ماهنامه علمى پژوهشى



مهندسی مکانیک مدر س

mme.modares.ac.ir

معرفی توابع چندجملهای جهت آنالیز ارتعاشات غیرخطی ورق مستطیلی ترکدار دارای تکیه گاههای آزاد

رضا حسننژاد قديم¹، سيد جواد ميرنصيري²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- دانشجوى كارشناسى ارشد، مهندسى مكانيك، دانشگاه تبريز، تبريز

hassannejhad@tabrizu.ac.ir،51666-14766 تېږېز، کدیستې

چکیدہ	اطلاعات مقاله
تحقیق حاضر به بررسی ارتعاشات غیرخطی ورق با حداقل یک لبهی آزاد و دارای ترک فرورفته با طول محدود، واقع در مرکز ورق و به موازات	مقاله پژوهشی کامل
یکی از لبههای ورق میپردازد. با توجه به پیچیدگی معادلات دینامیکی حاکم، از روش گالرکین برای تحلیل مسئله استفاده شده است، از این رو	دریافت: 03 بهمن 1392
باید توابع پذیرا مناسب که بتوانند شرایط مرزی حاکم بر لبهی آزاد ورق را ارضا کنند، انتخاب شوند. در بسیاری از تحقیقات انجام شده در ادبیات	پذیرش: 03 اسفند 1392
فنه از ترابع بدی مقادر به از این در حالم میزی حاکم بر لبهی آزاد ورق را ارضا کنند، انتخاب شوند. در بسیاری از حمظ	ارائه در سایت: 28 مهر 1393
می از توانع نیز له فاتر به ارضای سرایط مرزی خانم بر نبسی ازاد ورق نیستند استفاده میشود به سبب ایجاد خطای زید تر محاسبه منادیر	<i>کلید واژگان:</i>
فرکانسها و شکل مودهای ورق میشود. بنابراین در تحقیق حاضر توانع پذیرا جدیدی معرفی میشود، که به خوبی ناتوانی توانع تیر معادل، در	ورق ترکدار
تخمین فرکانسهای ورق سالم و ترکدار را مرتفع میسازد و خطای محاسباتی را کاهش میدهد. سپس با استفاده از توانع جدید معرفی شده اثر	ارتعاشات غیرخطی
ضخامت و طول نسبی ترک روی فرکانس طبیعی ورق ترکدار بررسی شده و منحنیهای پاسخ فرکانسی که نشانگر وابستگی دامنه و فرکانس	تکیه گاههای آزاد
هستند برای شرایط مختلف تکنه گاه راستخار شده است. همچنین اثر افنانش طول ترک روی نخوه تغیر رفتار غیرخطی و تک دول	تیله داریا
بررسی قرار گرفته است. به منظور صحه گذاری نتایج، تغییرات فرکانسی سیستم به ازای افزایش طول ترک و ضخامت ورق با نتایج موجود در ادبیات فن مورد مقایسه قرار گرفته است.	· / 2 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 -

An introduction of new polynomial functions for nonlinear vibration analysis of cracked rectangular plates involving free edges

Reza Hassannejad Qadim^{1*}, Seyyed Javad Mirnasiri²

1- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

*P.O.B. 5166614766 Tabriz, hassannejhad@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper Received 23 January 2014 Accepted 22 February 2014 Available Online 20 October 2014

Keywords: Cracked plate Nonlinear vibration Free supports Admissible functions

ABSTRACT

The present study deals with nonlinear vibration analysis of the plate having at least one free edge. The plate has a part-through central crack with arbitrary limit length which is parallel to one side of the plate. Due to complexity of the governing equation of motion, the Galerkin method is used for solving the problem. Therefore, the appropriate admissible functions satisfying free edge conditions in the cracked plate, must be employed. The beam functions can not satisfy free edge conditions in the plate, nevertheless these functions used in many researches in the literature, which lead to high numerical errors in computing the frequency and mode shapes. Therefore, in this research, new admissible functions are proposed which can obviate incapability of the beam functions to accurately estimate natural frequency of the intact and cracked plate and reduce the related computational errors. The effects of changes in thickness and non-dimensional crack length on natural frequency of the cracked plate are investigated using proposed functions, and frequency response curves indicating the dependence of frequency on amplitude is derived for different boundary conditions. Also, the influence of crack length on the changes in the nonlinear behavior of the cracked plate is investigated. The results are compared with those of the available results in the literature.

1- مقدمه

صنایع دارند، از درجه اهمیت بالایی برخوردار هستند. از اینرو مدلسازی سازههای معیوب در جهت شناخت و درک فیزیکی کامل از ماهیت عیب، موجب توجه فزایندهی محققان شده است. وجود عیوبی نظیر ترک در سازههای انعطاف پذیر سبب تغییر در مشخصههای فیزیکی آنها مثل سفتی، جرم، میرایی و به دنبال آن باعث تغییر در مشخصههای ارتعاشی، نظیر

طراحی انواع سازههای مهندسی درمرحلهی اول نیازمند شناخت و تسلط کامل بر رفتار ارتعاشی و دینامیکی بخشهای انعطافپذیر بهکار رفته در سازه، نظیر تیرها، کابلها، ورقها، پوستهها و موارد مشابه میباشد. در این میان ورقها بهدلیل کاربردهای فراوانی که در بسیاری از علوم مهندسی و

Please cite this article using: R. Hassannejad Qadim, S.J. Mirnasiri, An introduction of new polynomial functions for nonlinear vibration analysis of cracked rectangular plates involving free edges, Medares U Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 15, pp. 24-32, 2015 (In Persian)

فرکانسهای طبیعی و شکل مودها می شود. به همین دلیل یکی از ساده ترین، کمهزینه ترین و سریعترین روشها در حوزهی شناسایی عیوب، بررسی رفتار ارتعاشی سازهها از طریق تغییر در فرکانسهای طبیعی آن، ناشی از وجود عیب می باشد. در این راستا اولین تحقیق صورت گرفته در زمینه آنالیز ارتعاشی ورقهای ترکدار، توسط لین وکومباسار [1] روی ورق ترکدار با تکیه گاههای ساده انجام شده است که در آن با استفاده از توابع گرین، معادلات انتگرالی فردهلم از نوع اول¹ استخراج شده و پس از حل آنها، تغییرات فرکانسی ناشی از تغییر در طول ترک، و گشتاورهای نسبی توزیع شده در بخشهای بی ترک ارائه شده است. استال و کییر [2] مسئله ارتعاش و کمانش ورق ترکدار دارای تکیهگاههای ساده را بهصورت معادلات سری دوگانه فرمول بندی کرده و پس از کاهش آن ها به معادلات انتگرالی همگن فردهلم از نوع دوم، فرکانسهای طبیعی و گشتاورهای توزیعی را استخراج كردند. نزو[3] با تلفيق روش لوى و توابع گرين و با بهبود روش كومباسار، به آنالیز ارتعاشی ورق با تکیهگاههای ساده که دارای ترک در مرکز صفحه یا در یکی از لبههای ورق است پرداخت و فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای مربوطه را استخراج کرد. هیرانو و اوکازاکی[4] ورقی ترکدار با سه شرط مرزی SSSS، SSSS و SFSF²را مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از روش حل لوی فرکانسهای طبیعی را محاسبه کردند. خادم و رضائی [5] با استفاده از مدل فنر خطی به تحلیل ارتعاشی ورق ترک دار با چهارطرف تکیه گاههای ساده پرداختند و در آن طی معرفی توابعی جدید تحت عنوان توابع مقایسهای اصلاح شده به بررسی اثر وجود ترک روی فرکانسهای طبیعی ورق با ترک محدود و واقع در مرکز صفحه یرداختند. ترک مورد نظر از نوع فرورفته³ بود. همچنین در تحقیق دیگری هوانگ و لیسا[6، 7] تحلیل ارتعاشی ورق ترکدار با دو وضعیت ترک زاویهدار کاملاً فرورفته⁴ واقع در لبه و ترک مورب کاملاً فرورفته واقع در مرکز صفحه را برای دو شرط تکیهگاهی FFFF و SSSS انجام دادند. آنها از توابع چند جملهای منظم ترکیب شده با توابع مکمل بهعنوان توابع پذیرا⁵ در روش ریلی ریتز استفاده کردند و فرکانسهای طبیعی و مودهای ارتعاشی را بهدست آوردند. بات[8] اولین بار از چندجملهایهای متعامد بهدست آمده از فرایند گرام- اشمیت⁶، بهعنوان توابع پذیرا در روش تقریبی ریلی ریتز استفاده کرد و فرکانسهای طبیعی ورقمستطیلی سالم با شرایط تکیه گاهی مختلف را بهدست آورد. لام و همکاران[9] از چندجمله-ایهای متعامد در استخراج فرکانسهای طبیعی ورق دارای بریدگی ا با شرايط تكيه گاهى SSSS و CCCC ، SSSS استفاده كردند. ليو [10] چندجملهای های متعامد تولید شده با استفاده از فرایند گرام-اشمیت را در محاسبهی فرکانس های طبیعی ورق دارای ترک کاملاً فرورفته با شرایط مرزی FCFC ،SSSS و SCSC به کار برد و نتایجی با دقت خوب کسب کرد.

تاکنون عمده تحقیقات صورت گرفته در زمینه بررسی رفتار ارتعاشی ورقهای ترکدار مربوط به حوزهی خطی بودهاند و مطالعات اندکی در زمینه ارتعاشات غیرخطی ورق های ترک دار صورت گرفته است، در صورتی که مدل های غیرخطی نسبت به مدل های خطی رفتار جامع تر و واقع بینانه تری را ارائه می کنند. از اینرو اخیراً مطالعه رفتار غیرخطی ورق ترکدار مورد توجه محققان واقع شده است. در این راستا ایسرار و همکاران[11]، با استفاده از

مدل فنر خطی، معادلهی حاکم بر ارتعاشات غیرخطی ورق معیوب، دارای ترک افقی فرورفته به طول محدود و واقع در مرکز ورق را استخراج کردند، سپس با اعمال روش گالرکین⁸ برای سه شرط تکیه گاهی SSSS، SSSS و CCFF معادلهی غیرخطی حاکم بر مسئله را استخراج کردند. پس از آن با اعمال روش تقریبی رابطه ی بین فرکانس و دامنه و همچنین فرکانس طبیعی اول را محاسبه کرده و نمودارهای پاسخ فرکانسی مربوطه را استخراج کردند. در این تحقیق از توابع تیر به عنوان توابع پذیرا استفاده شده است که این مورد باعث ایجاد خطای نسبتاً زیاد در محاسبهی فرکانس ورق های سالم و تركدار با شرایط تکیهگاهی آزاد میشود. اسماعیل[12] با توسعهی مدل ایسرار [11] از ترک افقی و به موازات یکی از لبه های ورق به ترک فرورفته با زاویهی جهت گیری دلخواه، مدل او را بهبود بخشید. او نیز از شرایط تکیه گاهی و توابع پذیرا مشابه[11] در کار خود استفاده کرد.

عمده تحقيقات مرتبط با تحليل ارتعاشات خطى يا غيرخطى ورق هاى تركدار در ادبیات فن، شامل ورق با شرایط تكیه گاهی ساده یا گیردار بودهاند و کمتر در مورد ورق های دارای لبه های آزاد، سخن به میان آمده است. از این جهت نوعی کاستی در جامعیت مدل های ارائه شده، از نظر شرایط مرزی حاکم بر ورق تركدار در ادبیات فن وجود دارد. فقط برای 6 حالت از 21 حالت ترکیبی شرایط مرزی در ورقها حل دقیق وجود دارد و برای 15 حالت باقیمانده، باید از روشهای تقریبی استفاده کرد[13]. موفقیت روشهای تقریبی در حل مسائل، به انتخاب مناسب توابع پذیرا بستگی دارد، که در این میان در مسائل مربوط به ورق ها توابع پذیرا تیر، پر کاربردترین توابع هستند. در همین رابطه در سال 1975 باسیلی و همکاران[14] نشان دادند که در حل تقریبی مسائل ارتعاشی مرتبط با ورق هایی که دارای لبه های آزاد هستند، توابع شکل مود تیر ناکارآمد هستند. سپس مجموعه توابع جدید تحت عنوان توابع تیر باز تولید شده را ارائه کردند که توصیف دقیقتری از رفتار ارتعاشی چنین ورق هایی داشتند ، ولى باز توليد چنين توابعي بسيار دشوار است[8]. بنابراين نمي توان از توابع تیر مخصوصا در مواردی که ورق ترکدار بوده و روش حل بر اساس معادله ديفرانسيل است، استفاده كرد [17-15]. در اين تحقيق، هدف ارائه روشی جدید برای مطالعه ارتعاشات غیرخطی ورق ترکدار دارای تکیه گاههای آزاد می باشد. برای این منظور توابع پذیرا جدیدی پیشنهاد می شود که نه تنها سبب افزایش دقت و سرعت همگرایی پاسخ می شوند، بلکه محدودیت توابع تیر در ارضای شرایط مرزی حاکم بر لبهی آزاد را نخواهند داشت.

2- فرمول بندي مسئله



¹⁻ Fredholm Integral equations of the first Kind

²⁻ تکیه گاههای x=0, x=a هردو ساده و تکیه گاههای y=0, y=b هردو آزاد هستند 3- Part through

⁴⁻ Through 5- Admissible Functions

⁶⁻ Gram Schmidt 7- Cutout

 $-\frac{2C\left(\frac{1}{\varphi^{4}}Y_{1}^{l\nu}X_{1}+\frac{\nu}{\varphi^{2}}X_{1}^{\prime\prime}Y_{1}^{\prime\prime}\right)}{3\left(\frac{\alpha_{bt}^{0}}{6}+\alpha_{bb}^{0}\right)(3+\nu)(1-\nu)\frac{h}{a}+2C} \quad \left]X_{1}Y_{1}dxdy\right]$ ورق مستطیلی با ابعاد a، d و h و دارای ترک افقی به طول 2c و عمق نسبی و شرایط مرزی $\xi = \frac{d}{b} 0/6$ و به موازات یکی از اضلاع در راستای محور ζ و شرایط مرزی $\xi = \frac{d}{b} 0/6$ (9) مختلف با حداقل یک لبه ی آزاد است که تحت اعمال نیروی متمرکز عرار دارد. اگر از متغیرهای بدون بعد به شکل زیر استفاده شود:

 $M_{11} = \frac{\rho h a^4}{D} A_{11} \int_{-\infty}^{1} X_1^2 Y_1^2 dx dy$ (10)

 $G_{11} = A_{11}^3 \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left[-a^2 p_{11}^1 X_1'' Y_1 \right]$ $\frac{2C\frac{a^2}{\varphi^2}}{(6\alpha_{12}^0+\alpha_{11}^0)(1-v^2)\frac{h}{2}+2C}p_{11}^2X_1Y_1''']X_1Y_1dxdy$ (11)

$$\boldsymbol{p}_{11}^{1} = \frac{6}{h^{2}a^{2}} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left(\left(\frac{\partial X_{1}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{2} Y_{1}^{2} + \frac{v}{\varphi^{2}} \left(\frac{\partial Y_{1}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{2} X_{1}^{2} \right) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$
(12)

$$\boldsymbol{p}_{11}^{2} = \frac{6}{\boldsymbol{h}^{2}\boldsymbol{a}^{2}} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{\varphi^{2}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{Y}_{1}}{\partial \boldsymbol{y}} \right)^{2} \boldsymbol{X}_{1}^{2} + \nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}_{1}}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^{2} \boldsymbol{Y}_{1}^{2} \right) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y}$$
(13)

در این روابط 🗛 ثابت بوده که چون تنها یک جمله از سری در نظر گرفته می شود، می توان آن را واحد در نظر گرفت. با فرض اینکه سیستم تحت اثر یک میرایی خطی ضعیف با ضریب استهلاک µ است و در نظر گرفتن نیروی تحریک بهصورت هارمونیک [11]، پس از تقسیم طرفین بر جرم M₁₁ معادله ديفرانسيل غيرخطي (14) كه به معادله دافينگ² معروف است، بهدست مي آيد [11]:

$$\begin{split} \ddot{\Psi}_{11}(t) + 2\mu \dot{\Psi}_{11}(t) + \omega_{11}^2 \Psi_{11}(t) + \gamma_{11} \Psi_{11}^3(t) \\ = \frac{\eta_{11}}{D} q \cos \Omega_{11} t \end{split}$$
(14)

که در آن پارامترهای β_{11}^{\prime} ، η_{11}^{\prime} و η_{11}^{\prime} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\omega_{11}^{2} = \frac{K_{11}}{M_{11}} , \quad \gamma_{11} = \frac{G_{11}}{M_{11}} , \quad \eta_{11} = \frac{a^{4}X_{1}(\mathbf{x}_{0})Y_{1}(\mathbf{y}_{0})}{M_{11}}$$
(15)

فرکانس طبیعی اصلی ورق ترکدار، Ω_{11} فرکانس تحریک و q دامنه w_{11}^2 نیروی وارد بر ورق در مکان دلخواه **۵۰** و **۷** است. با اعمال روش اغتشاشات³و روش مقیاسهای چندگانه رابطهی بین فرکانس و دامنه بهصورت رابطه (16) بهدست مي آيد [11]:

$$\sigma_{11} = \frac{3\gamma_{11}b^2}{8\omega_{11}} \pm \sqrt{\frac{\eta_{11}^2}{4D^2\omega_{11}^2b^2}q^2 - \mu^2}$$
(16)

در این رابطه b دامنهی پاسخ و σ پارامتر نامیزانی در روش اغتشاشات

3- ارائه توابع پذيرا جديد براى تحليل ارتعاشات غيرخطي ورق تركدار با لبههای آزاد

همانطور که در بخش قبل به آن اشاره شد، در پاسخ در نظر گرفته شده در رابطهی(6)، تنها یک جمله اول در نظر گرفته می شود. با توجه به اینکه جمله در نظر گرفته شده غالب محسوب می شود و از طرفی واحد است، برای بالا بردن دقت روش تقریبی و واقعیتر کردن نتایج، تنها یک راه وجود دارد و آن انتخاب مناسب و دقیق تابع پذیرا است بهطوری که بتواند حداکثر شرایط مرزی حاکم بر مسئله را ارضا کند. ایسرار و اسماعیل[11، 12] در آنالیز ارتعاشات غیرخطی ورق ترکدار، از توابع تیر استفاده کردند، ولی مقادیر فرکانس طبیعی بهدست آمده برای ورق سالم با شرایط تکیهگاهی CCFF، در

$$x = \frac{\zeta}{a}, x_{0} = \frac{\zeta_{0}}{a}, y = \frac{\eta}{b}, y_{0} = \frac{\eta_{0}}{b}, \varphi = \frac{D}{a}, C = \frac{C}{a}$$
(1)
avela by a substantial conductive of the state of the state

$$(6\alpha_{tb}^{0} + \alpha_{tt}^{0})(1 - \nu^{2})\frac{n}{a} + 2C$$
(2)

(1)

$$n_{x} = \frac{6D}{\hbar^{2}a^{2}} \int_{0}^{1} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^{2} + \frac{v}{\varphi^{2}} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^{2} \right] dx dy$$

$$6D^{-\frac{1}{2}} \left(1 \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^{2} - \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^{2} \right]$$
(3)

$$n_{rs} = \frac{6D}{h^2 a^2} \iint_{0} \left(\frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) dx dy$$
(4)

در معادلهی (2) م $^{0}_{bt} = \alpha^{0}_{tb}$ و $^{0}_{tt}$ به ترتیب کمپلیانس های بدون بعد خمشی، کششی-خمشی و کششی هستند[18]. D صلابت خمشی ورق به v فرم مرسوم E مىباشد كه در آن E مدول الاستيسيته و $D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}$ نسبت یواسون است. همچنین نیروی متمرکز P_r با استفاده از تعریف تابع دلتای دیراک به فرم زیر در نظر گرفته می شود [11]:

$$\boldsymbol{P}_{z} = \boldsymbol{P}_{o}(\boldsymbol{t})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{o})\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_{o})$$
(5)

اگر از روش تقریبی گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل غیرخطی(2) استفاده شود پاسخ دینامیکی ورق به صورت معادله (6) خواهد بود:

$$\boldsymbol{W}(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_{ij} \boldsymbol{X}_{i} \boldsymbol{Y}_{j} \boldsymbol{\Psi}_{ij}(\boldsymbol{t})$$
(6)

که در آن X_i و Y_j توابع پذیرا بیبعد هستند و با در نظر گرفتن شرایط مرزی بهدست میآیند. پس از جایگذاری روابط (3) تا (6) در معادلهی (2) و ضرب طرفین در X_i و Y_i، سپس انتگرالگیری روی بازهی صفر تا یک و در نظر گرفتن تنها یک جملهی اول معادلهی (6)، معادلهی دیفرانسیل زیر حاصل مى شود [11]:

$$\tilde{\Psi}_{11}(t) + K_{11}\Psi_{11}(t) + G_{11}\Psi_{11}^{3}(t) = P_{11}$$

$$(7)$$

$$P_{11}(t) = K_{11}\Psi_{11}(t) + G_{11}\Psi_{11}(t) = P_{11}$$

$$P_{11}(t) = M_{11}(t) + M_{11}(t$$

$$P_{11} = \frac{a^4 P_0(t)}{D} X_1(X_0) Y_1(Y_0)$$

$$K_{11} = A_{11} \int_0^1 \int_0^1 \left[X_1^{i\nu} Y_1 + \frac{2}{\varphi^2} X_1^{\prime\prime} Y_1^{\prime\prime} + X_1 Y_1^{i\nu} \right]$$
(8)

 M_{11}

²⁻ Duffing equation 3- Perturbation Method

⁴⁻ Detuning parameter

مهندسی مکانیک مدرس، فوقالعاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15

¹⁻ Compliance

مقایسه با مقادیر دقیق ارائه شده در مرجع[13] دارای اختلاف نسبتاً زیادی است و لذا استفاده از توابع تیر در مواردی که تکیهگاه آزاد است، به این دلیل که این توابع قادر به ارضای شرایط مرزی آزاد برای ورق مربوطه نخواهند بود, پیشنهاد نمیشود. در این بخش دو دسته از توابع پذیرا در نظر گرفته میشوند. دسته ی اول مربوط به شرایط مرزی است که تنها شامل تکیهگاههای گیردار و ساده میباشند و توابع مربوطه در جدول 1 ارائه شده است. دستهی دوم که برای شرایط مرزی با حداقل یک لبهی آزاد استخراج میشوند، توابع چندجملهای جدید هستند که با ابتکاری جدید از روی شرایط مرزی مربوط به لبهی آزاد ورق بهدست میآیند و در ادامه نحوه ی استخراج آنها توضیح داده خواهد شد.

شرایط حاکم بر تکیهگاه آزاد در تیر و ورق مستطیلی پس از بیبعدسازی بهصورت (17) تا (20) است[15]:

برای تیر:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\Big|_{y=0,1} = 0 \quad \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\Big|_{y=0,1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\Big|_{y=0,1} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \left[\frac{\partial \left[v \right]}{\partial x^{2}} \right]}{\left|_{x=0,1}} = 0 \quad \frac{\partial \left[\frac{\partial \left[v \right]}{\partial x^{3}} \right]}{\left|_{x=0,1}} = 0$$
(18)

برای ورق:

$$\frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \bigg|_{y=0}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \Big|_{y=0,1} = 0$$
(19)
$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\nu}{\omega^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=0,1} = 0$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{(2-\nu)}{\varphi^2} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \bigg|_{x=0,1} = 0$$
(20)

با مقایسه معادلات (17) و (18) با معادلات (19) و (20) واضح است که جملات دوم در سمت راست معادلات (19) و (20)، در روابط مربوط به تیر وجود ندارد که باعث ایجاد خطای زیاد در محاسبهی فرکانسهای ارتعاشی ورق با لبههای آزاد میشود. با جایگذاری توابع به فر م $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}(\mathbf{y})\mathbf{w}$ و آزاد میشود. با جایگذاری توابع به فر م $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x})$ و (21) بهدست میآیند:

$$\frac{1}{\varphi^{2}}Y''(y) - vY(y)\Big|_{y=0,1} = 0$$

$$\frac{1}{\varphi^{2}}Y'''(y) - (2-v)Y'(y)\Big|_{y=0,1} = 0$$
(21)

$$X''(x) - \frac{v}{\varphi^2} X(x) \Big|_{x=0,1} = 0$$

$$X'''(x) - \frac{(2-v)}{\varphi^2} X'(x) \Big|_{x=0,1} = 0$$
 (22)

جدول 1 توابع پذیرا تیر [19] که در آن Λ_{1} و $_{\Lambda}$ مقادیر ویزه تیر و α_{1} و α_{2} ثوابت مربطه هستند

5.5	
تابع پذيرا	شرايط تكيه گاهي
$X(\mathbf{x}) = \sin(n\pi \mathbf{x})$, $\mathbf{n} = 1_{r}2_{r}$	سادہ - سادہ
$\boldsymbol{X}(\mathbf{X}) = \cosh\left(\lambda_{2}\mathbf{X}\right) - \cos\left(\lambda_{2}\mathbf{X}\right) - \alpha_{2}\left(\sinh\left(\lambda_{2}\mathbf{X}\right) - \sin\left(\lambda_{2}\mathbf{X}\right)\right)$	گیردار - گیردار
$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \cosh(\lambda_{1}\mathbf{x}) - \cos(\lambda_{1}\mathbf{x}) - \alpha_{1}(\sinh(\lambda_{1}\mathbf{x}) - \sin(\lambda_{1}\mathbf{x}))$	ساده- گيردار

میند.سی مکانیک مدرس، فوقالعاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15

همان طور که مشاهده می شود، با این ابتکار اثر جملات دوم روابط (19) و (20) که تحت تاثیر ضریب پواسون هستند لحاظ می شود و به این ترتیب شرایط مرزی مربوط به لبههای آزاد ورق نیز ارضا می شوند. با در نظر گرفتن شرایط (21) و (22)، توابع چند جمله ای جدید برای سه حالت تکیه گاهی موازی، شامل لبهی آزاد به فرم معادلات (23) تا (28) به دست می آیند: الف) هر دو تکیه گاه آزاد (F-F):

$$Y(y) = y^{5} - \frac{\Pi_{1}}{\Pi_{2}}y^{4} - \frac{\varphi^{2}(2-\nu)}{6} \left(I_{1} - \frac{I_{2}\Pi_{1}}{\Pi_{2}} \right) y^{3} - \left(I_{1} - \frac{I_{2}\Pi_{1}}{\Pi_{2}} \right) y$$
(23)

$$X(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{5} - \frac{\Pi_{1}}{\Pi_{2}} \mathbf{x}^{4} - \frac{(2-\nu)}{6\phi^{2}} \left(I_{1} - \frac{I_{2}\Pi_{1}}{\Pi_{2}} \right) \mathbf{x}^{3}$$
$$- \left(I_{1} - \frac{I_{2}\Pi_{1}}{\Pi_{2}} \right) \mathbf{x}$$
(24)

$$(y) = y^4 - \frac{II_1}{II_2}y^3 + \left(I_1 - \frac{I_2II_1}{II_2}\right)y$$
 (25)

$$\boldsymbol{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{4} - \frac{\Pi_{1}}{\Pi_{2}}\mathbf{x}^{3} + \left(\Pi_{1} - \frac{\Pi_{2}\Pi_{1}}{\Pi_{2}}\right)\mathbf{x}$$
(26)

$$\mathbf{Y}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{4} - \frac{\Pi_{1}}{\Pi_{2}}\mathbf{y}^{3} - \left(\Pi_{1} - \frac{\Pi_{2}\Pi_{1}}{\Pi_{2}}\right)\mathbf{y}^{2}$$
(27)

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{4} - \frac{\Pi_{1}}{\Pi_{2}} \boldsymbol{x}^{3} - \left(\Pi_{1} - \frac{I_{2}\Pi_{1}}{\Pi_{2}}\right) \boldsymbol{x}^{2}$$
(28)

در توابع بهدست آمده پارامترهای $I_1 \, I_2 \, I_1 \, I_1 \, I_2 \, I_1 \, ent$ و $II \, ثابت هستند که مقادیر مربوط به هر تابع در پیوست (الف) ارائه شده است. شایان ذکر است که توابع پذیرا بهدست آمده را می توان با تقسیم بر <math>\int_{0}^{1} Y^2 dy \left[\int_{0}^{1} Y^2 dx \right]^{1/2}$ و $\int_{0}^{1} X^2 dx \left[\int_{0}^{1} J^2 dx \right]$ نرمالیزه کرد.

4- تحلیل ارتعاشی ورق دارای لبههای آزاد و بررسی دقت روش پیشنهادی

با استفاده از رابطهی (15)، مقادیر فرکانس طبیعی اول ω را برای ورق سالم با ابعاد مختلف و ضخامت 0/01m و ورق دارای ترک با طول 0/1m، با شرایط مرزی CCFF محاسبه کرده و نتایج حاصل در جدول 2 ارائه شده است. ورق مورد نظر، آلومینیومی با خواص مدول الاستیسیته E=70/3 GPa، چگالی ρ =2660 kg و ضریب پواسون ν=0/33 میباشد. برای صحه گذاری نتایج حاصل شده، فرکانس.های مربوط به ورق سالم با مقادیر دقیق ارائه شده در مرجع[13] مقایسه شدهاند. از طرف دیگر در قسمت مربوط به ورق ترکدار، مقادیر فرکانس محاسبه شده در تحقیق حاضر با مرجع [11] مقایسه شده است. همان طور که در جدول 2 مشاهده می شود، در قسمت مربوط به ورق سالم، مقادیر فرکانس بهدست آمده در تحقیق حاضر با استفاده از توابع چند جملهای جدید، به مقدار دقیق بسیار نزدیکترند و میزان خطای مربوطه کمتر از 10 درصد میباشد. در حالی که مقادیر بهدست آمده با استفاده از توابع تیر معادل، نسبت به مقدار دقیق فرکانس ورق سالم دارای خطای زیادتری است. در این راستا برای اعتبارسنجی نتایج مربوط به ورق ترکدار تغییرات فرکانس برحسب ضخامت و برحسب طول نسبی ترک ورق بهترتیب در شکل 2 و شکل 3 برای مقایسه آورده شده است که نشان دهندهی صحت روند تغییرات

V

است. چنانچه در شکل 2 مشخص است با افزایش ضخامت ورق فرکانس طبیعی ورق ترکدار افزایش یافته و با افزایش طول نسبی ترک، فرکانس طبیعی ورق ترکدار کاهش می یابد (3). نکته یحائز اهمیت در این بررسی اختلاف زیاد میان دو منحنی ترسیم شده در شکل 3 است. این میزان اختلاف نشان دهنده ی این است که میزان کاهش فرکانس طبیعی در اثر وجود ترک، به واسطه ی استفاده از توابع تیر بسیار بیشتر از کاهش تخمین زده شده توسط توابع پیشنهادی است. بنابراین می توان استنباط کرد که استفاده از توابع تیر منجر به تخمین پایین می شود. این موضوع سبب می شود که مثلاًدر مبحث مربوط به عیب یابی، ورق معیوب، سالم تشخیص داده شود و این خطایی غیر قابل اغماض است.

همچنین در شکل 4 منحنی تغییرات دامنه بر حسب تغییرات پارامتر تنظیم σ به ازای نقاط مختلف اعمال بار متمرکز با دامنهی q = 10 و ضریب میرایی 0.08 به برای ورق CCFF رسم شده است. منحنی پاسخ فرکانسی مربوطه با استفاده از معادلهی (16) و بهکارگیری توابع پیشنهادی جدید ترسیم شده است. چنانچه در این شکل مشخص است، ورق مربوطه مشابه فنر نرمشونده رفتار میکند، رفتاری که در مرجع [11] نیز به آن اشاره شده است.

در جدول 3 نتایج حاصل از آنالیز ارتعاشی ورق با شرایط تکیهگاهی مختلف و با نسبت ابعادی $\frac{2}{b} = \frac{3}{2}$ ارائه شده است. همانطور که در جدول 3 مشاهده می شود تنها برای دو حالت CFCF و SFSF، خطای ناشی از استفاده از توابع پیشنهادی، اندکی بیشتر از خطای ناشی از توابع تیر معادل است، ولی در سایر حالات خطا کمتر شده است. نکتهی حائز اهمیت در جدول 3 که برتری توابع پیشنهادی در مقالهی حاضر را نسبت به توابع تیر مشخص می کند مقادیر فرکانس طبیعی در قسمت مربوط به ورق ترک دار است.

با نگاهی به مقادیر فرکانسهای بهدست آمده برای ورق ترکدار در حالاتی که شرایط تکیهگاهی به فرم SSCF ،SSCF ،SFCF است و مقایسه مقادیر مربوطه با مقادیر فرکانس متناظر در ورق سالم، میتوان دریافت که مقدار فرکانس ورق ترکدار با فرکانس ورق سالم متناظر، در حالتی که از توابع پذیرا تیر استفاده میشود، یکسان است و گویی هیچ ترکی در ورق وجود ندارد. در حالی که توابع پیشنهادی بهخوبی کاهش فرکانس طبیعی ناشی از وجود ترک را نشان میدهند. دلیل اصلی این موضوع این است که با توجه به اینکه فقط فرکانس اول ورق مربوطه مد نظر است، لذا در را در نظر گرفت. تابع مشخصهی مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیهگاهی را در نظر گرفت. تابع مشخصهی مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیهگاهی را در نظر روفت. تابع مشخصهی مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیهگاهی را در نظر مودت. تابع مشخصه و مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیه گاه را در نظر روفت. تابع مشخصه و مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیه گاه را در نظر موفت. تابع مشخصه مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیه گاه را در نظر روفت. تابع مشخصه و مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیه گاهی را در نظر روفت. تابع مشخصه و مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیه گاه را در نظر مولون. تابع مشخصه و مربوط به مود اول تیر با شرایط تکیه تابع را در مور خواهند شد [19]. از طرف دیگر جملات مربوط به وجود ترک در فرمول بندی مسئله حاوی مشتقات دوم و چهارم تابع پذیرا است و لذا توابع تیر در مود اول قادر به تخمین اثر وجود ترک در معادلات نیستند.

دلیل اینکه در برخی از حالات فرکانس تقریبی محاسبه شده برای ورق سالم کمتر از مقدار دقیق و در برخی دیگر بیشتر است این است که در تحقیق حاضر تنها با یک جمله از پاسخ به فرم سری مربوطه مقادیر فرکانس استخراج شدهاند و طبیعی است در صورتی که بتوان تعداد جملات بیشتری را در نظر گرفت دقت محاسبات افزایش خواهد یافت، ولی افزایش تعداد جملات بهدلیل پیچیدگی معادلات حاکم سبب پیچیدگی فزایندهی مسئله خواهد شد.





1 ×1 × 0/01m

 $\xi = rac{d}{b} = 0/6$ و عمق نسبی اول \mathscr{B} برای ورق CCFF دارای ترک با طول 2c= 0/1m و عمق نسبی $\xi = \frac{d}{b}$

ورق ترکدار		ورق سالم				ابعاد ورق		
فر کانس طبیعی بهدست آمده با روش پیشنهادی (rad/s)	مقدار فرکانس طبیعی محاسبه شده در مرجع[11] (rad/s)	خطای محاسباتی در روش پیشنهادی %	فرکانس طبیعی بهدست آمده با توابع پیشنهادی (rad/s)	خطای محاسباتی در روش مرجع[11] %	مقدار فرکانس طبیعی محاسبه شده در مرجع[11] (rad/s)	مقدار دقیق فرکانس طبیعی ورق[13] (rad/s)	<i>b</i> (m)	<i>a</i> (m)
86/984	70/559	9/64	99/498	26/27	80/462	109/137	1	1
252/917	227/611	3/96	259/037	14/33	231/061	269/736	1	0/5
199/955	172/657	3/96	259/038	14/33	231/079	269/736	0/5	1

مهندسی مکانیک مدرس، فوقالعاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15

ر کدار	ورق ت			ورق سالم			
فرکانس طبیعی بهدست آمده با توابع پیشنهادی (rad/s)	مقدار فرکانس طبیعی محاسبه شده با استفاده از توابع تیر (rad/s)	خطای محاسباتی در روش پیشنهادی %	فرکانس طبیعی بهدست آمده با توابع پیشنهادی (rad/s)	خطای محاسباتی برای توابع تیر %	مقدار فرکانس طبیعی محاسبه شده با استفاده از توابع تیر (rad/s)	مقدار دقیق فرکانس طبیعی ورق[13] (rad/s)	شرايط تكيەگاھى
38/9313	39/0807	1	39/216	0/7	39/0807	38/8049	CFCF
26/7959	27/531	2/3	27/711	3/5	27/531	26/5809	SFCF
27/0744	26/841	15	27/5023	17	26/841	32/3855	CSSF
25/808	26/436	20	29/227	22	28/411	36/743	CCSF
39/99	39/08	2/5	42/1683	9/6	39/08	43/227	CSCF
17	17/24	5/1	17/661	3/5	17/24	16/695	SFSF

 $\xi = \frac{d}{h} = 0/6$ و مقادیر فرکانس طبیعی اول ω برای ورق با شرایط تکیه گاهی مختلف و نسبت ابعادی $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ و دارای ترک با طول نسبی C= 0/1 و عمق نسبی δ





شکل 4 منحنی پاسخ فرکانسی ورق CCFF با ابعاد 0/01× 1× 1 و به ازای نقاط مختلف اعمال بار متمرکز N 10



شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب طول نسبی ترک برای ورق با نسبت ابعادی 2 = 4 و ضخامت *h*=0/01m سه حالت تکیهگاهی ترسیم شده است. همان طور که مشخص است با افزایش طول نسبی ترک فرکانس طبیعی در تمامی حالات تکیهگاهی کاهش مییابد.

نتیجهای مشابه را میتوان برای سه حالت تکیه گاهی باقیمانده نیز بهدست

0.04

2C طول نسبی ترک

0.06

0.08

0.1

آورد.

در شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی اول نسبت به ضخامت ورق با استفاده از توابع پیشنهادی ارائه شده است وهمان طور که مشاهده می شود با افزایش ضخامت فرکانس طبیعی نیز افزایش مییابد. همچنین در شکل 6 و شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب طول نسبی ترک به صورت دلخواه برای تنها

میدد. مکانیک مدرس، فوقالعاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15

27.2

27.1

27L 0

0.02

-50

-50

0

0

 $\sigma_{11}(rad/s)$

و مقادیر مختلف طول نسبی ترک **2**C

0

 $\sigma_{11}(rad/s)$

و مقادیر مختلف طول نسبی ترک 2c

C=0.01

C=0.09

C=0.50

50

100

C=0.01

C=0.09

C=0.50

100

_

50



سفت شونده دارند. تاثیر افزایش طول ترک در تمامی حالات منجر به افزایش اثر مربوط به غیرخطینگی¹ میشود.

در شکل 8 تا شکل 13 پاسخ فرکانسی برای شرایط تکیهگاهی مختلف به ازای مقادیر مختلف طول نسبی ترک ترسیم شده است. همان طور که مشاهده میشود تمامی حالات تکیه گاهی مورد نظر در تحقیق حاضر رفتاری شبیه فنر

و مقادیر مختلف طول نسبی ترک 2C

50

 $\sigma_{11}(rad/s)$

1- Nonlinearity

C=0.01

C=0.09

C=0.50

150

100

مهندسی مکانیک مدرس، فوقالعاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15

12.2

5- نتيجه گيري

در این تحقیق رفتار ارتعاشی ورق ترکدار با شرایط تکیه گاهی مختلف و دارای حداقل یک لبهی آزاد بررسی شد. در این راستا عدم کارامدی توابع پذیرا تیر معادل، در تخمین صحیح فرکانس طبیعی ورق سالم و ترکدار، در مواردی که ورق دارای حداقل یک لبهی آزاد است، اثبات شد. علاوه بر این نشان داده شد که توابع تیر در برخی از حالات قادر به نشان دادن اثر وجود ترک در ورق نبودند. سپس توابع پذیرا جدیدی پیشنهاد شد که محدودیت توابع تیر معادل، در تخمین فرکانس های ورق سالم و ترک دار دارای لبه های آزاد را نداشتند و این توابع پیشنهادی نشان دادند که وجود ترک منجر به کاهش در فرکانس طبیعی ورق سالم میشود. در ادامه تاثیر طول نسبی ترک و ضخامت ورق، روی فرکانس طبیعی ورق با شرایط تکیهگاهی مختلف بررسی شده و نشان داده شد که با افزایش طول نسبی ترک و کاهش ضخامت ورق، فركانس طبيعي سيستم كاهش مييابد. علاوه بر اين، منحنی های پاسخ فرکانسی ورق با شرایط تکیه گاهی مختلف استخراج و اثر وجود ترک در رفتار غیرخطی ورق ترکدار بررسی شد. همچنین افزایش طول ترک در تمامی حالتها سبب افزایش اثر مربوط به ترم غیرخطی در معادلات دینامیکی حاکم میشود.

6- پيوست

در این قسمت ثوابت مربوط به توابع پیشنهادی در بخش (3) ارائه

الف) هر دو تکیهگاه آزاد (F-F):

$$I_{1} = \frac{\frac{20}{\varphi^{2} - \nu}}{2(1 - \nu) - \frac{1}{6}\nu\varphi^{2}(2 - \nu)} , \quad I_{2} = \frac{\frac{12}{\varphi^{2} - \nu}}{2(1 - \nu) - \frac{1}{6}\nu\varphi^{2}(2 - \nu)}$$
$$II_{1} = \left(5\left(\frac{12}{\varphi^{2}} - (2 - \nu)\right) + \frac{\varphi^{2}}{2}(2 - \nu)^{2}I_{1}\right)$$
$$II_{2} = \left(4\left(\frac{6}{\varphi^{2}} - (2 - \nu)\right) + \frac{\varphi^{2}}{2}(2 - \nu)^{2}I_{2}\right)$$

$$I_{1} = \frac{20 - \frac{v}{\varphi^{2}}}{2\frac{(1-v)}{\varphi^{2}} - \frac{1}{6\varphi^{4}}v(2-v)}, I_{2} = \frac{12 - \frac{v}{\varphi^{2}}}{2\frac{(1-v)}{\varphi^{2}} - \frac{1}{6\varphi^{4}}v(2-v)}$$

$$II_{1} = \left(5\left(12 - \frac{(2-v)}{\varphi^{2}}\right) + \frac{1}{2\varphi^{4}}(2-v)^{2}I_{1}\right)$$

$$II_{2} = \left(4\left(6 - \frac{(2-v)}{\varphi^{2}}\right) + \frac{1}{2\varphi^{4}}(2-v)^{2}I_{2}\right)$$
(S-F) ulticological set of the set of the

$$I_{1} = \frac{12 - \nu \varphi^{2}}{\nu \varphi^{2}} , \quad I_{2} = \frac{6 - \nu \varphi^{2}}{\nu \varphi^{2}}$$
$$II_{1} = 4 \left(\frac{6}{\varphi^{2}} - (2 - \nu)\right) - (2 - \nu)I_{1} ,$$
$$II_{2} = 3 \left(\frac{2}{\varphi^{2}} - (2 - \nu)\right) - (2 - \nu)I_{2}$$

 II_1

 II_2

مىدىس مكانىك مدرس، فوقالعاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15

درجهت X:

$$I_{1} = \frac{12\phi^{2} - v}{v} , \quad I_{2} = \frac{6\phi^{2} - v}{v}$$
$$II_{1} = 4\left(6 - \frac{(2 - v)}{\phi^{2}}\right) - \frac{(2 - v)}{\phi^{2}}I_{1} ,$$
$$II_{2} = 3\left(2 - \frac{(2 - v)}{\phi^{2}}\right) - \frac{(2 - v)}{\phi^{2}}I_{2}$$

c ... 2

 $I_1 = \frac{12 - v \phi^2}{2 - v \phi^2}$, $I_2 = \frac{6 - v \phi^2}{2 - v \phi^2}$ $II_{1} = 4\left(\frac{6}{\omega^{2}} - (2 - \nu)\right) + 2(2 - \nu)I_{1}$ $II_{2} = 3\left(\frac{2}{\omega^{2}} - (2 - \nu)\right) + 2(2 - \nu)I_{2}$

در جهت 🗶 :

ج) گیردار -آزاد (C-F)

در جهت y :

$$I_{1} = \frac{12\varphi^{2} - \nu}{2\varphi^{2} - \nu} , \quad I_{2} = \frac{6\varphi^{2} - \nu}{2\varphi^{2} - \nu}$$
$$II_{1} = 4\left(6 - \frac{(2 - \nu)}{\varphi^{2}}\right) + \frac{2(2 - \nu)}{\varphi^{2}}I_{1}$$
$$II_{2} = 3\left(2 - \frac{(2 - \nu)}{\varphi^{2}}\right) + \frac{2(2 - \nu)}{\varphi^{2}}I_{2}$$

- [1] P. Lynn, N. Kumbasar, Free vibration of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges, Development in mechanics, Vol. 4, pp. 911-928, 1967.
- [2] B. Stahl, L. Keer, Vibration and stability of cracked rectangular plates, International Journal of Solids and Structures, Vol. 8, No. 1, pp. 69-91, 1972.
- [3] K. Nezu, Free vibration of a simply-supported rectangular plate with a straight through-notch, Bulletin of JSME, Vol. 25, No. 199, pp. 16-23, 1982.
- [4] Y. Hirano, K. Okazaki, Vibrarfon of Cracked Rectangular Plates, Bulletin of JSME, Vol. 23, No. 179, pp. 732-740, 1980.
- [5] S. Khadem, M. Rezaee, Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate, Journal of Sound and Vibration, Vol. 236, No. 2, pp. 245-258, 2000.
- [6] C. Huang, A. Leissa, Vibration analysis of rectangular plates with side cracks via the Ritz method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 323, No. 3, pp. 974-988, 2009.
- [7] C. Huang, A. Leissa, C. Chan, Vibrations of rectangular plates with internal cracks or slits, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 53, No. 6, pp. 436-445, 2011.
- [8] R. Bhat, Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, No. 4, pp. 493-499, 1985.
- [9] K. Lam, K. Hung, S. Chow, Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method, Applied Acoustics, Vol. 28, No. 1, pp. 49-60.1989.
- [10] K. Liew, K. Hung, M. Lim, A solution method for analysis of cracked plates under vibration, Engineering fracture mechanics, Vol. 48, No. 3, pp. 393-404, 1994.
- [11] A. Israr, M. P. Cartmell, E. Manoach, I. Trendafilova, W. Ostachowicz, M. Krawczuk, A. Zak, Analytical modelling and vibration analysis of cracked rectangular plates with different loading and boundary conditions, Journal of Applied Mechanics, Vol. 76, No. 1, pp. 11005-11013, 2009.
- [12] R. Ismail, M. Cartmell, An investigation into the vibration analysisof a plate with a surface crack of variable angular orientation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 331, No. 12, pp. 2929-2948, 2012.

رضا حسننژاد قدیم و سیدجواد میرنصیری

معرفی توابع چند جملهای جہت آ نالیز ارتعاشات غیر خطی ورق مستطیلی تر ک دار دارای تکیه گاههای آزاد

- [17] S. Dickinson, A. Di Blasio, On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, No. 1, pp. 51-62, 1986.
- [18] J. Rice, N. Levy, The part-through surface crack in an elastic plate, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 185, 1972.
- [19] A. W. Leissa, Vibration of Plates: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- [13] A. Leissa, The free vibration of rectangular plates, *Journal of sound and vibration*, Vol. 31, No. 3, pp. 257-293, 1973.
- [14] S. Bassily, S. Dickinson, On the use of beam functions for problems of plates involving free edges, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, pp. 858, 1975.
- [15] R. Szilard, Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical andEngineering Methods: Wiley, 2004.
- [16] M. Mukhopadhyay, A general solution for rectangular plate bending, Forschung im Ingenieurwesen A, Vol. 45, No. 4, pp. 111-118, 1979.