مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15، ص‌ص 24-32

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

معرفی توابع چندجمله‌ای جهت آنالیز ارتعاشات غیرخطی ورق مستطیلی ترک‌دار دارای تکیه‌گاه‌های آزاد

رضا حسن‌نژاد قدیم[1*]، سید جواد میرنصیری[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* تبریز، کدپستی 14766-51666، hassannejhad@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 03 بهمن 1392

پذیرش: 03 اسفند 1392

ارائه در سایت: 28 مهر 1393

کلید واژگان:

ورق ترک‌دار

ارتعاشات غیرخطی

تکیه‌گاه‌های آزاد

توابع پذیرا

چکیده

تحقیق حاضر به بررسی ارتعاشات غیرخطی ورق با حداقل یک لبه‌ی آزاد و دارای ترک فرورفته با طول محدود، واقع در مرکز ورق و به موازات یکی از لبه‌های ورق می‌پردازد. با توجه به پیچیدگی معادلات دینامیکی حاکم، از روش گالرکین برای تحلیل مسئله استفاده شده است، از این‌رو باید توابع پذیرا مناسب که بتوانند شرایط مرزی حاکم بر لبه‌ی آزاد ورق را ارضا کنند، انتخاب شوند. در بسیاری از تحقیقات انجام شده در ادبیات فن از توابع تیر که قادر به ارضای شرایط مرزی حاکم بر لبه‌ی آزاد ورق نیستند، استفاده می‌شود که سبب ایجاد خطای زیاد در محاسبه مقادیر فرکانس‌ها و شکل مودهای ورق می‌شود. بنابراین در تحقیق حاضر توابع پذیرا جدیدی معرفی می‌شود، که به خوبی ناتوانی توابع تیر معادل، در تخمین فرکانس‌های ورق سالم و ترک‌دار را مرتفع می‌سازد و خطای محاسباتی را کاهش می‌دهد. سپس با استفاده از توابع جدید معرفی شده اثر ضخامت و طول نسبی ترک روی فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار بررسی شده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی که نشانگر وابستگی دامنه و فرکانس هستند برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی استخراج شده است. همچنین اثر افزایش طول ترک روی نحوه تغییر رفتار غیرخطی ورق ترک‌دار مورد بررسی قرار گرفته است. به‌منظور صحه‌گذاری نتایج، تغییرات فرکانسی سیستم به ازای افزایش طول ترک و ضخامت ورق با نتایج موجود در ادبیات فن مورد مقایسه قرار گرفته است.

An introduction of new polynomial functions for nonlinear vibration analysis of cracked rectangular plates involving free edges

Reza Hassannejad Qadim[1*], Seyyed Javad Mirnasiri[2]

1- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
*P.O.B. 5166614766 Tabriz, hassannejhad@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 January 2014
Accepted 22 February 2014
Available Online 20 October 2014

Keywords:
Cracked plate
Nonlinear vibration
Free supports
Admissible functions

ABSTRACT

The present study deals with nonlinear vibration analysis of the plate having at least one free edge. The plate has a part-through central crack with arbitrary limit length which is parallel to one side of the plate. Due to complexity of the governing equation of motion, the Galerkin method is used for solving the problem. Therefore, the appropriate admissible functions satisfying free edge conditions in the cracked plate, must be employed. The beam functions can not satisfy free edge conditions in the plate, nevertheless these functions used in many researches in the literature, which lead to high numerical errors in computing the frequency and mode shapes. Therefore, in this research, new admissible functions are proposed which can obviate incapability of the beam functions to accurately estimate natural frequency of the intact and cracked plate and reduce the related computational errors. The effects of changes in thickness and non-dimensional crack length on natural frequency of the cracked plate are investigated using proposed functions, and frequency response curves indicating the dependence of frequency on amplitude is derived for different boundary conditions. Also, the influence of crack length on the changes in the nonlinear behavior of the cracked plate is investigated. The results are compared with those of the available results in the literature.

1- مقدمه

طراحی انواع سازه‌های مهندسی درمرحله‌ی اول نیازمند شناخت و تسلط کامل بر رفتار ارتعاشی و دینامیکی بخش‌های انعطاف‌پذیر به‌کار رفته در سازه، نظیر تیرها، کابل‌ها، ورق‌ها، پوسته‌ها و موارد مشابه می‌باشد. در این میان ورق‌ها به‌دلیل کاربردهای فراوانی که در بسیاری از علوم مهندسی و صنایع دارند، از درجه اهمیت بالایی برخوردار هستند. از این‌رو مدل‌سازی سازه‌های معیوب در جهت شناخت و درک فیزیکی کامل از ماهیت عیب، موجب توجه فزاینده‌ی محققان شده است. وجود عیوبی نظیر ترک در سازه‌های انعطاف‌پذیر سبب تغییر در مشخصه‌های فیزیکی آن‌ها مثل سفتی، جرم، میرایی و به دنبال آن باعث تغییر در مشخصه‌های ارتعاشی، نظیر

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
R. Hassannejad Qadim, S.J. Mirnasiri, An introduction of new polynomial functions for nonlinear vibration analysis of cracked rectangular plates involving free edges, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 24-32, 2015 (In Persian)

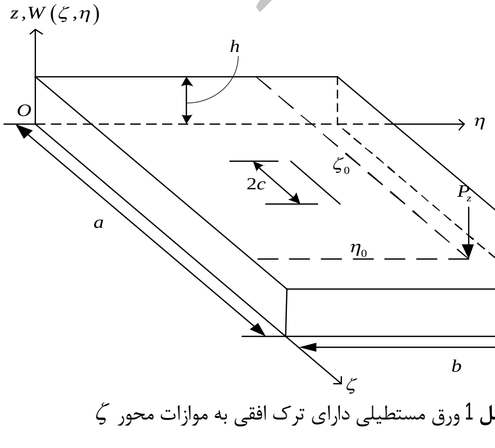
فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها می‌شود. به‌همین دلیل یکی از ساده‌ترین، کم‌هزینه‌ترین و سریعترین روش‌ها در حوزه‌ی شناسایی عیوب، بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌ها از طریق تغییر در فرکانس‌های طبیعی آن، ناشی از وجود عیب می‌باشد. در این راستا اولین تحقیق صورت گرفته در زمینه آنالیز ارتعاشی ورق‌های ترک‌دار، توسط لین وکومباسار[1] روی ورق ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده انجام شده است که در آن با استفاده از توابع گرین، معادلات انتگرالی فردهلم از نوع اول[1] استخراج شده و پس از حل آن‌ها، تغییرات فرکانسی ناشی از تغییر در طول ترک، و گشتاورهای نسبی توزیع شده در بخش‌های بی‌ترک ارائه شده است. استال و کییر[2] مسئله ارتعاش و کمانش ورق ترک‌دار دارای تکیه‌گاه‌های ساده را به‌صورت معادلات سری دوگانه فرمول‌بندی کرده و پس از کاهش آن‌ها به معادلات انتگرالی همگن فردهلم از نوع دوم، فرکانس‌های طبیعی و گشتاورهای توزیعی را استخراج کردند. نزو[3] با تلفیق روش لوی و توابع گرین و با بهبود روش کومباسار، به آنالیز ارتعاشی ورق با تکیه‌گاه‌های ساده که دارای ترک در مرکز صفحه یا در یکی از لبه‌های ورق است پرداخت و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مربوطه را استخراج کرد. هیرانو و اوکازاکی[4] ورقی ترک‌دار با سه شرط مرزی SSSS، SCSC وSFSF[2] را مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از روش حل لوی فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کردند. خادم و رضائی[5] با استفاده از مدل فنر خطی به تحلیل ارتعاشی ورق ترک‌دار با چهارطرف تکیه‌گاه‌های ساده پرداختند و در آن طی معرفی توابعی جدید تحت عنوان توابع مقایسه‌ای اصلاح شده به بررسی اثر وجود ترک روی فرکانس‌های طبیعی ورق با ترک محدود و واقع در مرکز صفحه پرداختند، ترک مورد نظر از نوع فرورفته[3] بود. همچنین در تحقیق دیگری هوانگ و لیسا[6، 7] تحلیل ارتعاشی ورق ترک‌دار با دو وضعیت ترک زاویه‌دار کاملاً فرورفته[4] واقع در لبه و ترک مورب کاملاً فرورفته واقع در مرکز صفحه را برای دو شرط تکیه‌گاهی FFFF و SSSS انجام دادند. آن‌ها از توابع چند جمله‌ای منظم ترکیب شده با توابع مکمل به‌عنوان توابع پذیرا[5] در روش ریلی ریتز استفاده کردند و فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی را به‌دست آوردند. بات[8] اولین بار از چندجمله‌ای‌های متعامد به‌دست آمده از فرایند گرام- اشمیت[6]، به‌عنوان توابع پذیرا در روش تقریبی ریلی ریتز استفاده کرد و فرکانس‌های طبیعی ورقمستطیلی سالم با شرایط تکیه‌گاهی مختلف را به‌دست آورد. لام و همکاران[9] از چندجمله‌ای‌های متعامد در استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق دارای بریدگی[7] با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، CCCC و CSCS استفاده کردند. لیو[10] چندجمله‌ای‌های متعامد تولید شده با استفاده از فرایند گرام-اشمیت را در محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی ورق دارای ترک کاملاً فرورفته با شرایط مرزی SSSS، FCFC و SCSC به‌کار برد و نتایجی با دقت خوب کسب کرد.

تاکنون عمده تحقیقات صورت گرفته در زمینه بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های ترک‌دار مربوط به حوزه‌ی خطی بوده‌اند و مطالعات اندکی در زمینه ارتعاشات غیرخطی ورق‌های ترک‌دار صورت گرفته است، در صورتی که مدل‌های غیرخطی نسبت به مدل‌های خطی رفتار جامع‌تر و واقع‌بینانه‌تری را ارائه می‌کنند. از اینرو اخیراً مطالعه رفتار غیرخطی ورق ترک‌دار مورد توجه محققان واقع شده است. در این راستا ایسرار و همکاران[11]، با استفاده از مدل فنر خطی، معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات غیرخطی ورق معیوب، دارای ترک افقی فرورفته به طول محدود و واقع در مرکز ورق را استخراج کردند، سپس با اعمال روش گالرکین[8] برای سه شرط تکیه‌گاهی SSSS، CCSS و CCFF معادله‌ی غیرخطی حاکم بر مسئله را استخراج کردند. پس از آن با اعمال روش تقریبی رابطه‌ی بین فرکانس و دامنه و همچنین فرکانس طبیعی اول را محاسبه کرده و نمودارهای پاسخ فرکانسی مربوطه را استخراج کردند. در این تحقیق از توابع تیر به عنوان توابع پذیرا استفاده شده است که این مورد باعث ایجاد خطای نسبتاً زیاد در محاسبه‌ی فرکانس ورق‌های سالم و ترک‌دار با شرایط تکیه‌گاهی آزاد می‌شود. اسماعیل[12] با توسعه‌ی مدل ایسرار[11] از ترک افقی و به موازات یکی از لبه‌های ورق به ترک فرورفته با زاویه‌ی جهت‌گیری دلخواه، مدل او را بهبود بخشید. او نیز از شرایط تکیه‌گاهی و توابع پذیرا مشابه[11] در کار خود استفاده کرد.

عمده تحقیقات مرتبط با تحلیل ارتعاشات خطی یا غیرخطی ورق‌های ترک‌دار در ادبیات فن، شامل ورق با شرایط تکیه‌گاهی ساده یا گیردار بوده‌اند و کمتر در مورد ورق‌های دارای لبه‌های آزاد، سخن به میان آمده است. از این جهت نوعی کاستی در جامعیت مدل‌های ارائه شده، از نظر شرایط مرزی حاکم بر ورق ترک‌دار در ادبیات فن وجود دارد. فقط برای 6 حالت از 21 حالت ترکیبی شرایط مرزی در ورق‌ها حل دقیق وجود دارد و برای 15 حالت باقیمانده، باید از روش‌های تقریبی استفاده کرد[13]. موفقیت روش‌های تقریبی در حل مسائل، به انتخاب مناسب توابع پذیرا بستگی دارد، که در این میان در مسائل مربوط به ورق‌ها توابع پذیرا تیر، پرکاربردترین توابع هستند. در همین رابطه در سال 1975 باسیلی و همکاران[14] نشان دادند که در حل تقریبی مسائل ارتعاشی مرتبط با ورق‌هایی که دارای لبه‌های آزاد هستند، توابع شکل مود تیر ناکارآمد هستند. سپس مجموعه توابع جدید تحت عنوان توابع تیر باز تولید شده را ارائه کردند که توصیف دقیق‌تری از رفتار ارتعاشی چنین ورق‌هایی داشتند ، ولی باز تولید چنین توابعی بسیار دشوار است[8]. بنابراین نمی‌توان از توابع تیر مخصوصا در مواردی که ورق ترک‌دار بوده و روش حل بر اساس معادله دیفرانسیل است، استفاده کرد[15-17]. در این تحقیق، هدف ارائه روشی جدید برای مطالعه ارتعاشات غیرخطی ورق ترک‌دار دارای تکیه‌گاه‌های آزاد می‌باشد. برای این منظور توابع پذیرا جدیدی پیشنهاد می‌شود که نه تنها سبب افزایش دقت و سرعت همگرایی پاسخ می‌شوند، بلکه محدودیت توابع تیر در ارضای شرایط مرزی حاکم بر لبه‌ی آزاد را نخواهند داشت.

2- فرمول‌بندی مسئله

مدل اصلی حاکم بر مسئله مطابق با شکل 1 می‌باشد.



شکل 1 ورق مستطیلی دارای ترک افقی به موازات محور ζ

1- Fredholm Integral equations of the first Kind

2- تکیه‌گاه‌های x=0, x=a هردو ساده و تکیه‌گاه‌های y=0, y=b هردو آزاد هستند

3- Part through

4- Through

5- Admissible Functions

6- Gram Schmidt

7- Cutout

8- Galerkin

ورق مستطیلی با ابعاد a، b و h و دارای ترک افقی به طول $2c$ و عمق نسبی $\xi=\frac{d}{h}=0/6$ و به موازات یکی از اضلاع در راستای محور ζ و شرایط مرزی مختلف با حداقل یک لبه‌ی آزاد است که تحت اعمال نیروی متمرکز P_z قرار دارد. اگر از متغیرهای بدون بعد به شکل زیر استفاده شود:

$$x=\frac{\zeta}{a}\ ,\ x_0=\frac{\zeta_0}{a}\ ,\ y=\frac{\eta}{b}\ ,\ y_0=\frac{\eta_0}{b}\ ,\ \varphi=\frac{b}{a}\ ,\ C=\frac{c}{a} \quad (1)$$

معادله دیفرانسیل بدون بعد حاکم بر ارتعاشات ورق ترک‌دار به‌صورت زیر خواهد بود[11]:

$$D\left(\frac{\partial^4W}{\partial x^4}+\frac{2}{\varphi^2}\frac{\partial^4W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{\varphi^4}\frac{\partial^4W}{\partial y^4}\right)=-\rho ha^4\frac{\partial^2W}{\partial t^2}$$
$$+n_xa^2\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+a^4P_z+\frac{2CD\left(\frac{1}{\varphi^4}\frac{\partial^4W}{\partial y^4}+\frac{\nu}{\varphi^2}\frac{\partial^4W}{\partial x^2\partial y^2}\right)}{3\left(\frac{\alpha_{bt}^0}{6}+\alpha_{bb}^0\right)(3+\nu)(1-\nu)\frac{h}{a}+2C}$$
$$-\frac{n_{rs}2C\frac{a^2}{\varphi^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}}{\left(6\alpha_{tb}^0+\alpha_{tt}^0\right)\left(1-\nu^2\right)\frac{h}{a}+2C} \quad (2)$$

که در آن پارامترهای n_x و n_{rs} به‌صورت زیر می‌باشند:

$$n_x=\frac{6D}{h^2a^2}\int_0^1\int_0^1\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{\nu}{\varphi^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right)dxdy \quad (3)$$

$$n_{rs}=\frac{6D}{h^2a^2}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\nu\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)dxdy \quad (4)$$

در معادله‌ی (2) α_{bb}^0، $\alpha_{bt}^0=\alpha_{tb}^0$ و α_{tt}^0 به‌ترتیب کمپلیانس‌های[1] بدون بعد خمشی، کششی-خمشی و کششی هستند[18]. D صلابت خمشی ورق به فرم مرسوم $D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ می‌باشد که در آن E مدول الاستیسیته و ν نسبت پواسون است. همچنین نیروی متمرکز P_z با استفاده از تعریف تابع دلتای دیراک به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود[11]:

$$P_z=P_0(t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \quad (5)$$

اگر از روش تقریبی گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل غیرخطی(2) استفاده شود پاسخ دینامیکی ورق به‌صورت معادله (6) خواهد بود:

$$W(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}X_iY_j\Psi_{ij}(t) \quad (6)$$

که در آن X_i و Y_j توابع پذیرا بی‌بعد هستند و با در نظر گرفتن شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. پس از جایگذاری روابط(3) تا (6) در معادله‌ی (2) و ضرب طرفین در X_i و Y_j، سپس انتگرالگیری روی بازه‌ی صفر تا یک و در نظر گرفتن تنها یک جمله‌ی اول معادله‌ی (6)، معادله‌ی دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود[11]:

$$M_{11}\ddot{\Psi}_{11}(t)+K_{11}\Psi_{11}(t)+G_{11}\Psi_{11}^3(t)=P_{11} \quad (7)$$

که در آن پارامترهای P_{11}، K_{11}، M_{11} و G_{11} عبارتند از[11]:

$$P_{11}=\frac{a^4P_0(t)}{D}X_1(x_0)Y_1(y_0) \quad (8)$$

$$K_{11}=A_{11}\int_0^1\int_0^1\Bigg[X_1^{iv}Y_1+\frac{2}{\varphi^2}X_1''Y_1''+X_1Y_1^{iv}$$
$$-\frac{2C\left(\frac{1}{\varphi^4}Y_1^{iv}X_1+\frac{\nu}{\varphi^2}X_1''Y_1''\right)}{3\left(\frac{\alpha_{bt}^0}{6}+\alpha_{bb}^0\right)(3+\nu)(1-\nu)\frac{h}{a}+2C}\Bigg]X_1Y_1dxdy \quad (9)$$

$$M_{11}=\frac{\rho ha^4}{D}A_{11}\int_0^1\int_0^1X_1^2Y_1^2dxdy \quad (10)$$

$$G_{11}=A_{11}^3\int_0^1\int_0^1\Bigg[-a^2p_{11}^1X_1''Y_1$$
$$+\frac{2C\frac{a^2}{\varphi^2}}{\left(6\alpha_{tb}^0+\alpha_{tt}^0\right)\left(1-\nu^2\right)\frac{h}{a}+2C}p_{11}^2X_1Y_1''\Bigg]X_1Y_1dxdy \quad (11)$$

$$p_{11}^1=\frac{6}{h^2a^2}\int_0^1\int_0^1\left(\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^2{Y_1}^2+\frac{\nu}{\varphi^2}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)^2{X_1}^2\right)dxdy \quad (12)$$

$$p_{11}^2=\frac{6}{h^2a^2}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)^2{X_1}^2+\nu\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^2{Y_1}^2\right)dxdy \quad (13)$$

در این روابط A_{11} ثابت بوده که چون تنها یک جمله از سری در نظر گرفته می‌شود، می‌توان آن را واحد در نظر گرفت. با فرض اینکه سیستم تحت اثر یک میرایی خطی ضعیف با ضریب استهلاک μ است و در نظر گرفتن نیروی تحریک به‌صورت هارمونیک[11]، پس از تقسیم طرفین بر جرم M_{11} معادله دیفرانسیل غیرخطی (14) که به معادله دافینگ[2] معروف است، به‌دست می‌آید[11]:

$$\ddot{\Psi}_{11}(t)+2\mu\dot{\Psi}_{11}(t)+\omega_{11}^2\Psi_{11}(t)+\gamma_{11}\Psi_{11}^3(t)=\frac{\eta_{11}}{D}q\cos\Omega_{11}t \quad (14)$$

که در آن پارامترهای ${\omega_{11}}^2$، γ_{11} و η_{11} به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\omega_{11}^2=\frac{K_{11}}{M_{11}}\quad,\quad\gamma_{11}=\frac{G_{11}}{M_{11}}\quad,\quad\eta_{11}=\frac{a^4X_1(x_0)Y_1(y_0)}{M_{11}} \quad (15)$$

ω_{11}^2 فرکانس طبیعی اصلی ورق ترک‌دار، Ω_{11} فرکانس تحریک و q دامنه‌ی نیروی وارد بر ورق در مکان دلخواه x_0 و y_0 است. با اعمال روش اغتشاشات[3] و روش مقیاس‌های چندگانه رابطه‌ی بین فرکانس و دامنه به‌صورت رابطه (16) به‌دست می‌آید[11]:

$$\sigma_{11}=\frac{3\gamma_{11}b^2}{8\omega_{11}}\pm\sqrt{\frac{{\eta_{11}}^2}{4D^2{\omega_{11}}^2b^2}q^2-\mu^2} \quad (16)$$

در این رابطه b دامنه‌ی پاسخ و σ پارامتر نامیزانی[4] در روش اغتشاشات است.

3- ارائه توابع پذیرا جدید برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی ورق ترک‌دار با لبه‌های آزاد

همان‌طور که در بخش قبل به آن اشاره شد، در پاسخ در نظر گرفته شده در رابطه‌ی(6)، تنها یک جمله اول در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه جمله در نظر گرفته شده غالب محسوب می‌شود و از طرفی واحد است، برای بالا بردن دقت روش تقریبی و واقعی‌تر کردن نتایج، تنها یک راه وجود دارد و آن انتخاب مناسب و دقیق تابع پذیرا است به‌طوری‌که بتواند حداکثر شرایط مرزی حاکم بر مسئله را ارضا کند. ایسرار و اسماعیل[11، 12] در آنالیز ارتعاشات غیرخطی ورق ترک‌دار، از توابع تیر استفاده کردند، ولی مقادیر فرکانس طبیعی به‌دست آمده برای ورق سالم با شرایط تکیه‌گاهی CCFF، در

1- Compliance

2- Duffing equation
3- Perturbation Method
4- Detuning parameter

مقایسه با مقادیر دقیق ارائه شده در مرجع[13] دارای اختلاف نسبتاً زیادی است و لذا استفاده از توابع تیر در مواردی که تکیه‌گاه آزاد است، به این دلیل که این توابع قادر به ارضای شرایط مرزی آزاد برای ورق مربوطه نخواهند بود، پیشنهاد نمی‌شود، در این بخش دو دسته از توابع پذیرا در نظر گرفته می‌شوند، دسته‌ی اول مربوط به شرایط مرزی است که تنها شامل تکیه‌گاه‌های گیردار و ساده می‌باشند و توابع مربوطه در جدول 1 ارائه شده است. دسته‌ی دوم که برای شرایط مرزی با حداقل یک لبه‌ی آزاد استخراج می‌شوند، توابع چندجمله‌ای جدید هستند که با ابتکاری جدید از روی شرایط مرزی مربوط به لبه‌ی آزاد ورق به‌دست می‌آیند و در ادامه نحوه‌ی استخراج آن‌ها توضیح داده خواهد شد.

شرایط حاکم بر تکیه‌گاه آزاد در تیر و ورق مستطیلی پس از بی‌بعدسازی به‌صورت (17) تا (20) است[15]:

برای تیر:

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_{y=0,1}=0 \quad \left.\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right|_{y=0,1}=0 \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{x=0,1}=0 \quad \left.\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right|_{x=0,1}=0 \tag{18}$$

برای ورق:

$$\begin{gathered}\left.\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{y=0,1}=0\\ \left.\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2}\right|_{y=0,1}=0\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\nu}{\varphi^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_{x=0,1}=0\\ \left.\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=0,1}=0\end{gathered} \tag{20}$$

با مقایسه معادلات (17) و (18) با معادلات (19) و (20) واضح است که جملات دوم در سمت راست معادلات (19) و (20)، در روابط مربوط به تیر وجود ندارد که باعث ایجاد خطای زیاد در محاسبه‌ی فرکانس‌های ارتعاشی ورق با لبه‌های آزاد می‌شود. با جایگذاری توابع به فرم $W(x,y)=Y(y)\sin(x)$ و $W(x,y)=X(x)\sin(y)$ به‌ترتیب در روابط (19) و (20)، شرایط مرزی (21) و (22) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{gathered}\left.\frac{1}{\varphi^2}Y''(y)-\nu Y(y)\right|_{y=0,1}=0\\ \left.\frac{1}{\varphi^2}Y'''(y)-(2-\nu)Y'(y)\right|_{y=0,1}=0\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\left.X''(x)-\frac{\nu}{\varphi^2}X(x)\right|_{x=0,1}=0\\ \left.X'''(x)-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}X'(x)\right|_{x=0,1}=0\end{gathered} \tag{22}$$

جدول 1 توابع پذیرا تیر [19] که در آن λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه تیر و α_1 و α_2 ثوابت مربوطه هستند

شرایط تکیه‌گاهی	تابع پذیرا
ساده- ساده	$X(x)=\sin(n\pi x)\ ,\ \ n=1,2,\ldots$
گیردار- گیردار	$X(x)=\cosh(\lambda_2 x)-\cos(\lambda_2 x)-\alpha_2(\sinh(\lambda_2 x)-\sin(\lambda_2 x))$
ساده- گیردار	$X(x)=\cosh(\lambda_1 x)-\cos(\lambda_1 x)-\alpha_1(\sinh(\lambda_1 x)-\sin(\lambda_1 x))$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با این ابتکار اثر جملات دوم روابط (19) و (20) که تحت تاثیر ضریب پواسون هستند لحاظ می‌شود و به این ترتیب شرایط مرزی مربوط به لبه‌های آزاد ورق نیز ارضا می‌شوند. با در نظر گرفتن شرایط (21) و (22)، توابع چندجمله‌ای جدید برای سه حالت تکیه‌گاهی موازی، شامل لبه‌ی آزاد به فرم معادلات (23) تا (28) به‌دست می‌آیند:

الف) هر دو تکیه‌گاه آزاد (F-F):

$$\begin{aligned}Y(y)=&\,y^5-\frac{\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}y^4-\frac{\varphi^2(2-\nu)}{6}\left(\mathrm{I}_1-\frac{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}\right)y^3\\ &-\left(\mathrm{I}_1-\frac{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}\right)y\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}X(x)=&\,x^5-\frac{\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}x^4-\frac{(2-\nu)}{6\varphi^2}\left(\mathrm{I}_1-\frac{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}\right)x^3\\ &-\left(\mathrm{I}_1-\frac{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}\right)x\end{aligned} \tag{24}$$

ب) ساده- آزاد (S-F):

$$Y(y)=y^4-\frac{\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}y^3+\left(\mathrm{I}_1-\frac{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}\right)y \tag{25}$$

$$X(x)=x^4-\frac{\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}x^3+\left(\mathrm{I}_1-\frac{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}\right)x \tag{26}$$

ج) گیردار- آزاد (C-F):

$$Y(y)=y^4-\frac{\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}y^3-\left(\mathrm{I}_1-\frac{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}\right)y^2 \tag{27}$$

$$X(x)=x^4-\frac{\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}x^3-\left(\mathrm{I}_1-\frac{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_1}{\mathrm{II}_2}\right)x^2 \tag{28}$$

در توابع به‌دست آمده پارامترهای I_1، I_2، II_1 و II_2 ثابت هستند که مقادیر مربوط به هر تابع در پیوست (الف) ارائه شده است. شایان ذکر است که توابع پذیرا به‌دست آمده را می‌توان با تقسیم بر $\left[\int_0^1 Y^2dy\right]^{1/2}$ و $\left[\int_0^1 X^2dx\right]^{1/2}$ نرمالیزه کرد.

4- تحلیل ارتعاشی ورق دارای لبه‌های آزاد و بررسی دقت روش پیشنهادی

با استفاده از رابطه‌ی (15)، مقادیر فرکانس طبیعی اول ω را برای ورق سالم با ابعاد مختلف و ضخامت 0/01m و ورق دارای ترک با طول 0/1m، با شرایط مرزی CCFF محاسبه کرده و نتایج حاصل در جدول 2 ارائه شده است. ورق مورد نظر، آلومینیومی با خواص مدول الاستیسیته E=70/3 GPa، چگالی $\rho=2660\ kg/m^3$ و ضریب پواسون ν=0/33 می‌باشد. برای صحه‌گذاری نتایج حاصل شده، فرکانس‌های مربوط به ورق سالم با مقادیر دقیق ارائه شده در مرجع[13] مقایسه شده‌اند. از طرف دیگر در قسمت مربوط به ورق ترک‌دار، مقادیر فرکانس محاسبه شده در تحقیق حاضر با مرجع [11] مقایسه شده است. همان‌طور که در جدول 2 مشاهده می‌شود، در قسمت مربوط به ورق سالم، مقادیر فرکانس به‌دست آمده در تحقیق حاضر با استفاده از توابع چند جمله‌ای جدید، به مقدار دقیق بسیار نزدیکترند و میزان خطای مربوطه کمتر از 10 درصد می‌باشد. در حالی که مقادیر به‌دست آمده با استفاده از توابع تیر معادل، نسبت به مقدار دقیق فرکانس ورق سالم دارای خطای زیادتری است. در این راستا برای اعتبارسنجی نتایج مربوط به ورق ترک‌دار تغییرات فرکانس برحسب ضخامت و برحسب طول نسبی ترک ورق به‌ترتیب در شکل 2 و شکل 3 برای مقایسه آورده شده است که نشان دهنده‌ی صحت روند تغییرات

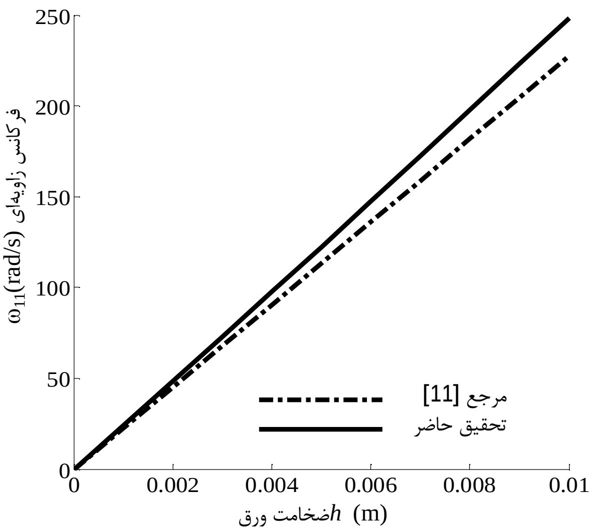
است، چنان‌چه در شکل 2 مشخص است با افزایش ضخامت ورق فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار افزایش یافته و با افزایش طول نسبی ترک، فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار کاهش می‌یابد (3). نکته‌ی حائز اهمیت در این بررسی اختلاف زیاد میان دو منحنی ترسیم شده در شکل 3 است. این میزان اختلاف نشان دهنده‌ی این است که میزان کاهش فرکانس طبیعی در اثر وجود ترک، به‌واسطه‌ی استفاده از توابع تیر بسیار بیشتر از کاهش تخمین زده شده توسط توابع پیشنهادی است، بنابراین می‌توان استنباط کرد که استفاده از توابع تیر منجر به تخمین پایین می‌شود، این موضوع سبب می‌شود که مثلاًدر مبحث مربوط به عیب‌یابی، ورق معیوب، سالم تشخیص داده شود و این خطایی غیر قابل اغماض است.

همچنین در شکل 4 منحنی تغییرات دامنه بر حسب تغییرات پارامتر تنظیم σ به ازای نقاط مختلف اعمال بار متمرکز با دامنه‌ی q =10N و ضریب میرایی μ= 0/08 برای ورق CCFF رسم شده است. منحنی پاسخ فرکانسی مربوطه با استفاده از معادله‌ی (16) و به‌کارگیری توابع پیشنهادی جدید ترسیم شده است. چنان‌چه در این شکل مشخص است، ورق مربوطه مشابه فنر نرم‌شونده رفتار می‌کند، رفتاری که در مرجع [11] نیز به آن اشاره شده است.

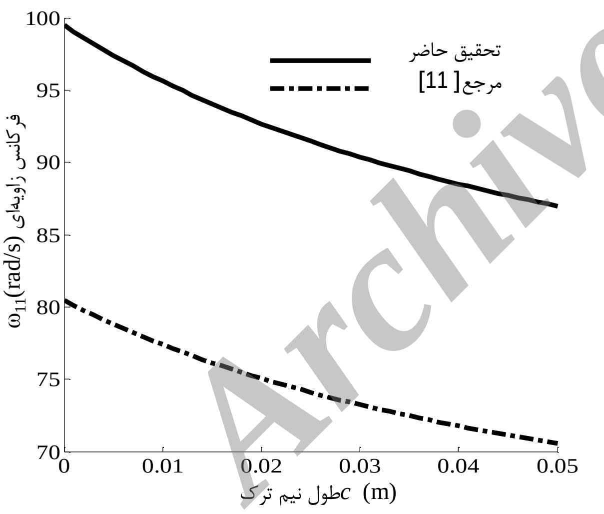
در جدول 3 نتایج حاصل از آنالیز ارتعاشی ورق با شرایط تکیه‌گاهی مختلف و با نسبت ابعادی $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ ارائه شده است. همانطور که در جدول 3 مشاهده می‌شود تنها برای دو حالت CFCF و SFSF، خطای ناشی از استفاده از توابع پیشنهادی، اندکی بیشتر از خطای ناشی از توابع تیر معادل است، ولی در سایر حالات خطا کمتر شده است. نکته‌ی حائز اهمیت در جدول 3 که برتری توابع پیشنهادی در مقاله‌ی حاضر را نسبت به توابع تیر مشخص می‌کند مقادیر فرکانس طبیعی در قسمت مربوط به ورق ترک‌دار است.

با نگاهی به مقادیر فرکانس‌های به‌دست آمده برای ورق ترک‌دار در حالاتی که شرایط تکیه‌گاهی به فرم SFCF، SSCF، CSCF و SFSF است و مقایسه مقادیر مربوطه با مقادیر فرکانس متناظر در ورق سالم، می‌توان دریافت که مقدار فرکانس ورق ترک‌دار با فرکانس ورق سالم متناظر، در حالتی که از توابع پذیرا تیر استفاده می‌شود، یکسان است و گویی هیچ ترکی در ورق وجود ندارد، در حالی که توابع پیشنهادی به‌خوبی کاهش فرکانس طبیعی ناشی از وجود ترک را نشان می‌دهند. دلیل اصلی این موضوع این است که با توجه به اینکه فقط فرکانس اول ورق مربوطه مد نظر است، لذا در انتخاب توابع تیر معادل نیز باید تابع مشخصه‌ی مربوط به مود اول تیر معادل را در نظر گرفت. تابع مشخصه‌ی مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیه‌گاهی SF، FF به‌صورت تابعی خطی است، بنابراین مشتقات دوم به بعد این تابع صفر خواهند شد[19]. از طرف دیگر جملات مربوط به وجود ترک در فرمول‌بندی مسئله حاوی مشتقات دوم و چهارم تابع پذیرا است و لذا توابع تیر در مود اول قادر به تخمین اثر وجود ترک در معادلات نیستند.

دلیل اینکه در برخی از حالات فرکانس تقریبی محاسبه شده برای ورق سالم کمتر از مقدار دقیق و در برخی دیگر بیشتر است این است که در تحقیق حاضر تنها با یک جمله از پاسخ به فرم سری مربوطه مقادیر فرکانس استخراج شده‌اند و طبیعی است در صورتی که بتوان تعداد جملات بیشتری را در نظر گرفت دقت محاسبات افزایش خواهد یافت، ولی با افزایش تعداد جملات به‌دلیل پیچیدگی معادلات حاکم سبب پیچیدگی فزاینده‌ی مسئله خواهد شد.



شکل 2 تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب ضخامت برای ورق CCFF با ابعاد 1m×0/5 و ترک به طول 2c =0/1m



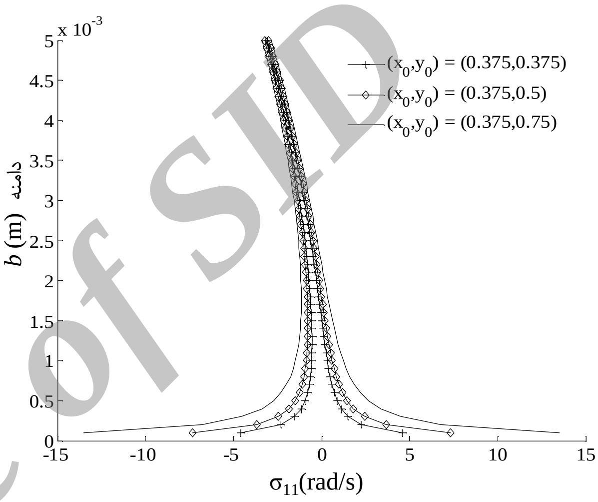
شکل 3 تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب طول ترک برای ورق CCFF با ابعاد 1×1 × 0/01m

جدول 2 مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی اول ω برای ورق CCFF دارای ترک با طول 2c= 0/1m و عمق نسبی 0/6 = $\xi=\frac{d}{h}$

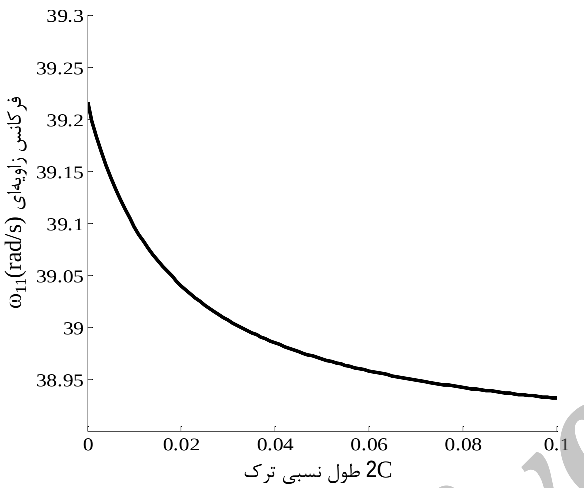
ابعاد ورق		ورق سالم					ورق ترک‌دار	
a(m)	b(m)	مقدار دقیق فرکانس طبیعی ورق[13] (rad/s)	مقدار فرکانس طبیعی محاسبه شده در مرجع[11] (rad/s)	خطای محاسباتی در روش مرجع[11] %	فرکانس طبیعی به‌دست آمده با توابع پیشنهادی (rad/s)	خطای محاسباتی در روش پیشنهادی %	مقدار فرکانس طبیعی محاسبه شده در مرجع[11] (rad/s)	فرکانس طبیعی به‌دست آمده با روش پیشنهادی (rad/s)
1	1	109/137	80/462	26/27	99/498	9/64	70/559	86/984
0/5	1	269/736	231/061	14/33	259/037	3/96	227/611	252/917
1	0/5	269/736	231/079	14/33	259/038	3/96	172/657	199/955

جدول 3 مقادیر فرکانس طبیعی اول ω برای ورق با شرایط تکیه‌گاهی مختلف و نسبت ابعادی $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ و دارای ترک با طول نسبی c= 0/1 و عمق نسبی $\xi=\frac{d}{h}=0/6$

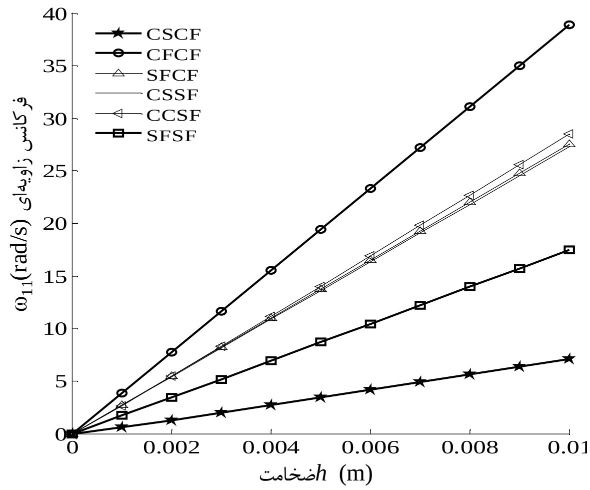
شرایط تکیه‌گاهی	ورق سالم: مقدار دقیق فرکانس طبیعی ورق[13] (rad/s)	مقدار فرکانس طبیعی محاسبه شده با استفاده از توابع تیر (rad/s)	خطای محاسباتی برای توابع تیر %	فرکانس طبیعی به‌دست آمده با توابع پیشنهادی (rad/s)	ورق ترک‌دار: خطای محاسباتی در روش پیشنهادی %	مقدار فرکانس طبیعی محاسبه شده با استفاده از توابع تیر (rad/s)	فرکانس طبیعی به‌دست آمده با توابع پیشنهادی (rad/s)
CFCF	38/8049	39/0807	0/7	39/216	1	39/0807	38/9313
SFCF	26/5809	27/531	3/5	27/711	2/3	27/531	26/7959
CSSF	32/3855	26/841	17	27/5023	15	26/841	27/0744
CCSF	36/743	28/411	22	29/227	20	26/436	25/808
CSCF	43/227	39/08	9/6	42/1683	2/5	39/08	39/99
SFSF	16/695	17/24	3/5	17/661	5/1	17/24	17



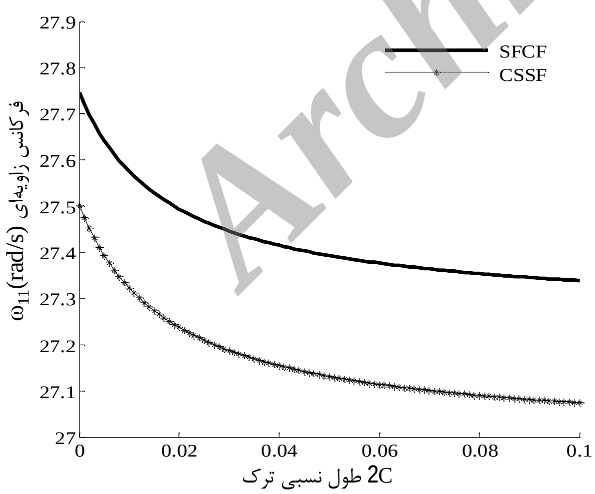
شکل 4 منحنی پاسخ فرکانسی ورق CCFF با ابعاد 0/01m× 1× 1 و به ازای نقاط مختلف اعمال بار متمرکز 10 N



شکل 6 تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب طول نسبی ترک برای ورق CFCF با نسبت ابعادی $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ و ضخامت h =0/01m

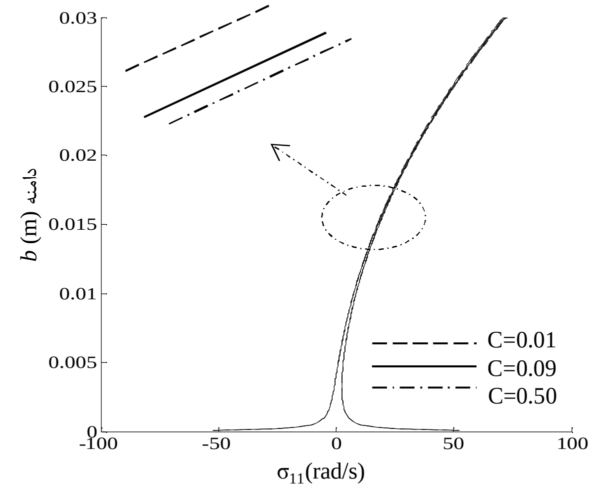


شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب ضخامت برای ورق با نسبت ابعادی $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ و ترک به طول نسبی C =0/1

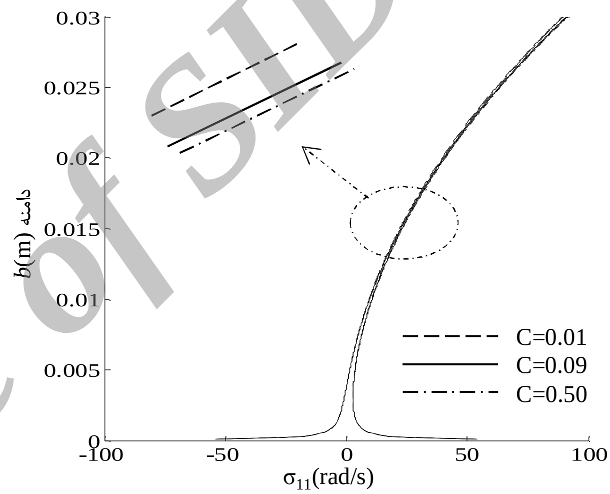


شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب طول نسبی ترک برای ورق با نسبت ابعادی $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ و ضخامت h=0/01m

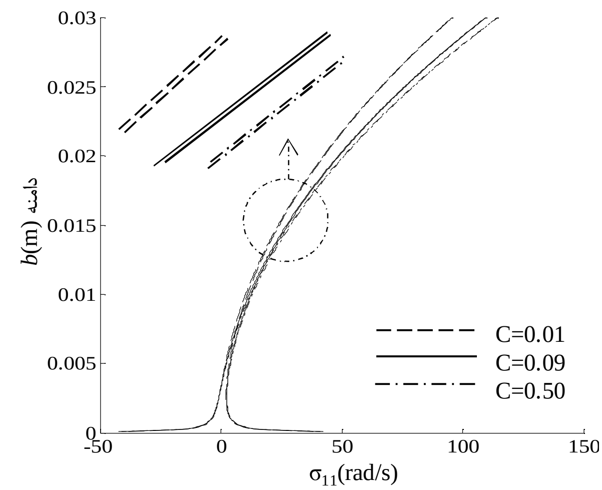
در شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی اول نسبت به ضخامت ورق با استفاده از توابع پیشنهادی ارائه شده است وهمان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد، همچنین در شکل 6 و شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی برحسب طول نسبی ترک به‌صورت دلخواه برای تنها سه حالت تکیه‌گاهی ترسیم شده است، همان‌طور که مشخص است با افزایش طول نسبی ترک فرکانس طبیعی در تمامی حالات تکیه‌گاهی کاهش می‌یابد، نتیجه‌ای مشابه را می‌توان برای سه حالت تکیه‌گاهی باقیمانده نیز به‌دست آورد.



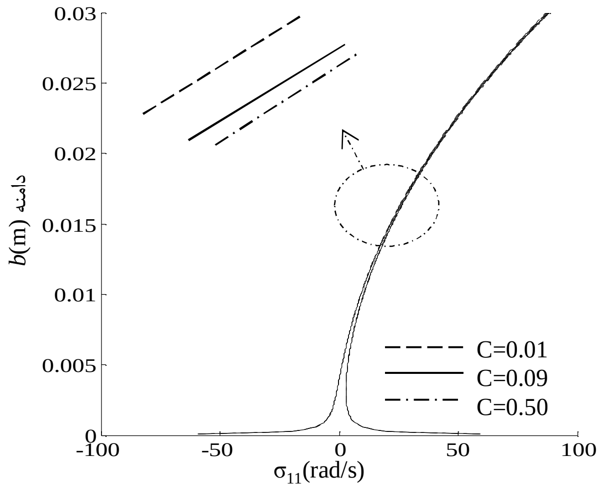
شکل 8 منحنی پاسخ فرکانسی ورق CFCF با ابعاد 0/01m ×2 ×3
و مقادیر مختلف طول نسبی ترک 2c



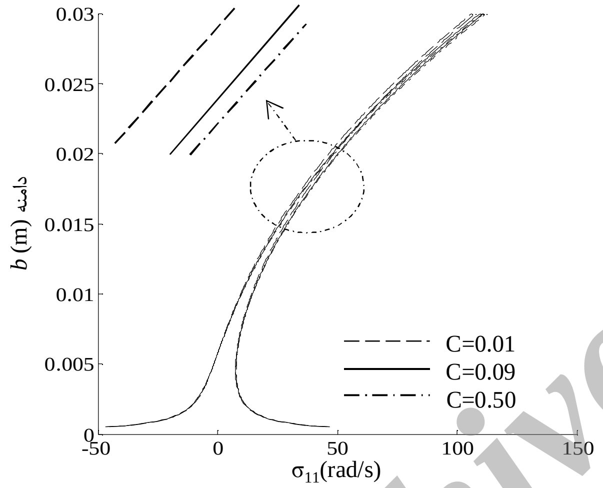
شکل 9 منحنی پاسخ فرکانسی ورق SFCF با ابعاد 0/01m ×2 ×3
و مقادیر مختلف طول نسبی ترک 2c



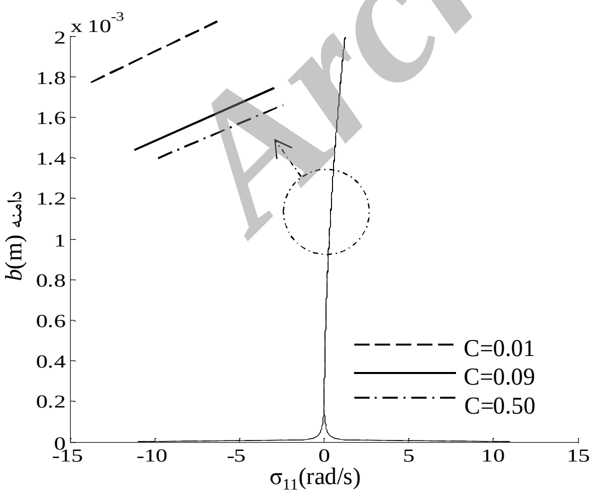
شکل 10 منحنی پاسخ فرکانسی ورق CCSF با ابعاد 0/01m ×2 ×3
و مقادیر مختلف طول نسبی ترک 2c



شکل 11 منحنی پاسخ فرکانسی ورق CSSF با ابعاد 0/01m ×2 ×3
و مقادیر مختلف طول نسبی ترک 2c



شکل 12 منحنی پاسخ فرکانسی ورق SFSF با ابعاد 0/01m ×2 ×3
و مقادیر مختلف طول نسبی ترک 2c



شکل 13 منحنی پاسخ فرکانسی ورق CSCF با ابعاد 0/01m ×2 ×3
و مقادیر مختلف طول نسبی ترک 2c

در شکل 8 تا شکل 13 پاسخ فرکانسی برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف به ازای مقادیر مختلف طول نسبی ترک ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تمامی حالات تکیه‌گاهی مورد نظر در تحقیق حاضر رفتاری شبیه فنر سفت‌شونده دارند. تاثیر افزایش طول ترک در تمامی حالات منجر به افزایش اثر مربوط به غیرخطینگی[1] می‌شود.

1- Nonlinearity

5- نتیجه‌گیری

در این تحقیق رفتار ارتعاشی ورق ترک‌دار با شرایط تکیه‌گاهی مختلف و دارای حداقل یک لبه‌ی آزاد بررسی شد. در این راستا عدم کارامدی توابع پذیرا تیر معادل، در تخمین صحیح فرکانس طبیعی ورق سالم و ترک‌دار، در مواردی که ورق دارای حداقل یک لبه‌ی آزاد است، اثبات شد. علاوه بر این نشان داده شد که توابع تیر در برخی از حالات قادر به نشان دادن اثر وجود ترک در ورق نبودند. سپس توابع پذیرا جدیدی پیشنهاد شد که محدودیت توابع تیر معادل، در تخمین فرکانس‌های ورق سالم و ترک‌دار دارای لبه‌های آزاد را نداشتند و این توابع پیشنهادی نشان دادند که وجود ترک منجر به کاهش در فرکانس طبیعی ورق سالم می‌شود. در ادامه تاثیر طول نسبی ترک و ضخامت ورق، روی فرکانس طبیعی ورق با شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی شده و نشان داده شد که با افزایش طول نسبی ترک و کاهش ضخامت ورق، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. علاوه بر این، منحنی‌های پاسخ فرکانسی ورق با شرایط تکیه‌گاهی مختلف استخراج و اثر وجود ترک در رفتار غیرخطی ورق ترک‌دار بررسی شد. همچنین افزایش طول ترک در تمامی حالت‌ها سبب افزایش اثر مربوط به ترم غیرخطی در معادلات دینامیکی حاکم می‌شود.

6- پیوست

در این قسمت ثوابت مربوط به توابع پیشنهادی در بخش (3) ارائه شده است.

الف) هر دو تکیه‌گاه آزاد (F-F):

در جهت y:

$$I_1=\frac{\dfrac{20}{\varphi^2}-\nu}{2(1-\nu)-\dfrac{1}{6}\nu\varphi^2(2-\nu)}\quad,\quad I_2=\frac{\dfrac{12}{\varphi^2}-\nu}{2(1-\nu)-\dfrac{1}{6}\nu\varphi^2(2-\nu)}$$

$$II_1=\left(5\left(\frac{12}{\varphi^2}-(2-\nu)\right)+\frac{\varphi^2}{2}(2-\nu)^2 I_1\right)$$

$$II_2=\left(4\left(\frac{6}{\varphi^2}-(2-\nu)\right)+\frac{\varphi^2}{2}(2-\nu)^2 I_2\right)$$

در جهت x:

$$I_1=\frac{20-\dfrac{\nu}{\varphi^2}}{2\dfrac{(1-\nu)}{\varphi^2}-\dfrac{1}{6\varphi^4}\nu(2-\nu)}\quad,\quad I_2=\frac{12-\dfrac{\nu}{\varphi^2}}{2\dfrac{(1-\nu)}{\varphi^2}-\dfrac{1}{6\varphi^4}\nu(2-\nu)}$$

$$II_1=\left(5\left(12-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}\right)+\frac{1}{2\varphi^4}(2-\nu)^2 I_1\right)$$

$$II_2=\left(4\left(6-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}\right)+\frac{1}{2\varphi^4}(2-\nu)^2 I_2\right)$$

ب) ساده-آزاد (S-F)

درجهت y:

$$I_1=\frac{12-\nu\varphi^2}{\nu\varphi^2}\quad,\quad I_2=\frac{6-\nu\varphi^2}{\nu\varphi^2}$$

$$II_1=4\left(\frac{6}{\varphi^2}-(2-\nu)\right)-(2-\nu)I_1\ ,$$

$$II_2=3\left(\frac{2}{\varphi^2}-(2-\nu)\right)-(2-\nu)I_2$$

درجهت x:

$$I_1=\frac{12\varphi^2-\nu}{\nu}\quad,\quad I_2=\frac{6\varphi^2-\nu}{\nu}$$

$$II_1=4\left(6-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}\right)-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}I_1\ ,$$

$$II_2=3\left(2-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}\right)-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}I_2$$

ج) گیردار-آزاد (C-F)

در جهت y:

$$I_1=\frac{12-\nu\varphi^2}{2-\nu\varphi^2}\quad,\quad I_2=\frac{6-\nu\varphi^2}{2-\nu\varphi^2}$$

$$II_1=4\left(\frac{6}{\varphi^2}-(2-\nu)\right)+2(2-\nu)I_1$$

$$II_2=3\left(\frac{2}{\varphi^2}-(2-\nu)\right)+2(2-\nu)I_2$$

در جهت x:

$$I_1=\frac{12\varphi^2-\nu}{2\varphi^2-\nu}\quad,\quad I_2=\frac{6\varphi^2-\nu}{2\varphi^2-\nu}$$

$$II_1=4\left(6-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}\right)+\frac{2(2-\nu)}{\varphi^2}I_1$$

$$II_2=3\left(2-\frac{(2-\nu)}{\varphi^2}\right)+\frac{2(2-\nu)}{\varphi^2}I_2$$

7- مراجع

[1] P. Lynn, N. Kumbasar, Free vibration of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges, *Development in mechanics,* Vol. 4, pp. 911-928, 1967.

[2] B. Stahl, L. Keer, Vibration and stability of cracked rectangular plates, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 8, No. 1, pp. 69-91, 1972.

[3] K. Nezu, Free vibration of a simply-supported rectangular plate with a straight through-notch, *Bulletin of JSME,* Vol. 25, No. 199, pp. 16-23, 1982.

[4] Y. Hirano, K. Okazaki, Vibrarfon of Cracked Rectangular Plates, *Bulletin of JSME,* Vol. 23, No. 179, pp. 732-740, 1980.

[5] S. Khadem, M. Rezaee, Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate, *Journal of Sound and Vibration,*Vol. 236, No. 2, pp. 245-258, 2000.

[6] C. Huang, A. Leissa, Vibration analysis of rectangular plates with side cracks via the Ritz method, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 323, No. 3, pp. 974-988, 2009.

[7] C. Huang, A. Leissa, C. Chan, Vibrations of rectangular plates with internal cracks or slits, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 53, No. 6, pp. 436-445, 2011.

[8] R. Bhat, Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 102, No. 4, pp. 493-499, 1985.

[9] K. Lam, K. Hung, S. Chow, Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method, *Applied Acoustics,* Vol. 28, No. 1, pp. 49-60, 1989.

[10] K. Liew, K. Hung, M. Lim, A solution method for analysis of cracked plates under vibration, *Engineering fracture mechanics,* Vol. 48, No. 3, pp. 393-404, 1994.

[11] A. Israr, M. P. Cartmell, E. Manoach, I. Trendafilova, W. Ostachowicz, M. Krawczuk, A. Zak, Analytical modelling and vibration analysis of cracked rectangular plates with different loading and boundary conditions, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 76, No. 1, pp. 11005-11013, 2009.

[12] R. Ismail, M. Cartmell, An investigation into the vibration analysisof a plate with a surface crack of variable angular orientation, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 331, No. 12, pp. 2929-2948, 2012.

[13] A. Leissa, The free vibration of rectangular plates, *Journal of sound and vibration,* Vol. 31, No. 3, pp. 257-293, 1973.

[14] S. Bassily, S. Dickinson, On the use of beam functions for problems of plates involving free edges, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 42, pp. 858, 1975.

[15] R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical andEngineering Methods*: Wiley, 2004.

[16] M. Mukhopadhyay, A general solution for rectangular plate bending, *Forschung im Ingenieurwesen A,* Vol. 45, No. 4, pp. 111-118, 1979.

[17] S. Dickinson, A. Di Blasio, On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 108, No. 1, pp. 51-62, 1986.

[18] J. Rice, N. Levy, The part-through surface crack in an elastic plate, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 39, pp. 185, 1972.

[19] A. W. Leissa, *Vibration of Plates*: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969.