مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15، ص‌ص 85-95

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بکارگیری الگوریتم پیمایش مکعبی در تحلیل سه‌بعدی پسروی گرین موتورهای سوخت جامد با روش منحنی‌های تراز

محمد مهدی قیصری[1]، سیدمهدی میرساجدی[2*]

1- کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
* تهران، صندوق پستی 1983969411، m_mirsajedi@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 05 اردیبهشت 1393
پذیرش: 27 تیر 1393
ارائه در سایت: 28 مهر 1393

کلید واژگان:
پسروی گرین، منحنی‌های تراز
المان برشی
تسخیر سلولی
پیمایش مکعبی

چکیده

در این تحقیق پسروی گرین‌های سه‌بعدی موتورهای سوخت جامد با استفاده از روش منحنی‌های تراز شبیه‌سازی شده و سعی بر اینست که با بهره‌گیری از الگوریتم پیمایش مکعبی بر دقت نتایج افزوده شود. در این راستا و بر مبنای الزامات روش منحنی‌های تراز، پسروی گرین در طی سه مرحله شبکه‌بندی، تعیین تابع فاصله و محاسبه پارامترهای پسروی شبیه‌سازی می‌گردد. سپس با تمرکز بر مرحله محاسبه پارامترهای پسروی، نقاط ضعف و قوت روش‌های متداول تسخیر سلولی، المان برشی سه‌بعدی، مقطعی و هویساید/دلتای دیراک بررسی شده و در ادامه الگوریتم پیمایش مکعبی معرفی و پیاده‌سازی می‌شود. به منظور اعتبارسنجی، ابتدا سه گرین ساده استوانه‌ای، مربعی و شش‌ضلعی در نظر گرفته شده و عملکرد روش‌های تسخیر سلولی، المان برشی سه‌بعدی، مقطعی از نظر دقت و زمان اجرا با روش پیمایش مکعبی مقایسه می‌شوند. سپس با هدف بررسی توانایی روش جدید در مواجهه با گرین‌های پیچیده و کاربردی، نتایج پسروی گرین‌های کونوسیل و NAWC N.13 با دو روش پیمایش مکعبی و هویساید/ دلتای دیراک سنجیده می‌شود. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش پیمایش مکعبی نسبت به تمام روش‌های موجود عملکرد مطلوب‌تری در محاسبه پارامترهای پسروی دارد.

Using marching cube algorithm for 3D grain burn-back analysis in Solid Rocket Motors based on level set method

Mohammad Mehdi Gheisari[1], Seyed Mehdi Mirsajedi[2*]

1- Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
2- Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
* P.O.B. 1983969411 Tehran, Iran, m_mirsajedi@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 April 2014
Accepted 18 July 2014
Available Online 20 October 2014

Keywords:
Solid rocket motor
Grain burn-back
Level set, Cut cell
captured cell
marching cube

ABSTRACT

In this research, three dimensional grain burn-back of solid rocket motors is simulated based on level set method and its accuracy is increased according to marching cube algorithm (MCA). To that end and according to requirements of level set method, grain burn-back is simulated during three steps including grid generation, distance function determination, and calculation of burn-back parameters. In this article, with focus on the last step, the strengths and weaknesses of grain burn-back analysis for common methods such as captured cell, three dimensional cut cell, sectional, and Heaviside Delta Dirac are compared and in the following, we introduce and run MCA. For validation, first, three simple grains such as cylindrical, quad and hexahedron are considered and the performance of capture cell, 3D c ut cell and sectional methods are compared with MCA in terms of accuracy and CPU time. Then, to evaluate the new method facing complex and practical grains, burn-back results of conocyle and NAWC N.13 grains are compared with MCA and heaviside/dirac delta methods. The obtained results show that MCA has a better performance at CPU time and accuracy.

1- مقدمه

کاربرد وسیع موتورهای سوخت جامد در صنایع هوافضا با گرایش‌های نظامی و غیرنظامی سبب گردیده است تا طراحی بهینه موتورهای سوخت جامد ذهن طراحان را درگیر نماید. از جمله موارد بسیار تأثیرگذار در طراحی این - موتورها تعیین تراست و مدت زمان عملکرد موتور است که هر دوی آن‌ها به شدت به نحوه تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق (پارامترهای پسروی) وابسته هستند[1]. به عبارت دیگر در موتورهای سوخت جامد با سوختن سطح پیشران، هندسه گرین تغییر می‌کند و تغییر در هندسه، تغییر سطح سوزش و حجم محفظه احتراق را به دنبال دارد. بنابراین برای تعیین پارامترهای جریان داخل موتور (اعم از فشار، چگالی، سرعت، دما)، باید

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. M. Gheisari, S. M. Mirsajedi, Using marching cube algorithm for 3D grain burn-back analysis in Solid Rocket Motors based on level set method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 85-95, 2015 (In Persian)

Archive of SID
www.SID.ir

پارامترهای پسروی در هر لحظه محاسبه گردد که این فرآیند، تحلیل پسروی نامیده می‌شود.

تحلیل پسروی گرین در واقع بررسی مرز متحرک و صرفاً یک تحلیل ریاضی و عددی می‌باشد، بنابراین تغییر شکل هندسی گرین، صرفنظر از جریان داخلی و اثرات حرارتی انجام شده و اطلاعات به دست آمده از تحلیل پسروی برای تحلیل بالستیک داخلی موتور مورد استفاده قرار می‌گیرد[2].

به طور کلی تحلیل پسروی گرین به سه صورت تحلیلی، ترسیمی و عددی قابل انجام است[3]؛ از معروف‌ترین کدهایی که از روش‌های تحلیلی استفاده می‌کنند، می‌توان به کد اس‌پی‌پی[1] اشاره کرد[4]. این کد با تقسیم هندسه گرین به شکل‌های ساده‌تر، پارامترهای بالستیکی را در هر گام زمانی محاسبه می‌کند. یکی از محدودیت‌های اس‌پی‌پی این است که پسروی با نرخ سوزش ثابت نسبت به مکان انجام می‌شود.

یکی دیگر از روش‌های تحلیلی پسروی گرین، روش میدان فازی[2] می‌باشد. در این روش مراحل پسروی به چند فاز مختلف تقسیم شده و در هر فاز، سطح سوزش توسط روابطی با فرم بسته محاسبه می‌شوند[5]. این روش ساده و بسیار سریع است اما محدود به هندسه‌های متداول دوبعدی، با نرخ پسروی ثابت می‌باشد.

در روش‌های ترسیمی هندسه اولیه گرین در یک نرم‌افزار ترسیمی مانند اتوکد[3] یا سالیدورک[4] ترسیم می‌شود؛ سپس سطوح سوزشی با یک مقدار مشخص جابه‌جا[5] می‌شوند و یک سری سطوح جدید موازی آن‌ها ایجاد می‌شوند. در این حالت ممکن است بعضی از سطوح از پوسته بیرون بزند و یا کوتاه‌تر شود و به پوسته نرسد، به این دلیل نیاز است در هر گام جابه‌جایی، این موضوع بررسی شود و با استفاده از ابزارهای موجود این مشکلات به صورت دستی بر طرف شوند[6]. در این روش نمی‌توان نرخ سوزش متغیر در موتور را بررسی نمود و امکان کوپل شدن با برنامه بالستیک داخلی نیست.

با توجه به عدم جامعیت و کارایی پایین روش‌های تحلیلی و ترسیمی، بهتر است از روش‌های عددی استفاده شود. روش‌های عددی عموماً مرز متحرک بین گاز و پیشران جامد را مورد بررسی قرار می‌دهند و بر این اساس به دو دسته کلی تعقیب مرز[6] (لاگرانژی) و تسخیر مرز[7] (اویلری) تقسیم می‌شوند[7]. در روش‌های تعقیب مرز که دربرگیرنده روش‌هایی مانند هیدرودینامیک ذرات هموار، لاگرانژی– اویلری و تعقیب رو به جلو است، نقاط شبکه گسترش یافته و مرز متحرک را دنبال می‌کنند. در عوض نقاط شبکه در روش‌های تسخیر مرز ثابت هستند. روش‌های این دسته شامل نشان‌گر و سلول، حجم سیال، میدان فازی و منحنی‌های تراز است. در این بین، روش منحنی‌های تراز دارای بیش‌ترین قابلیت‌ها و بهترین عملکرد بوده و در بسیاری از مطالعات برای تحلیل پسروی گرین‌ها استفاده شده است.

در سال 1989، ساینتوت و همکارانش با استفاده از حل معادلات همیلتون– ژاکوبی، مساحت سطح سوزش را طی پسروی استخراج کردند. این روش مخصوص گرین‌های دوبعدی بود و فقط در هندسه‌های متقارن کاربرد داشت[8]. در سال 2004، تاکر و همکارانش با استفاده از روش منحنی‌های تراز ساکن تحلیل پسروی گرین را انجام دادند و معادلات ایکونال را روی یک شبکه سه‌بعدی با مش‌های چهار وجهی حل کردند؛ در این روش توصیف هندسه‌های سه‌بعدی پیچیده به آسانی ممکن نبود[9]. در سال 2005، یلدیرام با استفاده از روش منحنی‌های تراز، پسروی گرین را در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی شبیه‌سازی کرد. در این تحقیق برای تعیین سطح سوزش از تغییرات حجم گرین (روش تسخیر سلولی) استفاده شده است[10]. در سال 2006، کین و همکارانش معادلات روش منحنی‌های تراز را با روش‌های عددی رانگ کوتا حل کرده و پسروی چند گرین نسبتاً پیچیده را شبیه‌سازی نمودند[11]. در سال 2008، فاوینی و همکارانش پسروی گرین را با استفاده از روش منحنی‌های تراز شبیه‌سازی کردند و برای استخراج سطح سوزش از تابع دلتای دیراک[8] استفاده شد[12]. در سال 2011، کاوالینی یک کد عددی به نام "جی آر ای جی[9]" بر اساس روش منحنی‌های تراز ارائه کرد. در این تحقیق با تعمیم روش هویساید[10] و دلتای دیراک دوبعدی، پارامترهای پسروی گرین‌های سه‌بعدی محاسبه شده است[13]. در سال 1390، برخوردار با استفاده از روش منحنی‌های تراز، پسروی گرین‌های سه‌بعدی را شبیه‌سازی کرد. در این کار مقدار سطح سوزش و حجم محفظه احتراق با استفاده از توابع هویساید و دلتای دیراک محاسبه شده است[14]. در سال 1391، مشیر استخاره شبیه‌سازی عددی پسروی گرین‌های سه‌بعدی را با روش منحنی‌های تراز انجام داد. در این تحقیق برای محاسبه سطح سوزش از روش المان برشی استفاده شد[15]. در سال 2013، لورنته با مدل‌سازی معادلات روش منحنی‌های تراز در نرم‌افزار متلب، پسروی گرین‌ها را شبیه‌سازی کرد. در این تحقیق با تعمیم روش المان برشی دوبعدی، سطح سوزش گرین‌های سه‌بعدی محاسبه شد[16].

بررسی تحقیقات پیشین نشان می‌دهد که روش منحنی‌های تراز، عملکرد مناسبی در تحلیل پسروی گرین دارد، اما میزان دقت نتایج به شدت وابسته به روشی است که برای محاسبه پارامترهای پسروی (سطح سوزش و حجم محفظه احتراق) استفاده می‌شود. بنابراین در این مطالعه سعی بر اینست که با بررسی نقاط ضعف و قوت روش‌های مختلف، یک روش سریع و دقیق برای محاسبه پارامترهای پسروی گرین‌های سه‌بعدی ارائه گردد.

2- روش منحنی‌های تراز

روش منحنی‌های تراز، یک تکنیک عددی است که با اعمال بر یک معادله دیفرانسیل جزئی مقدار اولیه اویلرین، چگونگی حرکت مرزها را توصیف می‌کند. گسترش مرز با این روش دارای سه مزیت مهم ذیل است:

- از دیدگاه ریاضی، پیچیدگی‌های حرکت مانند نقاط تکین[11]، راه حل‌های ضعیف[12]، تشکیل شوک و شرایط بی‌نظمی[13] کاملاً روشن شده است.
- از دیدگاه عددی، یک راه حل دقیق برای محاسبه انحنای محلی، پیگیری گوشه‌های تیز و تغییرات توپولوژی در حین ادغام و شکستگی ارائه می‌کند.
- از دیدگاه پیاده‌سازی، مقادیر خطاها با گزینه‌های زیر قابل کنترل است:

1- مرتبه روش عددی

2- فواصل شبکه

3- گام زمانی

1- Solid Propellant Rocket Motor Performance
2- Phase-Base
3- AutoCAD
4- SolidWorks
5- offset
6- Interface Tracking Method
7- Interface Capturing Method

8- Dirac delta function
9- GREG: Grain Regression Model
10- Heaviside functions
11- singularities
12- weak solutions
13- entropy conditions

www.SID.ir
Archive of SID

روش منحنی‌های تراز به دو صورت ساکن و وابسته به زمان، فرمول‌بندی شده است؛ همان‌گونه که در شکل 1-الف مشاهده می‌شود، در فرمول‌بندی ساکن فرض بر اینست که تحولات مرز بالای صفحه xy و سرعت حرکت مرز ثبت باشد. معادله حرکت این حالت به صورت رابطه (1) نوشته می‌شود[17].

$$\left|\nabla T\right| F = 1 \qquad (1)$$

در این رابطه $T(x,y)$ زمانی است که منحنی از نقطه (x,y) عبور می‌کند و F سرعت عمود بر مرز می‌باشد.

در فرمول‌بندی وابسته به زمان و مطابق با شکل 1-ب، موقعیت اولیه مرز به عنوان یک منحنی تراز صفر از یک تابع با بعد بالاتر φ در نظر گرفته می‌شود. برای بدست آوردن معادله حرکت این تابع منحنی تراز φ و ترکیب منحنی تراز صفر φ با توسعه مرز، ابتدا لازم است که مقدار منحنی‌های تراز یک جزء روی مرز صفر باشد از این روطبق رابطه(2):

$$\varphi(x(t),t) = 0 \qquad (2)$$

و با استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای می‌توان رابطه (3) را نوشت:

$$\varphi_t + \nabla\varphi(x(t),t).x'(t) = 0 \qquad (3)$$

از آنجا که $x'(t).n = F$ و $n = \nabla\varphi / \left|\nabla\varphi\right|$، لذا معادله توسعه مرز φ به صورت رابطه (4) بدست می‌آید:

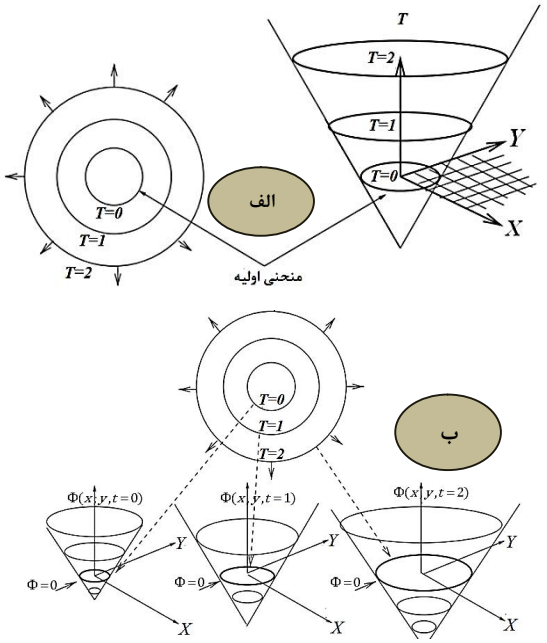
$$\varphi_t + F\left|\nabla\varphi\right| = 0 \ , \qquad \varphi(x,t=0) \qquad (4)$$

تحلیل پسروی بسته به درون‌سوز یا برون‌سوز بودن گرین مورد نظر، می‌تواند دارای توابع سرعت مثبت یا منفی باشد و لذا فقط برای گرین‌های درون‌سوز می‌توان از فرمول‌بندی ساکن استفاده نمود، در حالی که فرمول‌بندی وابسته به زمان برای هر نوع گرین دلخواهی قابل اعمال است.

2-1- تقریب عددی منحنی‌های تراز وابسته به زمان

برای توسعه معادله روش منحنی‌های تراز، ابتدا فرم اسکالر یک بعدی معادله (4) با استفاده از قانون بقاء هایپربولیک به صورت رابطه(5) نوشته می‌شود:

$$u_t + [G(u)]_x = 0 \qquad (5)$$



شکل 1 مدل‌سازی مسئله مرز متحرک با روش منحنی‌های تراز[17]

از نقطه نظر حل عددی، می‌توان با استفاده از یک تابع شار عددی مناسب g این رابطه را به صورت عددی تقریب زد؛ بنابراین با استفاده از یک تقریب اختلاف محدود پیشرو برای ترم اول و تقریب تفاضل محدود مرکزی برای ترم دوم، معادله (5) به صورت رابطه (6) بازنویسی می‌گردد:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{\Delta x} \qquad (6)$$

تابع شار باید به گونه‌ای انتخاب شود که شکل بقایی معادله حفظ و شرایط بی‌نظمی نیز ارضا شود و علاوه بر آن یک جواب هموار با دقت بالا و به دور از ناپیوستگی ایجاد کند. یکی از ساده‌ترین تقریب‌های عددی شار روش انکوییست- اوشر است، که در آن با خلاصه کردن اجزا، تابع شار به صورت رابطه (7) خواهد شد:

$$g_{\text{EO}}(u_1,u_2) = (\max(u_1,0)^2 + \min(u_2,0)^2) \qquad (7)$$

با در نظر گرفتن همیلتونین $H(u) = \sqrt{u^2}$ معادله منحنی‌های تراز یک بعدی به صورت رابطه (8) نوشته می‌شود:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t(\max(D_i^{-x},0)^2 + \min(D_i^{+x},0)^2)^{1/2} \qquad (8)$$

این روش منحنی‌های تراز ارائه شده توسط ستیان است [17] و تا زمانی که همیلتونین در هر بعد فضا متقارن باشد، برای هر متغیر در ابعاد دیگر می‌تواند به کار گرفته شود.

برای بدست آوردن معادله منحنی‌های تراز سه‌بعدی، معادله همیلتونین $\varphi_t + H(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z) = 0$ به صورت رابطه (9) تقریب زده خواهد شد.

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t g(\frac{\varphi_{ijk}^n - \varphi_{i-1,j,k}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{i+1,j,k}^n - \varphi_{ijk}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{ijk}^n - \varphi_{i,j-1,k}^n}{\Delta y}, \frac{\varphi_{i,j+1,k}^n - \varphi_{ijk}^n}{\Delta y}, \frac{\varphi_{ijk}^n - \varphi_{i,j,k-1}^n}{\Delta z}, \frac{\varphi_{i,j,k+1}^n - \varphi_{ijk}^n}{\Delta z}) \qquad (9)$$

و با کاربرد روش EO می‌توان رابطه (10) را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} g_{\text{EO}}(u_1,u_2,v_1,v_2,w_1,w_2) = [&\max(u_1,0)^2 + \min(u_2,0)^2 + \\ &\max(v_1,0)^2 + \min(v_2,0)^2 + \\ &\max(w_1,0)^2 + \min(w_2,0)^2]^{1/2} \end{aligned} \qquad (10)$$

در نهایت معادله منحنی‌های تراز سه‌بعدی به صورت رابطه (11) بدست می‌آید:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n - \Delta t(\max(F,0)\nabla^+ + \min(F,0)\nabla^-) \qquad (11)$$

که در این رابطه مقادیر ∇^- و ∇^+ با استفاده از رابطه (12) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \nabla^+ = [&\max(D_{ijk}^{-x}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \min(D_{ijk}^{+x}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \\ &\max(D_{ijk}^{-y}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \min(D_{ijk}^{+y}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \\ &\max(D_{ijk}^{-z}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \min(D_{ijk}^{+z}\varphi_{ijk}^n,0)^2]^{1/2} \\ \nabla^- = [&\max(D_{ijk}^{+x}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \min(D_{ijk}^{-x}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \\ &\max(D_{ijk}^{+y}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \min(D_{ijk}^{-y}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \\ &\max(D_{ijk}^{+z}\varphi_{ijk}^n,0)^2 + \min(D_{ijk}^{-z}\varphi_{ijk}^n,0)^2]^{1/2} \end{aligned} \qquad (12)$$

3- شبیه‌سازی پسروی گرین

الگوریتمی که برای شبیه‌سازی پسروی گرین استفاده می‌شود از سه بخش اصلی شبکه‌بندی، تعیین تابع فاصله و محاسبه پارامترهای پسروی تشکیل گردیده است[9-17] که در ادامه هر یک به صورت مختصر بیان می‌شود.

3-1- شبکه‌بندی

در این گام دو شبکه با المان‌های چهاروجهی و مکعبی به ترتیب در پورت اولیه گرین و حجم موتور ایجاد می‌گردد. برای تشکیل شبکه اولیه، پورت

Archive of SID

www.SID.ir

گرین در یک نرم‌افزار ترسیمی ایجاد و به کمک یک نرم‌افزار تولید شبکه، شبکه‌بندی می‌شود. اطلاعات این شبکه که شامل مختصات نقاط شبکه و نحوه اتصال گره‌ها برای ساخت المان‌های مجاور می‌باشد، به صورت یک فایل عددی در برنامه اصلی فراخوانی می‌شود. شبکه ثانویه توسط کدنویسی و به گونه‌ای ایجاد می‌گردد که کل حجم موتور را بپوشاند.

3-2- تعیین تابع فاصله

تابع فاصله یا تابع منحنی‌های تراز، φ، به صورت حداقل فاصله بین یک نقطه از شبکه ثانویه با مرز گرین تعریف می‌شود. در کد عددی، محاسبه این تابع طی سه مرحله ذیل انجام می‌گیرد.

1) فاصله هر گره‌ی شبکه ثانویه با تمام نقاط شبکه اولیه محاسبه می‌شود و کمترین مقدار آن به عنوان تابع حداقل فاصله برای گره مورد نظر در شبکه کارتزین (φ_{ijk}) در نظر گرفته می‌شود. این عمل برای کلیه نقاط شبکه ثانویه تکرار می‌شود.
2) به کمک المان‌های چهاروجهی شبکه اولیه و با استفاده از روش بردار نرمال، وضعیت نقاط شبکه ثانویه نسبت مرز پورت تعیین می‌گردد (نقاط داخلی و خارجی تفکیک می‌شود).
3) برای نقاطی که در داخل مرز واقع شده باشند، مقدار تابع حداقل فاصله در 1- ضرب می‌شود.

3-3- محاسبه پارامترهای پسروی

با پسروی گرین پارامترهای سطح سوزش و حجم محفظه احتراق تغییر می‌کنند. بنابراین لازم است در هر گام زمانی این پارامترها محاسبه شوند. بدین منظور در هر گام زمانی ابتدا مقدار تابع فاصله ($\varphi_{i,j,k}$) به کمک معادله منحنی‌های تراز (رابطه 3) به‌روزرسانی می‌شود. سپس با استفاده از مقادیر جدید تابع فاصله و یک روش مفروض، پارامترهای پسروی محاسبه می‌گردد.

در تحقیقات پیشین روش‌های متنوعی برای محاسبه پارامترهای پسروی گرین‌های سه‌بعدی در نظر گرفته شده است که همگی را می‌توان در چهار روش ذیل طبقه‌بندی نمود:

الف) روش تسخیر سلولی

در این روش الگوریتم مورد استفاده برای تعیین سطح سوزش و حجم محفظه احتراق به صورت زیر است[8 و 15]:

1- برای هر گره از شبکه ثانویه، علامت تابع فاصله بررسی و تعداد گره‌هایی که دارای تابع فاصله منفی هستند محاسبه می‌شوند ($\sum\varphi^n_{i,j,k}<0$).
2- حجم محفظه احتراق (V_p) از رابطه (13) محاسبه می‌شود.

$$V_p=(\sum\varphi^n_{i,j,k}<0)\times\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (13)$$

3- با کمک مقادیر V_p و رابطه (14) می‌توان سطح سوزش (S_b) را به دست آورد.

$$S_b=\frac{V_p^{n+1}-V_p^n}{F\Delta t} \qquad (14)$$

در این رابطه n و $n+1$ پسروی در دو گام متوالی، Δt نمو زمانی و F نمایان‌گر سرعت پسروی مرز یا همان نرخ سوزش است.

ب) روش مقطعی

در روش مقطعی مشابه شکل 2 یک گرین سه‌بعدی به صورت مجموعه‌ای از گرین‌های دوبعدی فرض می‌شود که در راستای محور موتور (محور z) و بر گره‌های شبکه زمینه (با فاصله dz از هم) واقع شده‌اند[15،16،18]. بنابراین ابتدا محیط سوزش و سطح گذرگاه جریان گرین دوبعدی واقع در هر گره محاسبه می‌شود، سپس به کمک روابط (15) و (16) سطح سوزش و حجم محفظه احتراق گرین سه‌بعدی محاسبه می‌گردد.

$$S_b=\sum_{k=1}^{n}(\frac{P_k^n+P_{k+1}^n}{2})\Delta z \qquad (15)$$

$$V_p=\sum_{k=1}^{n}(\frac{A_k^n+A_{k+1}^n}{2})\Delta z \qquad (16)$$

در این روابط اندیس k، گره‌ها را در راستای طولی گرین مشخص می‌کند و n تعداد گره‌ها در راستای محور موتور است.

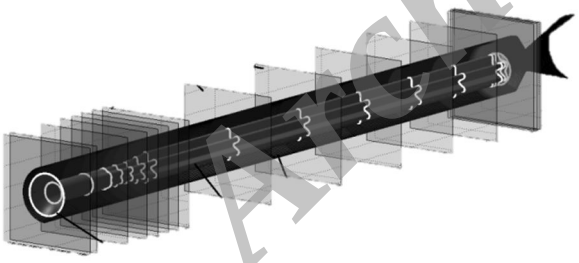
ج) روش المان برشی سه‌بعدی

در روش المان برشی، المان‌هایی که توسط مرز برش خورده‌اند مستقیماً مورد توجه گرفته و برای توصیف تقاطع مرز با المان‌های مکعبی از فرضیات زیر استفاده می‌شود[10 و 15]:

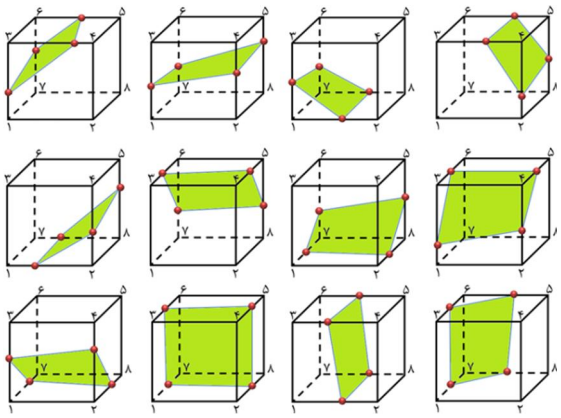
- مرز، هر المان را در وجوهش قطع می‌کند.
- فصل مشترک مرز و المان به صورت سطوح صاف(غیر منحنی) در نظر گرفته می‌شوند.
- مرز، المان را در چهار وجه قطع می‌کند و از آنجایی که المان به صورت مکعب است چهارضلعی مدنظر در واقع دو مثلث قائم‌الزاویه چسبیده به هم است.

بر اساس این فرضیات در مجموع 15 حالت به عنوان حالات معتبر در نظر گرفته شده که برخی از آن‌ها به صورت شکل 3 نشان داده می‌شود.

در بخش 3-2 بیان شد که اگر گره‌ای داخل مرز واقع شود تابع فاصله آن منفی خواهد بود، پس در هر المان اگر دو گره واقع بر یک یال دارای تابع فاصله هم‌علامت نباشند بدین معنی خواهد بود که مرز آن یال را قطع کرده است. بر این اساس و با در نظر گرفتن شکل 4، مختصات نقاط تقاطع مرز و



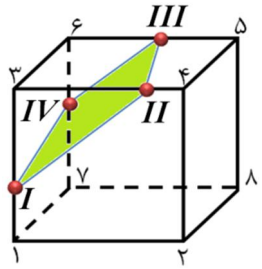
شکل 2 نمونه‌ای از عملکرد روش مقطعی در گرین NAWC N.6 [16]



شکل 3 حالات معتبر برای برش المان

Archive of SID

www.SID.ir



شکل 4 یک نمونه المان مکعبی قطع شده توسط مرز

یال مشابه روابط (17) تا (20) محاسبه می‌شود و مساحت چهاروجهی را از رابطه(21) محاسبه کرد.

- نقطه *I* (یال 1-3)

$$\varphi_1.\varphi_3<0\Rightarrow$$

$$x_{cut}=x_1 \quad و \quad y_{cut}=y_1+\frac{|\varphi_1|}{|\varphi_1|+|\varphi_3|}dy \quad و \quad z_{cut}=z_1 \qquad (17)$$

- نقطه *II* (یال 3-4)

$$\varphi_3.\varphi_4<0\Rightarrow$$

$$x_{cut}=x_3 \quad و \quad y_{cut}=y_3 \quad و \quad z_{cut}=z_3+\frac{|\varphi_3|}{|\varphi_4|+|\varphi_3|}dz \qquad (18)$$

- نقطه *III* (یال 5-6)

$$\varphi_5.\varphi_6<0\Rightarrow$$

$$x_{cut}=x_6 \quad و \quad y_{cut}=y_6 \quad و \quad z_{cut}=z_6+\frac{|\varphi_6|}{|\varphi_6|+|\varphi_5|}dz \qquad (19)$$

- نقطه *IV* (یال 6-7)

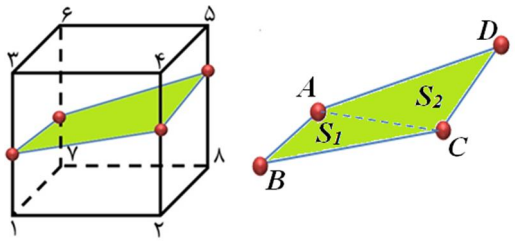
$$\varphi_6.\varphi_7<0\Rightarrow$$

$$x_{cut}=x_7 \quad و \quad y_{cut}=y_7+\frac{|\varphi_7|}{|\varphi_7|+|\varphi_6|}dy \quad و \quad z_{cut}=z_7 \qquad (20)$$

همان‌گونه که در فرضیات این روش اشاره شد، تقاطع مرز و وجوه المان متشکل از دو مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین با درنظر گرفتن شکل 5 می‌توان مساحت چهاروجهی (فصل مشترک مرز و المان) ایجاد شده را محاسبه کرد.

$$A_1=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2-(z_A-z_B)^2}$$
$$A_2=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2-(z_A-z_C)^2}$$
$$A_3=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2-(z_C-z_B)^2}$$
$$A_4=(A_1+A_2+A_3)/2$$
$$S_1=\sqrt{A_4(A_4-A_1)(A_4-A_2)(A_4-A_3)} \qquad (21)$$

از رابطه (21) سطح S_1 محاسبه می‌شود؛ با رابطه‌ای مشابه، محاسبه مساحت S_2 هم انجام می‌شود و حاصل‌جمع دو سطح S_1 و S_2، مساحت چهاروجهی ABCD خواهد بود.



شکل 5 فصل مشترک مرز و المان مکعبی

د) روش توابع هویساید و دلتای دیراک

در این روش، حجم محفظه احتراق به کمک تابع هویساید و تقریب عددی رابطه (22) به دست می‌آید[12،13،14].

$$V_p=\int_\Omega[1-\hbar(\varphi(\vec{x}))]d\vec{x} \qquad (22)$$

در این رابطه Ω کل دامنه حل و $\hbar(\varphi)$ تابع هویساید می‌باشد که توسط رابطه (23) تعریف می‌شود:

$$\hbar(\phi)=\begin{cases}0 & \varphi\le 0\\ 1 & \varphi>0\end{cases} \qquad (23)$$

همچنین برای محاسبه سطح سوزش از تابع دلتای دیراک و رابطه (24) استفاده می‌گردد.

$$S_b=\int_\Omega\delta(\varphi(\vec{x}))\left|\vec{\nabla}\varphi\right|d\vec{x} \qquad (24)$$

که $\delta(\varphi)$، تابع دلتای دیراک بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(\varphi)=\frac{d\hbar(\varphi)}{d\varphi} \qquad (25)$$

4- توسعه الگوریتم پیمایش مکعبی

با بررسی روش‌های تسخیر سلولی و مقطعی به نظر می‌رسد این دو روش به دلایل زیر نمی‌توانند عملکرد مناسبی در محاسبه پارامترهای پسروی گرین-های سه‌بعدی داشته باشند:

- در روش تسخیر سلولی، تخمین سطح یا حجم تنها بر اساس تعداد المان‌های مکعبی داخلی بوده و از المان‌های مرزی صرف‌نظر می‌شود.
- روش مقطعی پارامترهای پسروی را بر اساس میانگین مقاطع مجاور محاسبه می‌کند. بنابراین در تحلیل گرین‌هایی که در راستای محوری تغییر قطر دارند دچار درصدی خطا می‌شود.

فرضیاتی که در روش المان برشی سه‌بعدی مطرح شده، تعداد حالات معتبر را به 15 مورد کاهش می‌دهد اما با توجه به این که هر مکعب دارای 8 گوشه است و هر گوشه می‌تواند به دو سطح بالا و پایین طبقه‌بندی شود، تعداد حالت‌های ممکن 2^8=256 مورد می‌باشد؛ بنابراین پیش‌بینی می‌شود روش المان برشی سه‌بعدی دقت پایینی داشته باشد.

از طرفی در مطالعات پیشین[14] نشان داده شده است که روش المان برشی در تحلیل گرین‌های دوبعدی دقت بالاتری نسبت به توابع هویساید/ دلتای دیراک و سایر روش‌ها دارد. پس اگر در روشی تمام حالات ممکن برای برش المان‌های مکعبی (256 حالت) در نظر گرفته شود می‌توان انتظار داشت که آن روش دقت بالاتری نسبت به سایر روش‌ها داشته باشد.

از آنجا که پیاده‌سازی و اعمال تمام این حالات بسیار زمان‌بر و پیچیده است، بنابراین نیاز به روشی است که بتواند سه هدف ذیل را ارضا کند:

- تمام 256 حالت ممکن برای برش یک المان مکعبی درنظر گرفته شود؛
- به سادگی قابل پیاده‌سازی باشد؛
- عملکرد آن به‌گونه‌ای باشد که بررسی حالات مختلف باعث افزایش زمان اجرای برنامه نشود.

الگوریتم پیمایش مکعبی روشی است که در آن امکان دسترسی به همه اهداف فوق وجود دارد.

پیمایش مکعبی یک الگوریتم گرافیکی کامپیوتری است که در سال 1987 توسط کلاین و لورنسن ارائه شده[19] و کاربرد آن در تجسم‌سازی-

Archive of SID

www.SID.ir

های پزشکی نظیر اسکن تصاویر ام‌آرآی[1] و سی‌تی[2]، جلوه‌های ویژه یا مدل-سازی سه‌بعدی می‌باشد.

با در نظر گرفتن مفاهیم مورد استفاده در روش المان برشی سه‌بعدی و پسروی گرین، الگوریتم پیمایش مکعبی به صورت زیر توسعه می‌یابد:

گام 1

مشابه شکل 6-الف، ابتدا رئوس و یال‌های مکعب به صورت قراردادی شاخص-گذاری می‌شوند.

گام2

مقادیر تابع فاصله در هر یک از رئوس بررسی می‌شود و به ازای هر مقدار منفی، متغیر " $\Re$ " بر اساس الگوی رابطه(26) به‌روزرسانی می‌شود.

$$\varphi_i < 0 \Rightarrow \Re = 2^{i-1} \quad (26)$$

گام3

با توجه به تعداد رئوسی که دارای تابع فاصله منفی هستند مقدار $\Re$ کل ($\Re_{tot}$) محاسبه می‌شود.

گام4

فراخوانی ردیف Nام از "جدول برش"؛ که مقدار N برابر با مقدار $\Re_{tot}$ و جدول برش به صورت جدول1 می‌باشد.

گام5

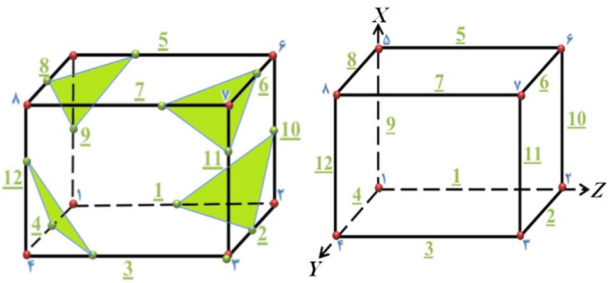
یافتن مختصات نقاط برش المان با استفاده از روابطی مشابه (17) تا (20).

گام6

محاسبه پارامترهای پسروی با استفاده از مختصات نقاط برش.

جدول برش (جدول1)، در واقع قلب الگوریتم است؛ این جدول دارای 256 سطر و 16 ستون است، که به ترتیب نشان‌دهنده 256 حالت ممکن برای تقاطع یک سطح با یک مکعب و تعداد کل یال‌های قطع شده و غیر قطع شده مکعب است. در این جدول اعداد مثبت "شاخص یال" نامیده شده و بیان‌گر یالی از المان است که توسط مرز قطع شده است. مقادیر منفی نیز "شاخص وضعیت" خوانده شده و نشان می‌دهد هیچ تقاطعی بین یال‌های مکعب و سطح وجود ندارد و یال‌ها در سمت سوخت واقع شده‌اند.

مشابه روش المان برشی سه‌بعدی، در الگوریتم پیمایش مکعبی نیز تقاطع مرز و وجوه المان به صورت ترکیبی از مثلث‌های مختلف در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس هر سه عدد مثبت متوالی (10-2-1 و 9-8-5) در هر سطر جدول برش (سطر 90) بیان‌گر سه یالی است که رئوس مثلث بر آن واقع شده‌اند و از اجتماع این مثلث‌ها سطح نهایی برش خورده تعیین می‌گردد. به عنوان مثال ردیف 90 از جدول برش بیان‌گر سطح برشی به



(ب) (الف)

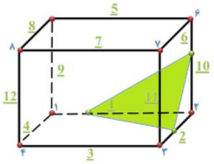
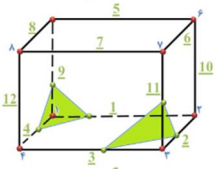
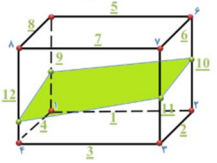
شکل 6 الف) شاخص‌گذاری رئوس و یال‌های المان مکعبی ب) نمونه‌ای از تقاطع مرز و المان (معادل با ردیف 90 از جدول برش)

1- MRI
2- CT

جدول 1 بخشی از داده‌های جدول برش

ردیف (N)	داده‌های برش آلمان
1	-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 9 4
2	-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 2 10
3	-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 2 9 4
.	
.	
.	
90	-1 -1 1 -1 11 7 6 12 4 3 9 8 5 10 2 1
.	
.	
.	
254	-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 9 4
255	-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1

جدول 2 شرح داده‌های جدول برش

ردیف	شاخص یال 1	شاخص یال 2	المان
2	1 2 10	-	
5	1 9 4	2 3 11	
15	9 11 12	9 10 11	

شکل 6-ب می‌باشد.با در نظر گرفتن موارد شرح داده شده، نحوه استخراج چند ردیف از جدول برش در جدول 2 تشریح شده است. در ادامه با پیاده-سازی الگوریتم‌های معرفی شده در محاسبه پارامترهای پسروی گرین، قابلیت‌های روش پیمایش مکعبی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

5- اعتبارسنجی و تحلیل نتایج

همان‌گونه که بیان شد، تحلیل پسروی گرین صرفاً یک کار ریاضی است و نتایجی که به صورت تجربی تغییرات سطح سوزش نسبت به ضخامت جان را بیان کند عملاً وجود ندارد. لذا به منظور ارزیابی روش‌های تسخیر سلولی، مقطعی، المان برشی سه‌بعدی و پیمایش مکعبی ابتدا نتایج عددی پسروی با نتایج حل تحلیلی مقایسه می‌شوند. بدین منظور سه گرین استوانه‌ای، چهارضلعی و شش‌ضلعی با مشخصاتی به صورت جدول 3 انتخاب می‌شود.

جدول 3 مشخصات گرین‌های مفروض

نوع گرین	شعاع خارجی (mm)	شعاع داخلی/طول ضلع (mm)	ضخامت جان (mm)	طول موتور (mm)
استوانه‌ای	55	20	35	100
چهارضلعی	70	50	35	100
شش‌ضلعی	45	10	35	100

Archive of SID
www.SID.ir

در انتخاب این گرین‌ها دو هدف مدنظر بوده است:

1- هر سه گرین دارای حل تحلیلی‌اند؛

2- گرین‌های چهارضلعی و شش‌ضلعی دارای نقاط گوشه هستند و پیگیری نقاط گوشه از مهم‌ترین و دشوارترین نقاط در یک روش تسخیر مرز محسوب می‌شوند، به گونه‌ای که اگر یک روش عددی تسخیر مرز بتواند نقاط گوشه را با دقت پیگیری کرده و دچار خطا نشود، روش عددی مطلوبی خواهد بود[17].

در گام اول مقایسه، زمان اجرای روش‌های مذکور به صورت جدول 4 مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

همان‌گونه که داده‌های این جدول نشان می‌دهد، کم‌ترین و بیش‌ترین حجم محاسبات به ترتیب مربوط به روش‌های تسخیر سلولی و مقطعی است. همچنین مشاهده می‌شود زمان اجرای دو روش المان برشی و پیمایش مکعبی اختلاف زیادی ندارند در صورتی که حالات مورد بررسی در روش پیمایش مکعبی از 15 به 256 افزایش یافته است. این مسئله سرعت بسیار بالای الگوریتم پیمایش مکعبی را اثبات می‌کند.

شایان ذکر است که به منظور افزایش دقت روش مقطعی، محاسبه محیط سوزش و سطح گذرگاه جریان در مقاطع دوبعدی با روش بسیار دقیق المان برشی کامل انجام می‌پذیرد[20].

در گام دوم و با هدف بررسی دقت روش‌ها، نتایج حل عددی با حل تحلیلی مقایسه می‌گردد. در این راستا ابتدا نتایج حاصل از روش تسخیر سلولی به صورت شکل‌های 7 و 8 مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

با بررسی داده‌های جدول4 و نمودارهای 7 و 8، موارد زیر قابل برداشت است:

- روش تسخیر سلولی زمان اجرای پایینی دارد؛
- در روش تسخیر سلولی می‌توان V_p را با دقت نسبتاً مناسبی محاسبه کرد؛ اما تخمین S_b همواره به صورت نوسانی و نامطلوب می‌باشد؛
- نقاط گوشه تأثیر قابل توجهی در دقت نتایج دارد.

با توجه موارد فوق می‌توان گفت گرچه مزیت روش تسخیر سلولی در سادگی پیاده‌سازی، زمان اجرای پایین و عدم نیاز به محاسبه مختصات نقاط مرزی است، اما تنها در شبکه‌های بسیار ریز و برای گرین‌هایی با هندسه ساده می‌تواند دقت قابل قبولی داشته باشد. بنابراین با توجه به ضعف شدید این روش در محاسبه سطح سوزش و عدم امکان تحلیل پسماندها، استفاده از آن توصیه نمی‌شود.

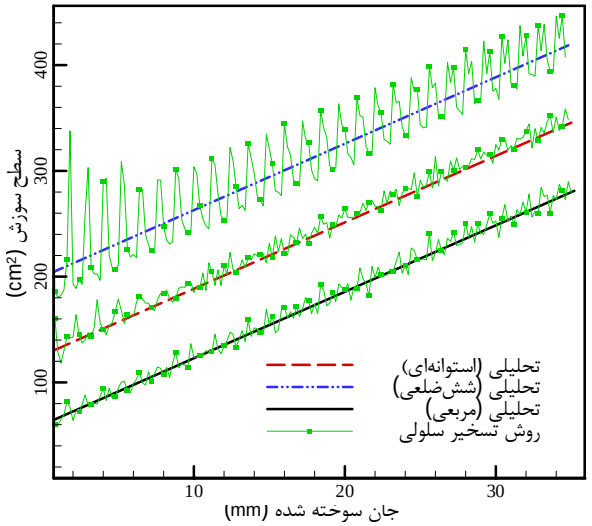
به صورت مشابه، تغییرات سطح سوزش سه گرین مفروض با روش المان برشی سه‌بعدی محاسبه و مقایسه نتایج با حل تحلیلی در نمودارهای شکل 9 ارائه می‌گردند.

همان‌گونه که در شکل 9 مشاهده می‌شود، در روش المان برشی سه‌بعدی همواره مقدار سطح محاسبه شده کمتر از مقدار واقعی بوده و منحنی‌ها به صورت پرشی و شکسته می‌باشند که علت این مسئله را می‌توان به فرضیات مورد استفاده و تعداد حالات معتبر مربوط دانست. در مجموع، مشاهدات نشان می‌دهد روش المان برشی سه‌بعدی نیز نمی‌تواند روش مناسبی برای تعیین پارامترهای پسروی گرین باشد.

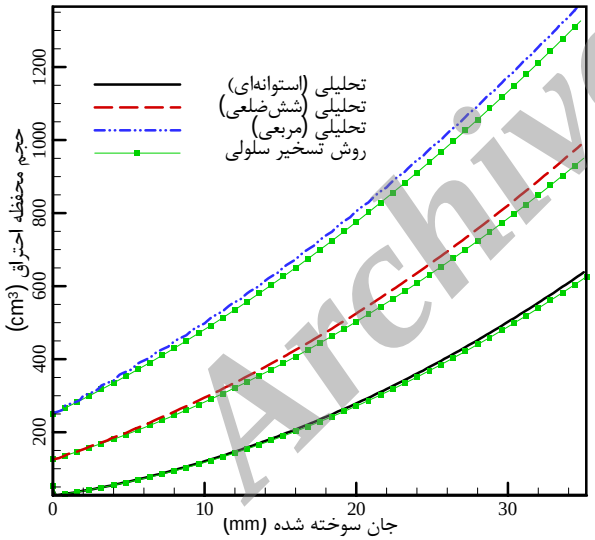
در ادامه دقت عملکرد دو روش مقطعی و پیمایش مکعبی نسبت به حل تحلیلی سنجیده شده و نتایج به صورت جدول 5 و شکل 10 گزارش می‌شود.

جدول 4 مقایسه زمان اجرای روش‌های مفروض برای محاسبه پارامترهای پسروی

نوع گرین	زمان اجرا (sec)			
	تسخیر سلولی	المان برشی سه‌بعدی	مقطعی	پیمایش مکعبی
استوانه‌ای	129	137	166	163
چهارضلعی	409	435	556	534
شش‌ضلعی	115	123	159	148



شکل 7 مقایسه تعیین سطح سوزش با دو روش تسخیر سلولی و تحلیلی



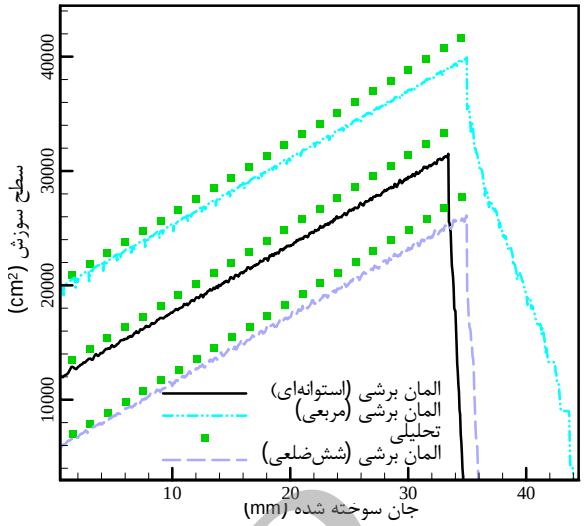
شکل 8 مقایسه تعیین حجم گذرگاه جریان با دو روش تسخیر سلولی و تحلیلی

جدول 5 مقایسه نتایج روش مقطعی و پیمایش مکعبی

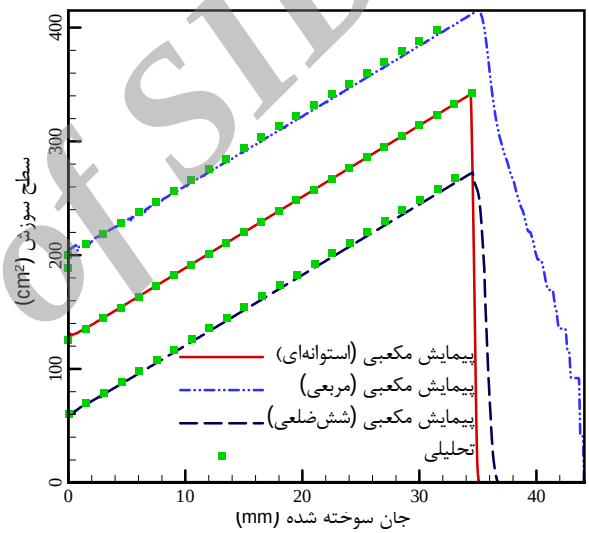
نوع گرین	بیش‌ترین درصد خطای S_b	بیش‌ترین درصد خطای V_p
	روش مقطعی	
استوانه‌ای	0/45	0/63
چهارضلعی	0/76	1/12
شش‌ضلعی	0/57	0/84
	روش پیمایش مکعبی	
استوانه‌ای	0/42	0/59
چهارضلعی	0/88	1/23
شش‌ضلعی	0/61	0/84

Archive of SID

www.SID.ir



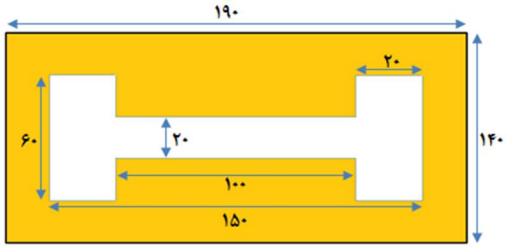
شکل 9 مقایسه تعیین سطح سوزش با دو روش المان برشی سه‌بعدی و تحلیلی



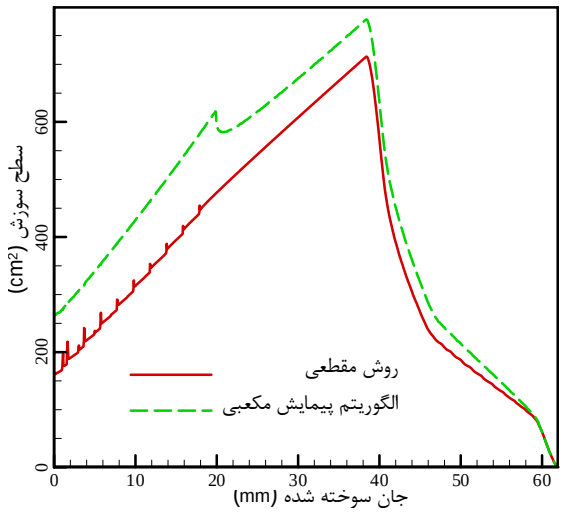
شکل 10 مقایسه تعیین سطح سوزش با دو روش پیمایش مکعبی و تحلیلی

ظواهر نتایج نشان می‌دهد، در صورتی که از المان برشی کامل [20] در روش مقطعی استفاده شود می‌توان دقت بالایی در نتایج به دست آورد، اما باید توجه داشت که در این روش، گرین‌های سه‌بعدی به صورت دوبعدی تحلیل شده و ممکن است در تحلیل گرین‌هایی که در راستای محور، تغییر قطر دارند دچار خطا شود. به منظور بررسی این احتمال، یک گرین همه-طرف‌سوز با مشخصات شکل 11 در نظر گرفته شده و نتایج دو روش پیمایش مکعبی و مقطعی در شبکه‌ای با ابعاد 65×48×48 مقایسه می‌شوند (شکل 12).

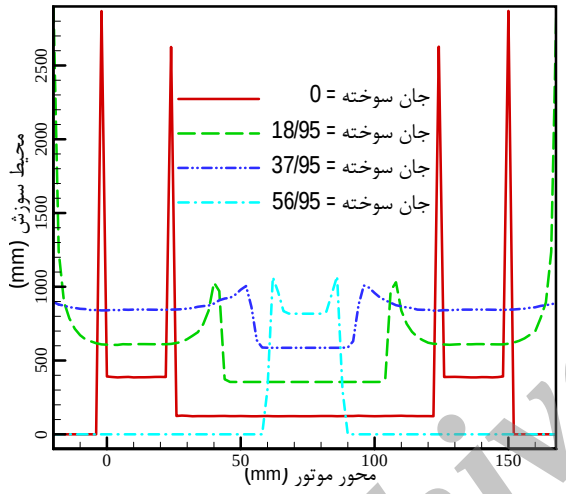
همان‌گونه که پیش‌بینی می‌شد، روش مقطعی در تحلیل گرین سه‌بعدی همه‌طرف‌سوز دچار خطا می‌شود. برای روشن شدن علت، به کمک روش



شکل 11 مشخصات گرین همه‌طرف‌سوز مفروض



شکل 12 مقایسه تغییرات سطح سوزش با دو روش مقطعی و پیمایش مکعبی



شکل 13 تغییرات محیط در طول گرین همه‌طرف‌سوز

پیمایش مکعبی تغییرات محیط سوزش در راستای محور طولی استخراج و به صورت شکل 13 نشان داده می‌شود.

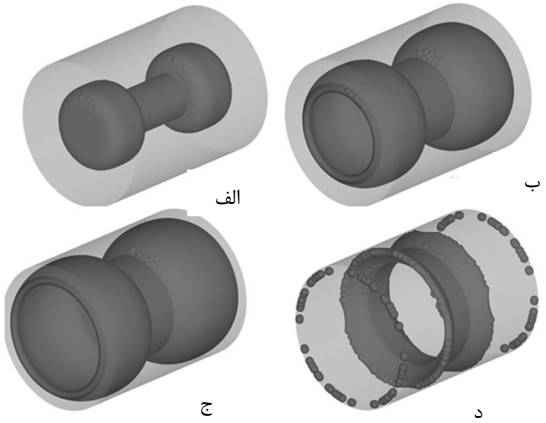
شکل 13 به خوبی نشان می‌دهد، وجود تغییر قطر در راستای محور گرین سبب افزایش یا کاهش شدید محیط سوزش محلی می‌گردد، بنابراین روش مقطعی که بر اساس میانگین‌گیری بین مقاطع محوری عمل می‌کند، دچار خطا خواهد شد. اگرچه با ریزتر کردن شبکه حل (افزایش مقاطع مورد بررسی) عملکرد روش مقطعی بهبود می‌یابد، اما بر زمان اجرا نیز به شدت افزوده می‌شود. در مجموع با مصالحه‌ای بین زمان اجرا و دقت حل، باید گفت روش مقطعی نمی‌تواند روش مطلوبی برای تعیین پارامترهای پسروی گرین-های سه‌بعدی باشد.

روش پیمایش مکعبی علاوه بر دقت بسیار بالا و زمان اجرای مناسب، توانایی ترسیم پروفیل پسروی را نیز به الگوریتم حل می‌افزاید که به کمک آن می‌توان تحولات مرز و صحت تحلیل را بررسی کرد. شکل 14 پروفیل پسروی گرین همه‌طرف‌سوز را در چند گام زمانی نمایش می‌دهد. در این شکل، بخش‌های تاریک نمایانگر سطح در حال سوزش می‌باشد و بخش روشن در واقع بدنه موتور بوده که در تمام مراحل سوزش به صورت ثابت باقی مانده است.

نشان داده شد که روش پیمایش مکعبی نسبت به سه روش تسخیر

Archive of SID

www.SID.ir



شکل 14 چهار گام از پروفیل پسروی گرین همه‌طرف‌سوز

سلولی، المان برشی سه‌بعدی و مقطعی عملکرد بهتری در محاسبه پارامترهای پسروی دارد. در ادامه با در نظر گرفتن دو گرین NAWC N.13 و کونوسیل و با بهره‌گیری از نتایج مراجع [13] و [14]، روش‌های پیمایش مکعبی و توابع هویساید/ دلتای دیراک مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

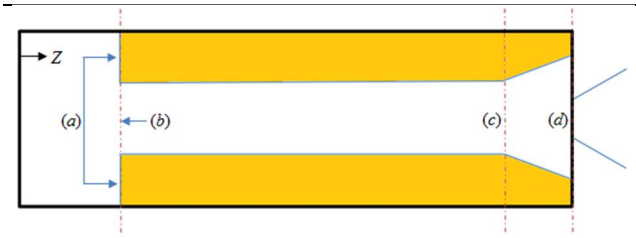
شایان ذکر است که نتایج پسروی وابسته به سرعت پسروی، شبکه‌های اولیه و گام زمانی حل می‌باشد. از آنجا که در هیچ یک از مراجع این موارد به طور کامل تبیین نشده، امکان مقایسه دقیق وجود ندارد و تنها محدوده نتایج و روند تغییرات آن‌ها مدنظر قرار می‌گیرد.

موتور NAWC N.13، از یک گرین ساده مخروطی شکل و بدنه استوانه‌ای ساده تشکیل شده است[13]. در شکل 15 شماتیکی از این موتور و مقاطع طولی موثر نشان داده شده و در جدول 6 پارامترهای مورد نیاز برای تعریف هندسه گرین ارائه می‌گردد.

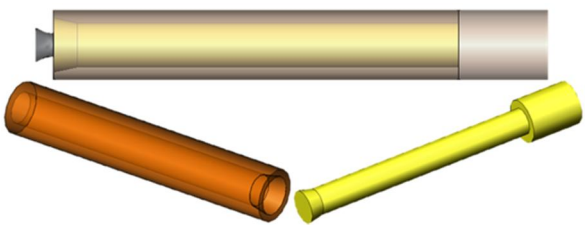
با توجه به مشخصات فوق، شکل سه‌بعدی گرین، سطح اولیه سوزش (مندرل) و موتور به صورت شکل 16 نشان داده می‌شود.

جدول 6 پارامترهای موتور NAWC N.13 [13]

مقطع	شعاع (mm)	Z (mm)
(a)	60/96	152/4
(b)	38/1	152/4
(c)	38/1	809/498
(d)	46/56	850/392



شکل 15 شماتیکی از هندسه موتور NAWC N.13



شکل 16 شکل سه‌بعدی مندرل، گرین و موتور NAWC N.13

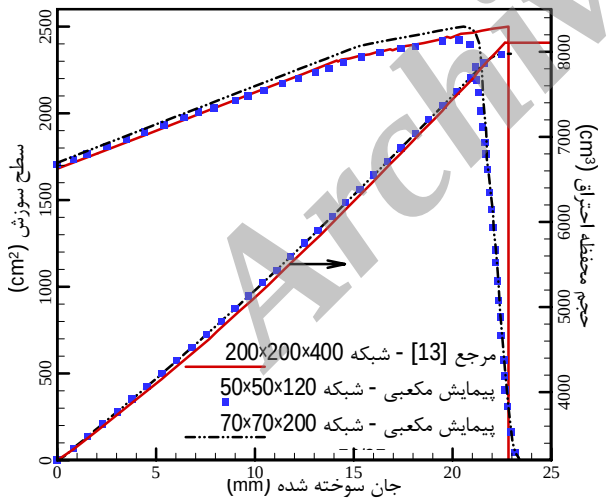
با انتخاب دو شبکه زمینه متفاوت، پارامترهای پسروی با روش پیمایش مکعبی محاسبه می‌شود و در شکل 17 با نتایج توابع هویساید/ دلتای دیراک (مرجع [13]) مقایسه می‌شود.

در بررسی شکل 17، اختلافات موجود در نتایج پسماندها و همچنین تفاوت در ابعاد شبکه‌ها جلب توجه می‌کند؛

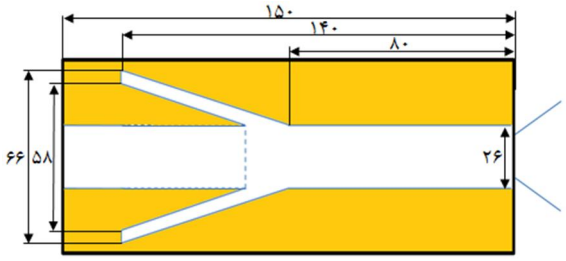
- اختلاف در نتایج پسماندها؛ علت این اختلاف را می‌توان به سادگی از روند تغییرات منحنی‌های شکل 17 (شیب منحنی‌ها در مراحل انتهایی سوزش) استنباط نمود. کاملاً مشخص است که در مرجع [13] هیچ تحلیلی برای پسروی پسماندها نشده است؛ به عبارت بهتر به مرز اجازه داده شده که بدون توجه به بدنه موتور پسروی کند و با خروج کامل مرز از بدنه موتور محاسبات متوقف می‌شود.
- اختلاف در ابعاد شبکه حل؛ با وجود این‌که شبکه مورد استفاده در مرجع [13] ریزتر است، اما نتایج تقریباً یکسانند. این واقعیت نشان می‌دهد روش هویساید/ دلتای دیراک که مرجع [13] برای تعیین پارامترهای پسروی استفاده شده، نسبت به روش پیمایش مکعبی ضعیف‌تر است.

بررسی پسروی گرین NAWC N.13 و مرجع [13] نشان می‌دهد روش پیمایش مکعبی به واسطه استفاده از شبکه‌های درشت‌تر زمان اجرای کمتری دارد، ضمن این‌که در شبکه‌های یکسان از دقت بالاتری نسبت به روش هویساید/ دلتای دیراک برخوردار است.

به عنوان آخرین مقایسه، یک گرین کونوسیل با ابعاد داده شده در شکل 18 در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از روش پیمایش مکعبی، پارامترهای پسروی این گرین محاسبه شده و در شکل 19 با نتایج مرجع [14] که بر مبنای روش هویساید/دلتای دیراک است، مقایسه می‌شود.



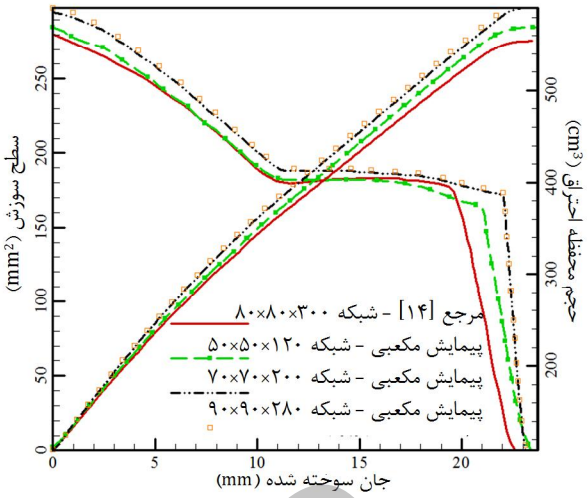
شکل 17 منحنی تغییرات پارامترهای پسروی گرین NAWC N.13



شکل 18 نمایی از گرین کونوسیل همراه با ابعاد مفروض

Archive of SID

www.SID.ir



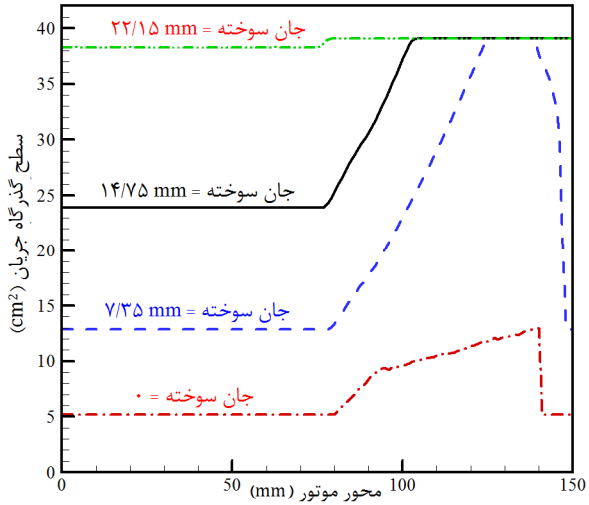
شکل ۱۹ منحنی تغییرات پارامترهای پسروی گرین کونوسیل

اگرچه تغییرات سطح سوزش و حجم گذرگاه جریان در دو روش مفروض روند مشابهی دارند، اما بررسی‌های دقیق‌تر نشان می‌دهد منحنی مرجع [۱۴] بیشترین تناسب را با نتایج درشت‌ترین شبکه دارد. به عبارت دیگر الگوریتم پیمایش مکعبی می‌تواند با استفاده از شبکه‌ای به ابعاد ۱۲۰×۵۰×۵۰ نتایجی مشابه روش هویساید/دلتای دیراک در یک شبکه ۳۰۰×۸۰×۸۰ بدهد. در نتیجه با توجه به الگوریتم‌های مورد استفاده، ابعاد شبکه‌ها و روند تغییر منحنی‌ها، به نظر می‌رسد روش هویساید/دلتای دیراک نسبت به روش پیمایش مکعبی دقت کمتری برای تعیین پارامترهای پسروی دارد.

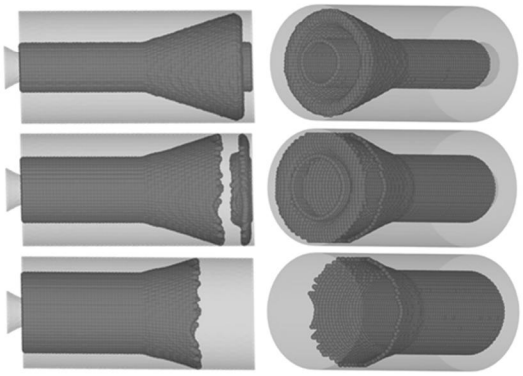
با مقایسه منحنی‌های حجم گذرگاه جریان در دو شکل ۱۷ و ۱۹ مشاهده می‌شود، در گرین NAWC N.13 اختلاف دو روش کمتر از گرین کونوسیل می‌باشد. از طرفی همان‌گونه که در شکل‌های ۲۰ و ۲۱ مشخص است، گرین کونوسیل بر خلاف NAWC N.13 در راستای محوری دارای تغییر قطرهای زیادی می‌باشد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که روش هویساید/دلتای دیراک نیز همانند روش مقطعی و بر خلاف پیمایش مکعبی در مواجهه با تغییر قطرهای محوری دچار کاهش عملکرد می‌شود.

۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

هدف از این تحقیق، ارائه یک روش سریع، دقیق و کارآمد برای تحلیل



شکل ۲۰ تغییرات سطح گذرگاه جریان در طول گرین کونوسیل



شکل ۲۱ پروفیل پسروی گرین کونوسیل در سه گام زمانی متفاوت

پسروی انواع گرین‌های سه‌بعدی به کمک روش عددی منحنی‌های تراز بود. بدین منظور ابتدا نقاط ضعف و قدرت تکنیک‌های موجود مورد ارزیابی قرار گرفت و بر اساس آن یک الگوریتم جدید با عنوان پیمایش مکعبی برای محاسبه پارامترهای پسروی معرفی شد.

برای اعتبارسنجی، ابتدا روش‌های تسخیر سلولی، المان برشی سه‌بعدی و مقطعی پیاده‌سازی و نتایج آن‌ها از نظر دقت و زمان اجرا با روش پیمایش مکعبی مقایسه گردید. در ادامه عملکرد روش جدید نسبت به روش هویساید/دلتای دیراک سنجیده شد. مهم‌ترین نتایج حاصل از این بررسی‌ها به صورت خلاصه عبارتند از:

- اگرچه مزیت روش تسخیر سلولی در سادگی پیاده‌سازی، زمان اجرای پایین و عدم نیاز به محاسبه مختصات نقاط مرزی است، اما با توجه به ضعف شدید این روش در محاسبه سطح سوزش و عدم امکان تحلیل پسماندها، استفاده از آن توصیه نمی‌شود.
- در روش المان برشی سه‌بعدی همواره مقدار سطح محاسبه شده کمتر از مقدار واقعی بوده و به دلیل استفاده از فرضیات ساده‌کننده، خطای روش نسبتاً بالاست.
- اگرچه روش مقطعی دقت بالایی در گرین‌های با نقاط گوشه دارد، اما این روش در تحلیل گرین‌هایی که راستای محور تغییر قطر دارند دچار خطا شده و زمان اجرای بالایی نیز دارد.
- تحلیل مناسب با استفاده از روش هویساید/دلتای دیراک مستلزم استفاده از شبکه‌هایی با ابعاد ریز است که همین مسئله سبب می‌شود زمان اجرای بالایی داشته باشد.

در مجموع با مصالحه‌ای بین دقت حل و زمان اجرا می‌توان گفت، روش پیمایش مکعبی نسبت به تمام روش‌های موجود عملکرد مطلوب‌تری در محاسبه پارامترهای پسروی دارد و بهتر است در الگوریتم اصلی روش منحنی‌های تراز از این روش استفاده شود.

۷- فهرست علائم

A	سطح سوزش دوبعدی (mm^2)
D^+	مشتق پیشرو
D^-	مشتق پسرو
F	سرعت حرکت مرز (mm/s)
G	تابع شار عددی
g	تابع شار عددی

Archive of SID

www.SID.ir

H	همیلتونین
$\vec{n}$	بردار یکه عمود بر مرز
P	محیط سوزش (mm)
$\dot{r}$	نرخ پسروی گرین (mm/s)
S	سطح سوزش سه‌بعدی (cm^2)
$T(x,y)$	زمان عبور منحنی از x و y (s)
V	حجم گذرگاه جریان (cm^3)
x,y,z	مختصات گره در شبکه ثانویه (mm)

علایم یونانی

δ	تابع دلتای دیراک
Γ	تابع موقعیت مرز
φ	تابع حداقل فاصله (یا تابع منحنی‌های تراز)
$\hbar$	تابع هویساید
Ω	کل دامنه حل

زیرنویس‌ها

b	سوزش
EO	روش انکوییست- اوشر
p	پورت
cut	محل تقاطع مرز و المان

8- مراجع

[1] M. R. Heidari, A. H. Adami, General grain analysis and rapid internal ballistic simulation for solid motor, *Journal of Energetic Material,* Vol. 5, No. 10, pp. 59-72, 2010. (In Persian)

[2] G. Puskulcu, *Analysis of 3-D Grain Burnback of Solid Propellant Rocket Motors and Verification with Rocket Motor Tests,* MS Thesis, Middle East Technical University, Turkey, 2004.

[3] R. Ucar, *Solid Propellant and Internal Ballistics,* MS Thesis, Middle East Technical University, Turkey, 1993.

[4] J. C. French, S. S. Dunn, New Capabilities in Solid Rocket Motor Grain Design Modeling (SPP 02), *38th JANNAF Combustion Subcommittee Meeting,* Nevada, ProQuest, pp. 317-331, 2002.

[5] R. Hartfield, R. Jenkins, J. Burkhalter, W. Foster, A review of Analytical Methods for Solid Rocket Motor Grain Analysis, in *39th AIAA/ASME /SAE/ASEE joint Propulsion Conference,* Huntsville, Alabama, 2003.

[6] H. Karimi, M. Moradi, H. Abtahi, Three-dimensional grain burn-back geometric modeling with quite complex profiles by SolidWork software, in *The 6th Conference of Iranian Areospace Society,* Tehran, Iran, 2006. (In Persian)

[7] K. A. Toker, *Three Dimensional Retarding Walls and Flow in Their Vicinity*", PhD Thesis, Middle East Technical University, Turkey, 2004.

[8] E. Saintout, D. Ribereau, P. Perrin, ELEA: A Tool for 3D Surface Regression Analysis in Propellant Grains, *25th AIAA/ASME/SAE Joint Propulsion Conference,* Monterey, 1989.

[9] K. A. Toker, H. Aksel, T. Tinaztepe, 3-Dimentional Propellant Grain Burn-Back Calculation on Tetrahedron Mesh by Fast Marching Method, in *41th AIAA/ASME/SAE/ASEE joint Propulsion Conference,* Tucson, Arizona, 2005.

[10] C. Yildirim, *Analysis of Grain Burnback and Internal Flow in Solid Propellant Rocket Motors in 3-Dimensions,* PhD Thesis, Middle East Technical University, Turkey, 2007.

[11] F. Qin, H. Guoqiang, L. Peijin, L. Jiang, Algorithm Study on Burning Surface Calculation of Solid Rocket Motor with Complicated Grain Based on Level Set Methods, in *42th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit,* California, 2006.

[12] B. Favivi, E. Cavallini, M.D. Giacinto, F. Serraglia, An Ignition-to-Burn Out Analysis of SRM Internal Ballistic and Performances, in *44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference,* Hartford, CT, 2008.

[13] E. Cavallini, *Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics,* PhD Thesis, Sapienza University, Italy, 2009.

[14] A. Barkordar, *Numerical simulation of the 3D grain burn-back,* MS Thesis, Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, 2012. (In Persian)

[15] S. G. Moshir Estekhareh, *Numerical simulation of the grain burn-back in solid propellant rocket motor,* MS Thesis, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Maleke-ashtar University of Technology, Tehran, 2012. (In Persian)

[16] A.P. Lorente, *Study of Grain Burnback and Performance of Solid Rocket Motors,* MS Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain, 2013.

[17] J.A.Sethian, *Level Set Methods and Fast Marching methods,* Second Edittion, Cambridge University Press, Berkeley, 1999.

[18] M. M. Gheisari, S. M .Mirsajedi, Numerical analysis of the 3D grain burn-back in solid motors based on level set method, in *The 2th Conference Iran Aerospace propulsion Engineering,* Tehran, Iran, 2013. (In Persian)

[19] W. E. Lorensen, H. E. Cline, Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm, *Journal of Computer Graphics,* Vol. 21, No. 4, pp. 163-169, 1987.

[20] M. M. Gheisari, S. M .Mirsajedi, Offering Cut Cell Method to Numerical Analysis of the 2D Grain Burn-Back in Solid Propellant Motors Based on Level Set Method, in *The 12th Conference of Iranian Areospace Society,* Tehran, Iran, 2013. (In Persian)

Archive of SID

www.SID.ir