



## بررسی عددی مشخصه‌های آشفتگی جریان در کسکید ثابت و نوسانی فن گذر صوتی

صالح فلاح<sup>1</sup>، بهزاد قدیری دهکردی<sup>2\*</sup>، قاسم حیدری نژاد<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\*تهران، صندوق پستی 111-14115، ghadirib@modares.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 24 تیر 1393

پذیرش: 20 مهر 1393

ارائه در سایت: 17 آبان 1393

کلید واژگان:

آشفتگی جریان توربوماشین‌ها

کسکید نوسانی

جریان گذر صوتی

فن گذر صوتی

## چکیده

بررسی پدیده‌های مرتبط با برهمکنش سازه-سیال در توربوماشین‌ها با جریان گذر صوتی به لحاظ وجود رفتارهای ناپایدار جریان اهمیت دوچندانی پیدا می‌کند. محدودیت‌های جدی روش‌های تجربی رویکرد محققان این حوزه به روش‌های عددی را توسعه بخشیده است. اما هزینه محاسباتی زیاد روش‌های عددی در شبیه‌سازی آیرودینامیک و آیرولاستیک مدل کامل توربوماشین‌ها، استفاده از مدل‌های ساده‌تر دوبعدی به منظور بررسی کیفی پدیده‌ها را اجتناب‌ناپذیر کرده است. در این مقاله با استفاده از حلگر توانمند سی‌اف‌ایکس جریان گذر صوتی عبوری از کسکید فن ثابت و فن با پره میانی با نوسانات هارمونیک اجباری شبیه‌سازی شده و الگوی تغییرات مشخصات آشفتگی جریان مورد مطالعه قرار گرفته است. به منظور جلوگیری از واگرایی حل و دستیابی به نتایج دقیق‌تر الگوریتم حل مرحله‌ای ابداع شده است. از طرف دیگر، برای حرکت شبکه دینامیکی اطراف پره نوسانی از روش فزنی با فنرهای پیچشی خطی استفاده شده است. کیفیت شبکه با بررسی بیشینه ماخ و تغییرات  $\gamma$  مورد ارزیابی و انتخاب قرار گرفته است. مقایسه نتایج بدست آمده با داده‌های تجربی موجود بیانگر اختلاف معناداری در نقاط قرارگیری گردابه‌های جدا شده و دوباره چسبیده هستند. این تفاوت، لزوم استفاده از مدل آشفتگی دقیق‌تر را در شرایط وجود جدایش وسیع اثبات می‌کند. در این مقاله اثر هندسه پره، جدایش‌های جریان و نوسانات پره میانی بر الگوی جریان و مشخصات آشفتگی جریان گذر صوتی کسکید توربوماشین بررسی شده‌اند. نتایج بدست آمده، تأثیر هر کدام از عوامل ذکر شده را بر انرژی جنبشی و فرکانس اتلاف آشفتگی تبیین می‌کند.

## Numerical investigation of turbulence characteristics of flow in fixed and oscillating transonic fan cascade

Saleh Fallah<sup>1</sup>, Behzad Ghadiri Dehkordi<sup>1\*</sup>, Ghasem Heidarinejad<sup>1</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, TarbiatModares University, Tehran, Iran.

\*P.O.B. 14115-111, Tehran, Iran, ghadirib@modares.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 15 July 2014  
Accepted 12 October 2014  
Available Online 08 November 2014

## Keywords:

Turbomachines Turbulence Flow  
Oscillating Cascade  
Transonic Flow  
Transonic Fan

## ABSTRACT

Investigations of the phenomena associated with the Fluid-Structure interaction in transonic turbomachines due to the presence of unstable flow behaviors have doubled in significance. Severe restrictions of the experimental methods have developed researchers approach in this field to Numerical methods. Nevertheless, using simple two-dimensional model to investigate the phenomenon of quality is inevitable because of high computational cost of numerical methods in aerodynamic and aeroelastic simulation of full model of turbomachines. In this paper transonic flow in fixed fan cascade and fan cascade with central blade vibration in Forced harmonic pattern is simulated and variations of turbulence characteristic patterns are studied. In order to prevent divergence of the solution and achieve more accurate results, the step by step algorithm is developed. On the other hand, spring methodology with linear torsional springs is used for movement of dynamic grid around the oscillating blade. Mesh quality is assessed by examining maximum Mach number and  $y^+$  variation. Comparing the results with the available experimental data indicated a significant difference in the position of the vortices that are detached and re-attached. This difference proves the use of turbulence model is more accurate in terms of the wide separation. In this paper, effect of blade geometry, flow separation and central blade oscillation on flow pattern and turbulence characteristics of transonic flow have been investigated. Obtained results explain the effect of the mentioned parameters on the turbulence kinetic energy and dissipation frequency.

## 1- مقدمه

پدیده‌های فیزیکی که در توربوماشین‌ها اتفاق می‌افتد، غالباً بصورت برهمکنش دو یا چند فیزیک مختلف می‌باشند. به‌عنوان مثال در ارتعاشات یک پره، نیروهای ناشی از جریان سیال، تنش‌ها و کرنش‌های ناشی از حرارت و نوسانات پره با یکدیگر کوپل می‌باشند. لذا بررسی دقیق پدیده‌هایی که در

اهمیت بررسی پدیده‌های فیزیکی در فرآیند عملکرد توربوماشین‌ها با توجه به کاربرد گسترده آن‌ها در صنایع هوایی، نیروگاهی و نفت و گاز موضوعی غیر قابل انکار می‌باشد.

Please cite this article using:

S. Fallah, B. Ghadiri Dehkordi, Gh. Heidarinejad, Numerical investigation of turbulence characteristics of flow in fixed and oscillating transonic fan cascade, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 16, pp. 231-242, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مرزی بررسی شده است [3].

دنتون نیز اثر مدل آشفته‌گی بر گذار از رژیم آرام به آشفته، شرایط مرزی آشفته‌گی و اثر شدت آشفته‌گی جریان آزاد در توربوماشین‌ها را بصورت عددی مورد بررسی قرار داده است [4].

از آنجائیکه استفاده از روش شبیه‌سازی مستقیم عددی بسیار پرهزینه است و علاوه بر آن ماهیت جریان در توربوماشین‌ها بخودی خود پیچیده می‌باشد، اثر آشفته‌گی جریان در توربوماشین‌ها را غالباً با کاربرد مدل‌های متوسط زمانی اعمال می‌کنند. انتخاب بهترین مدل متوسط زمانی که همزمان، هر دو مزیت کاهش زمان محاسبات و برآورد صحیح میدان جریان را داشته باشد، همواره از چالش‌های حوزه آیرودینامیک توربوماشین‌ها بوده و تحقیقات بسیاری را معطوف به خود ساخته است.

در یکی از این پژوهش‌ها پکنیک و همکاران [5] سه مدل آشفته‌گی و چندین شدت آشفته‌گی جریان آزاد مختلف را برای شبیه‌سازی جریان در استاتور یک توربین گذر صوتی بکار برده‌اند. نتایج حاصله حاکی از آن است که مدل‌های مختلف آشفته‌گی و یا حتی ضرایب مختلف در یک مدل خاص، می‌تواند نتایج بسیار متفاوتی را نتیجه دهد. نتیجه مهم دیگر این پژوهش مبین این مطلب است که در لایه مرزی کاملاً آشفته چسبیده به پره (جریان جدا نشده)، تمامی مدل‌های آشفته‌گی چنانچه به‌خوبی کالیبره شوند، نتایج قابل قبولی را ارائه می‌دهند و تفاوت نتایج حاصله از مدل‌های آشفته‌گی در جایی رخ می‌دهد که جریان جدا شده و یا کاملاً جدا شده وجود داشته باشد. وود [6] با کاربرد مدل آشفته‌گی جانسون-کینگ که یک مدل صفر معادله‌ای می‌باشد، جریان گذر صوتی جدانشده در پره‌های یک توربین را شبیه‌سازی و با بررسی مشخصه‌های انرژی‌گالی مثل ضرایب اتلاف و ضریب فشار نشان داده است که نتایج تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارند. یاماموتو و دایگوجی [7] تحقیق مشابه دیگری را بر روی پره سه بعدی و با استفاده از مدل آشفته‌گی کا-اپسین استاندارد به انجام رسانیدند.

در هر شبیه‌سازی عددی توربوماشین‌ها، بسته به پیچیدگی جریان، مفاهیم فیزیکی مطرح و مشخصه‌های مورد بررسی از پارامترهای کم اهمیت‌تر صرف نظر شده و یا فرضیات ساده‌کننده‌ای بر روی آن‌ها اعمال می‌شود. یکی از ساده‌سازی‌های رایج، استفاده از مدل کسکید دوبعدی بجای ردیف پره رتوردر شبیه‌سازی جریان می‌باشد. یک کسکید دوبعدی، بوسیله باز کردن برشی از ردیف پره در شعاع ثابت حاصل می‌شود.

این مدل، به دلیل کاهش حجم محاسبات و سادگی فرآیند شبیه‌سازی در مطالعاتی که به منظور بررسی کیفیت مشخصات جریان و یا مقایسه رفتار جریان در توربوماشین‌های مختلف انجام می‌شود کاربرد وسیع دارد.

در شبیه‌سازی جریان گذر صوتی در کسکید رتوریک توربین منتخب که توسط روزبهانی و فلاح [8] انجام شد، قابلیت مدل‌های آشفته‌گی متوسط زمانی<sup>2</sup> اسپالارت-آلماراس<sup>3</sup>، کا-اپسین استاندارد، کا-اپسین اصلاح شده<sup>4</sup>، کا-اپسین آر آن جی و کا-امگا اس-اس-تی به همراه تابع دیواره مورد مقایسه قرار گرفتند. نتایج حاصله نشان دادند که مدل‌های اسپالارت-آلماراس و کا-اپسین اصلاح شده در کشف ناحیه شوک و توزیع عدد ماخ بهتر عمل می‌کنند، در حالیکه مدل کا-امگا اس اس تی لایه مرزی وسیع‌تری را روی سطح مکش و در نزدیکی لبه فرار نسبت به خانواده کا-اپسین پیش‌بینی می‌کنند و پروفیل سرعت حاصله از آن‌ها شیب تندتر و البته نزدیک‌تر به

یک توربوماشین اتفاق می‌افتد مستلزم واکاوی دقیق اثرات متقابل میدان‌های فیزیکی مذکور می‌باشد. اما از آنجائیکه شبیه‌سازی عددی این میدان‌ها بصورت کوپل و سه‌بعدی از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه است و از طرف دیگر صحت هر شبیه‌سازی کوپل منوط به صحت شبیه‌سازی‌های غیر کوپل متناظر می‌باشد، در مرحله نخست بایستی هر میدان فیزیکی جداگانه شبیه‌سازی و نتایج آن صحت سنجی گردد.

بررسی پدیده‌های آیرودینامیکی توربوماشین‌ها به روش تجربی نیز امکان‌پذیر است اما به دلیل ماهیت دوار بودن توربوماشین‌ها و نیاز به تجهیزات خاص اندازه‌گیری، این روش بسیار سخت و پرهزینه است. از این روست که رویکرد اکثر تحقیقات در زمینه آیرودینامیک و مخصوصاً آیروالاستیسیته توربوماشین‌ها، رویکرد عددی می‌باشد و از روش‌های تجربی در تست‌های ساده و تنها برای صحنه گذاری نتایج عددی استفاده می‌شود.

کیوک و همکاران [1] اثرات محیطی تونل باد بر نتایج تست توربوماشین گذر صوتی را مورد بررسی قرار دادند، پژوهش فوق با استفاده از ردیف پره‌های (کسکید<sup>1</sup>) رتور یک توربین در چهار نوع تونل باد که از نظر نوع تغذیه فشار باد، هندسه مقطع و سایر تجهیزات با یکدیگر متفاوت بودند، به انجام رسیده است. نتایج حاصل از این بررسی تجربی مبین اختلاف بین نتایج آزمایش در چهار تونل باد مختلف می‌باشد بطوریکه در توزیع عدد ماخ بر سطح پره در حوالی سرعت صوت، حدود 10 درصد و در برآورد ضریب اتلاف حدود 15 درصد اختلاف مشاهده می‌شود. دلایل این تفاوت‌ها عمدتاً ناشی از هندسه تونل بادی است که مقطع در آن تست می‌شود.

اهمیت کاربرد سیستم‌های توربوماشین با وزن کم و دستیابی به بالاترین راندمان آیزنتروپیک ممکن و کمینه کردن اتلافات، منجر به پیدایش توربوماشین‌هایی با ایرفویل‌های دارای نسبت منظری بزرگ و وزن کم (با استفاده از الیازهای خاص) گردیده است که در سرعت‌های جریان گذر صوتی عمل می‌کنند [1].

با توجه به پیچیدگی جریان گذر صوتی سیال عبوری از پره‌های توربوماشین که ناشی از کوپل شدگی ذات غیرخطی معادلات حاکم بر این رژیم جریان با هندسه پیچیده پره‌های توربوماشین می‌باشد، لازم است جریان در هر توربوماشین خاص بصورت جداگانه، شبیه‌سازی شده و مشخصه‌های آن بصورت دقیق بررسی شوند.

یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های تأثیرگذار بر الگوی جریان گذر صوتی توربوماشین‌ها، آشفته‌گی می‌باشد. اهمیت این مشخصه از برهمکنش بین شوک و لایه مرزی تشکیل شده بر روی پره در این رژیم جریان نشأت می‌گیرد.

رفتار جریان گذر صوتی از دو مشخصه عدد ماخ به‌عنوان عامل تأثیرگذار در رفتار شوک و عدد رینولدز که مشخص کننده رفتار لایه مرزی است تأثیر می‌پذیرد [2]. این موضوع، اهمیت شبکه‌بندی لایه مرزی در فرآیند شبیه‌سازی را مضاعف می‌نماید.

در مطالعه تجربی که توسط هیلگنفلد و فوتنر بر روی ساختار آشفته‌گی در یک کسکید کمپرسور گذر صوتی انجام گرفته است، برهمکنش لایه مرزی جریان آرام با شوک و گذار به لایه مرزی آشفته مورد بررسی واقع شده است. در این تحقیق بیان شده است که گرادبان فشار معکوس قوی که توسط شوک ایجاد می‌شود، ساختار آشفته‌گی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. علاوه بر این، در این پژوهش اثر آشفته‌گی جریان آزاد بر برهمکنش بین شوک و لایه

2- RANS  
3- Spalart-Allmaras  
4- Realizable

1- Cascade

مقادیر تجربی را دارد.

برادشو [9]، مدل‌سازی آشفته‌گی را با تمرکز بر کاربرد آن‌ها در توربوماشین‌ها و رفتار فیزیکی مدل‌های آشفته‌گی در این حوزه مورد بررسی قرار داده است. نتایج حاصل از این تحقیق بیان می‌دارد که در جریان‌هایی که لایه برشی آشفته غالب نمی‌باشد، مدل‌های ساده جبری مثل بالدوین-لومکس<sup>1</sup> برای شبیه‌سازی رفتار جریان کافی است اما چنانچه بررسی جزئیات لایه برشی آشفته و اثر آن بر حوزه جریان مهم باشد، از مدل‌های دو معادله‌ای خانواده کا-اپسیلین، مدل پیشرفته تر کا-امگا و کا-امگا اس اس تی استفاده می‌شود.

همزمان با افزایش قدرت محاسباتی و بهینه شدن الگوریتم حلگرها و نیاز محققین به حل دقیق‌تر میدان جریان گذر صوتی در نواحی نزدیک به سطح پره توربوماشین بمنظور کاربردی‌تر کردن نتایج تحقیقات، استفاده از مدل‌های دقیق‌تر نظیر کا-امگا اس اس تی افزایش یافته است.

سجادی و همکاران [10] با استناد به اینکه مدل کا-امگا اس اس تی برای مسائل توربوماشین‌ها از بیشترین دقت برخوردار است، از این مدل برای بررسی تأثیر پیچش پره رتور بر عملکرد یک کمپرسور محوری گذر صوتی استفاده نموده‌اند.

علی‌گودرز و همکاران [11] نیز از مدل کا-امگا اس اس تی بمنظور شبیه‌سازی جریان آشفته در یک توربین جریان محوری استفاده نموده‌اند. آن‌ها دلیل این انتخاب را دقت بالاتر این مدل نسبت به سایر مدل‌های دو معادله‌ای برای بررسی نواحی جریان با گرادیان‌های شدید فشار ذکر کرده‌اند. رویکرد تحقیقات پیشین در خصوص اعمال تأثیر آشفته‌گی در شبیه‌سازی جریان اطراف کسکید پره توربوماشین‌ها مبتنی بر انتخاب مدل بهینه و سازگار با فیزیک مسئله بوده است، اما طبیعت جریان آشفته و تحلیل مشخصه‌های آن در جریان گذر صوتی اطراف پره‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفته است. این کمبود در خصوص آیرودینامیک توربوماشین‌ها، با شدت بیشتری احساس می‌شود.

برهمکنش بین سازه و سیال در توربوماشین‌ها را در دو دسته کلی برهمکنش خودتحریک و برهمکنش اجباری می‌توان دسته‌بندی نمود. برهمکنش خودتحریک ناشی از تبادل انرژی بین یک پره و سیال عبوری از آن می‌باشد، اما برهمکنش اجباری ناشی از ویک، آشفته‌گی و بطور کلی اثرات ناپایای پره‌های بالادست بر پره پایین دست می‌باشد. ارتعاشات ناشی از نابالانسی خود پره پایین دست نیز در دسته تحرک اجباری قرار می‌گیرد. عموماً این اثرات ناپایای آیرودینامیکی بصورت یک جابجایی هارمونیک بر روی پره پایین دست تقریب زده می‌شوند [12]. بنابراین بررسی برهمکنش بین پره و جریان گذرنده از آن به بررسی اثر ارتعاشات هارمونیک پره بر میدان سیال ساده می‌شود.

بو فوم و همکاران [13] با بررسی اثر ارتعاشات هارمونیک پیچشی یک پره در کسکید فن گذر صوتی، بصورت تجربی، توزیع فشار نوسانی حول پره‌های مجاور را استخراج نمودند. آن‌ها با استفاده از این اطلاعات، مقدار کار آیرودینامیکی در هر سیکل حرکتی پره را که نشان‌دهنده حدود ناپایداری است ارائه نمودند. کار مثبت نشان‌دهنده انتقال انرژی از سیال به پره و در نتیجه افزایش ناپایداری می‌باشد. آن‌ها با استفاده از این مفهوم، افزایش سرعت جریان و نواحی جدا شده را از عوامل افزایش تمایل پره به ناپایداری دانستند. در تحقیقی مشابه، لپیکوفسکی و همکاران [14] تأثیر زاویه برخورد<sup>2</sup>، عدد

ماخ و فرکانس نوسان یک پره بر توزیع فشار پره‌های کسکید گذر صوتی یک فن نمونه را بصورت آزمایشگاهی مطالعه نمودند. آن‌ها در پژوهشی دیگر اثرات فلاتر یک تک پره را بر روی توزیع فشار ناپایای پره‌های کسکید مورد مطالعه قرار دادند [15].

زو و ولف [16] با بکارگیری دو مدل آشفته‌گی اسپالارت-آلماراس و کا-اپسیلین استاندارد، جریان گذر صوتی را در پره‌های یک فن با نواحی جدا شده جریان شبیه‌سازی نمودند. نتایج حاصله مبین این مطلب بوده است که در ناحیه جدایش، مدل اسپالارت-آلماراس نتایج بهتری از مدل کا-اپسیلین استاندارد ارائه می‌نماید. آنها در این تحقیق، اثر نوسان پره میانی کسکید را بر توزیع ضریب فشار پره‌های مجاور آن مورد بررسی قرار دادند.

همانطور که در سطور بالا ذکر گردید، تمرکز تحقیقات انجام شده پیشین در هر دو شاخه آیرودینامیک و آیرودینامیک آیرودینامیک در رژیم گذر صوتی معطوف به بررسی پدیده‌های فیزیکی با استفاده از یک مدل آشفته‌گی کارا بوده است بطوریکه این مدل بتواند نتایج حاصله را بر نتایج کارهای تجربی سایرین منطبق نماید. در نتیجه این تحقیقات مدل کا-امگا اس اس تی به‌عنوان بهترین مدل دو معادله‌ای در شبیه‌سازی‌های آیرودینامیک معرفی شده است. اما توجه کمی به بررسی‌های عددی مشخصه‌های آشفته‌گی شده است و چنین مطالعاتی اکثراً بصورت آزمایشگاهی صورت پذیرفته است. پژوهش در زمینه اثرات آشفته‌گی در جریان گذر صوتی کسکید ثابت و مرتعش توربوماشین‌ها، زمینه را برای بسط و توسعه مدل‌های آشفته‌گی و کاربرد آن‌ها در روش‌های پیشرفته‌تر مثل روش‌های ترکیبی (شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ<sup>3</sup> مدل‌های متوسط زمانی) فراهم می‌سازد.

در این تحقیق، پس از صحت‌سنجی نتایج در دو حالت کسکید ثابت و مرتعش، مشخصه‌های آشفته‌گی جریان گذر صوتی اطراف پره‌های کسکید فن در حالت ثابت و مرتعش مورد بررسی قرار گرفته و علل فیزیکی پدیده‌های مربوطه تبیین خواهند شد.

## 2- تشریح مدل‌ها و شرایط مرزی

بر خلاف انتظار، جریان در کسکید توربوماشین‌ها همیشه پایا و چسبیده به سطح پره‌ها نیست. جدایش جزئی و گسترده و حتی ریزش گردابه از سطوح پره‌ها از جمله پدیده‌هایی است که می‌تواند الگوی جریان و اثرات آشفته‌گی را بسیار پیچیده‌تر نماید. قابلیت مدل‌های آشفته‌گی در جریان‌های چسبیده به سطح شبیه‌ی‌کدیگر است و تفاوت عملکرد روش‌های مختلف آشفته‌گی در جریان‌های جدا شده، خود را نشان می‌دهد. بنابراین، در این مقاله مدل کسکید فن [13] گذر صوتی برای شبیه‌سازی جریان و بررسی اثرات آشفته‌گی در هر دو حالت ثابت و نوسانی انتخاب گردیده است. جریان عبوری از این کسکید دارای حباب‌های جدا شده بزرگ می‌باشد که ارزیابی دقیق‌تر مشخصات آشفته‌گی را تسهیل می‌کند.

برای ایجاد این کسکید، ابتدا یک پره در محیط نرم‌افزار شبکه‌بندی تولید شده، سپس به اندازه زاویه نصب پره (زاویه تمایل<sup>4</sup>) دوران داده می‌شود. پس از بازتولید پره به تعداد مورد نظر در دو طرف پره مرجع و در راستای عمود بر محور اولیه (قبل از چرخش) پره مرجع، کل پره‌های کسکید به اندازه زاویه ورود جریان به کسکید<sup>5</sup> دوران داده می‌شوند. سپس دیواره‌های ورودی و خروجی کسکید به‌نحوی تشکیل می‌شوند که جریان عمود بر سطح دیواره میدان وارد و خارج شوند. زوایای خمیدگی دیواره‌های جانبی کسکید طوری

3- Large Eddy Simulation (LES)  
4- Stagger Angle  
5- Angle of Attack

1- Baldwin-Lomax  
2- Incidence Angle

جدول ۱ مقادیر شرایط مرزی در کسکید فن

کسکید فن	$\beta$ (درجه)	$\beta$ (درجه)	صلبیت $(C/S)^3$
فن	۶۰	۱۰	۱/۵۳

- سطوح هاب<sup>۴</sup> و شروود<sup>۵</sup> (جلو و پشت کسکید): برای این سطوح از شرط تقارن<sup>۶</sup> استفاده می‌شود تا حلگر سه‌بعدی سی‌اف‌ایکس میدان جریان را بصورت دوبعدی فرض کرده و حل نماید.
  - سطوح پره‌ها: در کسکید ثابت شرط عدم لغزش و در کسکید نوسانی، ارتعاش هارمونیک بصورت جابجایی پیچشی بر پره مرتعش مورد نظر اعمال می‌شود. مطابق با مقادیر ذکر شده در مرجع [۱۳] دامنه نوسان ۰/۶ درجه و فرکانس آن ۵۰۰ هرتز می‌باشد. بمنظور کاهش زمان محاسبات تنها پره میانی کسکید فن نوسان داده می‌شود.
- مقادیر کمی شرایط مرزی بر مبنای مرجع مربوطه در جدول ۲ خلاصه شده اند.

### ۳- شبکه‌بندی

در خصوص نحوه شبکه‌بندی میدان سیال دو بحث مطرح می‌باشد:

- ۱- وضوح شبکه در نقاط نزدیک به سطح پره و در راستای عمود بر سطح پره که نشأت گرفته از مقدار تنش برشی بی‌بعد در زیرلایه لزج یا همان  $y^+$  می‌باشد؛ بسته به هندسه، سرعت، رژیم جریان و مدل آشفتگی مورد استفاده، مقدار  $y^+$  لازم جهت تخمین صحیح رفتار جریان در نزدیکی پره که در برگزیده مقیاس‌های کوچک و اتلافی جریان می‌باشد، متفاوت است. مقدار  $y^+$  پیشنهادی برای مدل آشفتگی مورد استفاده در این مقاله بین ۱ تا ۱۰ می‌باشد [۱۸].

- ۲- چگالی شبکه اطراف هر پره که تعیین‌کننده وضوح شبکه در راستای مماس بر پره و چگالی شبکه سایر نواحی میدان حل می‌باشد. این دو مشخصه از طریق پارامترهای کیفیت شبکه مانند تعامد<sup>۷</sup>، فاکتور انبساط<sup>۸</sup> و نسبت منظری<sup>۹</sup> مشبر یکدیگر تأثیر گذارند به‌طوری‌که مثلاً با کوچک شدن شبکه در لایه مرزی و در نتیجه کاهش  $y^+$  بایستی چگالی شبکه روی پره افزایش یابد تا کیفیت مناسب شبکه حفظ شود. این موضوع منجر به افزایش تصاعدی نقاط شبکه و در نتیجه افزایش هزینه محاسبات می‌شود. بنابراین شبکه‌بندی بهینه غیرقابل اجتناب می‌باشد.

برای اثبات فرآیند استقلال نتایج از شبکه، بررسی هر دو مشخصه فوق لازم می‌باشد. در جدول ۳ تغییرات عدد ماخ بیشینه در سه شبکه‌بندی مختلف با تعداد نقاط اطراف پره ۳۰۰، ۳۵۰ و ۴۰۰ مقایسه شده‌اند. در نتیجه

جدول ۲ مقادیر شرایط مرزی در میدان جریان کسکید فن

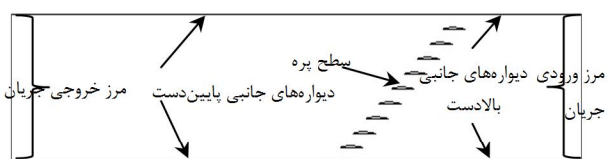
کسکید فن	سرعت جریان ورودی (M)	دمای کل ورودی (K)	دمای سکون (K)	شدت آشفتگی ورودی (%)
فن [۱۳]	۰/۸	۳۰۰	۳۰۰	۵

- 3- Solidity
- 4- Hub
- 5- Shroud
- 6- Symmetry
- 7- Orthogonality
- 8- Expansion Factor
- 9- Aspect Ratio

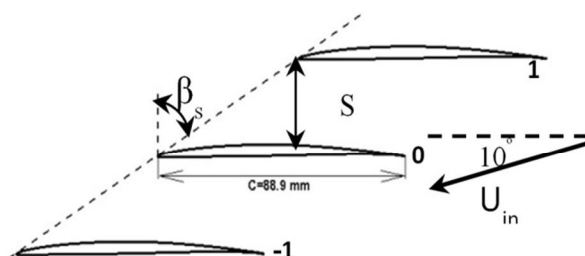
انتخاب می‌شوند که سیال بصورت هموار و مماس بر آنها حرکت نماید. از آنجائیکه در کسکید فن اعمال زاویه حمله بر روی پره‌ها، به‌دلیل ایجاد زوایا با گرادیان شدید، موجب افزایش قابل توجه تعداد نقاط شبکه و کاهش کیفیت آن می‌شود، زاویه ورودی جریان به کسکید در جریان ورودی اعمال می‌شود. نکته قابل توجه، تفاوت زاویه حمله، زاویه برخورد و زاویه ورود جریان به کسکید می‌باشد که در مرجع [۱۷] کاملاً درباره آن‌ها توضیح داده شده است. در این تحقیق، مطابق با مرجع [۱۳] زاویه ورودی جریان به کسکید، همان زاویه برخورد فرض شده است. در شکل ۱ میدان جریان بکاررفته برای کسکید فن و در شکل مدل کسکید فن مدنظر به‌همراه زوایای نصب و ورودی جریان نشان داده شده‌اند. مقادیر مشخصه‌های هندسی این کسکید در جدول ۱ ذکر گردیده‌اند. مطابق با توصیه مرجع [۱۶] فاصله انتهایی پره‌ها تا خروجی میدان جریان ۴ تا ۶ برابر طول وتر<sup>۱</sup> پره فرض می‌شود تا تأثیر شرایط مرزی خروجی بر الگوی جریان قابل صرفنظر کردن باشد.

شرایط مرزی را در قالب موارد زیر می‌توان خلاصه نمود:

- مرز ورودی جریان: سرعت یکنواخت و دمای کل یکنواخت، شدت آشفتگی ورودی
- مرز خروجی جریان: فشار استاتیک نسبی
- دیواره‌های جانبی بالادست: در صورتیکه زاویه جریان روی پره‌ها اعمال شود، دیواره بدون لغزش و در غیر اینصورت مانند مرز ورودی جریان فرض می‌شوند.
- دیواره‌های جانبی پایین دست: شرط مرزی دهانه<sup>۲</sup> با دمای سکون فرض می‌شود. از آنجائیکه به‌دلیل وجود زاویه استگر و زاویه ورودی جریان، سطوح پایینی پره اول و بالایی پره آخر در یک راستا قرار نمی‌گیرند، کاربرد شرط پرپودیک برای سطوح جانبی میدان جریان میسر نمی‌باشد. از طرف دیگر، با توجه به هندسه و فرضیات انجام شده، شرط دهانه، بجز برای پره‌های مجاور دیواره نتایج قابل قبولی بدست می‌دهد.

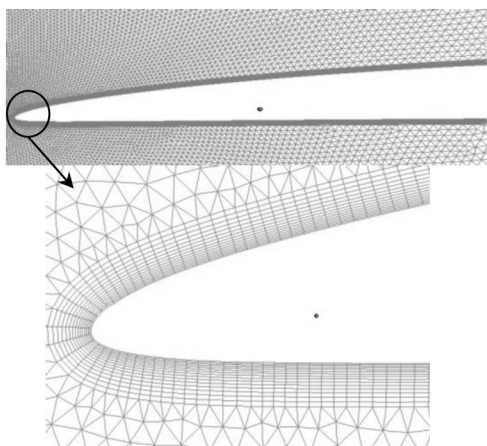


شکل ۱ میدان محاسباتی برای کسکید فن



شکل ۲ مدل کسکید فن گذر صوتی

- 1- Chord
- 2- Opening

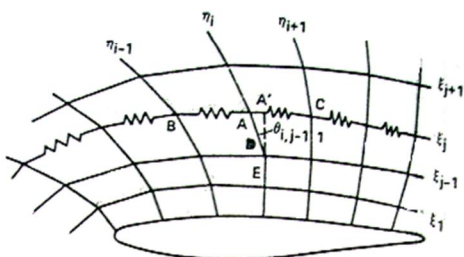


شکل ۴ شبکه ایجاد شده اطراف یک پره و نمای بزرگ شده آن

محاسبات را به شدت افزایش خواهد داد. بنابراین لازم است تا جایی که ارتعاشات پره منجر به خرابی کامل سلول‌های اطراف پره نشده و کیفیت شبکه را حفظ می‌نماید، از روش شبکه دینامیکی استفاده شود. شبکه‌های دینامیکی در مسائلی که هندسه تغییر و یا جسم حرکت می‌کند مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این نوع شبکه‌بندی، شبکه در هر لحظه با حرکت پره تغییر شکل داده و یا حرکت می‌کند. شبکه‌های دینامیکی علاوه بر کارایی و کارآمدی در دقت روش‌های عددی، حافظه‌ی کامپیوتر و زمان حل برنامه رانسبت به تولید مجدد شبکه نیز کاهش می‌دهند.

یکی از روش‌های تغییر شکل شبکه، روش فنری می‌باشد. این روش، اولین بار توسط باتینا [۲۱] پیشنهاد گردید. در این روش، لبه‌های سلول شبکه، به عنوان سیستمی از فنرهای خطی مدل می‌شوند که سفتی فنرها متناسب با معکوس فاصله بین گره‌های مجاور می‌باشد. ایده استفاده از فنرهای کششی و فشاری جهت جلوگیری از برخورد گره‌ها به هم و یا عبور گره‌ها از هم در تغییر شکل‌های بزرگ، خوب عمل می‌کند، اما نمی‌تواند از مورب شدن سلول‌ها نسبت به هم که ممکن است موجب ایجاد سلول‌هایی با حجم منفی شود، جلوگیری کند. برای رفع این مشکل فنرها و همکاران [۲۲] و ودگاند و فنرها [۲۳] با اضافه کردن فنرهای پیچشی به مدل موجود، این مدل را بسط داده و نتایج حاصل از این روش را بهبود دادند.

با توجه به سهولت پیاده‌سازی این روش (نسبت به روش‌های دیگر شبکه دینامیکی) و همچنین دامنه نوسان کوچک پره‌ها که محدودیت‌های کیفیت شبکه را رعایت می‌کند، در این مقاله از روش شبکه دینامیکی با فنرهای خطی فشاری و پیچشی مطابق با الگوریتم مراجع [۲۲، ۲۳] استفاده شده است. بدین منظور، کد نوشته شده در قالب یک زیر برنامه به نرم افزار سی-اف-ایکس الحاق شده است. در شکل ۵ نمونه‌ای از شبکه‌ی فنری ارائه گردیده است.



شکل ۵ نمونه‌ای از شبکه با فنرهای خطی

جدول ۳ بیشینه عدد ماخ در شبکه‌بندی‌های مختلف

پره فن	تعداد نقاط اطراف پره
۱/۱	۳۰۰
۰/۹۴	۳۵۰
۰/۹	۴۰۰

این مقایسه شبکه با تعداد نقاط اطراف پره ۴۰۰ برای این کسکید انتخاب شده است.

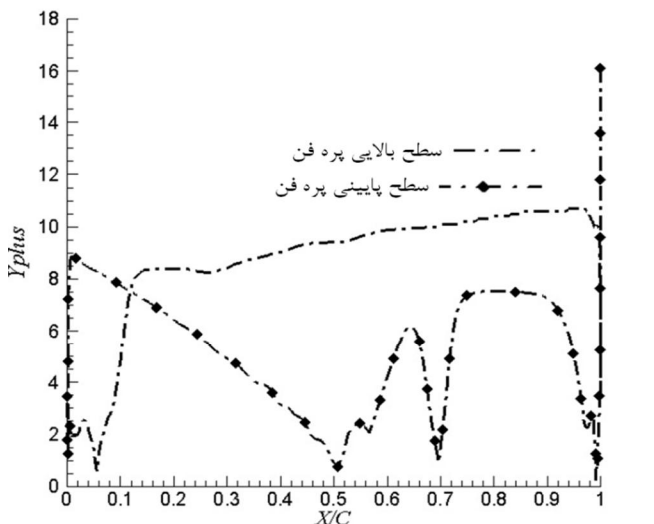
برای مدل آشفته‌گی کا-امگا اس‌تی که ترکیبی از مدل کا-پسیلین در نواحی دور از دیواره و کا-امگا در نواحی نزدیک به پره است، بایستی از یک تابع دیواره خودکار استفاده شود. این تابع دیواره بایستی برای بخش کا-پسیلین فعال شده و برای بخش کا-امگا غیرفعال گردد تا ترکیب آن دو نتایج درستی از کل میدان جریان را ارائه نماید. برای بخش کا-امگا که بدون تابع دیواره حل می‌شود لازم است مقادیر  $\gamma+$  کمتر از ۱۰ باشند و در نتیجه داخل لایه مرزی بین ۱۲ تا ۱۵ گره قرار داده شود [۱۸]. در شکل ۳ توزیع  $\gamma+$  اطراف پره هر کسکید نشان داده شده است. مطابق این شکل به جز معدود نقاطی که مقادیر بیش از ۱۰ دارند، سایر نقاط شرط  $\gamma+$  زیر ۱۰ را بر آورده می‌سازند. تا هنگامیکه در اکثر نقاط اطراف پره  $\gamma+$  مقدار مطلوب را داراست، نقاط بیشینه محلی که در نمودار مذکور مشاهده می‌شوند بر نتایج حاصله تأثیری نخواهند گذاشت [۱۸].

شبکه ایجاد شده در ناحیه‌ای از پره به همراه نمای بزرگ شده آن در شکل ۴ نشان داده شده است.

#### ۴- شبکه دینامیکی

برای شبیه‌سازی اثرات نوسان پره بر میدان جریان لازم است از روش‌های خاص شبکه‌بندی برای شبکه اطراف پره مرتعش استفاده شود. بهتر این است که با استفاده از یک شبکه ثابت و بکارگیری روش‌های خاص میانجی‌مانند سلول برش خورده [۱۹] و سلول شبح [۲۰]، نوسانات پره شبیه‌سازی شود اما به دلیل ناپایداری ذاتی جریان گذر صوتی، کاربرد این روش‌ها منجر به ناپایداری بیشتر حل و در نهایت واگرایی می‌شود.

از طرف دیگر تولید مجدد شبکه در هر گام زمانی ارتعاش پره، هزینه و



شکل ۳ توزیع  $\gamma+$  اطراف پره کسکید فن

1- Cut cell  
2- Ghost cell

### 5- گام زمانی

گام زمانی در حل ناپایا بایستی به گونه‌ای انتخاب شود که علاوه بر پوشش مقیاس‌های زمانی جریان و نوسان، تعداد نقاط کافی از اطلاعات مورد بررسی ارائه نماید تا تجزیه و تحلیل آنها آسان شود. بدین منظور، گام زمانی از طریق روابط (1) تعیین می‌شود:

$$\Delta t = \min(\Delta t_f, \Delta t_{Osc}, \Delta t_{Data}), \Delta t_f = \frac{L_b}{U_{in}}, \Delta t_{Osc} = \frac{1}{f_{Osc}} \quad (1)$$

در این تحقیق کمترین مقیاس زمانی نوسان، 0/002 ثانیه و کمترین مقیاس زمانی جریان، 0/0003 ثانیه می‌باشد. مقیاس زمانی دیتابرداری حداقل بایستی 0/1 مقیاس زمانی نوسان باشد تا پدیده‌هایی که در حین نوسان اتفاق می‌افتند قابل مشاهده و ثبت باشند. در این مقاله مقیاس زمانی دیتابرداری 0/0001 لحاظ شده است.

### 6- الگوریتم حل

حل معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر، انرژی و حالت توسط نرم‌افزار سی‌اف-ایکس صورت گرفته است. این نرم افزار معادلات فوق را به روش حجم محدود ضمنی<sup>1</sup> و با استفاده از روش کوپل میدان سرعت و فشار و بدون مراحل تصحیح فشار و سرعت حل می‌کند. در این حلگر، معادلات حاکم برای جریان سرعت بالا بر روی شبکه هم‌مکان<sup>2</sup> و با استفاده از الگوریتم رأی و چو [3] حل می‌گردند. در این پژوهش، برای حل معادلات پایا و ناپایا، معیار همگرایی برای کاهش باقیمانده RMS متغیرهای هیدرودینامیکی نظیر مومنتوم، جرم، انرژی کمتر از 10<sup>-6</sup> در نظر گرفته شده است. همچنین همانطور که در مقدمه اشاره شد، از مدل آشفته‌گی کما-امگا اس‌اس‌تی که نسبت به سایر مدل‌ها دارای دقت بالاتری می‌باشد، استفاده شده است.

از آنجائیکه رژیم جریان مدنظر در این پژوهش گذر صوتی بوده و علاوه بر آن تأثیر ارتعاشات پره بر میدان جریان نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد، لازم است الگوریتم خاصی برای بهره‌گیری از حلگر سی‌اف‌ایکس ابداع شود تا پایداری و همگرایی حل تأمین شده و نتایج با دقت مورد نیاز بدست آیند. بدین منظور الگوریتم شکل 6 در قالب یک زیربرنامه الحاقی در نرم‌افزار سی-اف ایکس بکار برده شده است. بایستی توجه شود که عدم ارضاء شرط همگرایی و یا نوسانی بودن باقیمانده‌ها لزوماً به معنای ناپایا بودن جریان در کسکید نیست بلکه ممکن است ناپایایی‌های اولیه قبل از رسیدن به حل پایا و نیز ناپایداری ذاتی جریان، نیاز به حل ناپایایی جریان پایا را غیرقابل اجتناب نماید.

از آنجائیکه جریان گذر صوتی، به دلیل اثرات غیرخطی جریان بسیار ناپایدار می‌باشد، شبیه‌سازی عددی آن در هندسه‌های پیچیده‌ای مانند توربوماشین‌ها بصورت مستقیم غالباً منجر به واگرایی حل می‌شود. بنابراین لازم است ابتدا جریان تراکم‌ناپذیر پایا شبیه‌سازی شده و از نتایج آن به‌عنوان شرط اولیه برای حل جریان گذر صوتی پایا حول پره‌های کسکید استفاده شود. در صورتیکه همگرایی حاصل نشود (کم نشدن باقیمانده‌ها یا نوسانی بودن آنها)، لازم است جریان گذر صوتی بصورت ناپایا حل شود تا در انتهای حل پایا، الگوی جریان پایا اطراف پره‌ها بدست آید. در صورت عدم ارضاء مجدد شرط همگرایی بایستی گام زمانی حل ناپایا کوچک شود تا پایداری حل بالا رفته و نتایج همگرا شوند. پس از همگرایی حل در مرحله شبیه‌سازی جریان، مطابق با مراحل الگوریتم شکل 6 جریان گذر صوتی ناپایا در کسکید نوسانی شبیه‌سازی می‌شود.

روند جابجایی پره، استخراج مکان جدید پره و تغییر شکل شبکه در فرآیند "حل جریان گذر صوتی ناپایا در کسکید نوسانی" نشان داده شده در شکل 6 قرار می‌گیرد. بدین منظور پس از همگرایی جریان در یک گام زمانی، جابجایی سازه و روابط تغییر شکل شبکه در همان گام زمانی اعمال می‌شوند.

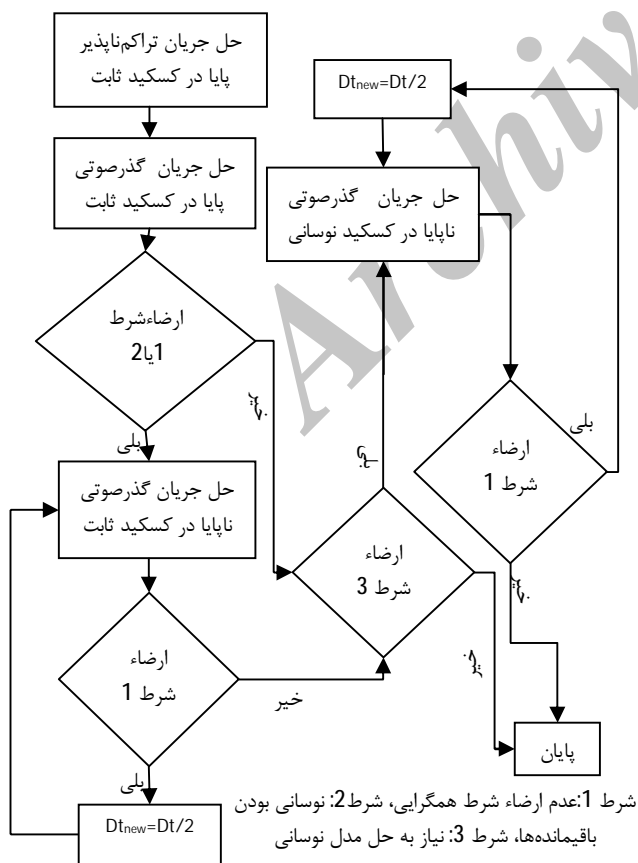
### 7- صحت سنجی

به‌منظور بررسی تطبیق نتایج حاصل از این تحقیق بر نتایج تجربی و تبیین علل اختلاف نتایج در برخی نقاط اطراف پره، نمودار تغییرات ضریب فشار متوسط حول پره فن در حالت کسکید ثابت و تغییرات ضریب فشار حول پره فن در حالت کسکید نوسانی با نتایج تجربی مشابه مقایسه شده‌اند.

بایستی توجه داشت که به‌دلیل محدودیت‌های سخت‌افزاری روش‌های تجربی، نتایج عددی از وضوح مکانی و زمانی بالاتری نسبت به نتایج تجربی برخوردارند. بدین معنا که تعداد نقاط دیتابرداری تجربی محدود است، در حالیکه نتایج عددی در هزاران نقطه و فاصله زمانی (سته به وضوح شبکه و گام زمانی) قابل استخراج می‌باشند. به همین علت، استخراج داده جدید با استفاده از اتصال خطی دونقط از نتایج تجربی که با یکدیگر فاصله زیاد دارند اشتباه بوده و چه بسا نتایج عددی مشابه، دقیق‌تر از آن باشند. این حالت در برخی نقاط شکل‌های 7 و 8 قابل مشاهده است.

در شکل 7 تغییرات ضریب فشار متوسط پره میانی کسکید فن در حالت ثابت نسبت به طول وتر بی‌بعد پره با نتایج تجربی مرجع [13] مقایسه شده است.

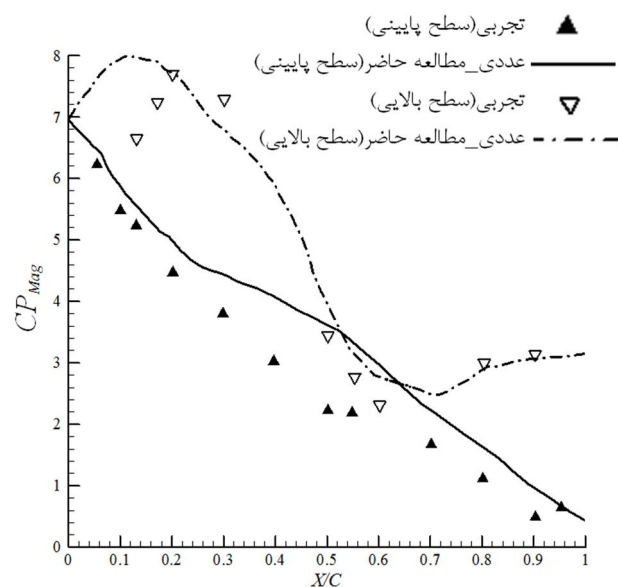
روند کلی نتایج عددی تقریباً همانند نتایج تجربی است. اما تفاوت توزیع ضریب فشار متوسط در هر دو طرف پره مخصوصاً سطح پایینی پره که محل



شکل 6 الگوریتم حل جریان گذر صوتی در کسکید توربوماشین

1- Implicit Finite-Volume  
2- Collocated Grid

تغییرات این کمیت در قالب یک منحنی با سه محور ضریب فشار، طول وتر بی‌بعد و زمان ترسیم شود. برای رسم این نمودار در فضای دوبعدی، لازم است نتایج از فضای زمان به فضای فرکانس نگاشت شوند. این نگاشت با استفاده از تبدیل فوریه سریع<sup>1</sup> صورت می‌پذیرد. مفاهیم و روش استفاده از این تبدیل در مرجع [25] توضیح داده شده است. با استفاده از این روش مقادیر ضریب فشار هر نقطه اطراف پره در کلیه گام‌های زمانی تبدیل به نقطه‌ای در فضای فرکانس می‌شود که دارای دومؤلفه حقیقی و مجازی می‌باشند. از این دو مؤلفه، اندازه و زاویه فاز ضریب فشار هر نقطه قابل استخراج می‌باشد. اندازه، مربوط به مقدار ضریب فشار و زاویه فاز مربوط به مکان (در اینجا زاویه پیشی) قرارگیری پره در فرآیند نوسان می‌باشد. شکل 8 توزیع مقدار و زاویه فاز ضریب فشار حول پره "1" (شکل 2) را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، در ناحیه قرارگیری حباب جدا شده بر سطح زیرین پره، تفاوت نتایج عددی با نتایج تجربی زیادتر می‌باشد اما اختلاف نتایج نسبت به حالت کسکید ثابت بسیار کمتر می‌باشد. در واقع، این اختلاف در کل نواحی اطراف پره توزیع



شکل 8 بالا؛ تغییرات اندازه پایین؛ تغییرات زاویه فاز ضریب فشار پره "1" کسکید فن نسبت به طول وتر بی بعد

شکل‌گیری حباب‌های جدایش جریان می‌باشد معنادار و نیازمند توضیح و تفسیر می‌باشد.

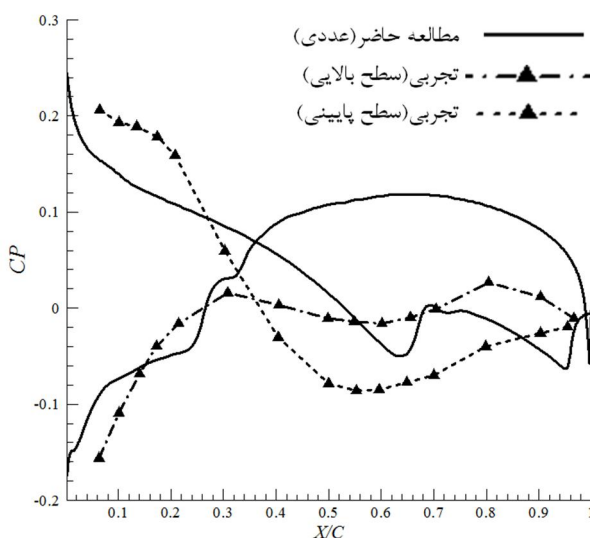
دو دلیل کلی و مستقیم برای این تفاوت نتایج در هر دو سطح بالا و پایین پره قابل ذکر است:

- 1- فرض دوبعدی بودن جریان سه‌بعدی که پیش از این درباره آن توضیح کامل داده شد.
- 2- از آنجائیکه مشخصات هندسی پروفیل پره در مراجع مربوطه بصورت دقیق ذکر نشده است، نقاط پره، مخصوصاً در نواحی نزدیک به لبه فرار، با سعی و خطا تقریب زده شده است.

همانطور که در مقدمه این مقاله ذکر گردید، استفاده از مدل‌های دومعادله‌ای همانند کامگا-اس‌اس‌تی در جریان‌های چسبیده به سطح نتایج بسیار خوبی ارائه می‌کند و برای شبیه‌سازی جریان‌های جدا شده محلی بایستی از روش‌های حل آشفته‌گی آشفته‌گی مربوط به هر دو ناحیه جریان چسبیده به سطح و جریان جدا شده را به‌خوبی شبیه‌سازی نمایند، استفاده نمود. روش "شبیه‌سازی گردابه‌های جدا شده" از جمله این روش‌ها است که ترکیبی از روش "شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ" و مدل‌های متوسط زمانی می‌باشد.

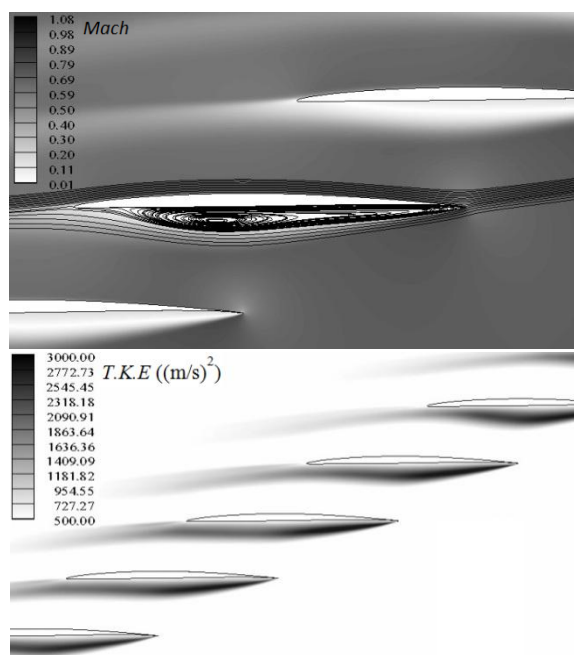
بنابراین، علاوه بر دو دلیل ذکر شده بالا، استفاده از مدل کامگا-اس‌اس‌تی در تمامی حوزه جریان شامل ناحیه گردابه جدا شده سطح پایینی پره‌ها نیز منجر به اختلاف نتایج عددی با نتایج تجربی شده است. در واقع، مدل آشفته‌گی بکار رفته، کل جریان را کاملاً چسبیده به سطح فرض می‌کند و به همین علت است که کاهش فشار ناشی از شکل‌گیری گردابه را حس نمی‌نماید. از آنجائیکه سطح بالایی هر پره نیز در مجاورت سطح پایینی پره بالایی خود قرار دارد، این حباب جدایش بر توزیع فشار این سطح نیز تأثیرگذار می‌باشد اما تأثیر آن در سطح پایینی به لحاظ واقع شدن حباب جدا شده بر این سطح بیشتر می‌باشد. جریان جدا شده سطح پایینی پره در شکل‌های 9، 12 و 13 بخش نتایج بصورت کامل نشان داده شده‌اند.

توزیع ضریب فشار حول پره‌های کسکید با یک پره نوسانی، ناپایا می‌باشد. بدین معنا که برای بررسی تغییرات ضریب فشار با زمان لازم است



شکل 7 تغییرات ضریب فشار حول پره میانی کسکید ثابت فن نسبت به طول وتر بی بعد

1- Fast Fourier Transformation (FFT)



شکل 9 کسکید فن ثابت؛ بالا: توزیع عدد ماخ و خطوط جریان حول پره، پایین: توزیع انرژی جنبشی آشفته‌گی

آن با لایه مرزی و در صورت عدم وجود شوک، از نواحی بیشینه ماخ تأثیر می‌پذیرد، در حالیکه فرآیند اتلاف بیشتر متأثر از نواحی جدایش و گردابه‌های جدا شده متناظر می‌باشد.

در شکل 10 تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی و نرخ اتلاف آن حول پره میانی کسکید فن نشان داده شده است.

برای وضوح بیشتر نمودارها، به جای رسم منحنی‌ها نسبت به طول وتر بی‌بعد، مقادیر مشخصه‌ها نسبت به شماره نقاط حول پره رسم شده‌اند. در واقع نیمی از مقادیر مربوط به سطح بالا و نیمه دیگر مربوط به سطح پایین پره است.

همانطور که دیده می‌شود، در هر دو نمودار، مقادیر مشخصه‌ها با نزدیک شدن به لبه حمله سریعاً کاهش و با ورود به سطح زیرین پره (محل بیشینه ماخ) مجدداً افزایش یافته و به بیشینه مقدار خود می‌رسند. پس از گذر از محل بیشینه ماخ، افت کمی با شیب زیاد اتفاق افتاده و تا لبه پره مقدار تقریباً ثابتی را تجربه خواهند کرد. در نهایت، در نزدیکی لبه فرار پره، کاهش شدیدی ناشی از خاتمه ناحیه جدایش و افزایش کمی ناشی از رسیدن به ناحیه جریان آزاد اتفاق می‌افتد. نرخ اتلاف انرژی اثر انرژی جنبشی و انرژی اتلافی را در خود دارد. به همین علت معیار مناسبی برای بررسی تأثیر ناحیه جدایش بر اتلاف آشفته‌گی نمی‌باشد. به همین منظور در شکل 11 تغییرات فرکانس اتلاف آشفته‌گی و عدد ماخ نشان داده شده‌اند.

توزیع عدد ماخ، نشان می‌دهد که مقادیر عدد ماخ بر اکثر نقاط سطح بالایی بیشتر بوده و بیشینه آن در نقطه 260 واقع بر سطح پایینی و نزدیک لبه حمله رخ می‌دهد (شکل 11).

از نمودار تغییرات فرکانس اتلاف (شکل 11) مشخص است که میزان اتلاف در سطح بالایی پره تقریباً برابر با میزان اتلاف در ناحیه جدایش سطح پایینی پره است. در واقع سهم اتلاف ناشی از لایه مرزی چسبیده به سطح برابر با سهم اتلاف ناشی از برهمکنش‌های بین ادی‌ها در ناحیه جدا شده است.

شده است در حالیکه در حالت کسکید ثابت در ناحیه محدود به حباب جدا شده محصور می‌گردد. نوسان پره میانی (پره "0") باعث می‌شود که آشفته‌گی محبوس در حباب‌های جدا شده آزاد شده و در سراسر محیط اطراف خود پره نوسانی و پره‌های اطراف آن (پره‌های "1" و "1-") تقسیم شود. با دور شدن از پره نوسانی و حرکت به سمت پره‌های بالا و پایین تمرکز آشفته‌گی در حباب جدا شده بیشتر شده و اختلاف نتایج با نتایج تجربی زیادت‌ر می‌شود.

## 8- نتایج عددی

در این بخش به بررسی سایر نتایج حاصل از شبیه‌سازی کسکید فن در دو حالت ثابت و با یک پره نوسانی پرداخته می‌شود. نتایج در دو زیربخش ارائه می‌گردد. زیربخش اول مربوط به کسکید ثابت و زیربخش دوم مربوط به کسکید با پره میانی مرتعش می‌باشد.

فرکانس اتلاف و انرژی جنبشی آشفته‌گی دو مشخصه آشفته‌گی مستقل می‌باشند که از طریق نرخ اتلاف انرژی جنبشی آشفته‌گی با یکدیگر مرتبط می‌شوند. در واقع نرخ اتلاف، اثر دو مشخصه فرکانس اتلاف و انرژی جنبشی آشفته‌گی را در خود دارد. مقادیر هر کدام از این دو مشخصه که غالب باشد، توزیع نرخ اتلاف شبیه آن مشخصه خواهد شد. در جریان اطراف کسکید فن، هر سه مشخصه فوق مورد ارزیابی قرار گرفته و دلیل اختلاف آن‌ها توضیح داده شده است.

## 8-1- کسکید فن ثابت

جریان و ارتعاشات ناشی از آن در کسکید فن به دلیل ضخامت کم پره و هندسه خاص آن که منجر به شکل‌گیری الگوی خاص جریان حول آن می‌شود و در نتیجه ارتعاشات و ناپایداری‌های ناشی از ارتعاش را راحت‌تر القاء می‌نماید، بیشتر از سایر کسکیدها مورد توجه محققین قرار گرفته است.

چنانچه الگوی تغییرات فرکانس اتلاف آشفته‌گی همانند الگوی تغییرات نرخ اتلاف و یا انرژی جنبشی آشفته‌گی باشد (در کسکیدهای توربوماشین با جریان‌های چسبیده به پره اتفاق می‌افتد)، نمی‌توان بین اثر شوک و جدایش بر تولید و اتلاف انرژی جنبشی آشفته‌گی تمایز قائل شد. در واقع، در جریان‌هایی که جدایش و شوک از یک مرتبه شدت، در یک زمان و در نواحی نزدیک به هم حضور دارند و به بیان دیگر جدایش ناشی از برهمکنش شوک با لایه مرزی اتفاق می‌افتد، تفکیک اثر آنها بسیار مشکل می‌باشد. در جریان گذری از کسکید فن مدنظر، شوک اتفاق نمی‌افتد و جدایش اتفاق افتاده ناشی از تأثیر هندسه پره مخصوصاً در ناحیه لبه حمله آن می‌باشد.

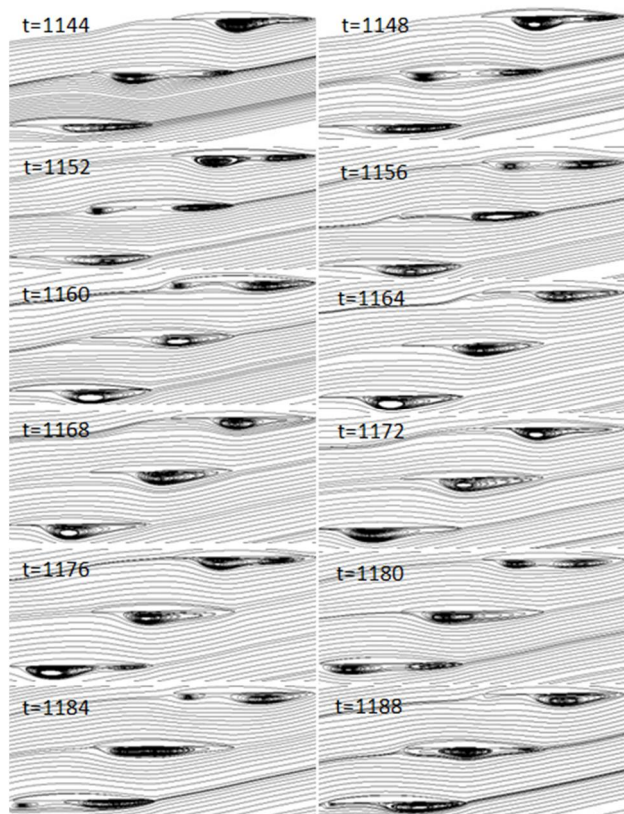
در شکل 9 توزیع عدد ماخ و انرژی جنبشی آشفته‌گی نشان داده شده است.

بر اساس این شکل، عدد ماخ بیشینه و انرژی جنبشی آشفته‌گی در نزدیکی لبه حمله پره اتفاق می‌افتد. به علت انحنای شدید پروفیل پره در نزدیکی لبه حمله و زاویه حمله زیاد جریان برخوردی به پره، جریان سیال از همان ابتدای برخورد با پره سریعاً از سطح پره جدا شده و تشکیل ناحیه گسترده جدایش رامی‌دهد. این ناحیه بصورت پایا بر سطح پایینی پره باقی می‌ماند.

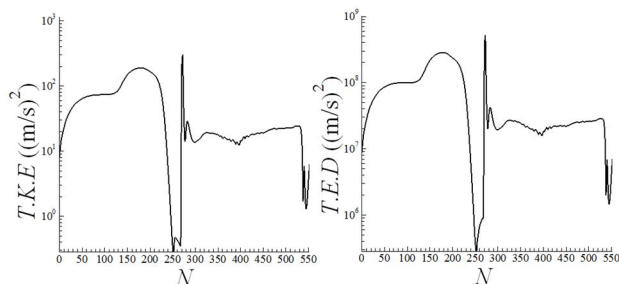
بیشینه انرژی جنبشی آشفته‌گی در ناحیه خارج از منطقه جدایش، بر سطح زیرین پره در نزدیکی لبه حمله می‌باشد.

در واقع فرآیند تولید انرژی آشفته‌گی بیشتر از وقوع شوک و برهمکنش





شکل 10 کسکید فن ثابت؛ راست: تغییرات اتلاف آشفته‌گی حول پره، چپ: تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی حول پره



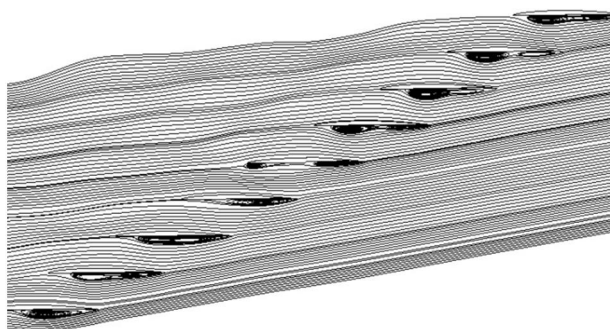
شکل 11 کسکید فن ثابت؛ راست: تغییرات فرکانس آشفته‌گی حول پره، چپ: تغییرات تغییرات عدد ماخ حول پره

درست آن است که سهم ناحیه جداشده بسیار بالاتر از سهم سایر نواحی باشد اما از آنجائیکه مدل‌های متوسط زمانی آشفته‌گی از جمله مدل کا-امگا-اس اس تی در پیش‌بینی رفتار نواحی جداشده و دوباره چسبیده جریان (مانند آنچه در جریان در کسکید فن مشاهده می‌شود) به‌خوبی عمل نمی‌کنند، این رفتار قابل توجیه می‌باشد. در واقع مدل کا-امگا-اس اس تی آشفته‌گی جریان در لایه مرزی و جریان‌های با گرادین‌های فشار شدید را تا شروع جدایش به‌خوبی شبیه‌سازی می‌کند ولی عملکرد آن در جریان‌های جداشده شده شدید و جداشده دوباره چسبیده قابل قبول نمی‌باشد [27,26]

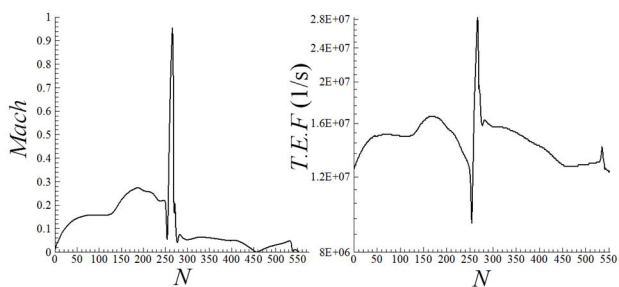
### 2-8- کسکید فن با یک پره مرتعش

برای بررسی اثر نوسان پره بر مشخصه‌های آشفته‌گی جریان، لازم است الگوی رفتاری جریان بین پره‌ها شناخته گردد. در این راستا جریان بین سه پره میانی کسکید فن که پره وسط آن‌ها مرتعش می‌باشد در زمان‌های متوالی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همانطور که در بخش 2 ذکر گردید، فرکانس نوسانات پره میانی 500 هرتز فرض شده است. در واقع دوره تناوب نوسان 0/002 ثانیه می‌باشد. با فرض گام زمانی 0/000025 برای شبیه‌سازی جریان، 80 گام زمانی برای یک دوره تناوب نوسان، لازم می‌باشد. از آنجائیکه در هر دوره تناوب نوسان دو گردابه بر سطح پایین پره فن تشکیل و حرکت می‌کند (شکل 12)، با معیار قراردادن زمان تشکیل گردابه بر لبه حمله پره نوسانی، حدود 40 گام زمانی برای نشان دادن تمامی پدیده‌ها در خود پره نوسانی و پره‌های ثابت مجاور آن کافی می‌باشد. همانطور که در شکل 12 دیده می‌شود، فرآیند تشکیل و اتلاف گردابه‌ها مختص پره نوسانی نیست و نوسان پره میانی علاوه بر خود پره منجر به حرکت و اتلاف گردابه‌ها بر سطح پایین سایر پره‌های کسکید نیز می‌شود. در حالت کسکید ثابت یک گردابه بر سطح پایین تمامی پره‌های کسکید فن مستقر می‌باشد (شکل 9). در اثر نوسان پره وسط، الگوی تشکیل گردابه‌ها تغییر کرده و دو گردابه با اختلاف فاز اندکی از یکدیگر در لبه حمله پره تولید شده و در لبه فرار تلف می‌شوند.

این فرآیند در تمامی پره‌های کسکید صورت می‌پذیرد اما فرکانس تولید و اتلاف گردابه در پره بالایی بیشتر و در پره پایینی کمتر می‌باشد. علت این موضوع، مجاورت سطح صلب بالایی پره مرتعش با سطح تشکیل گردابه پره ثابت است که باعث می‌شود سیال بین گذرگاه دو پره تغییرات فشار را با سرعتی نزدیک سرعت صوت به پره بالایی منتقل کرده و فرآیند تشکیل و اتلاف گردابه را سرعت بخشد. این در حالی است که شکل‌گیری و حرکت گردابه‌های واقع بر سطح پایینی پره مرتعش بخشی از انرژی انتقالی به سیال بین این پره و پره پایینی را تلف می‌نماید و منجر به کاهش فرکانس نوسان پره زیرین پره مرتعش می‌شود. با دور شدن از پره نوسانی، اختلاف فرکانس تولید و اتلاف گردابه‌ها کاهش یافته و الگوی گردابه‌ها در پره‌های دو طرف پره نوسانی به یکدیگر شبیه می‌شوند. این شباهت در شکل 13 که نشان‌دهنده الگوی گردابه‌ها بر پره‌های کسکید در یک لحظه خاص می‌باشد کاملاً مشهود است.



شکل 13 خطوط جریان اطراف پره‌های کسکید فن در ثانیه 1152



شکل 12 خطوط جریان اطراف پره‌های کسکید فن در ثانیه 1152

مقایسه روند تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی در شکل 16 نشان می‌دهد که با گذشت زمان، اختلاف فاز بین دو نمودار نشان داده شده در نقطه بیشینه مطلق افزایش می‌یابد، بطوریکه در نهایت اختلاف فاز 180 درجه در مقادیر آن‌ها مشاهده می‌شود، بدین معنا که در زمانی که انرژی جنبشی آشفته‌گی پره بالایی بیشینه است، این مقدار برای پره پایینی کمینه می‌باشد. اختلاف فاز نظیر آنچه در بند پیشین توضیح داده شد، در نمودارهای فرکانس اتلاف آشفته‌گی (شکل 17) نیز دیده می‌شود. با این تفاوت که این اختلاف فاز در مکان‌هایی غیر از نقطه بیشینه مطلق اتفاق می‌افتد. به بیان دیگر، نوسان پره میانی بین مقادیر انرژی جنبشی پره پایین و بالای پره نوسانی در نقطه بیشینه مطلق و بین مقادیر فرکانس اتلاف آشفته‌گی در نقاط بیشینه نسبی اختلاف فاز ایجاد می‌کند.

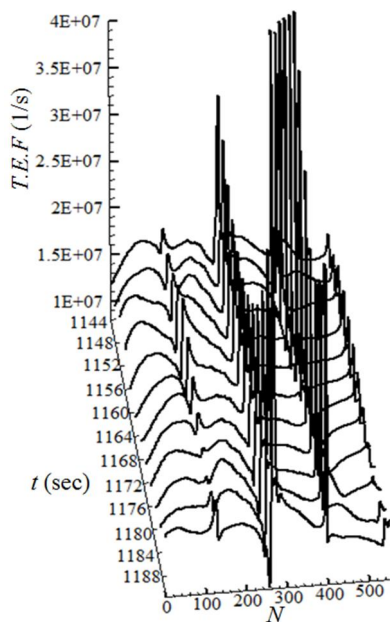
### 9- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن تشریح مفاهیم کلی جریان و فرآیند برهمکنش سازه- سیال در جریان گذر صوتی توربومشین‌ها، مشخصه‌های آشفته‌گی جریان گذر صوتی در نمونه کسکید فن ثابت و تأثیر نوسان بر مشخصات آشفته‌گی در

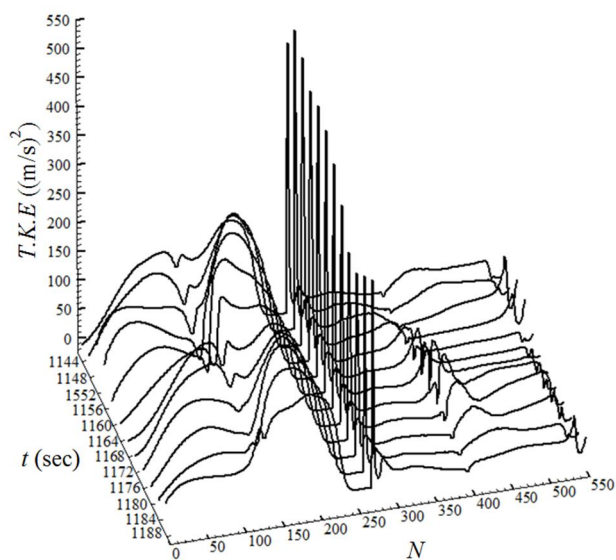
تغییرات انرژی جنبشی و فرکانس اتلاف آشفته‌گی در اطراف پره میانی (پره نوسانی) در زمان‌های متوالی (همانند شکل 12) به ترتیب در شکل‌های 14 و 15 نشان داده شده‌اند. نقطه بیشینه در شکل 14 مربوط به محل شکل‌گیری گردابه در لبه حمله می‌باشد. با حرکت گردابه از لبه حمله به سمت لبه فرار مقدار انرژی جنبشی بیشینه کم شده و دو نقطه قبل و بعد از این نقطه به مقدار بیشینه نسبی می‌رسند. نقطه قبل از نقطه بیشینه مربوط به اثر گردابه سطح پایین پره بالایی است و نقطه بعد از نقطه بیشینه مربوط به گردابه دوم خود پره است. در واقع میزان توزیع آشفته‌گی متأثر از الگوی جریان خود پره و پره بالایی آن می‌باشد.

از آنجائیکه بر خلاف فرآیند تولید انرژی جنبشی آشفته‌گی، فرآیند اتلاف در نزدیکی سطح پره می‌دهد، تأثیر الگوی گردابه‌های پره بالایی بر تغییرات فرکانس اتلاف آشفته‌گی ناچیز می‌باشد. به همین علت مقدار بیشینه نسبی قبل از اولین بیشینه مطلق در شکل 15 بسیار کوچک می‌باشد. از سوی دیگر به دلیل نوسانی بودن پره، دو نقطه بیشینه مطلق در محل لبه حمله و سطح زیرین پره مشاهده می‌شود. اولی مربوط به شکل‌گیری گردابه بر لبه حمله و دومی مربوط به برهمکنش بین دو گردابه سطح زیرین است که مقدار آن نیز بیشتر می‌باشد.

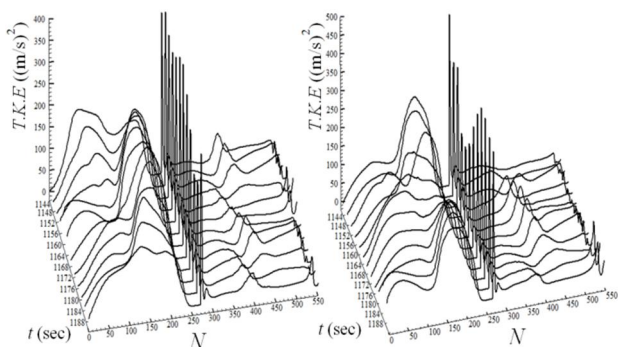
با مقایسه شکل‌های متناظر 15 تا 17 مشخص می‌شود که روند کلی تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی در پره نوسانی و دو پره ثابت اطراف بسیار به یکدیگر شبیه هستند اما الگوی تغییرات فرکانس اتلاف آشفته‌گی در پره نوسانی با پره ثابت تفاوت آشکار دارد. در واقع نوسان پره باعث می‌شود که فرکانس اتلاف آشفته‌گی و تغییرات آن بسیار زیاد باشد. نکته دیگری که از این مقایسه می‌توان نتیجه گرفت این است که شباهت الگوی تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی، در نقطه بیشینه، برای پره نوسانی و پره بالایی بسیار بیشتر از پره نوسانی و پره پایینی است. در حالیکه برای سایر نقاط (از جمله نقاط بیشینه نسبی) این روند برعکس می‌باشد. این موضوع نشان‌دهنده این است که الگوی توزیع انرژی جنبشی در پره بالایی بر نقاط بیشینه مطلق توزیع انرژی جنبشی آشفته‌گی پره نوسان‌کننده تأثیرگذار است و انرژی آشفته‌گی سایر نقاط پره نوسانی بیشتر متأثر از پره پایینی است.



شکل 15 تغییرات فرکانس اتلاف آشفته‌گی اطراف پره نوسانی کسکید فن در زمان‌های متوالی



شکل 14 تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی اطراف پره نوسانی کسکید فن در زمان‌های متوالی



شکل 16 تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی در کسکید فن؛ راست: اطراف پره پایینی پره نوسانی، چپ: اطراف پره بالایی پره نوسانی در زمان‌های متوالی

در کسکید فن نوسانی، شباهت الگوی تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی، در نقطه بیشینه، برای پره نوسانی و پره بالایی بسیار بیشتر از پره نوسانی و پره پایینی است. در حالیکه برای سایر نقاط (از جمله نقاط بیشینه نسبی) این روند برعکس می‌باشد. این موضوع نشان‌دهنده این است که الگوی توزیع انرژی جنبشی در پره بالایی بر نقاط بیشینه مطلق توزیع انرژی جنبشی آشفته‌گی پره نوسان‌کننده تأثیرگذار است و انرژی آشفته‌گی سایر نقاط پره نوسانی بیشتر متأثر از پره پایینی است.

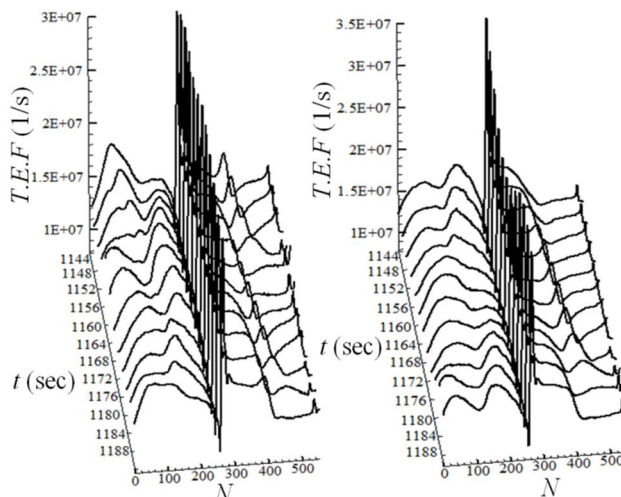
نوسان پره میانی بین مقادیر انرژی جنبشی پره پایین و بالای پره نوسانی در نقطه بیشینه مطلق و بین مقادیر فرکانس اتلاف آشفته‌گی در نقاط بیشینه نسبی اختلاف فاز ایجاد می‌کند.

### 10- فهرست علائم

فرکانس نوسان پره ( $s^{-1}$ )	$f_{osc}$
طول وتر پره (m)	$L_b$
سرعت سیال ورودی به کسکید ( $ms^{-1}$ )	$U_{in}$
مقیاس زمانی جریان (s)	$\Delta t_f$
مقیاس زمانی نوسان (s)	$\Delta t_{osc}$
گام زمانی دیتا برداری (s)	$\Delta t_{data}$
<b>علائم اختصاری</b>	
نرخ اتلاف انرژی جنبشی آشفته‌گی ( $m^2s^{-3}$ )	$T.E.D$
فرکانس اتلاف انرژی آشفته‌گی ( $s^{-1}$ )	$T.E.F$
انرژی جنبشی آشفته‌گی ( $m^2s^{-2}$ )	$T.K.E$

### 11- مراجع

- [1] R. Kiock, F. Lehthaus, N. C. Baines, C. H. Sieverding, The Transonic Flow Through a Plane Turbine Cascade as Measured in Four European Wind Tunnels, *Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 108, pp.277-284, 1986.
- [2] E. H. Dowell, H. C. Curtiss, R. H. Scanlan, and F. Sisto. *A Modern Course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [3] L. Hilgenfeld and L. Fottner, Experimental investigation of turbulence structures in a highly loaded transonic compressor cascade with shock/laminar boundary layer interactions, *The 5th Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, Mallorca, Spain, 2002.
- [4] J.D.Denton, Some Limitations of Turbomachinery CFD, in *Proceedings of The ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea and Air*: Glasgow, ASME, Vol. 7, pp. 735-745, 2010.
- [5] P.Pecnik, P. Pieringer, W.Sanz, Numerical investigation of the secondary flow of a transonic turbine stage using various turbulence closures, in *Proceedings of The ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea and Air: Nevada*, ASME, Vol.6, pp. 1185-1193, 2005.
- [6] N. B. Wood, Experience with the Johnson-King turbulence model in a transonic turbine cascade flow solver, *Heat and Fluid Flow*, Vol. 12, No. 2, pp.158-165, 1991.
- [7] S. Yamamoto and H. Daiguji, A Numerical Method For The Transonic Cascade Flow Problem, *Computers and Fluids*, Vol. 19, No. 3-4, pp. 461-478, 1991.
- [8] M.H.Roozbahani, M. Fallah, Different Turbulence Models Investigation in a Turbine Cascade Blade, *The 10th Aerospace Conference*, Tehran, IRAN, 2011. (In Persian)
- [9] P.Bradshaw, Turbulence Modeling With Application to Turbomachinery, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol.32, pp. 575-624, 1996.
- [10] S. M. Sajjadi, M. R. Aligoodarz and H. Karrabi, Effect of rotor blade twist on axial transonic compressor performance, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 11, pp. 154-160, 2014. (In Persian)
- [11] M. R. Aligoodarz, H. Karrabi, M. R. Soleimani Tehrani, Study and analysis of blade twist, lean and bow effects on the axial turbine performance, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 9-20, 2012. (In Persian)
- [12] T. Miyakozawa, *Flutter and forced response of turbomachinery with frequency mistuning and aerodynamic asymmetry*, PhD Thesis, Duke University, North Carolina, 2008.



شکل 17 تغییرات فرکانس اتلاف آشفته‌گی در کسکید فن؛ راست: اطراف پره پایینی پره نوسانی، چپ: اطراف پره بالایی پره نوسانی در زمان‌های متوالی

یک نمونه کسکید فن با پره میانی نوسانی مورد مطالعه قرار گرفتند. در این راستا ابتدا مدل‌های هر کسکید و روند تولید و استقلال از شبکه بررسی شده و سپس الگوریتم همگرایی جدیدی برای بهبود عملکرد همگرایی حلگر سی-اف ایکس ارائه گردید. بمنظور کاهش حجم محاسبات و سادگی بیشتر هندسه و الگوی جریان از مدل دوبعدی کسکید استفاده شده است تا گلوگاه‌ها و چالش‌های شبیه‌سازی ارتعاشات ناشی از جریان و تأثیر آشفته‌گی بر آن‌ها مورد شناسایی و ارزیابی قرار گیرند.

نتایج حاصل از این پژوهش در بندهای زیر خلاصه می‌گردند:

- وجود نواحی با جدایش وسیع منجر به اختلاف نتایج بدست‌آمده با نتایج تجربی می‌شود بطوریکه استفاده از مدل هندسی سه‌بعدی و مدل‌های آشفته‌گی دقیق‌تر مانند روش‌های ترکیبی LES/Urans را اجتناب ناپذیر می‌کند.

- در جریان‌های گذری از پره توربوماشین که جدایش وسیع اتفاق نمی‌افتد، الگوی تغییرات فرکانس اتلاف و نرخ اتلاف آشفته‌گی بسیار شبیه یکدیگر هستند.

- در جریان‌هایی که جدایش وسیع کامل و یا جدایش وسیع دوباره چسبیده وجود دارد، برای بررسی اثرات اتلاف آشفته‌گی بهتر است از فرکانس اتلاف آشفته‌گی که مستقل از انرژی جنبشی آشفته‌گی است استفاده شود. چرا که سهم انرژی جنبشی آشفته‌گی در نرخ اتلاف بسیار بیشتر از فرکانس اتلاف است و در نتیجه تغییرات نرخ اتلاف آشفته‌گی بسیار شبیه تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی شده و تحلیل میزان اتلاف مشکل می‌گردد.

- در اثر نوسان پره میانی، الگوی تشکیل گردابه‌ها تغییر کرده و دو گردابه با اختلاف فاز اندکی از یکدیگر در لبه حمله پره تولید شده و در لبه فرار تلف می‌شوند.

- فرآیند تولید و اتلاف گردابه‌ها علاوه بر سطح پره نوسانی بر سطوح سایر پره‌ها نیز اتفاق می‌افتد. در حالت کلی، با دور شدن از پره میانی شدت این فرآیند کاهش می‌یابد.

- روند کلی تغییرات انرژی جنبشی آشفته‌گی در پره نوسانی و دو پره ثابت اطراف بسیار به یکدیگر شبیه هستند اما الگوی تغییرات فرکانس اتلاف آشفته‌گی در پره نوسانی با پره ثابت تفاوت آشکار دارد. در واقع نوسان پره باعث می‌شود که فرکانس اتلاف آشفته‌گی و تغییرات آن بسیار زیاد باشد.

- [20] Y. H. Tseng, J. H. Ferziger, A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry, *Journal of Computational Physics*, Vol. 192, pp. 593–623, 2005.
- [21] J. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA*, Vol.28, No.8, pp.1381–1388, 1990.
- [22] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 163, No.1-4, pp.231–245, 1998.
- [23] C. Degand and C. Farhat. A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Computers and Structures*, Vol.80, No. 3-4, pp. 305–316, 2002.
- [24] C. Rhie, W. Chow, Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA*, Vol. 21, pp. 1525–1532, 1983.
- [25] M. Cerna and A.F. Harvey, The fundamentals of FFT-Based signal analysis and measurement, Application Note 041, *National Instruments*, 2000.
- [26] K. Y. Seok, J. C. Yoo, S. H. Kang, Numerical study of roughness effects on a turbine stage performance, in *Proceedings of ASME Turbo Expo; Power for Land, Sea, and Air: Vienna*, ASME, Vol. 22, No. 6, pp. 14-17, 2004.
- [27] F. R. Mente., Two-equation turbulence-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA*. Vol. 32, No. 24, pp. 1598-1605, 1994.
- [13] D. H. Buffum, V. R. Capece, A. J. King, E. M. El-Aini, Experimental investigation of unsteady flows at large incidence angles in a linear oscillating cascade, in *The 32th Joint Propulsion Conference*, Florida, USA, 1996.
- [14] J. Lepicovsky, E.R. McFarland, V.R. Capece, T.A. Jett, R.G. Senyitko, J. Hydrn, *Unsteady pressures in a transonic fan cascade due to a single oscillating airfoil*, NASA Report, 2002.
- [15] J. Lepicovsky, E.R. McFarland, V.R. Capece, T.A. Jett, R.G. Senyitko, *Methodology of blade unsteady pressure measurement in the NASA transonic flutter cascade*, NASA Report, 2002.
- [16] X. Zhou, J. M. Wolf, CFD analysis of unsteady separated transonic oscillation cascade aerodynamics, *Turbo and Jet Engines*, Vol. 21, No. 3, pp.143-153, 2004.
- [17] M. Y. Sakene, *Numerical simulation of 2D incompressible flow in turbomachines cascade using Detached Eddy Simulation method*, MSc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, 2012. (In Persian)
- [18] M. Sanienejad, *Introduction to turbulent flows and turbulence modeling*, pp. 185-191, Tehran: 2004. (In Persian)
- [19] K.J. Fidkowski, *A simplex cut-cell adaptive method for high-order discretization of the compressible Navier-Stokes equations*, PhD Thesis, Massachusetts institute of technology, Massachusetts, 2007.

Archive of SID