مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 15، ص ص 199-206

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تجزیه و تحلیل تئوری و تجربی ظرفیت حمل بار دینامیکی بازوی مکانیکی با لینک انعطاف‌پذیر در حرکت نقطه به نقطه

نسیبه کرمی[1]، محرم حبیب نژاد کورایم[2*]، علی محمد شافعی[3]، سعید رفیعی نکو[4]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، تهران
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
3- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
4- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
* تهران، صندوق پستی 13114-16846، hkorayem@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 03 تیر 1393
پذیرش: 25 تیر 1393
ارائه در سایت: 30 مهر 1393

کلید واژگان:
ظرفیت حمل بار دینامیکی
لینک انعطاف‌پذیر
فرمولاسیون گیبس- اپل
کنترل بهینه
اصل مینیمم پونتریاگین

چکیده

این مقاله تحقیق در مورد فرمول کلی و راه حل عددی مسأله ظرفیت حمل بار دینامیکی بازوی مکانیکی با عضوهای انعطاف را بیان می‌کند. روش ارائه شده براساس مساله کنترل بهینه حلقه باز است. این روش از اصل مینیمم پونتریاگین منتج می‌شود که یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای را به وجود می‌آورد. روش غیرمستقیم برای استخراج شرایط بهینگی استفاده شده است. معادلات دینامیکی حرکت سیستم از فرمولاسیون گیبس- اپل و روش مودهای فرضی بدست آمده است. خصوصیات انعطاف‌پذیری عضوها بر اساس فرض تئوری تیر تیموشنکو و شکل مودهای مرتبط با آن مدل شده است. از آنجایی‌که مدل تیر تیموشنکو از دقت بالاتری نسبت به روش اویلر- برنولی برخوردار است، برای مدل‌سازی انعطاف‌پذیری در لینک‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. هدف اصلی این پژوهش محاسبه حداکثر بار مجاز یک بازوی مکانیکی با عضوهای انعطاف پذیر است، بطوری که یک مسیر بهینه ایجاد شود. در نهایت مقایسه نتایج شبیه‌سازی از مدل ارائه شده و نتایج بدست آمده از بستر آزمایشگاهی برای یک بازوی دو درجه آزادی انعطاف‌پذیر به منظور بررسی روش ارائه شده انجام شده است. کارایی روش پیشنهادی با انجام برخی مطالعات شبیه‌سازی بر روی بازوی انعطاف‌پذیر دانشگاه علم و صنعت نشان داده شده است. مقایسه داده‌های استخراجی شبیه‌سازی و تجربی، اعتبار ادعای قابلیت کنترل در مسیر نقطه به نقطه با روش ارائه شده و قابلیت آن را برای محاسبه ظرفیت حمل بار دینامیکی تأیید می‌کند.

Theoretical and experimental investigation of dynamic load carrying capacity of flexible-link manipulator in point-to-point motion

Nasibeh Karami[1], Moharram Habib nejad Korayem[2*], Ali Mohammad Shafei[3], Saeed Rafee Nekoo[4]

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Science and Research Branch Tehran, Tehran
2- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
3- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
4- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 1684613114 Tehran, hkorayem@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 24 June 2014
Accepted 16 July 2014
Available Online 22 October 2014

Keywords:
Dynamic Load Carrying Capacity (DLCC)
Flexible link
Gibbs-Appell formulation
Optimal control
Pontryagin's Minimum Principle

ABSTRACT

This paper presents the investigation of general formulation and numerical solution of the dynamic load carrying capacity (DLCC) of flexible link manipulator. The proposed method is based on open loop optimal control problem. A two point boundary value problem (TPBVP) is taken from the Pontryagin's minimum principle. The indirect approach is employed to derive optimality conditions. The system's dynamics equation of motion is obtained from Gibbs-Appell (G-A) formulation and assumed mode method (AMM). Elastic properties of the links are modeled according to the assumption of Timoshenko beam theory (TBT) and its associated mode shapes. As TBT is more accurate compared with the Euler-Bernoulli beam theory, it is utilized for mathematical modeling of flexible links. The main contribution of the paper is to calculate the maximum allowable load of a flexible link robot while an optimal trajectory is provided. Finally, the result of the simulation and experimental platform are compared for a two-link flexible arm to verify the introduced technique. The efficiency of the proposed method is illustrated by performing some simulation studies on the IUST flexible link manipulator. Simulation and experimental results confirm the validity of the claimed capability for controlling point-to-point motion of the proposed method and its application toward DLCC calculation.

1- مقدمه

امروزه با پیشرفت صنایع و تکنولوژی، نیاز به استفاده از ربات در زمینه‌های گوناگون نظیر پزشکی، خودروسازی، هوا فضا و غیره افزایش یافته که به تناسب این پیشرفت‌ها انتظارات و نیازهای جدیدی از ربات‌ها بوجود آمده

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
Please cite this article using:
N. Karami, M. Habib nejad Korayem, A.M. Shafei, S. Rafee Nekoo, Theoretical and experimental investigation of dynamic load carrying capacity of flexible-link manipulator in point-to-point motion, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 15, pp. 199-206, 2015 (In Persian)

است. بازوهای رباتیکی عموماً برای تکرار یک کار مشخص به تعداد دفعات زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بنابراین کوچکترین بهبود در عملکردشان منجر به صرفه‌جویی اقتصادی زیادی می‌شود. بیشتر بازوهای صنعتی امروزی برای برآورده نمودن دقت و تکرارپذیری مورد نیاز، از عضوهای سنگین و صلب تشکیل شده‌اند. این عضوها دارای اینرسی بالایی هستند و در نتیجه زمان زیادی برای انجام حرکت نیاز دارند و توان مصرفی بالایی برای محرک‌ها استفاده می‌شود. امروزه بازو با عضو انعطاف‌پذیر، به‌عنوان یک صورت مسئله معتبر جهانی و یک نمونه آزمایشگاهی معتبر در این زمینه شناخته می‌شود، تا به امروز بالغ بر 10 ربات انعطاف‌پذیر در دانشگاه های معتبر جهان ساخته شده، که به‌منظور نمایش توانایی انواع روش‌های استخراج معادلات، طراحی مسیر و کنترل مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

تاکنون مطالعات وسیعی در حوزه دینامیک، طراحی مسیر و کنترل ربات با عضو الاستیک صورت پذیرفته است، ولی بیشتر این تحقیقات به ارائه نتایج تئوری و شبیه‌سازی کامپیوتری محدود شده‌اند. تنها بجز مواردی انگشت شمار، نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی کامپیوتری با نتایج حاصل از آزمایش آزمایشگاهی مقایسه شده است.

انجام آزمایشات تجربی می‌تواند به تحقیق عملی در مورد صحت و دقت نتایج بدست آمده کمک نماید. برای انجام چنین کاری نیاز به طراحی و ساخت بازو با مفاصل انعطاف‌پذیر و بازو با عضوهای انعطاف‌پذیر می‌باشد. سپس مسیر بهینهٔ بدست آمده از نتایج شبیه‌سازی، روی ربات‌ها اعمال گردد و ماکزیمم بار قابل حمل توسط ربات به صورت عملی محاسبه گردد. در این حالت می‌توان تأثیر مسیر بهینهٔ کمترین ارتعاش را نیز به صورت آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار داد.

راح و اسچیلن یک مدل برای ربات‌های انعطاف‌پذیر ارائه کردند[1]. آنها اظهار داشتند که با در نظر گرفتن اثرات انعطاف‌پذیری ربات در طراحی سازه‌ی آن و همچنین سیستم کنترل مربوط، می‌توان سرعت و دقت حرکت ربات را افزایش داد. همچنین ساده‌ترین روش که می‌توان حرکت و گشتاور دینامیکی مورد نیاز این نوع عضوها را مدل کرد، مدلسازی جسم صلب متمرکز بیان شده است. گلدن برگ و رخشا تئوری‌های کنترلی خود را روی یک ربات انعطاف‌پذیر تک عضوی با حرکت صفحه‌ای آزمایش کرده‌اند[2]. این ربات تک عضوی به وسیله یک موتور DC در صفحه افقی دوران می‌کند و بازوی انعطاف پذیر در این صفحه دچار خمش می‌شود ولی در راستای عمودی تقریباً صلب عمل می‌کند. همچنین توسط یک گریپر وزنه سبکی به انتهای آزاد تیر متصل شده بود. صبری و بوک برای آزمایش پاسخ‌های بدست آمده از مباحث تئوری خود از یک ربات دو عضوی انعطاف پذیر استفاده کرده‌اند که در آن عضوها انعطاف‌پذیر بودند ولی تغییر شکل انعطاف‌پذیر مفاصل بسیار کوچک بود[3]. فلیو و همکارانش در مرحله آزمایش تئوری‌های خود از یک ربات انعطاف‌پذیر تک عضوی استفاده کردند[4]. این ربات شامل یک موتور DC مدل EC-60 به همراه یک هارمونیک درایو کاهشی با نسبت 1:50 و یک تیر از جنس آلومینیم انعطاف‌پذیر با مقطع مستطیلی می‌باشد که در صفحه افق حرکت می‌کند و جاذبه روی آن اثر دارد.

در بیشتر تحقیقات صورت گرفته در این زمینه، موتورها در مد موقعیت قرار می‌گرفتند که هدف در این موارد قرار گرفتن عضوها در یک زاویه مشخص بود. ولی در تحقیق حال حاضر ورودی اعمالی به سیستم از جنس گشتاور می‌باشد و هدف ثبت ارتعاشات ایجاد شده در عضوها است. سپس به منظور اطمینان و تأیید نتایج تجربی، آن را با نتایج حاصل از تئوری و شبیه‌سازی معادلات دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر مقایسه می‌نماییم.

در اینجا مساله‌ای که مورد مطالعه قرار می‌گیرد، مسالهٔ طراحی مسیر برای بازو با عضوهای انعطاف‌پذیر می‌باشد. معادلات دینامیکی این نوع ربات‌ها شدیداً غیرخطی است و به‌دلیل ویژگی‌های خاصی که دارند، تحقیقات بسیار زیادی در زمینه‌های مختلف روی آنها انجام گرفته شده است. با بررسی کارهای قبلی، مشاهده می‌شود که اغلب برای حل مسالهٔ طراحی مسیر بازوهای انعطاف‌پذیر، از روش‌های مستقیم استفاده کرده‌اند و کارایی این روش برای مسائل با درجات آزادی بالا و مسائلی که انعطاف‌پذیری به سیستم اضافه می‌شود، شدیداً کاهش می‌یابد. در این پژوهش راه‌حل جایگزینی برای مواجهه با این مسائل انتخاب گردید و آن حل غیرمستقیم مسالهٔ کنترل بهینه است.

در اینجا برخی از روش های مستقیم بررسی می‌شوند. وانگ و همکارانش برای محاسبه بار ماکزیمم، مساله کنترل بهینه را برای یک بازو ثابت حل نموده‌اند[5]. مبنای تبدیل مسأله کنترل بهینه به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری و بدست آوردن پارامترها در یک بهینه‌سازی غیرخطی بوده است. شیانگ یو و همکارانش نیز با روش اجزای محدود دینامیک سیستم را شبیه‌سازی کرده و به بررسی بار دینامیکی ماکزیمم برای یک ربات انعطاف‌پذیر با درجه آزادی مازاد پرداختند و یک مدل اجزا محدود برای تشریح دینامیک سیستم در نظر گرفتند[6]. این روش برای ربات‌های انعطاف‌پذیر با درجه آزادی مازاد که حرکت نقطه به نقطه تکراری را انجام می‌دهند مناسب می‌باشد. یکی دیگر از روش‌هایی که در آن مساله بهینه‌سازی مسیر به یک مساله مقدار مرزی تبدیل می‌شود، برنامه‌ریزی خطی تکراری است که اساساً یک مسئله بهینه سازی مقید غیر خطی است. عملیات خطی‌سازی در روش برنامه‌ریزی خطی و همگرایی آن به جواب نهایی کار مشکلی می‌باشد، به‌طوری که در نتایج بدست آمده از این روش، ارضاء شرایط مرزی به‌طور کامل انجام نمی‌شود و اگر مسیر اولیه به مسیر بهینهٔ نهایی به اندازهٔ کافی نزدیک نباشد، همگرایی صورت نخواهد گرفت[7]. کورایم و غریبلو یک روش محاسباتی برای بدست آوردن مسیر بهینه یک ربات متحرک با عضو و مفاصل انعطاف‌پذیر برای افزایش ظرفیت حمل بار بین دو نقطه کاری ارائه کردند[8]. مسأله ظرفیت حمل بار دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر به مساله بهینه‌سازی مسیر تبدیل شده است که اساساً یک مسأله بهینه‌سازی مقید غیرخطی است و برای حل آن از تکنیک برنامه‌ریزی خطی تکراری استفاده شده است. بیشتر تحقیقات صورت گرفته در زمینه ربات با مفصل انعطاف‌پذیر در ارتباط با پیدا کردن بیشینه ظرفیت حمل بار توسط ربات بوده و تحقیقات اندکی در ارتباط با یافتن مسیر بهینه اینگونه ربات‌ها انجام یافته که در آنها بواسطه دینامیک شدید غیرخطی و کوپل شده آنها و همچنین حرکت‌های ارتعاشی با فرکانس بالا در شبیه‌سازیها از انعطاف‌پذیری بازو و مفاصل صرفنظر شده است [9-10].

کورایم و نیکوبین مساله یافتن بار ماکزیمم برای بازوهای متحرک را مورد مطالعه قرار دادند[11]. درجات آزاد مازاد که از متحرک بودن پایه ناشی می‌شود با استفاده از توابع قیدی و ماتریس ژاکوبین بسط داده، نامعینی سیستم را حل کرده‌اند.

هدف اصلی در این مقاله بدست آوردن ماکزیمم ظرفیت حمل بار و مسیر بهینه متناظر برای یک بازو انعطاف‌پذیر می‌باشد. بنابراین مساله مورد نظر را یافتن بار ماکزیمم بین دو نقطه داده شده در فضای کاری ربات تعریف می‌کنیم، بطوری‌که بتوان حداکثر بار را بین این دو نقطه حمل نمود[12]. همان‌طور که گفته شد، روش مورد استفاده برای یافتن مسیر بهینه بار ماکزیمم روش غیرمستقیم است. در این روش با استفاده از اصل مینیمم پونتریاگین، شرایط بهینگی برای مینیمم شدن یک تابع هدف به صورت یک دستگاه معادلات

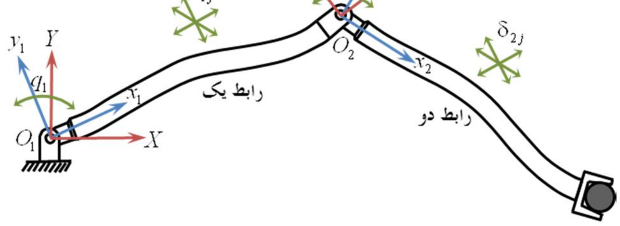
دیفرانسیل غیرخطی معمولی استخراج می‌گردد. مسأله بهینه‌سازی به یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای تبدیل می‌شود که با حل آن می‌توان به یک جواب دقیق از مسأله دست یافت. ارتباط‌دهی بین سخت‌افزار و نرم‌افزار اینترفیس جهت انتقال داده‌های تجربی انجام می‌پذیرد. در نهایت نتایج تئوری و عملی مقایسه و بررسی می‌شوند. جهت جمع‌آوری داده‌های مورد نیاز از نرم‌افزار اینترفیس ربات استفاده می‌کنیم. نرم‌افزار رابط کاربری ربات متشکل از دو بخش شبیه‌سازی و واقعی است. در قسمت شبیه‌ساز مشخصات ربات مورد نظر به سیستم داده شده و با اعمال ورودی به آن نتایج نمایش داده می‌شود. در بخش واقعی نیز همان ورودی شبیه‌ساز به سیستم اعمال شده و نتایج عملی از بخش سخت‌افزار دریافت می‌شود. سپس نتایج حاصل از هر دو قسمت بر هم منطبق گردیده و نمایش داده خواهند شد.

روش حل غیرمستقیم کنترل بهینه، براساس اصل مینیمم پونتریاگین می‌باشد که اولین بار برای تعریف کنترل بهینه استفاده گردید. این روش برای حل مسائل کمترین زمان در امتداد مسیرهای مشخص به کار گرفته شد که سپس برای حرکت‌های آزاد نیز بسط داده شد. اصل مینیمم پونتریاگین به طور مستقیم برای طراحی مسیر بهینه نیز به کار گرفته شده است [13- 15]. کورایم و نیکوبین روش غیرمستقیم را جهت تعیین مسیر بهینه ربات‌های با بازو و مفصل انعطاف‌پذیر و همچنین ربات‌های متحرک با مفصل انعطاف‌پذیر پیشنهاد دادند، به گونه‌ای که با انتخاب تابع هدف مناسب، تابع همیلتونین تشکیل می‌شود و شرایط لازم برای بهینگی از اصل مینیمم پونتریاگین استخراج می‌گردد. معادلات بدست آمده یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای(TPBVP) را ایجاد می‌کند که آنها با تکنیک‌های عددی این مسأله را حل کرده و الگوریتمی جهت بدست آوردن بار ماکزیمم ارائه داده‌اند [16-18].

2- مدل بازوی انعطاف پذیر

در این بخش، دینامیک یک بازو دو عضوی انعطاف‌پذیر به طور خلاصه مورد بررسی قرار می گیرد. سیستم رباتیک در نظر گرفته شده در این کار در شکل 1 نشان داده شده است. برای اختصاص دستگاه مختصات به عضوها از اصولی که توسط دناویت و هارتنبرگ توسعه داده شده است استفاده می‌گردد. XYZ دستگاه مختصات متصل به پایه ربات است که در سینماتیک بازوهای انعطاف‌پذیر می‌توان آن را چهار چوب مرجع در نظر گرفت. به‌دلیل خاصیت انعطاف‌پذیری عضوها، علاوه بر دوران در مفاصل، یک دوران نیز در بازوها داریم، برای ارائه روابطی به‌شکل ساده می‌توان این دو دوران را از هم جدا کرد، به همین دلیل به هر بازو دو دستگاه مختصات اختصاص می‌دهیم، به‌گونه‌ای که $x_i y_i z_i$ و $\hat{x}_i \hat{y}_i \hat{z}_i$ به‌ترتیب نشان دهنده دستگاه‌های مختصاتی است که به ترتیب به ابتدا و انتهای بازوی انعطاف‌پذیر وصل شده است[19].

موقعیت و جهت پنجه ($p \in R^m$) در فضای کاری با متغیر مفصل ($q \in R^n$)، با رابطه سینماتیک مستقیم به هم وابسته می‌شوند.



شکل 1 شماتیک ربات دو عضوی انعطاف‌پذیر

$$p(t) = f(q(t)) \tag{1}$$

که $f(0)$ یک تابع مشتق‌پذیر است. با استفاده از ماتریس ژاکوبین رابطه بین سرعت پنجه و مفاصل به این صورت بدست می‌آید:

$$\dot{p}(t) = J\dot{q} = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} \tag{2}$$

فرم کلی مدل دینامیکی یک ربات در فرمولاسیون گیبس-اپل به این صورت توصیف می‌شود:

- معادلات مربوط به مفاصل

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V_e}{\partial q_j} = \tau_j \qquad j = 1,2,......,n \tag{3}$$

- معادلات مربوط به تغییر فرم عضو

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_{jf}} + \frac{\partial V_e}{\partial \delta_{jf}} = 0 \qquad \begin{array}{l} j = 1,2,......,n \\ f = 1,2,......,m_j \end{array} \tag{4}$$

که در آن S انرژی شتاب سیستم یا همان تابع گیبس، D تابع استهلاک ریلی، V_e تابع انرژی پتانسیل و τ_j گشتاور اعمالی به مفاصل می‌باشد. دلیل استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل در این مقاله کاهش حجم محاسبات در مقایسه با فرمولاسیون لاگرانژ است[19]. با ترکیب کردن دو دسته معادله بالا، معادله زیر حاصل می‌گردد.

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = U \tag{5}$$

که در آن U گشتاور مفاصل، $D(q)$ ماتریس اینرسی، $C(q,\dot{q})$نیروهای کریولیس و جانب مرکز و $G(q)$ اثرات جاذبه را توصیف می‌کنند.

3- فرمولاسیون مسئله کنترل بهینه

با تعریف بردار حالت زیر:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$
$$X_1 = \{q_1, \delta_{11}, q_2, \delta_{21}\}^T$$
$$X_2 = \{\dot{q}_1, \dot{\delta}_{11}, \dot{q}_2, \dot{\delta}_{21}\}^T \tag{6}$$

معادله 5 در فرم فضای حالت به این صورت بازنویسی می‌شود.

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2(t) \\ N(X_1(t), X_2(t)) + Z(X_1(t))U(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

که در آن N و Z برحسب توابع $X_1(t)$ و $X_2(t)$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$N(X_1, X_2) = -D^{-1}(X_1)[C(X_1, X_2)X_2 + G(X_1)]$$
$$Z(X_1) = D^{-1}(X_1) \tag{8}$$

مسئله کنترل بهینه تعیین حالت‌های $X(t)$ و کنترل $U(t)$ است به‌طوری که معیار عملکرد تعریف شده‌ای را بهینه کند، در حالی که مدل طبق معادله 7 داده شده است.

تابع هدف را به فرم کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$J = \frac{1}{2}\|X_1(t_f) - X_{1f}\|^2_{W_p} + \frac{1}{2}\|X_2(t_f) - X_{2f}\|^2_{W_v} + \int_{t_0}^{t_f} L(X,U)dt \tag{9}$$

که در آن

$$L(X,U) = \frac{1}{2}\|X_1\|^2_{W_1} + \frac{1}{2}\|X_2\|^2_{W_2} + \frac{1}{2}\|U\|^2_R \tag{10}$$

در این معادلات t_0 و t_f زمان‌های اولیه و نهایی معلوم می‌باشند و $L(.)$ یک تابع مشتق‌پذیر هموار بر حسب مقادیر گشتاورها و حالت‌ها می‌باشد. و W_p و W_v ماتریس‌های وزنی متقارن مثبت نیمه معین برای حالت‌های نهایی و R ماتریس وزن‌دهی برای ورودی‌ها، W_1 و W_2 ماتریس‌های وزنی متقارن مثبت

معین برای حالت‌ها می‌باشند. X_{1f} و X_{2f} مقادیر مطلوب موقعیت و سرعت عضوها، در زمان نهایی هستند. معیار عملکرد تعریف شده با معادلات 9 و 10 بایستی روی کل بازه حرکتی مینیمم شود. در معادله 9 عبارت اول و دوم مربوط به مینیمم کردن خطای موقعیت و سرعت هر عضو در زمان نهایی است و در معادله 10 عبارت اول و دوم به ترتیب مینیمم کردن مقادیر زاویه و سرعت زاویه‌ای را نشان می‌دهد و عبارت سوم مربوط به مینیمم کردن مقادیر کنترل می‌باشد. شرایط مرزی در ابتدا و انتهای مسیر عبارتند از:

$$X_1(0)=X_{10}, X_2(0)=X_{20}$$
$$X_1(t_f)=X_{1f}, X_2(t_f)=X_{2f} \tag{11}$$

که موقعیت و سرعت در نقطه شروع و انتها را نشان می‌دهد. از آنجا که موتور هر مفصل دارای منحنی عملکرد مشخصی است و در یک محدوده مشخصی کار می‌کند، داریم:

$$\overline{U}=\{U^- \le U \le U^+\} \tag{12}$$

بنابراین اگر $\overline{U}$ کنترل قابل قبول در بازه زمانی $t\in[t_0 \quad t_f]$ باشد، به ازای یک m_p مشخص، مساله کنترل بهینه یافتن $U^*(t)\in\overline{U}$ است به‌گونه‌ای که J مینیمم شود.

4- شرایط لازم برای بهینگی

روش انتخاب شده برای حل مساله کنترل بهینه، روش غیرمستقیم می‌باشد. در روش غیرمستقیم با تعریف بردار شبه حالت $\psi(t)$، تابع همیلتونین به این صورت تعریف می‌شود:

$$H(X,U,\psi,t)=\frac{1}{2}\left(\|X_1\|^2_{W_1}+\|X_2\|^2_{W_2}+\|U\|^2_R\right)$$
$$+\psi_1^T(t)(X_2)+\psi_2^T(t)\left(N(X_1,X_2)+Z(X_1)U\right) \tag{13}$$

اصل مینیمم پونتریاگین را به این صورت می‌توان بیان کرد که، برای مسیر بهینهٔ $X(t)$ و $U(t)$ بازه زمانی $t\in[t_0 \quad t_f]$، یک بردار شبه حالت غیر صفر، $\psi(t)$، وجود دارد، به طوری که شرایط زیر در حل بهینه، باید برآورده شوند.

$$\dot{X}=\partial H/\partial\psi$$
$$\dot{\psi}=-\partial H/\partial X$$
$$\partial H/\partial U=0 \tag{14}$$

از آنجا که برای مقادیر کنترل (گشتاور) حدود بالا و پایینی تعریف شده است، طبق اصل مینیمم پونتریاگین، قانون کنترل بهینه به صورت زیر استخراج خواهد شد.

$$U(t)=\begin{cases} U^+, & \partial H(t)/\partial U(t)>U^+ \\ -R^{-1}Z(X_1(t))P_2(t), & U^-<\partial H(t)/\partial U<U^+ \\ U^-, & \partial H(t)/\partial U(t)<U^- \end{cases} \tag{15}$$

در این رابطه محدوده‌های بالا و پایین گشتاور بر اساس مشخصه سرعت-گشتاور موتورهای الکتریکی جریان مستقیم به این صورت تعریف می‌شود:

$$U^+=K_1-K_2X_2 \ , U^-=-K_1-K_2X_2 \tag{16}$$

که $K_1=[\tau_{s1} \quad \tau_{s2} \quad \cdots \quad \tau_{sn}]^T$ و $K_2=\mathrm{diag}[\tau_{s1}/\omega_{m1} \quad \cdots \quad \tau_{sn}/\omega_{mn}]$، τ_{si} گشتاور حد اشباع موتور iام و ω_{mi} حداکثر سرعت موتور در حالت بی‌باری است.

معادلات حاصل شده، $4n$ معادله دیفرانسیل معمولی را تشکیل می‌دهند، معادله 11 نیز $4n$ شرط مرزی را بیان می‌کند که از این شرایط مرزی، $2n$ در t_0 و $2n$ در t_f تعریف می‌شود. X_f شرایط مرزی در $t=t_f$ می‌باشد و $X(t_f)$ مقادیر نهایی حالت‌ها است. همان‌طور که قبلاً ذکر شد W_p و W_v ارزش خطای موقعیت و سرعت را در زمان نهایی نشان می‌دهند، بنابراین می‌توان گفت که در پروسه حل مساله مقدار مرزی شرط زیر باید برآورده گردد.

$$\frac{1}{2}\|X_1(t_f)-X_{1f}\|^2_{W_p}+\frac{1}{2}\|X_2(t_f)-X_{2f}\|^2_{W_v}\le\varepsilon \tag{17}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌گردد، مقدار خطای شرایط مرزی انتهایی بایستی به مقدار ε همگرا شود. ε دقت حل را نشان می‌دهد و عدد کوچکی است. در اینجا برای حل مساله از دستور bvp4c در نرم افزار متلب استفاده می‌گردد، به این صورت که معادلات مربوط به حالت‌ها و شبه حالت‌ها در یک تابع نوشته می‌شوند و مقادیر کنترل نیز با کمک یک دستور شرطی در معادلات جایگزین می‌گردند. شرایط مرزی داده شده و مقادیر اولیهٔ شبه حالت‌ها که باید محاسبه شوند نیز هرکدام جداگانه در یک تابع نوشته می‌شوند. دقت حل ε نیز در قسمت مربوط به تنظیم دقت حل اعمال می‌گردد.

5- محاسبه ماکزیمم ظرفیت حمل بار

همان‌طور که از عنوان مسأله مشخص است مبنای روش بر افزایش جرم عملگر نهایی تا رسیدن به حد اشباع موتورها و یافتن مسیر بهینه می‌باشد. در این بخش با استخراج معادلات و انجام شبیه‌سازی برای یک بازو دو عضوی، چگونگی محاسبه بار ماکزیمم و مسیر بهینه متناظر در حرکت نقطه به نقطه برای یک ربات دو عضوی انعطاف‌پذیر با استفاده از روش ارائه شده، توضیح داده می‌شود و صحت روش پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این شبیه‌سازی مقدار بار ماکزیمم به ازای مقادیر مشخص ماتریس‌های جریمه بدست می‌آید و اثر آن روی مشخصات حرکتی و نیرویی بررسی می‌شود، پارامترهای ربات دو لینکی انعطاف‌پذیر که در شکل 2 نشان داده شده است، در جدول 1 آورده شده است.

با استفاده از معادلات بدست آمده در بخش قبل، موقعیت پنجه در صفحه XZ در زمان $t=0$ در نقطه $p_0=(1,0)$ و در زمان نهایی $t=1.2$ در نقطه $p_f=(0.4952,0.7245)$ است. سرعت پنجه نیز در ابتدا و انتهای مسیر صفر می‌باشد، از حل سینماتیک معکوس مقادیر موقعیت و سرعت مفاصل در ابتدا و انتهای مسیر به این صورت بدست می‌آیند:

$$q_{10}=0^\circ, q_{20}=0^\circ, q_{1f}=27^\circ, q_{2f}=57.29^\circ$$
$$\dot{q}_{10}=\dot{q}_{20}=\dot{q}_{1f}=\dot{q}_{2f}=0$$
$$\delta_{110}=\delta_{210}=\delta_{11f}=\delta_{21f}=0$$
$$\dot{\delta}_{110}=\dot{\delta}_{210}=\dot{\delta}_{11f}=\dot{\delta}_{21f}=0 \tag{18}$$

شکل 2 ربات دو لینکی انعطاف‌پذیر ساخته در آزمایشگاه تحقیقاتی رباتیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران

متغیرهای حالت X_1, X_2 و U از معادلهٔ 6 به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$X_1=\begin{bmatrix} q_1(t)\\ \delta_{11}(t)\\ q_2(t)\\ \delta_{21}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_3(t)\\ x_5(t)\\ x_7(t)\end{bmatrix},$$
$$X_2=\begin{bmatrix} \dot q_1(t)\\ \dot\delta_{11}(t)\\ \dot q_2(t)\\ \dot\delta_{21}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2(t)\\ x_4(t)\\ x_6(t)\\ x_8(t)\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix} \tau_1(t)\\ 0\\ \tau_2(t)\\ 0\end{bmatrix} \tag{19}$$

که q_1 و q_2 به ترتیب زاویه عضو اول و دوم، $\dot q_1$ و $\dot q_2$ سرعت زاویه‌ای عضوها، δ_{11} و δ_{21} اولین مختصات مودال تعمیم یافته مربوط به عضوهای اول و دوم و $\dot\delta_{11}$ و $\dot\delta_{21}$ نیز به ترتیب اولین سرعت مودال تعمیم یافته مربوط به عضوهای اول و دوم را نشان می‌دهد. $\tau_1(t)$ و $\tau_2(t)$ نیز گشتاور موتورهای عضو اول و دوم را نشان می‌دهد. با استفاده از معادلهٔ 19 هشت معادلهٔ مربوط به فرم فضای حالت معادلات دینامیکی به این صورت استخراج می‌گردند.

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_3\\ \dot x_5\\ \dot x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_4\\ x_6\\ x_8\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\dot x_2\\ \dot x_4\\ \dot x_6\\ \dot x_8\end{bmatrix}=-D^{-1}(X_1)[C(X_1,X_2)X_2+G(X_1)-U] \tag{20}$$

حال با تعریف ماتریس‌های جریمه به این صورت

$$W_1=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & w_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & w_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & w_7\end{bmatrix};$$
$$W_2=\begin{bmatrix} w_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & w_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & w_6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & w_8\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & r_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r_4\end{bmatrix} \tag{21}$$

و جایگذاری رابطه 21 در معادله 10 تابع هدف به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$L=0.5\times(r_1u_1^2+r_2u_2^2+w_1x_1^2+w_3x_3^2 +w_5x_5^2+w_7x_7^2+w_2x_2^2+w_4x_4^2+w_6x_6^2+w_8x_8^2) \tag{22}$$

از رابطه 13 نیز تابع همیلتونین به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

جدول 1 پارامترهای ربات انعطاف‌پذیر دو لینکی

پارامتر	مقدار	واحد
طول لینک‌ها	$L_1=L_2=0/5$	m
ارتفاع لینک‌ها	$h_1=4\,;h_2=5/17$	cm
ضخامت لینک‌ها	$t_1=4\,;t_2=1/5$	mm
سختی خمشی	$EI_{z1}=14/93\,;EI_{z2}=1/017$	$N.m^2$
ضریب اصلاح برش	$k=0/8333$	_ _ _
جرم واحد طول	$\mu_1=0/504\,;\mu_2=0/2442$	$kg.m^{-1}$
جرم موتور DC	$M_{m_1}=0/495$	kg
ضریب دمپینگ کلوین-ویت	$K_{v1}=K_{v2}=1100$	$kg.m^{-1}.s$
ضریب دمپینگ هوا	$\gamma=0/2$	$kg.m^{-1}.s$

$$H=L+x_9\dot x_1+x_{10}\dot x_2+x_{11}\dot x_3+x_{12}\dot x_4+x_{13}\dot x_5 +x_{14}\dot x_6+x_{15}\dot x_7+x_{16}\dot x_8 \tag{23}$$

که در آن، L و $\dot x_i$ از معادله 20 و 22 جایگذاری می‌شوند. با استفاده از معادله 14 و مشتق‌گیری از تابع همیلتونین، معادلات مربوط به شبه حالت‌ها بدست می‌آیند:

$$\dot x_9=\frac{-\partial H}{\partial x_1}\ ;\ \dot x_{10}=\frac{-\partial H}{\partial x_2}$$
$$\dot x_{11}=\frac{-\partial H}{\partial x_3}\ ;\ \dot x_{12}=\frac{-\partial H}{\partial x_4}$$
$$\dot x_{13}=\frac{-\partial H}{\partial x_5}\ ;\ \dot x_{14}=\frac{-\partial H}{\partial x_6}$$
$$\dot x_{15}=\frac{-\partial H}{\partial x_7}\ ;\ \dot x_{16}=\frac{-\partial H}{\partial x_8} \tag{24}$$

مجدداً با استفاده از رابطه 14، و با مشتق‌گیری از تابع همیلتونین نسبت به مقادیر کنترل دو رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}=0\ ;\ \frac{\partial H}{\partial u_2}=0 \tag{25}$$

که از حل آنها مقادیر کنترل در بازه قابل قبول $U^-<U<U^+$ بدست می‌آیند. بنابراین قانون کنترل بهینه از معادله 15 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_i=\begin{cases} U_i^+, & u_i>U_i^+\\ u_i, & U_i^-<u_i<U_i^+\\ U_i^-, & u_i<U_i^-\end{cases}\qquad i=1,2 \tag{26}$$

که محدویت‌های مقادیر کنترل هر موتور نیز از معادله 16 به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$U_1^+=k_{11}-k_{12}x_2\ ;\ U_1^-=-k_{11}-k_{12}x_2$$
$$U_2^+=k_{21}-k_{22}x_4\ ;\ U_2^-=-k_{21}-k_{22}x_4 \tag{27}$$

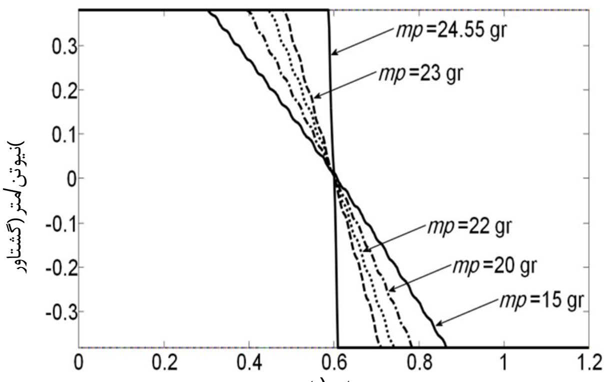
که در آن مقادیر $k_{ij}, i,j=1,2$ از مشخصات موتور به صورت $k_{11}=0.381, k_{12}=0, k_{21}=0, k_{22}=0.1$ می باشند.

6- شبیه‌سازی و مقایسه با نتایج حاصل از آزمایش

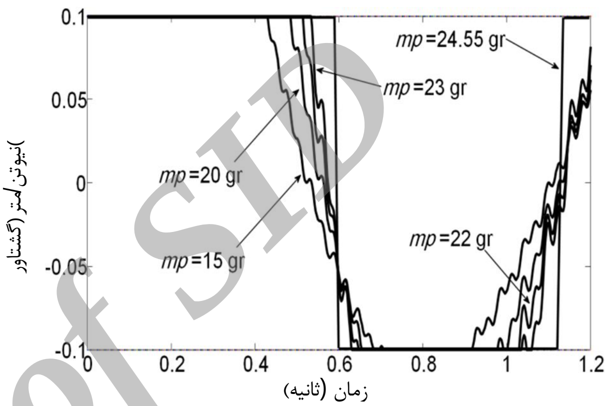
در اینجا برای بازو دو لینکی انعطاف‌پذیر ساخته شده، ماکزیمم بار قابل حمل بین دو نقطه $p_0=(1,0)$ و $p_f=(0.4952,0.7245)$ محاسبه می‌گردد. همانطور که از عنوان مسأله مشخص است مبنای روش بر افزایش جرم عملگر نهایی تا رسیدن به حد اشباع موتورها و یافتن مسیر بهینه می‌باشد. در این بخش، ماتریس‌های جریمه و دقت به صورت $W_p=W_v=\mathrm{diag}(1)$ ، $W_1=W_2=[0]$ و $R=\mathrm{diag}(1/8)$ در نظر گرفته می‌شوند. دقت حل در مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای $\varepsilon=0.001$ است. بار ماکزیمم در این حالت 24.45g بدست می‌آید. منحنی گشتاور موتور اول و دوم به ازای مقادیر مختلف جرم بار داده شده در جدول 2، در شکل‌های 3 و 4 آورده شده است. افزایش بار، گشتاور مورد نیاز را افزایش می‌دهد تا اینکه منحنی‌های گشتاور روی باندهای گشتاور پیش رفته و کاملاً روی آنها قرار می‌گیرند. به ازای $m_p=24.45$g، بیشترین مقدار ممکن گشتاور اعمال می‌گردد و افزایش بار بیش از این مقدار، نیازمند اعمال گشتاور بیش از محدودیت‌ها می‌باشد که این منجر به برآورده نشدن شرایط مرزی انتهایی در الگوریتم محاسبه بار می‌شود.

به منظور نشان دادن چگونگی عملکرد این روش برای محاسبه بار ماکزیمم، نتایج شبیه‌سازی به ازای مقادیر مختلف بار در جدول 2 آورده شده است.

اکنون به منظور بررسی صحت نتایج بدست آمده، گشتاورهایی که در حالت بار ماکزیمم بدست آمده است، به عنوان ورودی به موتورها اعمال می‌گردد. گشتاورهای اعمالی تابعیتی به شکل زیر نسبت به زمان دارند:



شکل 3 منحنی گشتاور موتور اول



شکل 4 منحنی گشتاور موتور دوم

جدول 2 مقادیر مختلف بار m_p، استفاده شده در شبیه سازی

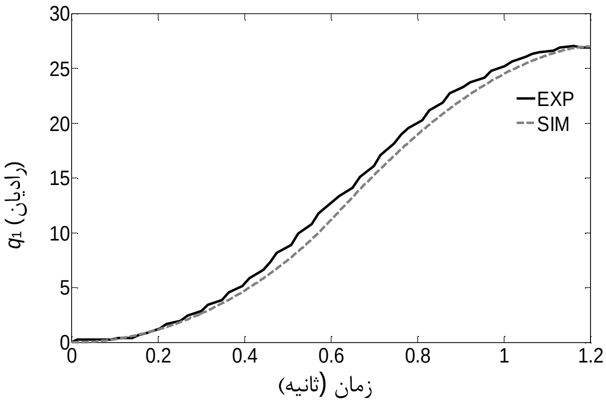
i	1	2	3	4	5
m_p(gr)	15	20	22	23	24/55

$$\begin{cases} t \ge 0 \ \& \ t < 0.5871, & \tau_1 = 0.381\text{N.m} \\ t \ge 0.5871 \ \& \ t \le 1.2, & \tau_1 = -0.381\text{N.m} \end{cases} \qquad (28)$$

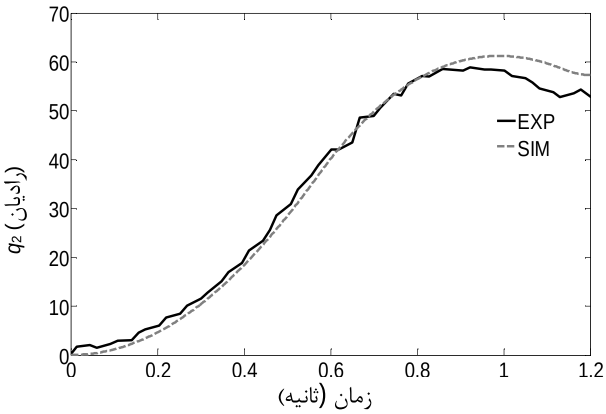
$$\begin{cases} t \ge 0 \ \& \ t < 0.5806, & \tau_2 = 0.1\text{N.m} \\ t \ge 0.5806 \ \& \ t \le 1.131, & \tau_2 = -0.1\text{N.m} \\ t \ge 1.131 \ \& \ t \le 1.2, & \tau_2 = 0.1\text{N.m} \end{cases} \qquad (29)$$

7- بستر آزمایشگاهی

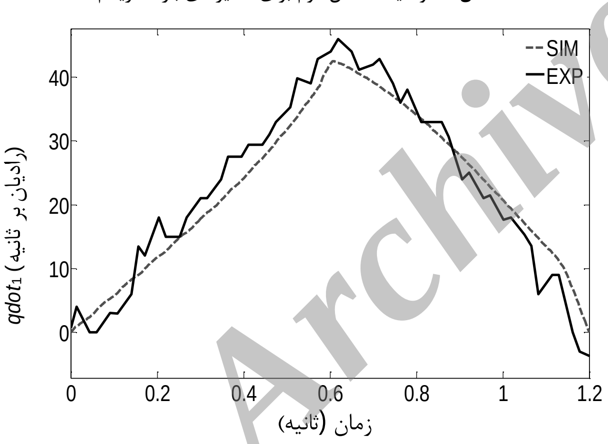
نمونه آزمایشگاهی ربات دو لینکی الاستیک ساخته شده در آزمایشگاه تحقیقاتی رباتیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران در شکل 2 مشاهده می‌گردد. نمونه آزمایشگاهی مذکور از دو لینک انعطاف‌پذیر با مفاصل ایده‌آل که در آن لینک اوّل توسط یک موتور سرو AC و موتور دوّم به‌وسیله یک موتور DC به حرکت در می‌آید، تشکیل شده است. به‌منظور اجتناب از اثرات اصطکاکی بلبرینگ‌ها، لینک‌های انعطاف‌پذیر به‌طور مستقیم به شفت موتور متّصل گردیده‌اند. موتور اوّل یک موتور 400 W است که برای اندازه‌گیری موقعیّت زاویه‌ای از یک انکودر با دقت 2500 پالس بر دور بهره می‌برد؛ در حالی‌که برای کنترل موتور دوّم یک کنترلر PID دیجیتال به کمک میکرو کنترلرهای AVR طرّاحی گردیده است. این کنترلر از جریان به‌عنوان فیدبک برای کنترل گشتاور خروجی موتور استفاده می‌کند. به‌منظور اندازه‌گیری جریان یک سنسور به نام ACS712 به‌کار گرفته شده است. همچنین، یک IC با نام L298 به‌منظور تقویّت سیگنال راه‌انداز موتور DC استفاده شده است. داده‌های مربوط به جریان توسّط یک میکروکنترلر با دقّت 10 بیت خوانده می‌شوند.



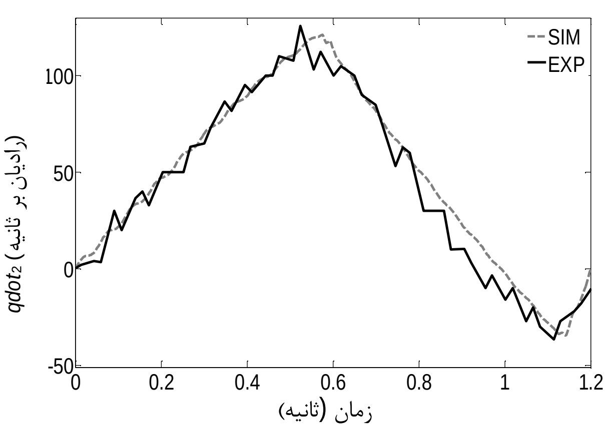
شکل 5 موقعیت مفصل اول برای مسیرهای بار ماکزیمم



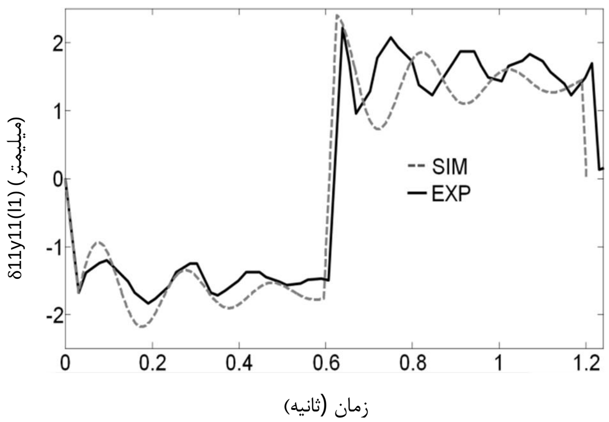
شکل 6 موقعیت مفصل دوم برای مسیرهای بار ماکزیمم



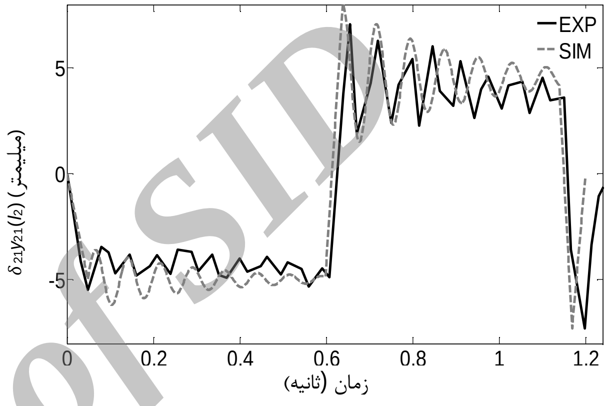
شکل 7 سرعت زاویه‌ای مفصل اول برای مسیرهای بار ماکزیمم



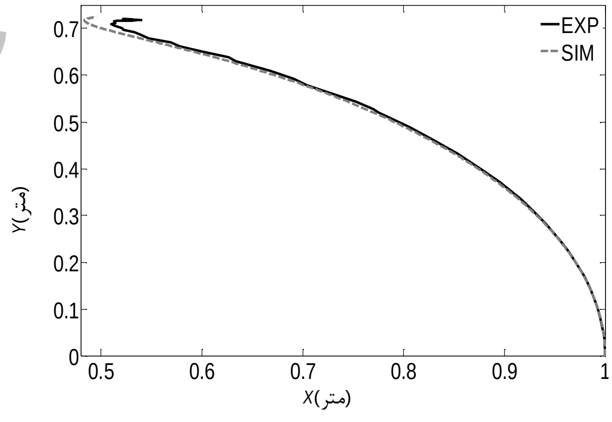
شکل 8 سرعت زاویه‌ای مفصل دوم برای مسیرهای بار ماکزیمم



شکل 9 خیز نقطه انتهایی عضو اول نسبت به زمان



شکل 10 خیز نقطه انتهایی عضو دوم نسبت به زمان



شکل 11 مسیرهای بار ماکزیمم در صفحه XY

خیز و ارتعاشات هر نقطه از لینک‌ها با استفاده از سه پل کرنش‌سنج که بر روی هر یک از لینک‌ها نصب گردیده‌اند، اندازه‌گیری می‌شود.

سیگنال آنالوگ ارسالی از پل‌های کرنش‌سنج به‌وسیله یک IC با نام AD7190 تقویت و به کامپیوتر ارسال می‌گردد. در شکلهای 5 تا 8 موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای مفاصل به ازاء گشتاور اعمالی به مفاصل نشان داده شده است.

مشاهده می‌گردد که موقعیت زاویه‌ای از تطابق نسبتاً خوبی با نتایج تئوری برخوردار است، در مورد مفصل یک نتایج حاصل از آزمایش نشان می‌دهد که شرط مرزی $\theta_{1f} = 27\text{deg}$ ارضا شده است، ولی این امر در مورد مفصل دوم مشاهده نمی‌گردد و اختلاف 5.1deg بین نتایج حاصل از آزمایش و تئوری مشاهده می‌گردد، سرعت زاویه‌ای بین نتایج حاصل از تئوری و آزمایش برای مفصل اول و دوم در نقطه انتهایی به ترتیب 4deg/sec و 7deg/sec اختلاف با مقدار مطلوب مشاهده می‌گردد. لازم به ذکر است برای مدل‌سازی انعطاف‌پذیری در لینک‌ها از شکل مودهای مربوط به تیر گیردار- جرم متمرکز برای هر یک از لینک‌ها استفاده شده است.

حال به‌منظور بررسی اثر انعطاف‌پذیری عضو روی مسیر بهینه و مقدار بار ماکزیمم، نتایج حاصل از تغییر فرم نقطه انتهایی هر دو عضو ارائه می‌گردد، خیز نقطه انتهایی هر دو عضو در شکل‌های 9 و 10 نشان داده شده است، همان‌گونه که در نتایج حاصل از خیز نقطه انتهایی مشاهده می‌گردد، نتایج حاصل از تئوری در انتهای زمان شبیه‌سازی مقدار صفر را نشان می‌دهند، ولی این مقدار برای نتایج حاصل از آزمایش اندکی اختلاف را نشان می‌دهد که که این مقدار اختلاف برای لینک یک و دو به ترتیب 0.11mm و 1.09mm می‌باشد. در پایان در شکل 11 مسیر بار ماکزیمم در صفحه XZ نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود به دلیل اختلافی که بین نتایج حاصل از آزمایش و تئوری در موقعیت زاویه‌ای عضو دوم وجود دارد، اندکی اختلاف در زمان انتهایی حرکت مشاهده می‌گردد.

در این قسمت از بستر آزمایشگاهی، با توجه به اینکه مقدار گشتاور بدست آمده از روش کنترلی مستقیماً به ربات داده شده و عکس العمل ربات با نتایج تئوری مقایسه و بررسی شده است، عملاً صحّه‌گذاری دینامیک ربات صورت پذیرفته است. زیرا به ازای هر کنترل بدست آمده‌ای رفتار ربات با تئوری مقایسه شده است.

8- نتیجه‌گیری

این مقاله یک الگوریتم بهینه برای محاسبه ماکزیمم ظرفیت حمل بار دینامیکی ربات را در حالت حلقه باز ارائه شد. از روش کنترل بهینه به گونه‌ای استفاده شد که با انتخاب تابع هدف مناسب، تابع همیلتونین تشکیل شود و شرایط لازم برای بهینگی از اصل مینیمم پونتریاگین استخراج گردد. معادلات بدست آمده یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای (TPBVP) را ایجاد می‌کند که با تکنیک‌های عددی می‌توان این مسأله را حل کرد. خصوصیات انعطاف‌پذیر عضوها بر اساس فرض تئوری تیر تیموشنکو و شکل مودهای مرتبط با آن مدل شده است. شرایط بهینگی و الگوریتم تعیین مسیر بهینه و مسیر بار ماکزیمم ارائه گردید. سپس با انجام شبیه‌سازی، چگونگی اعمال روش در بدست آوردن مسیر بهینهٔ بار ماکزیمم، مورد بررسی قرار گرفت. برای یک بازوی دو لینکی با در نظر گرفتن یک شکل مود برای هر عضو، معادلات دینامیکی و شرایط لازم بهینگی با جزئیات کامل ارائه گردید و مقدار بار ماکزیمم برابر $24.45g$ بدست آمد. درستی روش پیشنهادی توسط مقایسه کردن نتایج شبیه‌سازی و آزمایشگاهی مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه‌ها نشان می‌دهد که مدل پیشنهاد داده شده قابل قبول است و انطباق‌پذیری خوبی بین نتایج تئوری و تجربی وجود دارد.

9- منابع

[1] J. Rauh, W. Schiehlen, A unified approach modelling of flexible robot arms, *IEEE Transactions of Systems .and Automation in Design*, Vol. 98, p. 84 – 90, 1978.

[2] A. A. Goldenberg, F. Rakhsha, Feedforward control of a single-link flexible robot, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 21, No. 4, pp. 325-335, 1986. (Printed in Great Britain)

[3] Sabri Cetinkunt, Wayne J. Book, Symbolic modelingand dynamic simulationof robotic manipulators with compliant linksand joints, *Robotks& Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 5, No. 4, pp. 301-310, 1989. (Printed in Great Britain)

[4] Vicente Feliu, Emiliano Pereira, Iv´anM.D´ıaz, PedroRoncero, Feedforward control of multimode single-link flexible manipulators based on an optimal mechanical design, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 54, pp. 651–666, 2006.

[5] C-Y .E. Wang, W.K. Timoszyk, J. E. Bobrow, Payload maximization for open chained manipulator: Finding motions for a Puma 762 robot, *IEEE Transactions on Robotics and Automation,* Vol. 17, No. 2, pp. 218-224, 2001.

[6] S. Yue , S. K. Tso, W. L. Xu, Maximum dynamic payload trajectory for flexible robot manipulators with kinematic redundancy, *Mechanism and Machine theory,* Vol. 36, pp. 785-800, 2001.

[7] L.T. Wang, B. Ravani, Dynamic load carrying capacity of mechanical manipulators-Part 2, *J. of Dynamic Sys., Meas. and Control,* Vol. 110, pp. 53-61, 1988.

[8] M. H. Korayem, H. Ghariblu, Analysis of wheeled mobile flexible manipulator dynamic motions with maximum load carrying capacities, *Journal of Robotics and Autonomous Systems,* Vol. 48, No. (2-3), pp. 63-76, 2004.

[9] M. H. Korayem, H. Ghariblu, Maximum allowable load of mobile manipulator for two given end points of end-effector, *Int J Adv Manuf Technol,* Vol. 24, pp. 743-751, 2004.

[10] H. Gariblu, M. H. Korayem, Trajectory optimization of flexible mobile manipulators, *Robotica,* Vol. 24,No.3, pp. 333-335, 2006.

[11] M. H. Korayem, A. Nikoobin, V. Azimirad, Maximum Load Carring Capacity of Mobile Manipulators: Optimal Control Approach, Robotica, Vol. 27, No. 1, pp. 147-159, 2009.

[12] L. T. Wang, B. Ravani, Dynamic load carrying capacity of mechanical manipulators-Part 2, *J. of Dynamic Sys., Meas. and Control,* Vol. 110, pp. 53-61, 1988.

[13] Z. Shiller, S. Dubowsky, Robot path planning with obstacles, actuators, gripper and payload constraints, *Int. J. Robotic Research,* Vol. 8, No. 6, pp. 3–18, 1986.

[14] W. Szyszkowski, R. Fotouhi, Improving time-optimal control maneuvers of two-link robotic manipulators, *J of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 23, No. 5, pp. 888-889, 2000.

[15] Z. Shiller, Time-energy optimal control of articulated systems with geometric path constraints, IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Vol. 4, pp. 2680-2685, 1994.

[16] M. H. Korayem, H. N. Rahimi, A. Nikoobin, Optimal Motion planning of Manipulators with Elastic Links and Joints in Generalized Point-to-Point Task, *IDETC/CIE,* (ASME conference, San Diego, California, USA), Vol. 7, No. 5, pp. 1167-1174, 2009.

[17] M. H. Korayem, A. Nikoobin, Maximum Payload for Flexible Joint Manipulators in Point-to-Point Task Using Optimal Control Approach, *Int. J. of Advanced Manufacturing Technology,* Vol. 38, No. 9-10, p. 1045-4060, 2008.

[18] M. H. Korayem, A. Nikoobin, V. Azimirad, Trajectory optimization of flexible link manipulators in point-to-point motion, *Robotica,* Vol. 27, No. 6, pp. 825-840, 2009.

[19] M. H. Korayem, A. M. Shafei, Motion equations proper for forward dynamic of robotic manipulators with flexible links by using recursive Gibbs-Appell formulation, *Scientia Iranica Transaction B-mechanical engineering,* Vol. 16, No. 6, pp. 479-495, 2009.