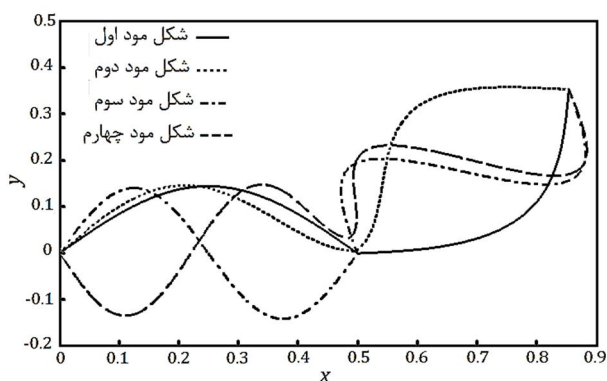
$$= \sum_{k=1}^N -[k_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) p_k(t) - y_1) + c_1 ((w_k(x) \cos \theta + v_k(x) \sin \theta) \dot{p}_k(t) - \dot{y}_1) + (m_1 + m_2)g] \sin \theta \delta(x - \xi(t))$$

(24- ج)

طبیعی در جدول 3 کمتر از 0/2 درصد و قابل قبول است.



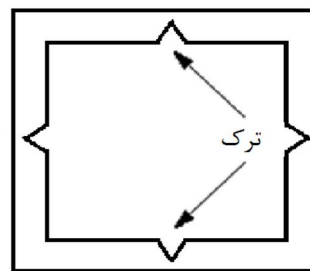
شکل 6 چهار شکل مود اول تیر دو سر مفصل به دست آمده از آباکوس



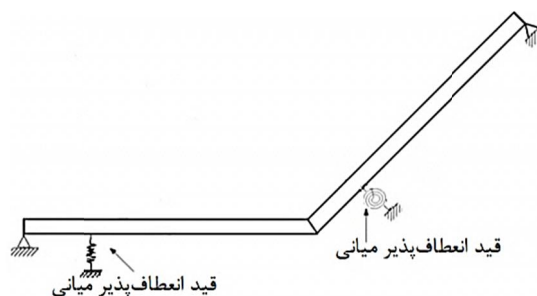
شکل 7 چهار شکل مود اول تیر دو سر مفصل به دست آمده از متلب

تغییرات فرکانس طبیعی برای تیر بدون ترک و قید میانی شکل 5 نسبت به زوایای شکستگی مختلف در جدول 4 بررسی گردیده و در نمودار شکل 8 قابل مشاهده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش زاویه  $\theta$ ، فرکانس طبیعی چهارم تیر ثابت و فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم افزایش می‌یابند. لازم به ذکر است که فرکانس تیر به ازای  $\theta=0$ ، با مقادیر موجود در مرجع [11] برابر است که این موضوع صحت فرمولاسیون موجود را تایید می‌کند.

در مثالی دیگر تیر دو سر مفصل شکل 3 که در مرکز دارای شکستگی می‌باشد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. پارامترهای هندسی و فیزیکی این تیر جهت مقایسه نتایج، مطابق با پارامترهای مرجع [11] در نظر گرفته شده‌اند و عبارت از طول تیر  $L=100$  m، زاویه شکستگی در مرکز، چگالی  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>، مدول یانگ  $E=207$  GPa، ممان اینرسی سطح مقطع  $I=0.174$  m<sup>4</sup> و ضریب تصحیح برش  $\kappa=0.7$  می‌باشند. سیستم دو درجه آزادی عبوری از روی تیر با سرعت  $v=20$  m/s با دو جرم  $m_1=227.55$  kg و  $m_2=1944.4$  kg، فنرهایی به سختی  $k_1=202230$  N/m و  $k_2=85439$  N/m و دمپرهایی با ضریب دمپینگ  $c_1=29.2$  Ns/m و  $c_2=2190$  Ns/m است. همچنین فنرهای خارجی در موقعیت‌های  $X_{k1e1}=12.5$  m و  $X_{k1e2}=62.5$  m



شکل 4 قاب بسته ترک‌دار



شکل 5 تیر دو سر مفصل با زاویه 45° در مرکز و قیود انعطاف‌پذیر میانی

جدول 2 مقایسه بین فرکانس‌های روش تحلیلی و عددی (بر حسب هرتز)

فرکانس آزمایش تجربی قاب بدون ترک [18]	قاب بدون ترک [18]	قاب بدون ترک (مطالعه حاضر)	قاب ترک‌دار	فرکانس (Hz)
304	297/03	296/79	295/14	1
516	513/38	510/26	436/86	2
1192	1153/42	1146/60	1028/60	3

جدول 3 مقایسه بین فرکانس‌های روش تحلیلی و عددی (بر حسب هرتز)

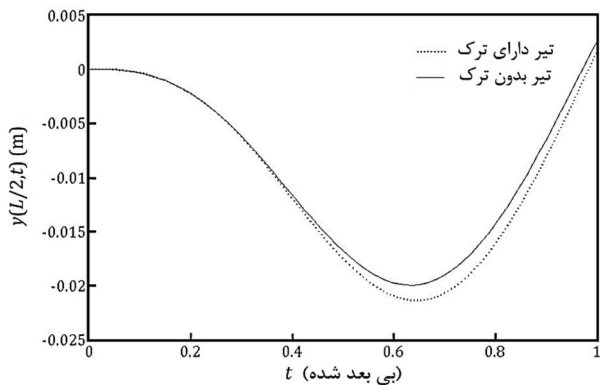
فرکانس (Hz)	تحلیلی (مطالعه حاضر)	عددی (آباکوس)
1	221/06	221/12
2	312/91	313/59
3	578/16	579/02
4	700/91	702/17

در این جدول مشاهده می‌شود که ترک باعث کم شدن فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین مقایسه نتایج برای قاب بدون ترک و قید میانی با مرجع [18] نشان می‌دهد که درصد اختلاف در نتایج این مطالعه نسبت به آن مرجع کمتر از 0/6 درصد است که می‌تواند صحت فرمول‌بندی ارائه شده در این مقاله را نشان دهد.

در مثالی دیگر، تیر دو سر مفصل دو تکه‌ای مطابق شکل 5 به طول  $L=1$  m با زاویه شکستگی  $\theta=\pi/4$  در مرکز تیر، ارتفاع تیر  $H=1.5$  cm، پهنای تیر  $B=1.5$  cm، چگالی  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>، مدول یانگ  $E=2.06 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>، ضریب پواسون  $\nu=0.3$ ، ضریب تصحیح برش  $\kappa=0.7$  و مدول برش الاستیسیته  $G=E/(2 \times (1+\nu))$  در نظر گرفته می‌شود. همچنین دو فنر تکیه‌گاهی خطی و پیچشی به ترتیب در فواصل  $X_{1k}=12.5$  cm و  $X_{2k}=62.5$  cm با سختی‌های  $k_1=10^6$  N/m و  $k_2=10^6$  Nm بر روی آن فرض شده است.

چهار فرکانس طبیعی اول یک بار به روش تحلیلی با استفاده نرم‌افزار متلب و یک بار به صورت عددی با شبیه‌سازی مدل در نرم‌افزار آباکوس محاسبه شده‌اند و شکل مودها با هم مقایسه شده‌اند. مقایسه نتایج برای فرکانس‌ها در جدول 3 و مقایسه شکل مودهای بی‌بعد شده در شکل‌های 6 و 7 آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود میزان اختلاف در فرکانس‌های

آزادانه ارتعاش کند و نمودار جابجایی نقطه میانی تکه اول بر حسب زمان برای سه برابر مدت زمان عبور سیستم از روی تیر رسم شده است.



شکل 11 مقایسه جابجایی بیشینه مرکز تیر ترک‌دار و تیر بدون ترک [11] بر حسب زمان بی‌بعد شده برای  $\theta=0$

جدول 4 تغییرات چهار فرکانس اول (بر حسب رادیان بر ثانیه) نسبت به زوایای مختلف شکستگی

زاویه (درجه)	فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم	فرکانس چهارم
0	13/3	52/9	119/0	211/4
1	18/3	52/9	199/7	211/4
2	28/1	52/9	121/8	211/4
3	38/2	52/9	125/4	211/4
4	47/4	52/9	130/6	211/4
5	52/9	55/0	137/5	211/4
6	52/9	61/1	145/8	211/4
7	52/9	65/7	155/0	211/4
8	52/9	69/2	164/9	211/4
9	52/9	71/8	174/7	211/4
10	52/9	73/8	184/4	211/4

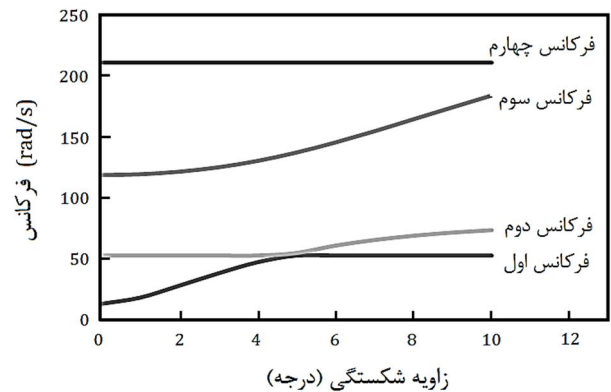
همان‌گونه که این شکل نشان می‌دهد، پس از عبور سیستم از روی تیر نیز جابجایی بیشینه برای حالت  $\theta=2^\circ$  مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه شکستگی مقدار آن کاهش یافته است. در این شکل به دلیل صرف‌نظر از استهلاک در تیر از میزان جابجایی آن در ارتعاشات آزاد با گذشت زمان کاسته نشده است.

نمودار شکل 11 نیز جابجایی مرکز تیر شکل 3 را به ازای  $\theta=0$  (مانند مثال مرجع [11]) و هنگامی که دو ترک در موقعیت‌های  $x_{c1}=37.5m$  و  $x_{c2}=87.5m$  است، نشان می‌دهد. چنانچه مشاهده می‌شود ترک جابجایی بیشینه تیر را افزایش داده است. لازم به ذکر است جابجایی بیشینه در نمودار ارائه شده در مرجع [11] 2/0 سانتی‌متر و در مطالعه حاضر 2/01 سانتی‌متر است که اختلافی در حدود 0/5 درصد را نشان می‌دهد.

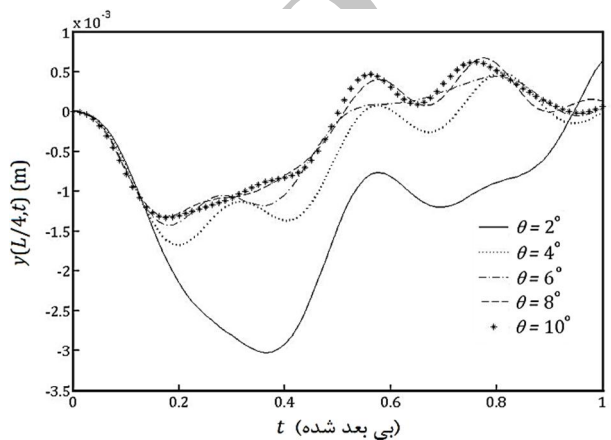
#### 4- نتیجه‌گیری

در تحقیق انجام شده، روشی تحلیلی برای تعیین اثر زاویه شکستگی روی رفتار تیرهای تیموشنکو چند تکه دارای قیود انعطاف‌پذیر میانی داخلی (ترک) و خارجی (تکیه‌گاه میانی) تحت عبور سیستم دو درجه آزادی بسط داده شد. با بررسی شرایط سازگاری در محل‌های شکستگی و قید میانی، روابط بین هر دو تکه به‌دست آمد. با استفاده از روش تحلیلی ماتریس انتقال، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها محاسبه گردید. به علت وجود شکستگی، رابطه تعامد مودها در تئوری تیر تیموشنکو اصلاح شد و رابطه‌ای جدید برای

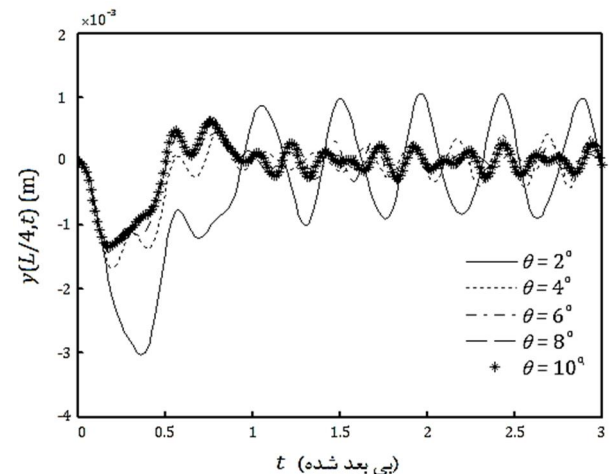
سختی  $k_{te1}=k_{te2}=10000 N/m$  و ترک‌ها در  $x_{c1}=37.5 m$  و  $x_{c2}=87.5 m$  با عمق‌های  $a_1=a_2=H/2$  هستند.



شکل 8 تغییر فرکانس‌های اول تا چهارم نسبت به زاویه شکستگی مرکز



شکل 9 تغییرات جابجایی تیر همراه با ترک و فنر میانی در  $x=L/4$  در زوایای مختلف در مدت زمان عبور سیستم از روی تیر



شکل 10 تغییرات جابجایی تیر همراه با ترک و فنر میانی در  $x=L/4$  در زوایای مختلف در سه برابر مدت زمان لازم جهت عبور سیستم از روی تیر

نمودار بیشینه جابجایی تیر شکل 3 بر حسب زمان که در موقعیت  $L/4$  می‌باشد، به ازای  $\theta=2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ$  در شکل 9 ترسیم شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش زاویه شکستگی، بیشینه جابجایی از مقدار 3/03 میلی‌متر برای  $\theta=2^\circ$  به 1/32 میلی‌متر در  $\theta=10^\circ$  می‌رسد که کاهش برابر با 56 درصد را نشان می‌دهد.

در شکل 10 پس از عبور سیستم از روی تیر اجازه داده شده است تا تیر



- [6] S. Ziaei-Rad, A. Ariaei, M. Imregun, Vibration Analysis of Timoshenko Beams under Uniform Partially Distributed Moving Masses, *Journal of Multi-body Dynamics*, Vol. 221, pp. 551-566, 2007.
- [7] T. Hayashikava, N. Watanabe, Dynamic behaviour of continuous beams with moving loads, *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, Vol. 107, pp. 229-246, 1981.
- [8] M. M. Stanisic, On a new theory of the dynamical behavior of structures carrying moving masses, *Ingenieur-Archive*, Vol. 55, pp. 176-185, 1985.
- [9] F. Khalily, M. F. Golnaraghi, G. R. Heppler, On the dynamic behaviour of a flexible beam carrying a moving mass, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 5, pp. 493-513, 1994.
- [10] D. C. D. Oguamana, J. S. Hansen, G. R. Heppler, Dynamic response of an overhead crane system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213, pp. 889-906, 1998.
- [11] E. Esmailzadeh, N. Jalili, Vehicle-passenger-structure interaction of uniform bridges traversed by moving vehicles, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, pp. 611-635, 2002.
- [12] H. P. Lee, Dynamic response of a beam on multiple supports with a moving mass, *Journal of Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 4, pp. 303-312, 1996.
- [13] P. K. Chatterjee, T. K. Datta, C. S. Surana, Vibration of continuous bridges under moving vehicle, *Journal of Sound and vibrations*, Vol. 169, pp. 619-632, 1994.
- [14] M. Ichikawa, Y. Miyakawa, A. Matsuda, Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, pp. 493-506, 2000.
- [15] H. P. Lin, J. Ro, Vibration analysis of planar serial-frame structures, *Journal of sound and vibration*, Vol. 262, pp. 1113-1131, 2003.
- [16] R. T. Wang, Vibration of multi-span Timoshenko beams to a moving force, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 207, pp. 731-742, 1997.
- [17] H. P. Lin, S. C. Chang, Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 281, pp. 155-169, 2005.
- [18] H. P. Lin, J. D. Wu, Dynamic analysis of planar closed-frame structures, *Journal of sound and vibration*, Vol. 282, pp. 249-264, 2005.
- [19] T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, J. Yao, A continuous cracked beam vibration theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, pp. 17-34, 1998.
- [20] J. A. Loya, L. Rubio, J. Fernández-Sáez, Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, pp. 640-653, 2006.
- [21] M. A. Mahmoud, M. A. Zaid, Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, pp. 591-603, 2002.
- [22] H. P. Lin, S. C. Chang, Forced responses of cracked cantilever beams subjected to a concentrated moving load, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 1456-1463, 2006.
- [23] S. Talebi, A. Ariaei, Vibration analysis of rotating tapered cantilever beams and their crack detection using genetic algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 1-13, 2013. (In Persian)
- [24] S. Talebi, A. Ariaei, Vibration analysis of a variable cross-section cracked Timoshenko beam and their crack detection using genetic algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 78-89, 2013. (In Persian)
- [25] A. Ariaei, S. Ziaei-Rad, M. Malekzadeh, Dynamic response of a multi-span Timoshenko beam with internal and external flexible constraints subject to a moving mass, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, pp. 1257-1272, 2013.
- [26] M. Dadfarnia, N. Jalili, E. Esmailzadeh, A comparative study of the Galerkin approximation utilized in the Timoshenko beam theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 280, pp. 1132-1142, 2005.

آن ارائه و اثبات شد. پاسخ اجباری با استفاده از توابع ویژه تئوری بسط مودال به دست آمد. به منظور اعتبارسنجی نتایج، مثال‌هایی حل و مشاهده شد که با افزایش زاویه شکستگی بر مقدار فرکانس‌های طبیعی افزوده می‌شود و بیشینه جابجایی تیر کاهش می‌یابد. همچنین وجود ترک باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی و افزایش جابجایی بیشینه در تیر گردید. اعتبار تکنیک بیان شده، با مقایسه نتایج ارائه شده با نتایج سایر مقالات و نتایج به دست آمده از حل‌های عددی مورد تأیید قرار گرفت. فرمول‌بندی ارائه شده در این مقاله قادر است دسته وسیعی از مسائل همچون تیرهای دارای ترک، دارای زاویه شکستگی و یا پل‌های چند دهانه تحت عبور بار را مورد مطالعه قرار دهد.

## 5- فهرست علائم

$A$	مساحت سطح مقطع تیر ( $m^2$ )
$E$	مدول الاستیسیته یانگ ( $Nm^{-2}$ )
$G$	مدول برش ( $Nm^{-2}$ )
$I$	ممان اینرسی سطح مقطع ( $m^4$ )
$k_{te}$	سختی فنر خطی خارجی ( $Nm^{-1}$ )
$k_{ti}$	سختی فنر خطی داخلی ( $Nm^{-1}$ )
$k_{oe}$	سختی فنر پیچشی خارجی ( $Nm$ )
$k_{oi}$	سختی فنر پیچشی داخلی ( $Nm$ )
$L$	طول تیر ( $m$ )
$u$	جابجایی طولی تیر ( $m$ )
$y$	جابجایی عرضی تار خنثی ( $m$ )

**علائم یونانی**

$\theta$	زاویه شکستگی
$\kappa$	ضریب تصحیح برش تیموشنکو
$\rho$	چگالی ( $kgm^{-3}$ )
$v$	ضریب پواسون
$\phi$	زاویه چرخش مقطع المان نسبت به تار خنثی

## 6- مراجع

- [1] G. G. Stokes, Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, pp. 707-735, 1849 Reprinted in *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 2, pp. 178-220, 1883.
- [2] R. S. Ayre, L. S. Jacobson, C. S. Hsu, Transverse vibration of one and two-span beams under the action of a moving mass load, *Proceedings of the 1st U.S. National Congress on Applied Mechanics*, 11-16 June, Chicago, pp. 81-90, 1951.
- [3] C. E. Inglis, *A Mathematical treatise on vibrations in railway bridges*, London: Cambridge University Press, 1934.
- [4] L. Fryba, *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Third Edition, Groningen, Thomas Telford, Czech Republic, 1999.
- [5] Y. Chen, Distribution of Vehicular loads on bridge girders by the FEA using ADINA: modelling, simulation, and comparison, *Computers and Structures*, Vol. 72, pp. 127-139, 1999.