مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1394، دوره 15، شماره 1، ص‌ص 361-370

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تعیین یک رابطه عمومی برای درنظرگیری رشد چگالی ترک ماتریسی و جداشدگی بین لایه‌ای در مواد مرکب متعامد تحت بارگذاری محوری براساس مدل تاخیر برش ارتقایافته

امین فرخ آبادی[1*]، مریم آقاابراهیمی سامانی[2]

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه سمنان، سمنان

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوا فضا، دانشگاه سمنان، سمنان

*سمنان، صندوق پستی 35195363، amin.farrokh@profs.semnan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 14 مرداد 1393
پذیرش: 14 آبان 1393
ارائه در سایت: 26 آذر 1393

کلید واژگان:
مدل تاخیربرش ارتقایافته
ترک ماتریسی
جداشدگی‌بین‌لایه‌ای
معیاربیشترین تنش
معیار انرژی کرنشی آزاد شده

چکیده

در این مقاله با استفاده از یک مدل تاخیر برش ارتقایافته، با درنظرگیری اثرات تنش‌های برشی خارج صفحه ای، میدانهای تنش، کرنش، جابجایی و انرژی کرنشی در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد نمونۀ $[0_m/90_n]_s$ محاسبه می‌شود. در ادامه روابطی برای تعیین افت سفتی ناشی از وجود ترک ماتریسی در چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن متعامد ارائه می‌شود و پارامترهای خرابی ناشی از وجود ترک ماتریسی در ماتریس سفتی لایه کامپوزیتی تعریف می‌گردند. در ادامه با استفاده از مفاهیم مکانیک شکست و با بکارگیری دو معیار بیشترین تنش و معیار انرژی کرنشی آزاد شده، رشد مکانیزم های خرابی نظیر ترک ماتریسی و جداشدگی‌بین‌لایه‌ای حاصل از آن مطالعه می شود و یک رابطه بسته تحلیلی برای رشد خرابی در مواد مرکب لایه‌ای برحسب تنش محوری اعمال شده ارائه می‌گردد و در نهایت نتایج حاصل با نتایج تحلیلی و تجربی موجود مقایسه می‌گردد. نتایج ارائه شده نشان خواهد داد که روابط ارائه شده در این پژوهش در مقایسه با نتایج نیمه تحلیلی قبلی دارای دقت مناسبتر و خطای کمتر در مقایسه با نتایج تجربی می‌باشند. لازم به ذکر است که مدل ارائه شده در این مقاله، قابل توسعه به چندلایه‌های متقارن عمومی نیز می‌باشد.

Determination of a general closed form relation for crack density and induced delamination evolution in cross ply laminates under uniaxial loading condition based on an extended shear lag model

Amin Farrokhabadi*, Maryam Aghaebrahimi Samani

Department of Aerospace Engineering, Semnan University, Semnan, Iran
*P.O.B. 35195363 Semnan, Iran, amin.farrokh@profs.semnan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 August 2014
Accepted 05 November 2014
Available Online 17 December 2014

Keywords:
shear lag model
matrix cracking
delamination
max stress
strain energy release rate

ABSTRACT

In the present study, using shear lag parameter in an extended shear lag model, by considering the effects of out of plane shear stresses, the stress fields distribution as well as strain fields and displacement distributions will be obtained for a typical $[0_m/90_n]_s$ cross ply composite laminate containing a specified matrix cracking density. Then, the stiffness degradation due to existence of matrix cracking in these cross-ply composite laminates will be evaluated and specific damage parameters that affect the stiffness matrix of composite ply will be defined. Furthermore, using the concept of fracture mechanics by applying two different criteria including the maximum stress and strain energy release rate, the matrix cracking initiation and evolution as well as induced delamination propagation will be studied. Finally, a closed form relation will be presented which predicts the evolution of matrix cracking under uniaxial loading conditions in cross-ply composite laminates. At last, the obtained results by the present study will be compared with available semi-analytical and experimental results. The obtained results reveal that the proposed closed form relations by the authors have less difference with experimental results in comparison with the previous semi analytic results.

1- مقدمه

امروزه به سبب گسترش کاربرد مواد مرکب در صنایع هوافضا، مطالعه و بررسی رفتار این مواد از اهمیت خاصی برخوردار است. مواد مرکب به سبب خواص مناسب نظیر نسبت استحکام به دانسیته بالا و سفتی به دانسیته زیاد، همواره مورد توجه طراحان قرار گرفته اند. با این وجود این مواد مستعد وقوع خرابی‌هایی نظیر ترک ماتریسی و جداشدگی‌بین‌لایه‌ای ناشی از آن می‌باشند. به منظور مطالعه این مکانیزمهای خرابی، روش‌های مختلفی نظیر روش مایکرومکانیک [1]، روش تجربی و روش المان محدود [2] وجود دارند. در روش مایکرومکانیک که به آن روش برپایه دانسیته ترک نیز گفته می‌شود، با فرض وجود هریک از مودهای خرابی ذکر شده، یک سلول واحد از چندلایه

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. Farrokhabadi, M. Aghaebrahimi Samani, Determination of a general closed form relation for crack density and induced delamination evolution in cross ply laminates under uniaxial loading condition based on an extended shear lag model, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 1, pp. 361-370, 2015 (In Persian)

استخراج می‌شود. در ادامه تلاش می‌شود با فرض وجود مود خرابی، میدان‌های تنش و جابجایی در سلول واحد محاسبه و درنهایت افت سفتی چندلایه تعیین شود. یکی از روش‌های مطرح در دیدگاه مایکرومکانیک، روش تاخیربرش است که قادر است با ایجاد یک رابطه بسته، به محاسبه افت سفتی و تغییرات تنش بر حسب دانسیته ترک بپردازد. رایج ترین مدل مورد استفاده در زمینه مطالعات تاخیر برش، آنالیزهای یک بعدی هستند که به علت سادگی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روشها در بدو توسعه، تنها ترک ماتریسی را به عنوان مود خرابی، مورد مطالعه قرار می‌داد. در این تحلیلها، تنشها و تغییرمکانهای در جهت عرضی برابر صفر درنظر گرفته می‌شد. با وجود این، این روش منجر به نتایج نادرستی از قبیل تنشهای برشی غیرصفر در سطح ترک می‌شود. درادامه تحقیقاتی برای اصلاح خطای روش یک بعدی صورت گرفت و ترکهای عرضی ماتریسی در چندلایه‌های متعامد CFRP توسط های- اسمیت و رایف اشنایدرو اسمیت [3] مورد مطالعه قرار گرفت. رایف‌اشنایدر [4] ترکهای درون‌لایه‌ای را به شکل تکرار شونده در یک‌لایه در نظر گرفت. وی یک لایه انتقال تنش برشی با ضخامت و سفتی نامعلوم بین لایه‌ها تعریف کرد و فرض کرد این لایه هنگامیکه تحت تنش کششی قرار گرفته، برش خالص را تحمل می‌کند. در ادامه رایف‌اشنایدر و تالگ [5] روش ساده "تاخیر برش" را بگونه‌ای بسط دادند که کاهش سفتی ناشی از رشد ترک را محاسبه می‌کرد و بر اساس فرضیات زیر استوار بود:

الف) تنش نرمال در جهت بار محوری در راستای ضخامت لایه ثابت می‌ماند.

ب) تنش‌های برشی در داخل یک لایه فرضی با ضخامت نامعلوم در بین لایه‌ها درنظر گرفته می‌شود.

ج) ترکها به اندازه کافی دور از هم هستند به نحوی که تداخل متقابل بین آنها قابل صرف‌نظر میباشد.

با این وجود، این روش منجر به جوابهای خیلی دقیقی نگشت. در حالت خاص ضخامت لایه فرضی تا حدی بصورت اختیاری درنظر گرفته می‌شد و تنشهای نرمال عرضی قابل تخمین و بدست آوردن نبودند. این درحالی بود که این تنش‌ها نقش مهمی در شکست لایه دارند. همچنین فرض عدم تداخل ترکهای عرضی با داده های تجربی همخوانی نداشتند. از طرفی پارامتر انتقال برشی ناشناخته بود و می‌بایست با استفاده از نتایج تجربی تعیین می‌گردید.

فلاکس [6]، از معیار شکست نرخ رهایی انرژی کرنشی در مدل تاخیر برش تقریبی دوبعدی جهت پیش‌بینی خرابی کششی در ماتریس استفاده کرد. روش دوبعدی "تاخیر برش" اصلاح شده برای آنالیز چندلایه‌های متعامد در حضور مکانیزمهای خرابی ترک عرضی و لایه‌لایه‌شدگی توسط ژنگ و همکاران [7] ادامه یافت. در این روش به منظور ساده سازی از تغییرات تغییرمکان عرضی نسبت به مختصات طولی صرفنظر شد. همچنین تغییرمکانهای داخل صفحه‌ای عرضی بصورت خطی و یا به فرم مرتبه دوم درنظر گرفته شد. ژنگ فرض کرد که تنشهای برشی در چندلایه متعامد متقارن بصورت خطی در راستای ضخامت لایه 90 درجه و عکس ضخامت لایه صفر درجه تغییر کرده و در دیگر لایه‌ها صفر می‌باشد. درادامه برتولات [8] فرض کرد که وابستگی تغییرمکانهای عرضی به مختصات عرضی در لایه 90 درجه از مرتبه دوم و در لایه صفر درجه، خطی باشد. یاکوزکی و آکوی [9] چندلایه‌های حاوی ترکهای ماتریسی مورب را با کمک روش تاخیر برش دوبعدی مورد بررسی قرار دادند. آدابدیا و همکاران [10] کاهش سفتی چندلایه‌های زاویه‌دار متقارن حاوی ترک را در لایه های وسط با استفاده از مدل تاخیربرش اصلاح شده پیش‌بینی کردند. آنها توانستند اثرات تغییر دما و رطوبت را بر خواص مکانیکی چندلایه با استفاده از مدل مایکرومکانیک بدست آوردند. کاترلوس و همکاران [11] جزئیاتی از محاسبات مربوط به اثرات ترک ماتریسی بر رفتار چندلایه‌های متعامد و غیربالانس $[0/45]_s$ کامپوزیت الیاف شیشه تحت بار کششی را با استفاده از روش تاخیر برش اصلاح شده ارائه کردند. آنها همچنین کاهش سفتی چندلایه های حاوی ترک را با نتایج تجربی مقایسه کردند. میچیا و همکاران [12] از روش تاخیر برش اصلاح شده جهت درنظرگیری مفهوم تنش برشی درون لایه‌ای استفاده کردند تا بتوانند اثرات ترک ماتریسی را بر کاهش سفتی چندلایه‌های متقارن هیبریدی گلاس اپوکسی و کربن اپوکسی محاسبه کنند. به این منظور، یک مدل تاخیر برش اصلاح شده پیشنهاد شد که در آن فرض می‌شد لایه‌های چسبنده بین دو لایه مجاور، علاوه بر تنش‌های برشی درون‌لایه، تنشهای نرمال را نیز تحمل می‌کنند. توزیع تنش پیشنهاد شده در این مدل، کلیه معادلات تعادل، شرایط مرزی و پیوستگی نیرویی را در صفحات تماس ارضاء می‌کرد. ونگ و همکاران [13] یک مدل تحلیلی جدید براساس مدل ساختاری معادل (ECM[1]) پیشنهاد دادند که از آن به منظور پیش‌بینی کاهش سفتی داخل صفحه و همچنین استحکام نهایی و شبیه‌سازی رفتار تنش-کرنش در چندلایه‌های عمومی متقارن تحت بارگذاری ترکیبی در حضور ترکهای ماتریسی استفاده می شد.

یکی از مدلهای پایه‌ای بسیار مهم برای بیان تاخیر برش روش نورمن [14] بود. در این روش با استفاده از معادلات پایه، تنش در چندلایه‌های متعامد متقارن و با استفاده از فرضیات تحت بارگذاری تک محوره یکنواخت کششی بدست آمد. همچنین در ادامه برای چندلایه‌های متقارن متعامد مطالعات توسط اندرسون [15] ادامه یافت. این مدل با بهره‌گیری از معادلات نورمن به بیان یک معادله ریاضی جهت تخمین رابطه بین تنش با چگالی ترک پرداخت. همچنین وی توانست، با بیان رابطه‌ای بر حسب توابع احتمالی اندرسون [16]، درنهایت برای چندلایه های نمونه $[\theta/90_4]_s$ پارامتر تاخیر برشی بصورت رابطه (1) ارائه دهد:

$$\kappa=\sqrt{\frac{(d+b)E_x^c 3G_{12}G_{23}}{dbE_1E_2(bG_{23}+dG_{12})}} \tag{1}$$

که در آن E_x^c، مدول الاستیسیته چندلایه درجهت بارگذاری، E_1 مدول الاستیسیته جنس کامپوزیت در جهت طولی، E_2 در جهت عرضی، G_{12} مدول برشی داخل صفحه و G_{23} مدول برشی خارج صفحه می‌باشد. همچنین b ضخامت لایهٔ 0° و d ضخامت لایه 90° می‌باشد.

در این مقاله، با بکارگیری یکی از مدلهای تاخیربرش موجود و تغییر در پارامتر تاخیر برش، رابطه بسته‌ای برای محاسبه رشد ترک‌های ماتریسی و جداشدگی بین‌لایه‌ای در مواد مرکب متعامد تحت بارگذاری محوری با استفاده از دو دیدگاه برپایهٔ بیشترین تنش و انرژی ارائه خواهد شد و نتایج حاصله با نتایج تجربی و نیمه تحلیلی موجود در پژوهش‌های پیشین مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

2- تئوری مدل تاخیربرشی ارتقا یافته

ابتدا فرض می‌شود در یک چندلایه متعامد، ترک ماتریسی با دانسیته مشخص ایجاد شده است. حال لازمست در این چندلایه، میدان‌های تنش ثانویه ناشی از وجود ترک ماتریسی تعیین شوند. بدین منظور از مدل مقید معادل

1- Equivalent constraint model

سوتیس [18،17]، که در آن تمامی لایه‌های حاوی خرابی با دو لایه همگن (دو مدل مقید) جایگزین می‌گردند، استفاده می‌شود. براین اساس لایه‌های صفر درجه حاوی خرابی بدون تغییر باقی مانده و لایه‌های 90° حاوی خرابی با لایه‌های هموژن با سفتی کاهش یافته جایگزین می‌گردند.

در ادامه، تحلیل تنش مدلهای مقید درنظرگرفته شده صورت می‌پذیرد. شکل 1 تنش چندمحوره صفحه‌ای اعمال شده به یک چندلایه متعامد $[0_m/90_n]_s$ را نشان می دهد. در این مدل $\bar{\sigma}_{11}$ و $\bar{\sigma}_{22}$ تنشهای ریموت محوری و $\bar{\sigma}_{12}$ تنش ریموت برشی اعمالی به چندلایه می‌باشد. در روش ارتقا یافته تاخیربرشی، لایه‌ای که ترک در آن شروع و رشد می‌کند، لایه 90° است و لایه مقید همان لایه صفر درجه. شکل 2 نحوه ایجاد ترک ماتریسی و جداشدگی‌بین‌لایه‌ای نشان داده شده است.

2-1- معادلات تعادل در هر زیرلایه

رابطه بین بار کل ریموت اعمال شده $\bar{\sigma}_{j2}$ با تنشهای صفحه‌ای زیرلایه 90° دارای ضخامت h_2 یعنی $\tilde{\sigma}_{j2}^{(90^\circ)}$ و زیرلایه 0° دارای ضخامت h_1 یعنی $\tilde{\sigma}_{j2}^{(0^\circ)}$ طبق رابطه (2) می‌باشد[18].

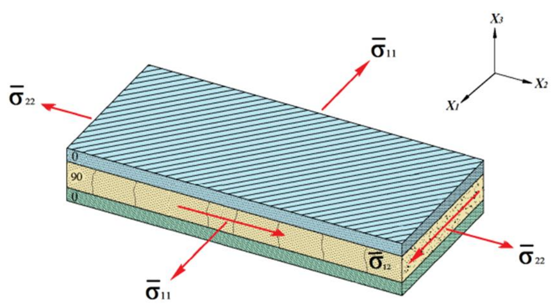
$$\chi\tilde{\sigma}_{j2}^{(0^\circ)}+\tilde{\sigma}_{j2}^{(90^\circ)}=(1+\chi)\bar{\sigma}_{j2},\ j=1,2,\ \chi=\frac{h_1}{h_2} \quad (2)$$

در روش تاخیربرشی ارتقایافته هر لایه بصورت ارتوتروپ همگن درنظر گرفته می‌شود، بنابراین تنشهای داخل صفحه‌ای هر زیرلایه را می‌توان بشکل معادلات ماتریسی (3) نوشت[19].

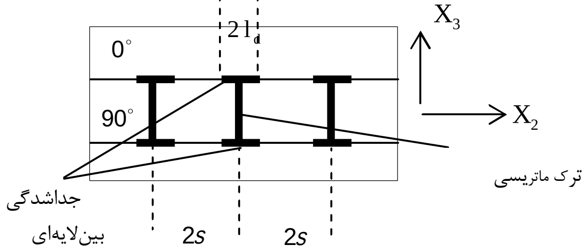
$$\left\{\hat{\sigma}\right\}^{(0^\circ,90^\circ)}=[\hat{Q}]^{(0^\circ,90^\circ)}\left\{\hat{\varepsilon}\right\}^{(0^\circ,90^\circ)} \quad (3)$$

که $[\hat{Q}]^{(0^\circ,90^\circ)}$ به ترتیب ماتریس سفتی صفحه ای در لایه‌های 0° و 90° می‌باشند. با درنظرگرفتن لایۀ مقید 0° و لایۀ حاوی ترک 90°، کاهش خواص الاستیسیته در ناحیۀ تحت آسیب محاسبه می‌شود.

معادلات تعادل در صفحه X_2OX_3 در ناحیه اتصال کامل بین لایه‌ها، طبق رابطه (4) عبارتند از[19].



شکل 1 اعمال تنش متوسط چند محوره در یک چند لایۀ مستعد ترک ماتریسی



شکل 2 ایجاد ترک عرضی و جداشدگی بین لایه ای

$$\frac{d}{dX_2}\tilde{\sigma}_{j2}^{(90^\circ)}+\frac{\tau_j}{h_2}=0,\ j=1,2 \quad (4)$$

که در رابطه فوق، $\tilde{\sigma}_{j2}^{(90^\circ)}$ مقدار میانگین تنش صفحه‌ای زیر لایه نود درجه است. تنش برشی τ_j، ماکزیمم تنش برشی اینترفیس در صفحه X_2OX_3 است که از رابطه (5) بدست می‌آید[18].

$$\tau_j=k_{90^\circ}(u_2-u_1) \quad (5)$$

به‌منظور حل معادلات تعادل و تعیین توزیع تنش‌های چندلایه حاوی خرابی در روش تاخیربرش، لازم است پارامتر تاخیربرش (رابطه 5) تعیین شود. سوتیس این پارامتر را بصورت رابطه (6) تعریف کرد[19].

$$k_{90^\circ}=\frac{3\hat{G}_{23}^{(0^\circ)}\hat{G}_{23}^{(90^\circ)}}{h_2\hat{G}_{23}^{(0^\circ)}+(1+(1-\eta)/2)\eta h_1\hat{G}_{23}^{(90^\circ)}},\eta=\frac{h_2}{h_1} \quad (6)$$

که $\hat{G}_{23}^{(0^\circ)}$ مدول برشی خارج‌صفحه‌ای لایۀ 0° و $\hat{G}_{23}^{(90^\circ)}$ مدول برشی خارج صفحه‌ای لایه 90° است.

با اعمال پارامتر تاخیربرش و استفاده از معادلات تعادل، می‌توان میدان‌های تنش محوری و برشی را در چندلایه بصورت رابطه (7- الف، ب و ج) بدست آورد[17-19].

$$\tilde{\sigma}_{22}=0 \quad \text{(7-الف)}$$

$$\tilde{\sigma}_{22}=\frac{1}{L_1}(1-\frac{\cosh(\sqrt{L_1}x_2)}{\cosh(\sqrt{L_1}s})(\Omega_{11}\bar{\sigma}_{11}+\Omega_{22}\bar{\sigma}_{22}) \quad \text{(7-ب)}$$

$$\tilde{\sigma}_{12}=\frac{1}{L_1}(1-\frac{\cosh(\sqrt{L_1}x_2)}{\cosh(\sqrt{L_1}s})(\Omega_{12}\bar{\sigma}_{12}) \quad \text{(7-ج)}$$

که $\Omega_{11},\Omega_{22},\Omega_{12},L_1,L_2$ ثابت‌های مربوط به ماتریس نرمی $\hat{S}_{ij}^{(0^\circ,90^\circ)}$ در چندلایه‌ای، $\chi=\frac{h_1}{h_2}$ نسبت ضخامت و k_{90° ضریب تاخیربرشی می‌باشند. نحوه محاسبه ثوابت در پیوست مقاله ذکر شده است.

2-2- محاسبه افت سختی در لایه حاوی ترک

در روش تاخیربرشی ارتقایافته، با فرض ایجاد ترک ماتریسی یا جداشدگی بین‌لایه‌ای در لایه 90°، افت سختی ناشی از هر مکانیزم خرابی محاسبه می‌شود و لذا می‌توان معادلات ساختاری برای هر لایه حاوی خرابی را بشکل رابطه (8) نوشت[17].

$$\{\bar{\sigma}^{(90^\circ)}\}=[Q]^{(90^\circ)}\{\bar{\varepsilon}\}^{(90^\circ)} \quad (8)$$

که $[Q]^{(90^\circ)}$ ماتریس سفتی کاهش یافته تک لایه حاوی خرابی است و از رابطه (9) بدست می‌آید[17].

$$[Q]^{(90^\circ)}=[\hat{Q}]^{(90^\circ)}-[R]^{(90^\circ)} \quad (9)$$

همچنین، ماتریس افت سختی $[R]$ بصورت رابطه (10) تعریف می‌شود[17].

$$[R]=\begin{bmatrix}\frac{(Q_{12}^{(0^\circ)})^2}{Q_{22}^{(90^\circ)}}\varphi_{22} & Q_{12}^{(0^\circ)}\varphi_{22} & 0\\ Q_{12}^{(0^\circ)}\varphi_{22} & Q_{22}^{(0^\circ)}\varphi_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}^{(0^\circ)}\varphi_{66}\end{bmatrix} \quad (10)$$

هرگاه خرابی موجود در چندلایه‌ای از نوع ترک ماتریسی باشد، پارامترهای خرابی φ_{22} و φ_{66} از روابط (11-الف و ب) حاصل می‌شوند [17،18].

$$\varphi_{22}=1-\frac{1-\frac{D^{mc}}{\lambda_1}\tanh(\frac{\lambda_1}{D^{mc}})}{1+\alpha_1\frac{D^{mc}}{\lambda_1}\tanh(\frac{\lambda_1}{D^{mc}})} \tag{11-الف}$$

$$\varphi_{66}=1-\frac{1-\frac{D^{mc}}{\lambda_2}\tanh(\frac{\lambda_2}{D^{mc}})}{1+\alpha_2\frac{D^{mc}}{\lambda_2}\tanh(\frac{\lambda_2}{D^{mc}})} \tag{11-ب}$$

لازم بذکر است، هرگاه با اعمال تنش علاوه بر ترک ماتریسی، جداشدگی‌بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی نیز در چندلایه ایجاد شود، تابع تاثیر خرابی در چندلایه بشکل رابطه (12-الف) و (12-ب) اصلاح می‌شود [17].

$$\varphi_{22}=1-\frac{1-\frac{D^{mc}}{\lambda_1(1-D^{ld})}\tanh[\frac{\lambda_1(1-D^{ld})}{D^{mc}}]}{\frac{1+\lambda_1 D^{ld}}{(1-D^{ld})}+\alpha_1\frac{D^{mc}}{\lambda_1(1-D^{ld})}\tanh[\frac{\lambda_1(1-D^{ld})}{D^{mc}}]} \tag{12-الف}$$

$$\varphi_{66}=1-\frac{1-\frac{D^{mc}}{\lambda_2(1-D^{ld})}\tanh[\frac{\lambda_2(1-D^{ld})}{D^{mc}}]}{\frac{1+\lambda_2 D^{ld}}{(1-D^{ld})}+\alpha_2\frac{D^{mc}}{\lambda_2(1-D^{ld})}\tanh[\frac{\lambda_2(1-D^{ld})}{D^{mc}}]} \tag{12-ب}$$

که $D^{ld}=l/s$ چگالی ترک بی بعد جداشدگی بین‌لایه‌ای می باشد.

3-2- تعیین افت سختی با روش تاخیربرشی ارتقایافته

با مشخص شدن ماتریس سفتی کاهش یافته حاوی خرابی و استفاده از ماتریس ABD، می‌توان افت خواص الاستیسته کششی و برشی چندلایه را تعیین کرد (رابطه (13)).

$$A_{ij},B_{ij},D_{ij}=\int_{-H}^{H}Q_{ij}^{(90^\circ)}(1,X_3,X_3^2)dX_3 \tag{13}$$

محاسبه افت سفتی در یک چندلایه متقارن با تعداد لایه های N، مستلزم محاسبه ماتریس A است. پس از محاسبه ماتریس فوق، افت سفتی چندلایه در جهت‌های X_1 و X_2 بصورت رابطه (14) محاسبه می‌شود[17].

$$|A|=\begin{bmatrix}A_{X_1X_1} & A_{X_1X_2} & A_{X_1X_3}\\ A_{X_2X_1} & A_{X_2X_2} & A_{X_2X_3}\\ A_{X_3X_1} & A_{X_3X_2} & A_{X_3X_3}\end{bmatrix}=\sum_k[Q^{(k)}]h_k,$$
$$E_x=\frac{1}{ha_{xx}},E_y=\frac{1}{ha_{yy}} \tag{14}$$

که در معادلات فوق برای محاسبهٔ a_{xx},a_{yy} بایستی $[a]=[A]^{-1}$ باشد.

3- معیارهای رشد خرابی مورد استفاده در روش تاخیربرشی ارتقا یافته

در این بخش با بهره‌گیری از مطالعات اندرسون که با استفاده از بسط تیلور در معادلات تنش در معیار بیشترین تنش و بیشترین کرنش انجام شده بود [17]، مطالعات جدیدی را در روش تاخیربرشی مدل مقید سوتیس با کمک بسط تیلور در معادله تنش مربوط به معیار بیشترین تنش و استفاده از فرضیات نحوه بارگذاری در لایه حاوی خرابی با بسط ریاضی در معادله تنش مربوط به معیار بیشترین کرنش، این روش را ارتقا داده و معادلات مربوط به آن بیان می‌شود. از آنجاییکه دو معیار مهم برای رشد خرابی شامل معیار تنش ماکزیمم و معیار انرژی کرنشی است، در این بخش سعی می‌شود براساس این دو معیار، رشد خرابی در چندلایه‌های متعامد براساس بار اعمالی به چندلایه مدل ارتقا یافته تاخیربرشی و با کمک تحقیقات قبلی انجام شده در روش تاخیربرشی، با فرضهای جدید اعمال شده در این مدل، دو معیار بیشترین تنش و بیشترین کرنش این مدل را ارتقاء داد.

3-1- مدل ارائه شده برای رشد ترک ماتریسی براساس معیار تنش

در این بخش سعی می‌شود با ترکیب مطالعات اندرسون و مدل مقید سوتیس رابطه‌ای برای تنش در مدل تاخیربرشی ارتقایافته بدست آورد. مدل اندرسون قادر است تنها با بهره گیری از میدان تنش تک جهته و اعمال بسط تیلور در این میدان تنش، به بیان رابطه بسته میدان تنش برحسب چگالی ترک با استفاده از دو معیار گفته شده بپردازد، طبق معادلهٔ (6-الف) در مقید سوتیس میدان تنش صفحه‌ای موجود در چندلایه‌ای حاوی ترک عرضی قابل محاسبه است. درادامه با استفاده از بسط تیلور به بازنویسی معادله مذکور با استفاده از روش ارتقایافته پرداخته می‌شود. برای نوشتن میدان تنش لازم است مبدا ترک تعیین شود.

از آنجایی که در وسط دو ترک ماتریسی، تنش عرضی ماکزیمم می‌باشد، هرگاه این تنش به مقدار بحرانی σ_{init} برسد می‌توان گفت ترک ماتریسی اتفاق می‌افتد. با جایگذاری مقدار معیار σ_{init} در $X_2=0$ در رابطهٔ (7-ب) بجای تنش عرضی لایه 90°، رابطهٔ تنش بر حسب دانسیته ترک ماتریسی بدست خواهد آمد. بمنظور ساده‌سازی از فرض مثلثاتی $\cosh x=1+2\sinh^2\frac{x}{2}$ درروابط استفاده می‌شود. بنابراین با جایگذاری بسط فوق، معادله (7- ب) به‌شکل رابطه (15) نوشته می‌شود.

$$\sigma_{init}=\frac{\Omega_{11}\bar{\sigma}_{11}+\Omega_{22}\bar{\sigma}_{22}}{L_1}.(\frac{2\sinh^2[\sqrt{L_1}\,s/4]}{1+2\sinh^2[\sqrt{L_1}\,s/4]}) \tag{15}$$

بدلیل کم بودن فاصلهٔ بین دو ترک و کوچک بودن کمان تابع سینوس هیپربولیک، می‌توان فرض $\sinh^2\sqrt{L_1}(s/4)\approx(\sqrt{L_1}(s/4))^2$ را اعمال نمود و سپس با جایگذاری فرض فوق در معادله (15) پس از ساده‌سازی و جایگذاری ثوابت موجود در پیوست و استخراج ضریب تاخیربرشی k_{90° معادله را بصورت رابطه (16) بازنویسی کرد.

$$\frac{C_1\bar{\sigma}_{11}+C_2\bar{\sigma}_{22}}{\sigma_{init}}-C_3=\frac{8h_1}{k_2s^2}$$
$$C_1=(1+\chi)(S_{12}^{(0^\circ)}+a_1S_{11}^{(0^\circ)})$$
$$C_2=(1+\chi)(S_{22}^{(0^\circ)}+a_1S_{12}^{(0^\circ)})$$
$$C_3=S_{22}^{(0^\circ)}+a_1S_{12}^{(0^\circ)}+\chi(S_{22}^{(90^\circ)}+a_1S_{12}^{(90^\circ)}) \tag{16}$$

با توجه به اینکه $\rho=\frac{1}{s}$ (شکل 2) و با درنظرگیری ثوابت C_1، C_2 و C_3 که با فاکتورگیری از عبارت $\frac{k_{90^\circ}}{h_1}$ از ثوابت Ω_{11}، Ω_{22} و L_1 بدست آورده شده

است، رشد دانسیته ترک ماتریسی براساس معیار تنش ماکزیمم براساس مدل ارتقایافته تاخیربرشی بصورت رابطه (17) بیان می‌شود.

$$\frac{1}{8h_1}\left(\frac{C_1\bar{\sigma}_{11}+C_2\bar{\sigma}_{22}}{\sigma_{\mathrm{init}}}-C_3\right)=\left(\frac{\rho}{\sqrt{k_{90}}}\right)^2 \tag{17}$$

3-2- مدل ارائه شده برای رشد ترک ماتریسی بر حسب انرژی کرنشی

هرگاه چندلایه تحت کرنش محوری باشد، انرژی کرنشی در حضور ترک ماتریسی طبق رابطه (18) عبارت است از[19].

$$G^{\mathrm{mc}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{xx}},D^{\mathrm{mc}})=h_2\left[\bar{\varepsilon}_{\mathrm{xx}}\right]^T\frac{\partial[\bar{Q}]}{\partial D^{\mathrm{mc}}}\left[\bar{\varepsilon}_{\mathrm{xx}}\right]\left|\sin\Phi\right| \tag{18}$$

با تعیین $[\bar{Q}]$، انرژی کرنشی رها شدهٔ ناشی از ترک ماتریسی طبق رابطهٔ (19) نتیجه می‌شود[19].

$$\begin{aligned}G^{\mathrm{mc}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{xx}},D^{\mathrm{mc}})&=h_2(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{xx}})^2\times\\&[(\frac{\hat{Q}_{12}^{(90^\circ)2}}{\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}}\cos^4\Phi+2\hat{Q}_{12}^{(90^\circ)}\sin^2\Phi\cos^2\Phi\\&+\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}\sin^4\Phi)\times\frac{\partial\phi_{22}}{\partial D^{\mathrm{mc}}}\\&+4\hat{Q}_{66}^{(90^\circ)}\sin^2\Phi\cos^2\Phi\frac{\partial\phi_{66}}{\partial D^{\mathrm{mc}}}]\left|\sin\Phi\right|\end{aligned} \tag{19}$$

در مدل ارتقایافته تاخیر برشی در مطالعه حاضر با توجه به اینکه فرض چندلایه‌ای تحت تنش تک محورهٔ کششی در نظر گرفته شده و مقدار کرنش اعمالی نیز در چندلایه ای دارای ترک ماتریسی، ثابت است، رابطه بین برآیند نیروهای اعمالی با تنش طبق معادلهٔ (20) بدست می‌آید.

$$N_{\mathrm{x}}=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{\mathrm{x}}dx \tag{20}$$

که t ضخامت تک لایه است. اگر فرض شود که بار اعمالی به چندلایه ثابت بماند، می‌توان نوشت (رابطه (21)).

$$N_{\mathrm{x}}=\sigma_{\mathrm{x}}\times t \tag{21}$$

از طرفی ارتباط بین برآیند نیرو با کرنش طبق معادلهٔ (22) می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix}N_{\mathrm{x}}\\N_{\mathrm{y}}\\N_{\mathrm{z}}\end{Bmatrix}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}}\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}&\bar{Q}_{12}&\bar{Q}_{16}\\\bar{Q}_{12}&\bar{Q}_{22}&\bar{Q}_{26}\\\bar{Q}_{16}&\bar{Q}_{26}&\bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\left\{\int_{z_{\mathrm{K}-1}}^{z_{\mathrm{K}}}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{\mathrm{x}}\\\varepsilon_{\mathrm{y}}\\\varepsilon_{\mathrm{z}}\end{Bmatrix}dz\right\} \tag{22}$$

از آنجایی‌که ε_x، ε_y، ε_z کرنشهای سطح میانی چندلایه است، این مقادیر نمی‌تواند تابعی از z باشد، از اینرو روابط فوق بصورت (23) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix}N_{\mathrm{x}}\\N_{\mathrm{y}}\\N_{\mathrm{z}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}\\A_{12}&A_{22}&A_{26}\\A_{16}&A_{26}&A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{\mathrm{x}}\\\varepsilon_{\mathrm{y}}\\\varepsilon_{\mathrm{z}}\end{Bmatrix} \tag{23}$$

که سفتی محوری A_{ij} از رابطه (14) قابل بیان است.

فرض شود چندلایه تحت بارگذاری محوری در جهت x قرار گرفته باشد (رابطه (24)).

$$N_y=0,N_z=0,\varepsilon_y=0,\varepsilon_z=0 \tag{24}$$

بنابراین معادلهٔ (21) با فرضیات (24)، به رابطهٔ (25) تبدیل می‌شود.

$$N_x=A_{11}.\varepsilon_{xx} \tag{25}$$

بنابراین کرنش محوری حاصل آن از رابطه (26) به‌دست می‌آید.

$$\varepsilon_{\mathrm{xx}}=N_{\mathrm{x}}.A_{11}^{-1} \tag{26}$$

با جایگذاری رابطهٔ (21) در (26) ارتباط تنش با کرنش طبق معادلهٔ (27) بدست می‌آید.

$$\sigma_x.t.A_{11}^{-1}=\varepsilon_{xx} \tag{27}$$

با جایگذاری ε_{xx} از رابطهٔ (27) در رابطهٔ (19)، رابطه ای حاصل می‌شود که انرژی رها شده ناشی از ترک ماتریسی در چندلایه برحسب توزیع تنش اعمالی به چندلایه با استفاده از مدل تاخیربرش ارتقا یافته بدست می‌آید (رابطه (28)).

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{x}}&=(G^{\mathrm{mc}})^{\frac{1}{2}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{xx}},D^{\mathrm{mc}})t.A_{11}^{-1}\times([h_2(\frac{\hat{Q}_{12}^{(90^\circ)2}}{\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}}\cos^4\Phi\\&+2\hat{Q}_{12}^{(90^\circ)}\sin^2\Phi\cos^2\Phi+\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}\sin^4\Phi)\frac{\partial\phi_{22}}{\partial D^{\mathrm{mc}}}\\&+4\hat{Q}_{66}^{(90^\circ)}\sin^2\Phi\cos^2\Phi\times\frac{\partial\phi_{66}}{\partial D^{\mathrm{mc}}}]\left|\sin\Phi\right|)^{-0.5}\end{aligned} \tag{28}$$

توابع تاثیر خرابی IDEF در رابطه (28) با استفاده از توابع (11- الف و ب) بدست می آید.

3-3- مدل ارائه شده برای رشد جداشدگی بین‌لایه‌ای بر اساس معیار انرژی کرنشی

در بخش 2-2 به نحوه درنظرگیری اثرات خرابی، اعم از ترک ماتریسی و جداشدگی‌بین‌لایه‌ای، با تعریف یک ماتریس سفتی کاهش یابنده بر طبق معادله (9)، پرداخته و در ادامه توابع تاثیر خرابی برای هریک از خرابی‌ها آورده شد. در حالت ترک ماتریسی ماتریس تاثیرخرابی تابعی از D^{mc} و در حالت جداشدگی‌بین‌لایه‌ای تابعی از $D^{\mathrm{mc}},D^{\mathrm{ld}}$ می‌باشد. لذا با داشتن ماتریس سختی خرابی می‌توان در یک چندلایه‌ای تحت کرنش محوری، انرژی کرنشی رها شده برای ایجاد جداشدگی‌بین‌لایه‌ای حاصل از کرنش محوری را بصورت رابطه (29) درنظرگرفت.

$$G^{\mathrm{ld}}(\varepsilon,D^{\mathrm{mc}},D^{\mathrm{ld}})=\frac{h_2}{2}[\bar{\varepsilon}_{xx}]^T\frac{\partial[\bar{Q}]}{\partial D^{\mathrm{ld}}}[\bar{\varepsilon}_{\mathrm{xx}}]\sin\Phi \tag{29}$$

با جایگذاری ماتریس سختی کاهش یافته در رابطه فوق، درنهایت انرژی کرنشی رها شده ناشی از ایجاد جداشدگی بین‌لایه‌ای در یک دانسیته مشخص ترک ماتریسی مطابق رابطه (30) می‌باشد.

$$\begin{aligned}&G^{\mathrm{ld}}(\bar{\varepsilon}_{xx},D^{\mathrm{mc}},D^{\mathrm{ld}})=\\&\frac{h_2}{2}(\bar{\varepsilon}_{xx})^2\times[(\frac{\hat{Q}_{12}^{(90^\circ)2}}{\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}}\cos^4\Phi+2\hat{Q}_{12}^{(90^\circ)}\sin^2\Phi\cos^2\Phi\\&+\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}\sin^4\Phi)\times\frac{\partial\phi_{22}}{\partial D^{\mathrm{ld}}}+4\hat{Q}_{66}^{(90^\circ)}\sin^2\Phi\cos^2\Phi\frac{\partial\phi_{66}}{\partial D^{\mathrm{ld}}}]\left|\sin\Phi\right|\end{aligned} \tag{30}$$

بدیهی است که رشد جداشدگی‌بین‌لایه‌ای زمانی زخ می‌دهد که G^{ld} برابر با چقرمگی شکست جنس چندلایه شود. با برابر قراردادن رابطه فوق با چقرمگی شکست و جایگذاری کرنش $\varepsilon_{\mathrm{xx}}$ برحسب تنش اعمالی از رابطه (27)، می‌توان تنش لازم برای ایجاد جداشدگی با یک طول مشخص در یک دانسیته ترک معلوم را بصورت رابطه (31) تعیین کرد.

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{x}}&=(G^{\mathrm{ld}})^{\frac{1}{2}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{xx}},D^{\mathrm{ld}})t.A_{11}^{-1}([\frac{h_2}{2}.(\frac{\hat{Q}_{12}^{(90^\circ)2}}{\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}}\cos^4\Phi\\&+2\hat{Q}_{12}^{(90^\circ)}\sin^2\Phi\cos^2\Phi+\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}\sin^4\Phi)\frac{\partial\phi_{22}}{\partial D^{\mathrm{ld}}}\\&+4\hat{Q}_{66}^{(90^\circ)}\sin^2\Phi\cos^2\Phi\frac{\partial\phi_{66}}{\partial D^{\mathrm{mc}}}]\left|\sin\Phi\right|)^{-0.5}\end{aligned} \tag{31}$$

که در این رابطه توابع تاثیر خرابی حاصل از جداشدگی‌بین‌لایه‌ای از معادلهٔ (12- الف و ب) بدست می‌آید.

3-4- رشد جداشدگی‌بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی

در این بخش، تلاش می‌شود با استفاده از معیار انرژی، وضعیت رشد جداشدگی‌بین‌لایه‌ای از نوک ترک ماتریسی مورد مطالعه قرار گیرد. بدین منظور، در یک چگالی ترک معین، محدوده طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای را بدست آورده و تنش‌های لازم برای ایجاد آن از معیار انرژی کرنشی محاسبه می‌شود. هرگاه فاصلهٔ بین دو ترک، $2s$ فرض شود، چگالی ترک $\rho = \frac{1}{2s}$ خواهد بود. از اینرو محدودهٔ طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای بین $0 < l_d \leq s$ خواهد بود. بنابراین چگالی ترک معادل حاصل از جداشدگی بین لایه‌ای با طول l_d از رابطه (32) بدست می آید.

$$\rho_{eq} = \frac{1}{2(s - l_d)} \tag{32}$$

حال به ازای این چگالی ترک معادل، تنش اعمالی برای ایجاد آن یادداشت و با تنش حاصل از چگالی ترک اولیه مقایسه می‌شود. هرگاه تنش محاسبه شده بیش‌تر از تنش اولیه باشد، جداشدگی‌بین‌لایه‌ای اتفاق می‌افتد و بالعکس.

4- بحث و نتایج

در این قسمت ابتدا صحت روابط استخراج شده برای افت سفتی چندلایه‌های متعامد بررسی و با نتایج تجربی موجود مقایسه می‌شود. در ادامه با استفاده از دو معیار ذکر شده، رشد ترک ماتریسی بر حسب بارگذاری محوری اعمالی بر چندلایه‌های مختلف، محاسبه و با نتایج تجربی و تحلیلی موجود مقایسه می‌گردد. درنهایت در بخش جمع‌بندی و نتیجه‌گیری، علت استفاده از مدل تاخیربرشی بشکل ارتقایافته بطور مفصل توضیح داده شده و نقاط قوت و ضعف آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

4-1- نتایج حاصل از افت سفتی

برای چندلایه‌های متعامد $[0/90_3]_s$، $[0/90]_s$، با وارد کردن خواص چند لایه برای جنس کامپوزیت الیاف شیشه طبق جدول 1، با تغییر فاصله دو ترک متوالی S، چگالی ترک و چگالی ترک بی بعد D_{mc} در لایهٔ عرضی افزایش می یابد. با تغییر این پارامترها، تابع تاثیرخرابی نیز تغییر کرده و در نهایت ماتریس سفتی تغییر می‌کند.

در نهایت با بدست آمدن ماتریس سفتی در حالت قبل و بعد از ایجاد ترک، مدول الاستیسیته متناظر با چگالی ترک مفروض بدست می‌آید. این نتایج در شکل 3 برای چندلایه‌های فوق آورده شده است که با مشاهدهٔ آنها می‌توان پی برد تطابق قابل ملاحظه ای بین نتایج ارائه شده توسط مدل تاخیربرش ارتقایافته و داده‌های تجربی وجود دارد. براساس نتایج حاصله، اختلاف مقادیر افت سختی در هر دو لایه‌چینی مذکور برای تمامی دانسیته‌های ترک کمتر از 3 درصد می‌باشد.

4-2- نتایج رشد چگالی ترک عرضی بر حسب تنش

4-2-1- معیار تنش

دراین حالت سه لایه‌چینی متعامد $[0_2/90_2]_s$، $[0/90_2]_s$ و $[0/90_4]_s$ جهت مطالعه درنظرگرفته می‌شوند. تنش خرابی σ_{init} برای خواص لایه ارائه شده در جدول 2 برابر 103MPa [15] می‌باشد.

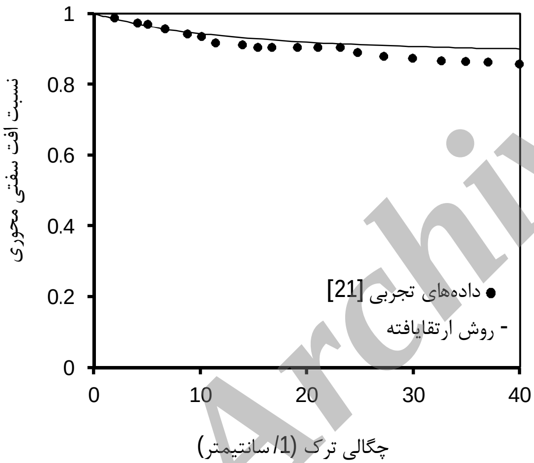
با تغییر چگالی ترک ماتریسی، سفتی تغییر کرده و بدنبال تغییر ماتریس سفتی، مقدار ماتریس ABD چندلایه اصلاح می‌شود.

در ادامه با ایجاد این تغییرات، مقدار تنش لازم برای ایجاد دانسیته ترک مفروض براساس معادله (17) محاسبه و ثبت می‌گردد. نتایج حاصله برای لایه‌چینی‌های مذکور، در شکل 4 ارائه شده و با نتایج تجربی و نیمه تحلیلی موجود مقایسه گردیده است[15]. همانگونه که در شکل 4 مشاهده می‌شود، نتایج ارائه شده حاصل از مدل تاخیربرشی ارتقایافته برای چندلایه‌های $[0_2/90_2]_s$ و $[0/90_2]_s$ دارای تطابق بهتری با نتایج تجربی نسبت به مدل نیمه تحلیلی اندرسون [15] می‌باشند و در تمامی لایه‌چینی‌ها اختلاف نتایج حاصله با نتایج تجربی کمتر از 3/5 درصد می‌باشد.

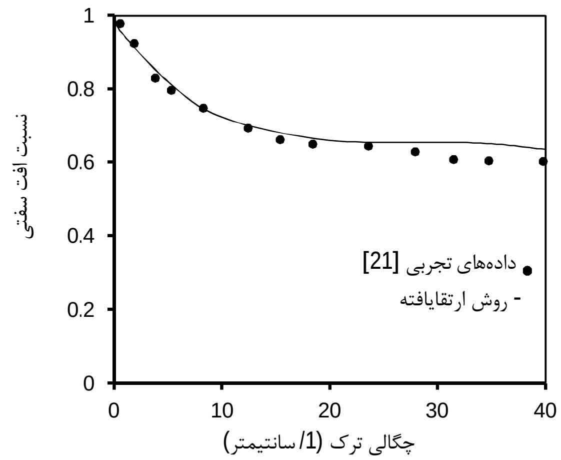
باید توجه شود که در مطالعهٔ اندرسون[16]، نتایج ارائه شده برای چندلایه $[0/90_4]_s$ دارای تطابق بهتری نسبت به نتایج تجربی در مقایسه با دو لایه‌چینی $[0_2/90_2]_s$ و $[0/90_2]_s$ می‌باشد.

جدول 1 خواص جنس کامپوزیت الیاف شیشه با ضخامت داده شده [19]

خواص	مقدار
E_L(GPa)	41/7
E_T(GPa)	13
G_{12}(GPa)	3/40
G_{23}(GPa)	4/58
ν_{12}	0/3
ν_{23}	0/42
ضخامت هر لایه (میلیمتر)	0/203



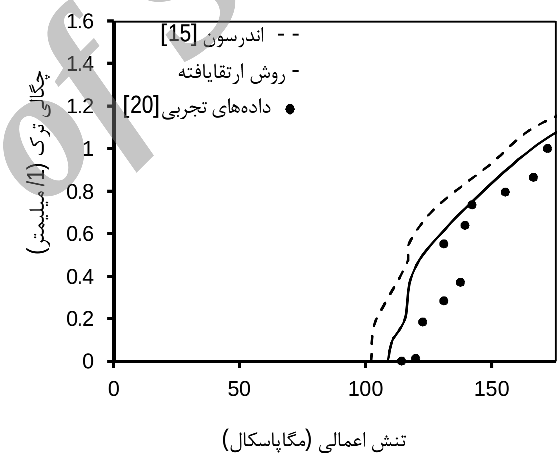
(الف)



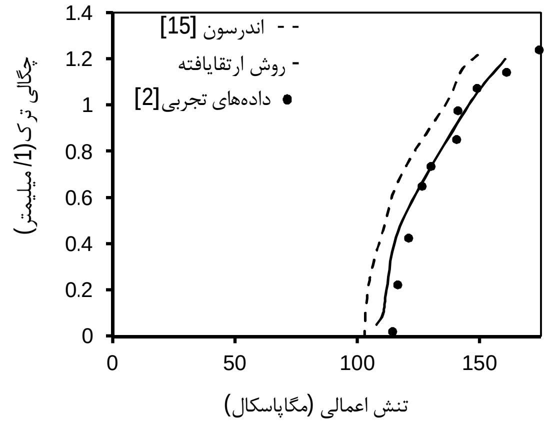
(ب)

شکل 3 نتایج افت سفتی نسبت به چگالی ترک با مدل ارتقایافتهٔ تاخیر برشی، (الف) $[0/90]_s$ (ب) $[0/90_3]_s$.

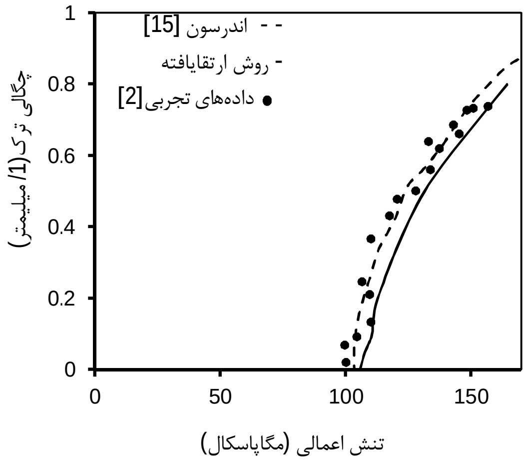
این در حالیست که نتایج ارائه شده توسط مطالعه موجود، برای کلیه چندلایه‌ها دارای تطابق قابل قبولی با نتایج تجربی میباشد لذا، استفاده از روش تاخیربرشی ارتقایافته، نقص مدل ارائه شده توسط اندرسون را برطرف نموده و معیار قابل قبولی را بر طبق انطباقی که نتایج آن با داده‌های تجربی دارد، ارائه می‌دهد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل 4 نتایج حاصل از تاخیر برشی ارتقایافته با استفاده از معیار تنش برای چندلایه‌های (الف) $[0_2/90_2]_s$ (ب) $[0/90_2]_s$ (ج) $[0/90_4]_s$.

4-2-2- معیار انرژی کرنشی

4-2-2-1- چند لایه های متعامد حاوی ترک ماتریسی

با درنظرگیری معیار انرژی کرنشی رابطهٔ (28) و درنظرگیری انرژی رهاشده بحرانی G_c^{mc} برابر 400 J/m² برای جنس کامپوزیت الیاف شیشه با خواص ارائه شده در جدول 2، می‌توان رابطه رشد دانسیته ترک ماتریسی را برحسب تنش اعمالی در چندلایه‌های متعامد مختلف ذکر شده در بخش 4-2-1 بدست آورد. نتایج حاصله در شکل 5 با نتایج تجربی و تحلیلی موجود مقایسه شده است.

همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر تنش حاصل از مدل تاخیربرشی ارتقایافته دارای مقادیر بزرگتری در مقایسه با مطالعات اندرسون می‌باشند [15]. در چندلایه‌های نازک شامل $[0_2/90_2]_s$ و $[0/90_2]_s$، در روش اندرسون انطباق قابل قبولی در مقایسه با داده‌های تجربی مشاهده می‌شود.

با وجود این، مطالعات انجام شده توسط اندرسون در چندلایه ضخیم نمونه $[0/90_4]_s$ نشان می‌دهد که معیار انرژی کرنشی، خطای زیادی در مقایسه با داده‌های تجربی دارد (بیش از 15 درصد).

با مراجعه به شکل (5) و مقایسه مدل تاخیربرشی ارتقایافته با روش اندرسون مشاهده می‌شود که مدل ارتقایافته نسبت به مطالعه اندرسون پیش‌بینی دقیقتر و خطای کمتری را در مقایسه با داده‌های تجربی دارا است. این اختلاف برای چندلایه‌های $[0_2/90_2]_s$ و $[0/90_2]_s$ کمتر از 2 درصد و برای لایه‌چینی $[0/90_4]_s$ زیر 8 درصد می‌باشد.

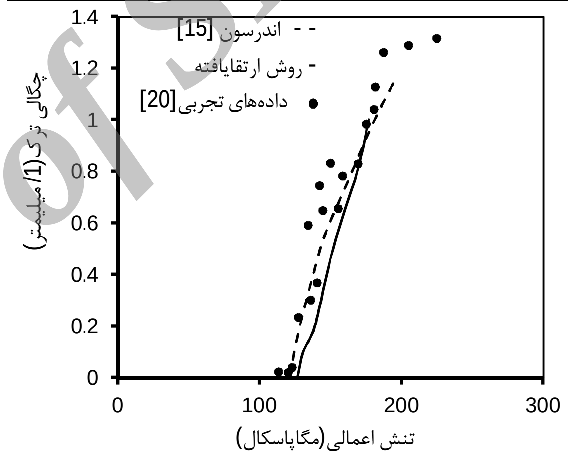
همچنین، با مشاهده همزمان شکل‌های 4 و 5 می‌توان پی برد که معیار تنش در چندلایه‌های ضخیم نسبت به معیار انرژی کرنشی مناسبتر می‌باشد. تعبیر فیزیکی این این پدیده اینست که در چندلایه های ضخیم، تنش در هر لایه در حین ایجاد خرابی تقریبا ثابت می‌ماند.

4-2-2-2- چندلایه‌ای متعامد حاوی جداشدگی‌بین‌لایه‌ای

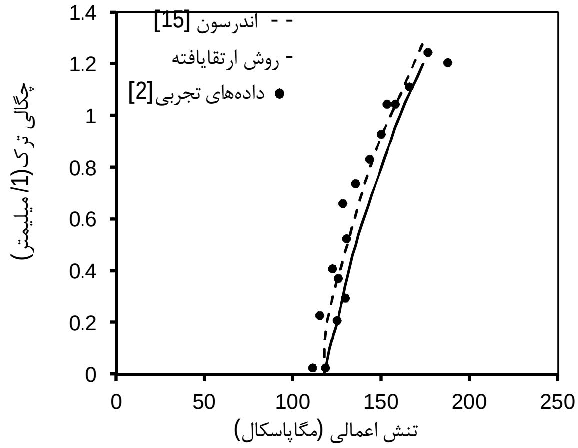
با مطالعه کامل انرژی کرنشی، سرانجام اساسی‌ترین نتایج حاصل از مطالعه مدل تاخیربرشی ارتقایافته ارائه می‌شود. لازم به ذکر است، در کلیه تحقیقات انجام شده قبلی در این زمینه همچون مدل اندرسون، تنها به اثر ایجاد ترک ماتریسی در رفتار چندلایه‌های متعامد اشاره شده است و این مدلها قادر به ارایه یک مدل پیشرونده در پیش‌بینی خرابی‌های بعد از ترک ماتریسی نظیر جداشدگی‌بین‌لایه‌ای نیستند. با وجود این، مدل ارتقایافته تاخیربرشی در این مقاله برچگونگی ایجاد جداشدگی بین‌لایه‌ای بر اثر وقوع ترک ماتریسی می پردازد.

جدول 2 خواص کامپوزیت الیاف شیشه با ضخامت داده شده [15]

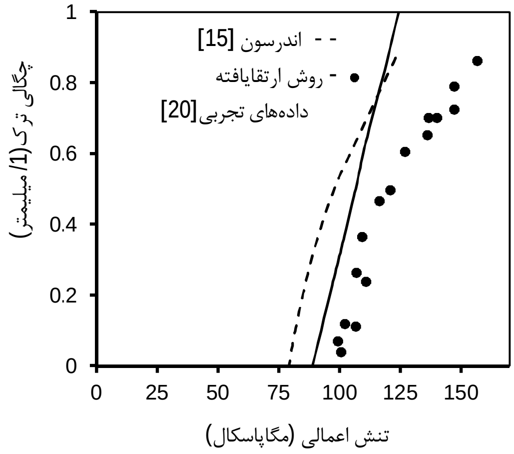
خواص	مقدار
E_L(GPa)	41/7
E_T(GPa)	16
G_{12}(GPa)	3/40
G_{23}(GPa)	4/58
ν_{12}	0/3
ν_{23}	0/42
ضخامت هر لایه (میلیمتر)	0/26



(الف)



(ب)



(ج)

شکل 5 نتایج حاصل روش تاخیر برشی ارتقایافته با استفاده از معیار انرژی کرنشی برای چندلایه‌های (الف) $[0_2/90_2]_s$ (ب) $[0/90_2]_s$ (ج) $[0/90_4]_s$.

در کد موجود، داده‌های ورودی شامل خواص الاستیسیته و ضخامت لایه‌ها وارد شده و ماکزیمم نرخ انرژی کرنشی رها شده G_c^{ld} برابر $400 J/m^2$ درنظر گرفته می‌شود[15]. حال در یک چگالی ترک معین، محدوده طول جداشدگی بین‌لایه‌ای l_d تعیین می‌شود، به ازای یک طول جداشدگی بین‌لایه‌ای دلخواه از این محدوده، چگالی ترک معادل محاسبه می‌شود

برای تعیین جداشدگی‌بین‌لایه‌ای حاصل از ترک ماتریسی، تنش معادل از چگالی ترک اولیه با تنش حاصل از چگالی ترک معادل مقایسه می‌شود، میدان تنش حاصل از چگالی ترک اولیه از معادله (28) و میدان تنش حاصل از چگال ترک معادل با جایگذاری تاثیر توابع تاثیر خرابی معادله (12-الف و ب) در معادله تنش (31) بدست می‌آید. هرگاه تنش ثانویه بیشتر از تنش اولیه باشد، جداشدگی‌بین‌لایه‌ای اتفاق می‌افتد و بالعکس. این نتایج در شکل 6 آورده شده است.

باتوجه به شکل 6-الف در چندلایه‌ای متعامد $[0_2/90_2]_s$، با درنظرگیری مقدار چگالی ترک $\rho=0.8(1/mm)$، مقادیر طول ترک بین‌لایه‌ای می‌تواند بین $0<l_d\le 0.625mm$ تغییر کند. در طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای $l_d=0.5mm$، چگالی ترک معادل عبارتست از $\rho_{eq}=1(1/mm)$. مطابق شکل 6، تنش معادل σ_1 در چگالی ترک معادل ρ_{eq} برابر 176/9 MPa می‌باشد.

حال با مراجعه به دیاگرام خط- نقطه در شکل6–الف، در دانسیته ترک $\rho=0.8(1/mm)$ و طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای $l_d=0.5mm$، مقدار تنش σ_2 برابر 177/4 MPa میباشد. از آنجائیکه $\sigma_2>\sigma_1$ می‌باشد، نتیجه می‌شود که در این دانسیته ترک، جداشدگی‌بین‌لایه‌ای اتفاق می‌افتد.

با توجه به شکل 6-ب در چندلایه متعامد $[0/90_2]_s$ با درنظرگیری مقدار چگالی ترک $\rho=0.5(1/mm)$، طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای می‌تواند بین $0<l_d\le 1mm$ تغییر کند. در طول ترک بین‌لایه‌ای $l_d=0.5mm$، چگالی ترک معادل با استفاده از معادلهٔ (32)، $\rho_{eq}=1(1/mm)$ می‌باشد که طبق شکل 6- ب در تنش معادل σ_1، چگالی ترک معادل آن برابر MPa 163/367 می‌باشد. حال با مراجعه به دیاگرام نقطه‌چین شکل 6–ب، در $\rho=0.5(1/mm)$ و $l_d=0.5mm$، مقدار تنش σ_2 برابر MPa 148/3 می

باشد، با توجه به اینکه $\sigma_2 < \sigma_1$ می‌باشد، نتیجه می‌دهد که در این دانسیته ترک، جداشدگی‌بین‌لایه‌ای اتفاق نمی‌افتد.

با توجه به شکل 6- ج در چندلایه‌ای متعامد $[0/90_4]_s$ با درنظرگیری مقدار چگالی ترک $\rho = 0.5(1/mm)$، مقادیر طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای می‌تواند بین $0 < l_d \le 1mm$ تغییر کند، در $l_d = 1mm$، چگالی ترک معادل با استفاده از معادلهٔ (32)، $\rho_{eq} = 1(1/mm)$ می‌باشد.

طبق شکل (6- ج) تنش معادل σ_1 ترک برابر 118/35 MPa می‌باشد، حال با استفاده از دیاگرام خط‌چین در شکل (6–ج)، در $\rho = 0.5(1/mm)$ و $l_d = 0.5mm$، مقدار تنش σ_2=110/25 MPa می‌باشد، لذا $\sigma_2 < \sigma_1$ نتیجه می‌دهد که در دانسیته ترک جداشدگی‌بین‌لایه‌ای رخ نمی‌دهد.

5- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

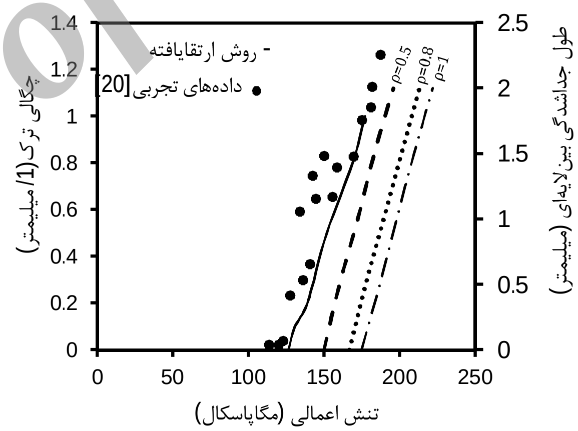
در این مقاله نخست با مطالعه روشهای ارائه شده پیشین در مدل تاخیر برش، مدل کاملتری ارائه گشت که نه تنها دارای دقت بهتری در پیش بینی رفتار خرابی ناشی از ترک ماتریسی در چندلایه‌های متعامد است، بلکه قادر به پیش‌بینی خرابی‌های همچون جداشدگی‌بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی می‌باشد.

در ادامه با بکارگیری دو معیار بیشترین تنش و معیار انرژی کرنشی، یک رابطه عمومی بسته برای درنظرگیری رشد مکانیزم‌های خرابی نظیر ترک ماتریسی و جداشدگی‌بین‌لایه‌ای ارائه و سرانجام نتایج حاصله با نتایج تحلیلی و تجربی موجود مقایسه گردید. نتایج نشان داد، روابط ارائه شده دارای دقت قابل قبولی نسبت به نتایج تجربی می‌باشند. لازم به ذکر است، مدل اندرسون قادر است تنها با بهره گیری از میدان تنش تک‌جهته و اعمال بسط تیلور در این میدان تنش، به بیان رابطه بسته میدان تنش برحسب چگالی ترک با استفاده از دو معیار گفته شده بپردازد. در مدل مقید سوتیس نیز هیچ رابطه بسته‌ای برای بیان رشد چگالی ترک برحسب میدان تنش موجود نمی‌باشد، لذا با اعمال تغییراتی در میدان تنش و استفاده از دو معیار گفته شده، روابط بسته‌ای برای رشد ترک ماتریسی و جداشدگی‌بین‌لایه‌ای در این مقاله ارائه گردید. همچنین قابلیتهای مهم مدل ارتقایافته در مقایسه با مدلهای مشابه که میتواند در آینده مد نظر قرار گیرد عبارتند از:

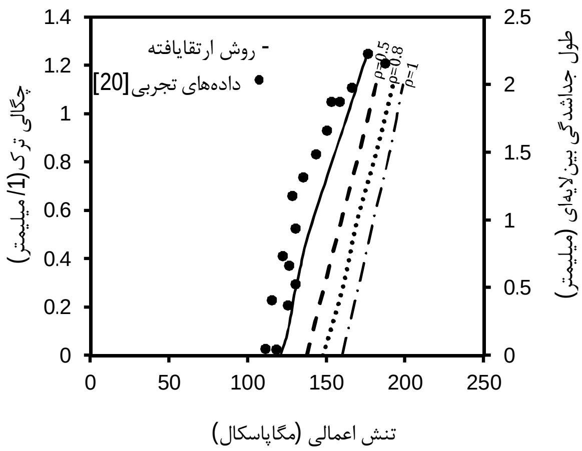
- مطالعه ترک ماتریسی در هر لایه دلخواه علاوه بر لایه 90 درجه.
- گسترش مدل تاخیربرشی در انواع چندلایه‌های زاویه دار.
- ارتقاء مدل با هدف درنظرگیری تنش‌های چندمحوره و بارگذاری خستگی

6- پیوست

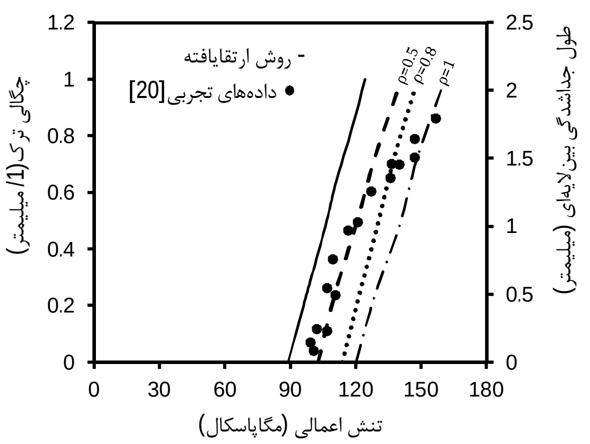
ثوابت مدل تاخیر برشی ارتقایافته



(الف)



(ب)



(ج)

شکل 6 نتایج حاصل برای انرژی کرنشی چندلایه‌ای‌های دارای ترک بین‌لایه‌ای (الف) $[0_2/90_2]_s$، (ب) $[0/90_2]_s$،(ج) $[0/90_4]_s$. نقاط پراکنده داده‌های حاصل از آزمایش، خط توپرنشان دهنده تغییرات رشد چگالی ترک ماتریسی بر حسب تنش اعمالی معیار انرژی کرنشی مدل تاخیربرشی ارتقایافته، خط‌چین نشان دهنده تغییرات طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای l_d در ρ=/5، نقطه‌چین طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای در/8= ρ ، خط – نقطه‌چین طول جداشدگی‌بین‌لایه‌ای در 1= ρ .

$$L_1 = \frac{k_{90^\circ}}{h_1}(S_{22}^{(0^\circ)} + a_1 S_{12}^{(0^\circ)} + \chi(\hat{S}_{22}^{(90^\circ)} + a_1 \hat{S}_{12}^{(90^\circ)}))$$

$$L_2 = \frac{k_{0^\circ}}{h_1}(S_{66}^{(0^\circ)} + \chi \hat{S}_{66}^{(0^\circ)})$$

$$\Omega_{11} = \frac{k_{90^\circ}}{h_1}(1+\chi)(S_{12}^{(0^\circ)} + a_1 S_{11}^{(0^\circ)})$$

$$\Omega_{22} = \frac{k_{90^\circ}}{h_1}(1+\chi)(S_{22}^{(0^\circ)} + a_1 S_{12}^{(0^\circ)})$$

$$\Omega_{12} = \frac{k_{0^\circ}}{h_1}(1+\chi)S_{66}^{(0^\circ)}$$

$$k_{0^\circ} = \frac{3\hat{G}_{23}^{(0^\circ)}\hat{G}_{23}^{(90^\circ)}}{h_2\hat{G}_{23}^{(90^\circ)} + (1+(1-\eta)/2)\eta h_1 \hat{G}_{23}^{(0^\circ)}}, \eta = \frac{h_2}{h_1}$$

$$a_1 = \frac{S_{12}^{(0^\circ)} + \chi \hat{S}_{12}^{(90^\circ)}}{S_{11}^{(0^\circ)} + \chi \hat{S}_{11}^{(90^\circ)}}, \quad b_1 = \frac{\hat{S}_{12}^{(0^\circ)} + \chi S_{12}^{(90^\circ)}}{\hat{S}_{22}^{(0^\circ)} + \chi S_{22}^{(90^\circ)}}, \quad \chi = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\lambda_1 = h_2\sqrt{L_1}, \qquad \lambda_2 = h_2\sqrt{L_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\chi}(\hat{Q}_{22}^{(90^\circ)}(S_{11}^{(0^\circ)} + bS_{12}^{(0^\circ)}) + \hat{Q}_{12}^{(90^\circ)}(S_{12}^{(0^\circ)} + bS_{22}^{(0^\circ)}))$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\chi}\hat{Q}_{66}^{(90^\circ)}S_{66}^{(0^\circ)}$$

7- مراجع

[1] Z. Hashin, Analysis of Cracked Laminates: A Variational Approach, *Mechanics of Materials*, Vol. 4, No. 2, pp. 121-136, 1985.

[2] J. Andersons, R. Joffe, E. Spârniòð, Statistical model of the transverse ply cracking in cross-ply laminates by strength and fracture toughness based failure criteria, Engineering *Fracture Mechanics*, Vol. 75, pp. 2651-2665, 2008.

[3] A. L. Highsmith, K. L. Reifsnider, Stiffness-Reduction Mechanisms in Composite Laminates, ASTMSTP, Vol. 775, pp. 103, 1982..

[4] K. L, Reifsnider, Some fundamental aspects of the fatigue and fracture response of composite materials, *Proceedings14th Annual Meeting of Society of Engineering Science*, Vol. 19 ,No. 14, pp. 335-375, 1972.

[5] K. L Reifsnider, A. Talug, Analysis of fatigue damage in composite laminates. *International Journal of Fatigue*, Vol. 2, No. 1,pp. 3-11, 1980.

[6] D.L. Flaggs, Prediction of Tensile Matrix Failure in Composite Laminate, *Journal of Composite Materials*, Vol. 19, No. 1, pp.29-40, 1985.

[7] J. Zhang, J. Fan, C. Soutis, Analysis of multiple matrix cracking in $[0_m, 90_n]_s$ composite laminates, *Part 1: in-plane stiffness properties, Composites*, Vol. 23, No. 5, pp.291-298, 1992.

[8] J-M. Berthelot, Analysis of the transverse cracking of cross-ply laminates: a generalized approach, *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, No. 18, pp. 780-805, 1997.

[9] T. Yokozeki, T. Aoki, Overall thermoelastic properties of symmetric laminates containing obliquely crossed matrix cracks. *Composites Science and Technolog*, Vol. 65, NO. 11-12, pp. 1647-1654, 2005.

[10] E. A. Adda-bedia, M. Bouazza, A. Tounsi, A. Benzair, M. Maachou, Prediction of stiffness degradation in hygrothermal aged $[\theta_m, 90_n]_s$ composite laminates with transverse cracking, *Journal of materials processing technology*, Vol. 199, pp. 199-205, 2008.

[11] D. T. G. Katerelos, M. Kashtalyan , C. Soutis, C. Galiotis, Matrix cracking in polymeric composites laminates: Modelling and experiments, *Composites Science and Technology*, Vol. 68, No. 13, pp. 2310-2317, 2008.

[12] N. El . Meichea, A. Tounsi, E.A. Adda-Bedia, A. Megueni, Analysis of the transverse cracking in hybrid cross-ply composite laminates, *Computational Materials Science*, Vol. 46, No. 4, pp. 1102-1108, 2009.

[13] F .Wang, X.Zeng, J Zhang, Predictive Approach to Failure of Copmposite Lamiminate With Equivalent Constrain model, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 23, No. 3, pp. 240-247, 2010.

[14] N. laws, Progressive transverse cracking in composite laminate. *Journal of Composite Materials* Vol. 24, pp. 1225-1242, 1990.

[15] J. Anderson, E. spanish, O. Rubenis, R. Joe , Estimation of laminate stiffness reduction due to cracking of a transverse ply by employing crack initional and propagation based mastercurve. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 44 , No. 5, pp. 441-450, 2008.

[16] J. Andersons, R. Joffe, E. Spârniòð, O. Rubenis, Progressive cracking mastercurves of the transverse ply in a laminate. Polym. Compos. (inpress). *Polm.compos*, Vol. 30, pp. 1175-1182, 2009.

[17] M. Kashtalyan, C. Soutis, Damage Mechanisms in Cross-Plyfiber inforced Composite laminate. *Wiley online library. Inc. DOI: 10.1002/97811180978.weco 64*, 2012.

[18] M. Kashtalian, C. Suties, Stiffness degradation in cross-ply laminates damaged by transverse cracking and splitting, *composites*, Vol. 31,No. 4, pp. 335-351, 2000.

[19]] M. Kashtalyan, C. Soutis, Analysis of composite laminates with intra and interlaminar damage, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 41, No. 2, pp. 152-173, 2005.

[20] J. Fan, J, Zhang, In situ damage evolution and micro/macro transition laminate for composite, *composites science and techlonogy*, Vol. 47, No. 2, pp. 107-118,1993.

[21] D. Nuismer, S. C. Tan. Constitutive Relations of a Cracked Composite Lamina ,*Journal of Composite Materials*, Vol. 22, No. 4, pp. 306-321, 1998.