مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1394، دوره 15، شماره 2، ص‌ص 101-112

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# تعیین ناپایداری کششی غیر خطی وابسته به اندازه برای نانو تیرهای دو سر درگیر با استفاده از تئوری گرادیان کرنش و روش پریشیدگی هوموتوپی

ایمان کریمی پور[1]، احمدرضا کریمی پور[2]،یعقوب طادی بنی[3*]

1- کارشناس ارشد ، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
2- مربی، بخش مهندسی عمران، دانشگاه پیام نور، تهران
3- استادیار دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
*شهرکرد، صندوق پستی 115، tadi@eng.sku.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 30 شهریور 1393
پذیرش: 08 آبان 1393
ارائه در سایت: 03 دی 1393

*کلید واژگان:*
نیروی واندروالس
روش پریشیدگی هوموتوپی
اثر اندازه
نظریه گرادیان کرنش
ناپایداری کششی

**چکیده**

در دهه اخیر مدل کردن ناپایداری سازه‌های نانویی علاقه‌مندان زیادی را درزمینه نانو مکانیک و مکاترونیک به خود جلب کرده است. سوئیچ‌های نانو مکانیکی اساس ساخت و طراحی سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی مانند نانو عملگرها هستند. یک نوع معمول سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی نانو تیرهای دو سر درگیر بوده که در آینه‌های میکرو استفاده می‌شود. در مقیاس نانو کاهش فاصله بین دو الکترود باعث ایجاد تعامل مولکولی نیروی واندروالس می‌شود که باید در طراحی و ساخت سیستم‌های نانو موردتوجه قرار گیرد. در این مقاله نظریه گرادیان کرنش برای پیش‌بینی ناپایداری ولتاژ کششی وابسته به‌اندازه نانو تیرها که شامل زیرمجموعه‌ای از سیستم‌های الکترومکانیکی هستند بکار برده می‌شود . نظریه کرنش غیرخطی ون کارمن برای به دست آوردن معادله حاکم غیرخطی بر تیر استفاده شده و نیز اثر نیروی واندروالس در معادلات حاکم در نظر گرفته‌شده است. روش تحلیلی پریشیدگی هوموتوپی برای حل معادلات غیرخطی سیستم بکار برده شد و اثر نیروی جاذبه بین‌مولکولی واندروالس و اثر وابستگی به‌اندازه و نیز اهمیت اثر توام وجود این دو پارامتر روی عملکرد ناپایداری سیستم، ازجمله خیز میانی ماکزیمم و ولتاژ ناپایداری موردبحث قرارگرفته است. بر اساس یافته‌های این تحقیق می‌توان نتیجه گرفت که نیروی بین‌مولکولی واندروالس ولتاژ ناپایداری را کاهش می‌دهد و پارامتر اثر اندازه در مقیاس‌های نانو منجر به افزایش پارامترهای ناپایداری ازجمله ولتاژ ناپایداری می‌گردد .همچنین روش پریشیدگی هوموتوپی می‌تواند به‌عنوان یک روش کارآمد برای تحلیل سازه‌های نانویی در مقیاس کمتر از میکرون مورداستفاده قرار گیرد.

# Determination of size-dependent non-linear pull-in instability of clamped nano-Beam based on the modified strain gradient theory using HPM

Iman Karimipour[1], Ahmadreza Karimipour[2],Yaghoub Tadi Beni[1*]

1- Faculty of Engineering, Shahrkord University, Shahrkord, Iran
2-Department of Civil Engineering, Payam Noor University, Tehran, Iran
* P.O.B. 115 , Shahrekord , Iran, tadi@eng.sku.ac.ir

**ARTICLE INFORMATION**

Original Research Paper
Received 21 September 2014
Accepted 30 October 2014
Available Online 26 December 2014

*Keywords:*
Van der Waals force
HPM
size effect
strain gradient theory
pull-in instability

**ABSTRACT**

In recent decades, modeling the instability of nanostructures has attracted a great deal of attention in nanomechanics. Nanomechanical switches are fundamental building blocks for the design of NEMS applications, such as nanotweezers and nanoscale actuators. One common type of NEMS including nano-bridge in micro mirrors, is used. At nano-scales, the decreasing gap between the two electrodes produces surface traction due to molecular interaction such as van der Waals that must be taken into account in the analysis of NEMS. In this study, strain gradient theory has been used to investigate the size dependent pull-in instability of beam-type (NEMS) where an inherent instability is found in them. The von-Karman nonlinear strain has been applied to derive the constitutive equation of the system. Effect of intermolecular force has been included in the nonlinear governing equations of the system. Homotopy perturbation method (HPM) has been employed to solve the nonlinear equations. Effect of intermolecular attraction and the size dependency and the importance of coupling between them on the instability performance i.e., critical deflection and instability voltage have been discussed. According the findings of this research, it can be concluded that intermolecular forces decrease pull-in voltage, and size effect parameter in nano scale leads to an increase of pull-in parameters. Also, HPM method can be applied as an efficient method to analyze beam type nano structures.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

I. Karimipour, A.R. Karimipour,Y. Tadi Beni, Determination of size-dependent non-linear pull-in instability of clamped nano-Beam based on the modified strain gradient theory using HPM, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 2, pp. 101-112, 2015 (In Persian)

## 1- مقدمه

در سال‌های اخیر سیستم‌های میکرو الکترومکانیک به‌عنوان یک فناوری جدید در شاخه‌های مختلف همانند مکانیک, حرارت, شیمیایی, نورانی, مغناطیس, الکتریکی و غیره کاربردهای بسیار متنوعی پیدا نموده است. برای نمونه می‌توان به کاربرد میکرو تیرها در میکروسکوپ‌های اتمی [1]، میکرو سوئیچ‌ها،حسگرهای جرم، شتاب سنج‌های میکرو، آینه‌های میکرو [2]، پنجره‌های تنظیم نور [3] اشاره کرد. امروزه سیستم‌های نانو الکترومکانیک به‌طور گسترده‌ای برای توسعه ابزارهای نانویی همانند گیره‌ها، سوئیچ‌ها و غیره استفاده می‌شود[1]. عملکرد عمده این سیستم‌ها بر اساس تغییر شکل یک تیر در ابعاد میکرو است. لذا مطالعه رفتار و کنترل میکرو تیرها از اهمیت خاصی در علوم و مهندسی برخوردار خواهد بود. مطالعه مشخصات ناپایداری در سیستم‌های میکرو الکترواستاتیک در دو دهه اخیر توسط محققین مختلفی بررسی‌شده است اما این مطالعات در مقیاس نانو انجام نگرفته است[۲،3]. با کاهش ابعاد از میکرو به نانو، پدیده‌های مختلفی ظاهر می‌گردد که در این مقاله دو اثر از این پدیده‌ها موردبررسی قرارگرفته است. اولین پدیده‌ای که در مقیاس نانو ظاهر می‌شود نیروهای بین‌مولکولی همانند نیروی کازمیر و واندروالس می‌باشد که در این مطالعه تنها نیروی واندروالس موردبررسی قرارگرفته است.

مدل‌های زیادی برای شبیه‌سازی پدیده‌ی جذبی در رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو و نانو تیرهایی که توسط جریان الکتریسیته تحریک می‌شوند، ارائه‌شده‌اند که به بیان تعدادی از آن‌ها می‌پردازیم.

یونس و نایفه یک مدل غیرخطی برای میکرو تیرهایی که تحت نیروی الکترواستاتیکی قرارگرفته بودند، ارائه کردند که نیروی ذخیره‌شده در میکرو تیر و کشش صفحه‌ی میانی تیر را شامل می‌شد. آن‌ها به‌صورت عددی به حل مسئله پرداختند و تغییر مکان استاتیکی میکرو تیر تحت تأثیر ولتاژ مستقیم را موردبررسی قراردادند. آن‌ها با استفاده از روش شوتینگ [4] به حل مقادیر ویژه مسئله ارتعاش تیر حول نقطه‌ی پایدار آن پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که در نظر نگرفتن کشش صفحه‌ی میانی باعث خطای قابل‌توجهی در به دست آوردن ولتاژ پدیده ناپایداری جذبی می‌شود [4]. مطالعه اثر نیروهای کازمیر و واندروالس روی ناپایداری میکرو سازه‌ها در مطالعات مختلفی انجام شده است[5،6]. طادی و کریمی پور  با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اثرات نیروی واندروالس بر روی تیر یکسر درگیر را مطالعه کردند [7]. نیروی واندروالس درصورتی‌که فاصله بین اجزای یک نانو عملگر کمتر از ده نانومتر باشد, دارای اهمیت خواهد بود[2]. در این حالت جاذبه بین دو جزء متناسب با عکس توان سوم فاصله جدایی دو جزء می‌باشد [8]. فرخ‌آبادی و همکارانش رفتار ناپایداری را در ورق‌های میکرو با فرض اثر نیروی واندروالس بررسی نمودند [6]. دکوسنس و همکارانش اثر نیروی واندروالس را بر روی ولتاژ ناپایداری در نانولوله کربنی بر پایه عملگرهای میکرو الکترومکانیکی انجام دادند [9]. رهایی فرد و همکارانش خیز و ناپایداری استاتیکی میکرو تیرهای دو سر درگیر را بر اساس نظریه کوپل تنش اصلاح‌شده ارائه دادند. آن‌ها در این مطالعه اثرات نیروهای بین‌مولکولی را نادیده گرفتند و تنها اثر نیروی الکترواستاتیک را در معادلات خود اعمال نمودند[10]. اثر نیروی واندروالس توسط طادی و همکارانش بر نانو تیرها با استفاده از تئوری کوپل تنش مورد بررسی قرار گرفت.آن‌ها در مدل خود از اثرات نیروی محوری و کشش صفحه میانی نانو تیر صرف نظر کردند [11].

در ادامه پس از ذکر مقدمه‌ای به بررسی دومین پدیده مهم در سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی پرداخته می‌شود.

ایده اصلی، واردکردن مشتقات کرنش در رابطه انرژی کرنش برای اولین بار توسط برنولی و اویلر ارائه‌شده است [12] ولی برای مدت زیادی رابطه ارائه‌شده توسط آن‌ها موردتوجه محققان قرار نگرفت. برادران کوسرات [13]برای اولین بار فرمولاسیونی برای تأثیرات گرادیان کرنش در روابط الاستیسیته بیان کردند و مفهوم کوپل تنش را بیان کردند؛ لذا برادران کوسرات در بیان رفتار مواد اقدام به در نظر گرفتن شش درجه آزادی (سه درجه آزادی جابجایی و سه درجه آزادی دورانی) در هر نقطه از جسم نمودند. در سال 1965 میندلین با واردکردن مشتقات مرتبه دوم کرنش در فرم خطی سازی شده از نظریه کوسرات، فرم جدیدی از نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش را ارائه کرد [14]. محققان زیادی از نظریه گرادیان کرنش برای تحلیل رفتار مواد استفاده کرده‌اند، ولی کاربرد این نظریه در پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو است. مطالعات تجربی نشان داده است که وقتی ابعاد جسم در مقیاس میکرو باشد نظریه الاستیسیته کلاسیک قادر به پیش‌بینی رفتار مواد نخواهد بود. ازاین‌رو با توجه به گسترش روزافزون کاربرد مواد در ابعاد میکرو، بسط و گسترش نظریه‌های الاستیسیته غیرکلاسیک برای پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو ضروری به نظر می‌رسد. با توجه به اینکه نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش با واردکردن طول مشخصه ماده در معادلات ساختاری خصوصیات ماده را نیز در نظر می‌گیرد، نتایج متفاوتی نسبت به نظریه‌های کلاسیک دارد. در نانو ساختارها، فضای خالی بین اتم‌ها نسبت به ابعاد نانو ساختار شایان توجه بوده و نمی‌توان آن را نادیده گرفت ضمناً، طول مشخصه داخلی نانو ساختارها در مرتبه طول مشخصه خارجی آن‌ها می‌باشد، بنابراین توجیه استفاده از نظریه مکانیک محیط پیوسته کلاسیک برای مدل‌سازی نانو ساختارها که اساساً برفرض پیوستگی استوار است، مبهم می‌باشد. برای رفع این ابهام، برخی محققین بجای نظریه کلاسیک از نظریه‌های محیط پیوسته غیر کلاسیکی که می‌توانند تأثیرات ابعاد کوچک (در حد نانومتر) و ناپیوستگی ذاتی نانو ساختارها را در نظر بگیرد، بهره می‌برند. نظریه گرادیان کرنش، یکی از نظریه‌های محیط پیوسته غیر کلاسیک است که تأثیرات مقیاس‌های کوچک و عدم پیوستگی محیط مادی در معادلات مشخصه این نظریه لحاظ شده است. دومین پدیده ایجادشده در مقیاس نانو وابستگی به‌اندازه مشخصات مادی می‌باشد. در نظریه گرادیان کرنش برخلاف آنچه در مکانیک کلاسیک بیان می‌شد تنش علاوه بر کرنش به گرادیان کرنش نیز وابسته است. روابط جدید در نظریه گرادیان کرنش با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل کل استخراج‌شده است. در نظریه گرادیان کرنش پارامتری به نام پارامتر اثر طول معرفی می‌شود که ماهیتی آماری داشته و نشان می‌دهد که رفتار ماده در مقیاس میکرومتر به ابعاد ماده بستگی دارد، این موضوع در نظریه الاستیسیته کلاسیک به دلیل نبود این پارامتر در معادلات قابل‌بیان نبود. باید توجه داشت در غیاب پارامتر اثر طول معادلات به‌دست‌آمده در نظریه گرادیان کرنش به همان معادلات ارائه‌شده در مکانیک کلاسیک تبدیل می‌شود. این ضریب باید در معادلات غیرخطی و تغییر شکل‌های بزرگ ماده ظاهر شود. بطورکلی مواد نانو چون ساختار آن‌ها در ابعاد نانومتر است و مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که رفتار مواد در ابعاد میکرومتر و نانومتر به ابعاد بستگی دارد لذا پارامتر اثر ابعاد (که به آن اثر طول نیز گفته می‌شود) در معادلات تغییر شکل الاستیک مواد در ابعاد نانومتر بایستی لحاظ گردد. در کاربردهای مهندسی اثر ابعاد ماده اهمیت به خصوصی دارد.

1- Atomic Force Microscopy
2- Micro Mirrors
3- Grating Light Valves
4- Shouting Method

نظریه کلاسیک، قابلیت توصیف رفتار وابستگی به‌اندازه را در سازه‌های بسیار کوچک ندارد بنابراین نظریه‌های غیرکلاسیک همانند الاستیک غیر موضعی[15]، تنش کوپل[16]، نظریه گرادیان کرنش[17]، نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده[18]و غیره در سال‌های اخیر برای در نظر گرفتن اثر اندازه پیشنهادشده است. برای حضور پارامتر اثر طول در معادلات معمولاً از نظریه کوسرات [13] استفاده می‌شود. مطالعات بر روی نتایج پارامتر اثر طول ماده در عمل بر روی فلزات در ابعاد میکرومتر (با ساختار نانومتری) توسط فلک و همکارانش در سال 1994 [ 19] شروع شد و ازآن‌پس توسط محققین دیگر استفاده شده است [20-22]. اثرات وابستگی به‌اندازه به‌صورت قابل‌توجهی خود را در آزمایش‌های تغییر شکل میکرو سازه‌ها نشان می‌دهد. بررسی‌ها نشان داده است که سختی پیچشی سیم مسی با کاهش یافتن قطر سیم از 170 به 12 میکرومتر سه برابر افزایش می‌یابد[19]. همچنین رفتار قابل‌توجه اثر اندازه در تعدادی از انواع پلیمرها مشخص‌شده است [23]. در آزمایش‌های دیگر با استفاده از تست خمش در مقیاس میکرو، طول مشخصه برای مس 4 میکرومتر و برای نیکل 5 میکرومتر تعیین شد [24]. همه این آزمایش‌های تجربی نشان می‌دهند که در مقیاس میکرو/نانو ثابت‌های الاستیک ماده وابستگی شدیدی به ابعاد سازه دارد [25]. لذا برای در نظر گرفتن اثر اندازه سازه از تئوری‌های مربوطه که قابلیت مدلسازی این اثر را دارند همانند گرادیان کرنش باید استفاده شود. در مراجع روش‌هایی همانند روش دینامیک ملکولی و آزمایشگاهی برای اندازه گیری پارامتر اثر اندازه بیان شده است. با توجه به رفتار آماری پارامترهای اثر طول، قابل پیش‌بینی است که در نظر گرفتن تغییر شکل‌ها به‌صورت تغییر شکل‌های بزرگ و متعاقباً معادلات غیرخطی جواب‌های مناسب‌تری را برای میکرو سازه‌ها حاصل می‌نمایند.

اثر دیگر در مقیاس نانو وجود اثرات لایه سطحی می‌باشد. اثر لایه سطحی یکی از پدیده‌های قابل‌توجهی است که روی پاسخ مکانیکی و فیزیکی نانو سازه‌ها تأثیر زیادی دارد. هی و لیله [26] پی بردند که مدول یانگ در نانو ساختارها وابستگی قابل‌توجهی به اثرات لایه سطحی دارد که تأثیر قابل‌توجه این پدیده بر روی رفتار سازه‌ها در مقیاس نانو را تائید می‌کند. این پدیده در مراجع زیر بررسی‌شده اما در این مطالعه از اثر آن صرف‌نظر شده است [27-29].

در سال‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی برای حل عددی مسائل، بعنوان نمونه معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان و مکان که منجر به حل دستگاه‌های معادلات خطی با بعد بالا می‌شوند انجام‌گرفته است. هی روش پریشیدگی هوموتوپی را برای اولین بار در سال 1998 ارائه نمود [30] و نشان داد که این روش جدید بر روش پریشیدگی کلاسیک مزیت دارد و حدس اولیه می‌تواند با ثابت‌های مجهول آزادانه تقریب زده شود، که این مقادیر ثابت را می‌توان با روش‌های زیادی تعیین کرد و نیز تقریب‌های بدست‌آمده از این روش نه‌تنها برای مقادیر کوچک از پارامتر پریشیدگی بلکه برای مقادیر بزرگ نیز دارای اعتبار است. در بخش چهارم نحوه کارکرد این روش بیشتر توضیح داده‌شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود از این روش در تحلیل ناپایداری کشیدگی نانو تیرها استفاده شده است [31-33].

در مقاله حاضر حل معادلات حاکم بر نانو تیر دو سر درگیر برای تعیین پارامترهای ناپایداری ازجمله ولتاژ رهاشدگی نانو تیر بر اساس نظریه الاستیسته گرادیان کرنش انجام می‌گیرد. به دلیل اهمیت برخی پدیده‌ها در مقیاس نانو به مطالعه اثر اندازه و نیروی واندروالس به‌صورت توأمان بر روی ناپایداری این سیستم‌ها با استفاده از روش پریشیدگی هوموتوپی پرداخته می‌شود و نتایج حاصله با روش عددی و مراجع مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی حاصل‌شده است. در ضمن تأثیر اثر اندازه، بر روی ولتاژ ناپایداری در مقایسه با مدل‌های کلاسیک و کوپل تنش ارائه‌شده است و می‌توان گفت این تحقیق برای اولین بار با روش پریشیدگی هوموتوپی حل مسائل نانو تیر در مقیاس نانو را با نظریه گرادیان کرنش به کار می‌گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود بررسی پدیده ولتاژ ناپایداری با حضور نیروی مولکولی واندروالس[2]، همراه با اثر اندازه توسط نظریه گرادیان کرنش در تحقیقات قبلی برای مسائل نانو تیر دوسر درگیر انجام‌نشده است، لذا در این مقاله، نظریه گرادیان کرنش به کار گرفته می‌شود تا اثرات اندازه بر روی پارامترهای ناپایداری نمزهای تیر شکل بررسی شود. در مراجع [34،35] رفتار ناپایداری کششی سیستم‌های میکرو /نانو با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده با صرفنظر از اثر کشش میان صفحه‌ای مطالعه شده است. درحالی‌که در این مقاله تئوری گرادیان کرنش اصلاح‌شده به‌کاربرده شده است که در آن سه پارامتر مقیاس طول داخلی وجود دارد و همچنین کشش صفحه میانی نانو تیر در ساختار مدل در نظر گرفته‌شده است.

## 2- تئوری گرادیان کرنش

با توجه به نظریه گرادیان کرنش غیرخطی پیشنهادشده توسط لام و همکارانش [17]، انرژی کرنش ذخیره‌شده $\bar{U}$ در محیط تشکیل‌شده از مواد الاستیک خطی به همراه تغییر شکل بسیار ناچیز به‌صورت رابطه(1) تا(6) نوشته می‌شود:

$$\bar{U}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+p_i\gamma_i+\tau^{(1)}_{ijk}\eta^{(1)}_{ijk}+m^s_{ij}\chi^s_{ij}\right) \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \quad (2)$$

$$\gamma_i=\varepsilon_{mm,i} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}_{ijk}=&\frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i}+\varepsilon_{ki,j}+\varepsilon_{ij,k})\\&-\frac{1}{15}[\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k}+2\varepsilon_{mk,m})+\\&\delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i}+2\varepsilon_{mi,m})\\&+\delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j}+2\varepsilon_{mj,m})]\end{aligned} \quad (4)$$

$$\chi^s_{ij}=\frac{1}{2}e_{jkl}u_{l,ki} \quad (5)$$

در معادلات (1) تا (6) پارامترهای $u_i$و $\gamma_i$و $\eta^{(1)}_{ijk}$ و $\chi^s_{ij}$ و $\delta_{ij}$ و $e_{ijk}$ بترتیب نشان‌دهنده بردار جابه‌جایی، بردار گرادیان انحراف، تانسور گرادیان کششی انحراف، تانسور گرادیان چرخشی متقارن، دلتا کرونکر و نماد جایگشت می‌باشند، همچنین $\sigma_{ij}$ و $p_i$ و $\tau^{(1)}_{ijk}$ و $m^s_{ij}$ تنش‌های کوشی و تانسورهای تنش مرتبه بالا هستند: (رابطه‌های (6) تا (9))[17]

$$\sigma_{ij}=2\mu\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{mm}\delta_{ij}\right) \quad (6)$$

$$p_i=2\mu l_0^2\gamma_i \quad (7)$$

$$\tau^{(1)}_{ijk}=2\mu l_1^2\eta^{(1)}_{ijk} \quad (8)$$

$$m^s_{ij}=2\mu l_2^2\chi^s_{ij} \quad (9)$$

در معادلات (6) تا (9) ضرایب $\nu$ و $\mu$ به ترتیب ضریب پؤاسون و مدول برشی هستند و همچنین پارامترهای $l_0$ و $l_1$ و $l_2$ به ترتیب

پارامترهای مقیاس طول ماده هستند که بستگی به بردار گرادیان انحراف و تانسور گرادیان کششی انحراف و تانسور گرادیان چرخشی متقارن دارند.

## 3. معادله حاکم غیرخطی

یک ناپایداری ذاتی که معروف به ناپایداری جذبی می‌باشد در سیستم‌های نانو الکترومکانیکی (نمز) وجود دارد .یک سوییچ نمز به‌طورکلی از دو الکترود رسانای جریان الکتریسیته تشکیل‌شده است که یکی از این الکترودها ثابت و دیگری توانایی حرکت دارد .اختلاف‌پتانسیل بین دو الکترود باعث ایجاد نیرو بین دو الکترود و درنتیجه حرکت الکترود بالایی و تغییر مکان آن به سمت الکترود ثابت پایینی می‌شود. هنگامی‌که اختلاف‌پتانسیل بین دو صفحه زیاد می‌شود، تغییر مکان الکترود متحرک زیاد شده و فاصله‌ی بین دو الکترود بسیار کم می‌شود، در این زمان نیروی الکترواستاتیکی به‌طور غیرخطی زیاد می‌شود درحالی‌که نیروی الاستیک نانو تیر به‌صورت خطی زیاد می‌شود تا در یک ولتاژ مشخص مقدار این دونیرو برابر شده و همدیگر را بالانس کنند، در این زمان الکترود بالایی در یک وضعیت به حالت تعادل می‌رسد به‌طوری‌که در این حالت باکمی افزایش ولتاژ، نانو تیر متحرک بالایی به سمت الکترود پایین رها می‌شود. ولتاژ ناپایداری جذبی ولتاژی است که باعث ایجاد ناپایداری در سیستم می‌شود، لازم به ذکر است که اکثراً الکترود متحرک بالایی به‌صورت تیر در نظر گرفته می‌شود، در این حالت ولتاژ و تغییر مکان سوییچ، پارامترهای پدیده‌ی ناپایداری جذبی نامیده می‌شود. ذکر این نکته لازم است که در عمل باید بین ولتاژ ناپایداری جذبی استاتیک و دینامیک تفاوت گذاشت .حالت استاتیک تنها به دلیل وجود نیروی الکترواستاتیک است و اثر اینرسی حرکت تیر نادیده گرفته می‌شود در این حالت فرض می‌شود که ولتاژ به‌آرامی به سیستم وارد می‌شود و کم‌کم زیاد می‌شود، درحالی‌که در ولتاژ ناپایداری جذبی دینامیکی اختلاف‌پتانسیل به‌طور ناگهانی ایجادشده و اینرسی تیر نقش بسزایی در آن دارد و به همین دلیل است که این ولتاژ معمولاً پایین‌تر از حالت استاتیکی است یعنی در ولتاژ پایین‌تری نسبت به حالت استاتیک، الکترود متحرک تغییر مکان بزرگی می‌تواند داشته باشد به‌طوری‌که با سطح پایینی تماس پیدا کند.

واضح است که سوییچ‌ها باید به ولتاژی بالاتر از ناپایداری جذبی برسند تا بتوانند جریان را وصل کنند از طرف دیگر نوسانگرها باید در محدوده‌ای کار کنند که به الکترود ثابت پایینی برخوردی نداشته باشند.

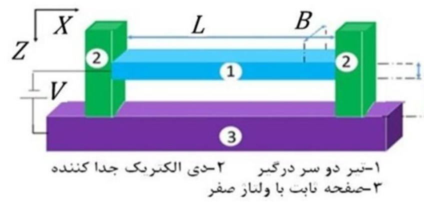
شکل 1 نشان‌دهنده یک نانو تیر دو سر درگیر می‌باشد، در اینجا تیری با مشخصات، طول $L$ و عرض $B$ و ضخامت $H$ در نظر گرفته‌شده است. بر اساس نظریه مدل تیر اولر برنولی میدان جابه‌جایی به‌صورت رابطه(10) بیان می‌گردد:

$$u_1 = u - Z\frac{\partial w}{\partial X} \quad v = 0 \quad w = w(X) \tag{10}$$

در معادله (10) $u$ و $v$ و $w$ به ترتیب مقادیر جابه‌جایی در جهت‌های محورهای $X$ و $Y$ و $Z$ هستند. معادله کرنش غیرخطی ون کارمن برای به دست آوردن معادله حاکم بر سیستم بکار برده شده است. با جایگذاری معادله (10) در معادله (2) تنها مؤلفه غیر صفر $\varepsilon_{ij}$ به‌صورت رابطه (11) به دست خواهد آمد.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial X} - Z\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2 \tag{11}$$

به‌طور مشابه با جایگذاری معادله (10) در معادلات (3-5) مؤلفه‌های غیر صفر $\eta_{ijk}^{(1)}$ و $\gamma_i$ و $\chi_{ij}^{s}$ به‌صورت روابط(12-14) محاسبه می‌شوند:




**شکل** 1 نانو تیر دو سر درگیر

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Z\frac{\partial^3 w}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}\right),$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = -\frac{4}{15}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2},$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + Z\frac{\partial^3 w}{\partial X^3} - \frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}\right),$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2},$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \tag{12}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Z\frac{\partial^3 w}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2},$$
$$\gamma_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \tag{13}$$

$$\chi_{12}^{s} = \chi_{21}^{s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \tag{14}$$

با جایگذاری معادلات (11-14) در معادلات (6 -9) به ترتیب مؤلفه‌های غیرصفر $\sigma_{ij}$ و $p_i$ و $\tau_{ijk}^{(1)}$ و $m_{ij}^{s}$ به‌صورت روابط(15-18) محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{11} = E\left(\frac{\partial u}{\partial X} - Z\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2\right) \tag{15}$$

$$p_1 = 2\mu l_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Z\frac{\partial^3 w}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}\right),$$
$$p_3 = -2\mu l_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \tag{16}$$

$$\tau_{111}^{(1)} = \frac{4}{5}\mu l_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Z\frac{\partial^3 w}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}\right),$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = -\frac{8}{15}\mu l_1^2(\partial^2 w / \partial X^2),$$

$$\tau_{122}^{(1)} = \tau_{133}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} =$$
$$\tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu l_1^2\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + Z\frac{\partial^3 w}{\partial X^3} - \frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}\right),$$

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15}\mu l_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial X^2},$$
$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu l_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \tag{17}$$

$$m_{12}^{s}=m_{21}^{s}=-\mu l_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \quad (18)$$

با توجه به روابط بالا و استفاده از رابطه (1) انرژی پتانسیل کل نانو تیر به‌صورت رابطه(19) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\int_V\Big(\frac{\varepsilon_{11}\tilde{N}}{A}+2\bar{U}\Big)dV=\\&\frac{1}{2}\int_V\Big(\frac{\varepsilon_{11}\tilde{N}}{A}+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+p_i\gamma_i+\tau_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)}+m_{ij}^{s}\chi_{ij}^{s}\Big)dV\end{aligned} \quad (19)$$

باید توجه داشت که در معادله (19)، تنش محوری اولیه در نانو تیر به‌صورت $\tilde{N}/A$ و با توزیع یکنواخت در سطح مقطع تیر در نظر گرفته‌شده است. همچنین در رابطه بالا، اولین‌ترم مربوط به انرژی پتانسیل، نیروی محوری اولیه ( $\tilde{N}$ ) در نانو تیر می‌باشد که می‌تواند تنش ناشی از اثرات حرارت یا تنش محوری اولیه در نانو سازه باشد، ترم دیگر انرژی کرنشی مرتبط با نظریه گرادیان کرنش است، با جایگذاری معادلات (11-18) در معادله (19) می‌توانیم کل انرژی پتانسیل را بصورت رابطه(20) دست آوریم:

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\int_0^L\Big[S_1\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}\Big)^2+S_2\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial X^3}\Big)^2+S_3\Big(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)^2\\&+S_4\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}\Big)^2+\tilde{N}\Big(2\frac{\partial u}{\partial X}+\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)\Big]dX\ ,\\S_1&=\Big(EI+2\mu Al_0^2+\frac{8}{15}\mu Al_1^2+\mu Al_2^2\Big)\\S_2&=I\Big(2\mu l_0^2+\frac{4}{5}\mu l_1^2\Big)\\S_3&=EI\ \ ,S_4=\mu A\Big(2l_0^2+\frac{4}{5}l_1^2\Big)\end{aligned} \quad (20)$$

در معادله (20) $E$ و $I$ و $A$ به ترتیب مدول یانگ و ممان اینرسی حول محور $Y$ و سطح مقطع تیر نانو می‌باشند، با در نظر گرفتن توزیع نیروهای الکترواستاتیک و واندروالس بر واحد طول تیر (نیروی الکترواستاتیک و واندروالس) کار انجام‌شده توسط این نیروها به‌صورت رابطه (21) بدست می‌آید:

$$V=\int_0^L\big[f_{elec}+f_{vdW}\big]w(X)dX \quad (21)$$

همچنین با استفاده از اصل همیلتون به‌صورت $\delta(U\text{-}V)=0$ که در آن $\delta$ نشان‌دهنده نماد تغییرات است معادله دیفرانسیل تغییر شکل سیستم به‌صورت طولی و عرضی بصورت رابطه (22) و (23) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial X}\Big[\tilde{N}+S_3\Big(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)-S_4\times\frac{\partial^2}{\partial X^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)\Big]=0\ , \quad (22)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial X}\Big\{\Big[\tilde{N}+S_3\Big(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)-S_4\times\frac{\partial^2}{\partial X^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)\Big]\frac{\partial w}{\partial X}\Big\}+\\&S_1\frac{\partial^4 w}{\partial X^4}-S_2\frac{\partial^6 w}{\partial X^6}=f_{elec}+f_{vdW}\end{aligned} \quad (23)$$

شرایط مرزی برای تیر دو سر درگیر نانو به‌صورت رابطه (24) می‌باشد:

$$u(0)=u(L)=\frac{\partial}{\partial X}\Big(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)\Big|_{X=0,L}=0, \quad (24a)$$

$$w(0)=w(L)=\frac{\partial w(0)}{\partial X}=\frac{\partial w(L)}{\partial X}=$$

$$\frac{\partial^3 w(0)}{\partial X^3}=\frac{\partial^3 w(L)}{\partial X^3}=0 \quad (24b)$$

همچنین با تصحیح اثرات لبه‌ای برای تیر نازک، نیروی جذب الکترواستاتیک در رابطه (23) به‌صورت رابطه (25) نوشته می‌شود[18].

$$f_{elec}=\frac{\varepsilon_0 BV^2}{2\big(g-w(X)\big)^2}\Big(1+0.65\frac{(g-w(X))}{B}\Big) \quad (25)$$

در معادله بالا $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ واحد اندازه‌گیری الکتریسیته در خلأ نامیده می‌شود، $V$ ولتاژ اعمال‌شده به نانو تیر و $g$ فاصله اولیه بین الکترودهای ثابت و متحرک می‌باشد و نیروی، واندروالس طبق رابطه (26) بدست می‌آید:[ 19]

$$f_{vdW}=\frac{\bar{A}B}{6\pi\big(g-w(X)\big)^3} \quad (26)$$

که $\bar{A}$ ثابت پلانک و $c=2.998\times10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$ سرعت نور می‌باشد، باید توجه داشت که نیروی واندروالس معمولاً برای فواصل کمتر از ده نانومتر مؤثر است در این حالت نیروی جاذبه واندروالس بین دو صفحه الکترود وابسته به معکوس توان سوم فاصله جدایی بین صفحات است[ 7].

### 3-1- بررسی نانو تیر دو سر درگیر

با حل معادله (22) و با لحاظ کردن شرایط مرزی (معادله 24a) می‌توان نشان داد که:

$$\tilde{N}+S_3\Big(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)-S_4\times\frac{\partial^2}{\partial X^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2\Big)=\tilde{N}+\frac{S_3}{2L}\int_0^L\Big(\frac{\partial w}{\partial X}\Big)^2dx \quad (27)$$

در مورد نانو تیر می‌توان رابطه $l_0=l_1=l_2=l$ را برای کاهش پارامترهای اثر اندازه و راحتی بحث بر روی نتایج در نظر گرفت. با این فرض سه پارامتر اثر اندازه به یک پارامتر کاهش می‌یابند. به‌علاوه این فرض کمک می‌کند که پارامتر اثر اندازه از طریق نمودارهای ساده توضیح داده شود بدون آنکه خواننده با پارامترهای زیاد دچار ابهام گردد. همچنین این فرض باعث شده که بتوان راحت‌تر نتایج آزمایشگاهی را با نتایج تئوری گرادیان کرنش مقایسه کرد، از سوی دیگر تعیین یک ثابت $l$ از طریق روش‌های آزمایشگاهی آسان‌تر از اندازه‌گیری سه ثابت ( $l_0, l_1, l_2$ ) می‌باشد.

با جایگذاری $x=X/L$ و $\bar{w}=w/g$ در رابطه (23) و استفاده از رابطه (27) معادله حاکم بی‌بعد برای نانو تیر را می‌توان به‌صورت رابطه (28) به دست آورد:

$$\begin{aligned}&D_1\frac{d^4\bar{w}}{dx^4}-D_2\frac{d^6\bar{w}}{dx^6}-\Big[N+\eta\int_0^1\Big(\frac{d\bar{w}}{dx}\Big)^2dx\Big]\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}=\\&\frac{\alpha_3}{\big(1-\bar{w}(x)\big)^3}+\frac{\beta}{\big(1-\bar{w}(x)\big)^2}+\frac{\gamma\beta}{\big(1-\bar{w}(x)\big)}\end{aligned} \quad (28)$$

باید توجه داشت که وجود عبارت‌های نیرو در معادله (28) و نیز وجود عبارت انتگرال باعث غیرخطی بودن معادله شده که جواب دقیق نخواهد داشت، در ضمن وقتی $\bar{w}=1$ شود در معادله تکینگی خواهیم داشت ولی باید توجه نمود که هیچ‌وقت $\bar{w}=1$ نخواهد شد زیرا قبل از آن ناپایداری اتفاق خواهد افتاد ( $\bar{w}<1$ ) و این تکینگی ازلحاظ فیزیکی غیرممکن خواهد بود. در ضمن شرایط مرزی نیز به‌صورت رابطه (29) به دست می‌آید:

$$\bar{w}(0)=\bar{w}'(0)=\bar{w}'''(0)=0 \tag{29a}$$

$$\bar{w}(1)=\bar{w}'(1)=\bar{w}'''(1)=0 \tag{29b}$$

که:

$$\eta=6\left(\frac{g}{H}\right)^2,\alpha_3=\frac{\bar{A}BL^4}{6\pi g^4EI},\beta=\frac{\varepsilon_0BV^2L^4}{2g^3EI},$$

$$\gamma=0.65\frac{g}{B},\delta=\frac{\mu A}{EI}l^2=\frac{6}{1+\nu}\left(\frac{l}{H}\right)^2,\lambda=\frac{H}{L},$$

$$N=\frac{\tilde{N}L^2}{EI},D_1=1+\frac{53}{15}\delta\ ,D_2=\frac{7}{30}(\lambda)^2\delta \tag{30}$$

معادله (28) معادله حاکم بی‌بعد برای تیرهای دو سر درگیر نانو می‌باشد، اگر $l_0=l_1=0,l_2=1$ باشد به روابط حاکم بر تیر طبق نظریه کوپل تنش[13] و با فرض $l_0=l_1=l_2=0$ به معادله حاکم در نظریه کلاسیک می‌رسیم[19,36].

### 4- حل معادلات حاکم

ازآنجاکه معادله حاکم بر نانو تیر غیرخطی بوده از روش مبتنی بر روش تحلیلی استفاده می‌شود. اساس کار آن بر پایه روش گالرکین می‌باشد که بعد از ساده‌سازی با استفاده از روش پریشیدگی هوموتوپی معادله حل می‌شود[37]. روش گالرکین برای حذف کردن بعد موقعیت استفاده‌شده است. برای حل، تابع خیز تیر را به‌صورت $\bar{w}=a\phi$ فرض می‌کنیم بهتر است تابع $\phi$ بتواند تمامی شرایط مرزی را ارضا کند اگر چنین نیز نباشد در ادامه سایر شرایط مرزی در روابط اعمال خواهد شد.

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}=\frac{\partial\bar{w}}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{31}$$

با جایگذاری $\bar{w}=a\phi$ در معادله (28) و استفاده از رابطه (31) رابطه (32) بدست می‌آید:

$$aD_1\frac{d^4\phi}{dx^4}-aD_2\frac{d^6\phi}{dx^6}-\left[N+\eta a^3\int_0^1\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx\right]\frac{d^2\phi}{dx^2}-\frac{\alpha_3}{(1-a\phi)^3}-\frac{\beta}{(1-a\phi)^2}\left\{1+\gamma(1-a\phi)\right\}=0 \tag{32}$$

حال طرفین معادله(32) را در تابع $\phi(x)$ ضرب کرده و با توجه به دامنه بی‌بعد مسئله از صفرتا یک انتگرال می‌گیریم(رابطه(33)):

$$\int_0^1\phi\left(aD_1\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\phi\left(aD_2\frac{d^6\phi}{dx^6}\right)dx-Na\int_0^1\phi\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)dx-\eta\int_0^1\left(\phi a^3\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)dx\times\int_0^1\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx-\int_0^1\frac{\alpha_3\phi}{(1-a\phi)^3}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\beta\phi}{(1-a\phi)^2}(1+\gamma(1-a\phi))\,\mathrm{d}x=0 \tag{33}$$

با ساده‌سازی رابطه (34) بدست می‌آید:

$$ak_1D_1-ak_4D_2-a^3k_3-ak_2-\int_0^1\left(\frac{\alpha_3\phi}{(1-a\phi)^3}\right)dx-\int_0^1\frac{\beta\phi}{(1-a\phi)^2}(1+\gamma(1-a\phi))dx=0 \tag{34}$$

که در رابطه (34) ضرایب $k_i,i=1,2,3,4$ به‌صورت رابطه (35) و با استفاده ازقاعده روش انتگرال جزءبه‌جزء و اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
k_1&=\int_0^1\phi\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)^2dx,\\
k_2&=N\times\int_0^1\phi\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)dx=-N\int_0^1\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx\\
k_3&=\eta\int_0^1\left(\phi\,\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2\right)dx\int_0^1\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx=-\eta\left[\int_0^1\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx\right]^2\\
k_4&=\int_0^1\phi\left(\frac{d^6\phi}{dx^6}\right)dx=\int_0^1-\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)^2dx
\end{aligned} \tag{35}$$

برای نانو تیر دو سر درگیر تابع انتخاب $\phi$ که برخی از شرایط مرزی را ارضا می‌کند به‌صورت رابطه(36) در نظر گرفته می‌شود:

$$\phi=\cosh(\chi x)-\cos(\chi x)-\left(\frac{\cosh(\chi)-\cos(\chi)}{\sinh(\chi)-\sin(\chi)}\right)(\sinh(\chi x)-\sin(\chi x)) \tag{36}$$

که $\chi=4.730040745$ می‌باشد. با توجه به اصل پریشیدگی هوموتوپی رابطه (37) را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&L(a)+N(a)=0\\
&L(\mathrm{a})=aD_1\int_0^1\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)^2dx+aD_2\int_0^1\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)^2dx+Na\int_0^1\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx\\
&N(a)=a^3\eta\left[\int_0^1\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx\right]^2-\int_0^1\left(\frac{\alpha_3\phi}{(1-a\phi)^3}\right)dx-\int_0^1\frac{\beta\phi}{(1-a\phi)^2}(1+\gamma(1-a\phi))\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{37}$$

رابطه (38) برای اصل پریشیدگی هوموتوپی صادق است[38].

$$(1-p)[L(a)-L(a')]+p[L(a)+N(a)]=0 \tag{38.الف}$$

$$A(a)=L(a)+N(a)=0 \tag{38.ب}$$

در رابطه (38) $a'$ حدس اولیه برای تابع (38. ب) و $p$ پارامتر جداکننده است، به این معنا که زمانی که این پارامتر مقدار صفر می‌گیرد، حل شامل حل خطی معادله بوده و با افزایش مقدار آن به سمت عدد یک، حل دقیق معادله غیرخطی حاصل می‌شود، به‌طوری‌که $p\in[0,1]$ . همچنین $A(a)$ عملگر دیفرانسیلی، $N(a)$ قسمت غیرخطی و $L(a)$، قسمت خطی رابطه (38. ب) می‌باشد. با ساده‌سازی رابطه (38. الف) رابطه(39) بدست می‌آید:

$$L(a)-L(a')+p[L(a')+N(a)]=0 \tag{39}$$

در روش پریشیدگی هوموتوپی پارامتر $p$ همان پارامتر کوچک پریشیدگی در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که مشخص است زمانی که پارامتر $p$ از صفرتا یک افزایش می‌یابد، حل از قسمت خطی معادله (38. ب) تا جواب دقیق آن تغییر پیدا می‌کند. ازآنجاکه $\bar{w}=a\phi$ فرض شده بود بنابراین پارامتر مجهول $a$ به‌صورت بسط تیلور توسیع داده‌شده و از روش پریشیدگی استفاده می‌شود.

$$a=a_0+pa_1+p^2a_2+p^3a_3+....+p^6a_6 \tag{40}$$

قسمت غیرخطی ( $N(a)$ ) نیز تا مرتبه 8 بسط داده‌شده که برای نمونه قسمتی از آن به فرم رابطه (41) آورده شده است.

$$\begin{aligned}
N(a)=&\\
&N(a_0)+N'(a_0)(pa_1+p^2a_2+p^3a_3+..+p^6a_6)\\
&+\frac{N''(a_0)}{2!}(pa_1+p^2a_2+p^3a_3+..+p^6a_6)^2\\
&+...+\frac{N''''''(a_0)}{6!}(pa_1+p^2a_2+p^3a_3+..+p^6a_6)^6
\end{aligned} \tag{41}$$

با جایگذاری (40 و 41) در رابطه (39) بدست می‌آید که:

$$\begin{aligned}&L(a_0)+pL(a_1)+p^2L(a_2)+p^3L(a_3)+\\&p^4L(a_4)+p^5L(a_5)+p^6L(a_6)-L(a')\\&+pL(a')+pN(a_0)+\\&(N'(a_0))(a_5p^6+a_4p^5+a_3p^4+a_2p^3+a_1p^2)+\\&(N''(a_0))(a_2a_3p^6+a_1a_4p^6+a_1a_3p^5\\&+a_1a_2p^4+\frac{1}{2}a_2{}^2p^5+\frac{1}{2}a_1{}^2p^3)+\\&(N'''(a_0))((P^6a_1{}^2a_3)/2+(P^6a_1a_2{}^2)/2+\\&(P^5a_1{}^2a_2)/2+(P^4a_1{}^3)/6)\\&+(N''''(a_0))((P^6a_1{}^3a_2)/6+(P^5a_1{}^4)/24)\\&+(N'''''(a_0))((P^6a_1{}^5)/120)=0\end{aligned} \tag{42}$$

حال ضرایب توان‌های یکسان $p$ را برابر صفر قرار داده و درنهایت به معادلات (43) می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&P^0: L(a_0)-L(a')=0,\\&P^1: L(a_1)+L(a')+N(a_0)=0,\\&p^2: L(a_2)+N'(a_0)a_1=0,\\&P^3: L(a_3)+N'(a_0)a_2+N''(a_0)(\frac{1}{2}a_1^2)=0,...\end{aligned} \tag{43}$$

هر معادله از معادلات بالا به‌صورت مستقل حل و پاسخ در معادله بعدی قرار داده‌شده و به همین صورت برخی ضرایب $a_0, a_1, ... a_6$ مطابق روابط پیوست به دست می‌آیند، با قرار دادن $p=1$ در رابطه (40)، $a$ بدست می‌آید،

$$a=a_0+a_1+a_2+a_3+...+a_6 \tag{44}$$

## 5- نتایج

در این قسمت به مقایسه نتایج حاصل از نظریه کلاسیک محیط پیوسته، تنش کوپل اصلاح‌شده و گرادیان کرنش پرداخته می‌شود. در قسمت اول (شکل 2) از اثر نیروی واندروالس صرفنظر شده و نتایج حاصل با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده و تطابق خوبی مشاهده‌شده است. همچنین در این قسمت ارزیابی نتایج این مقاله بار دیگر با روش‌های موجود در مراجع و نتایج تجربی انجام‌شده است. سپس در قسمت دوم در شکل 4، تنها به بررسی تأثیر پارامتر اثر اندازه پرداخته‌شده و از اثر نیروی واندروالس صرف‌نظر شده است. در این شکل، برای بررسی اثر اندازه نظریه گرادیان کرنش مورداستفاده قرارگرفته است. در شکل 5، برخلاف نمودار شکل 4 اثر اندازه نادیده گرفته‌شده و تنها اثر نیروی واندروالس بررسی می‌شود. همچنین در قسمت سوم نتایج به بررسی اثر توأم نیروی واندروالس و اثر اندازه پرداخته‌شده که برای این منظور از نظریه کلاسیک محیط پیوسته و نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده و نظریه گرادیان کرنش استفاده‌شده است.

### ۵-1- مقایسه با نتایج موجود در مراجع:

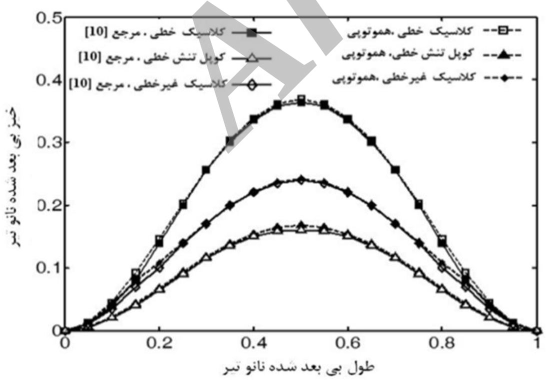
برای بازبینی بهتر نتایج در شکل 2، مقایسه نتایج بین روش پریشیدگی هوموتوپی و نتایج حاصله توسط رهایی فرد و همکارانش [10]، برای یک میکرو عملگر دو سر درگیر موردبررسی قرار گرفت و نتایج حاصله تطابق بسیار خوبی نشان داد. در این شکل اثر نیروی واندروالس در نظر گرفته نشده است و مشخصات نانو تیر مدل شده در جدول 1 آمده است. ضمناً در این مطالعه از تئوری کوپل تنش اصلاح‌شده استفاده‌شده است. مقایسه نتایج ولتاژ کشش توسط روش‌های حل مختلف و نتایج تجربی برای نانو تیر دوسر درگیر که مشخصات هندسی آن در جدول 2 ارائه‌شده، در جدول 3 بیان‌شده است. باید دقت کرد که با توجه به هندسه و مشخصه مادی تیر در جدول 2، دلیل استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده مقدار کوچک $D_2$ می‌باشد زیرا مقدار آن با توجه به ابعاد موجود در جدول 2 تقریباً صفر می‌باشد ($D_2 \approx 0$)، برای نشان دادن قابلیت روش پریشیدگی هوموتوپی برای حل معادلات حاکم در تئوری گرادیان کرنش بار دیگر قابلیت این روش با مرجع [41] در شکل 3 مورد بررسی قرار گرفته است.در این بررسی پهنای نانو تیر $4\,\mu m$ وطول مشخصه $17/6\,\mu m$ درنظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش مذکور قابلیت مناسبی برای حل معادلات حاکم برای تئوری گرادیان کرنش را داراست. مقایسه این نتایج، صحت روش حل پریشیدگی هوموتوپی را برای مسئله نانو تیر دو سر درگیر نشان می‌دهد و این روش می‌تواند بعنوان روش قابل‌قبول در محاسبات سیستم‌های الکترومکانیک مورداستفاده قرار گیرد. حال در ادامه به بررسی اثر اندازه و نیروی واندروالس برای چند حالت دیگر می‌پردازیم.

### 5-2- بررسی نیروی واندروالس و اثرات اندازه به‌صورت مجزا:

#### 5-2-1- وابستگی به اثر اندازه در غیاب نیروی واندروالس

در ابعاد میکرو صرفنظر از اثر نیروی واندروالس معمول می‌باشد. در این قسمت با استفاده از نظریه گرادیان کرنش به مطالعه اثر اندازه پرداخته و از اثر نیروهای بین‌مولکولی صرف‌نظر می‌شود $(\alpha_3=0)$. شکل 4 وابستگی ولتاژ پولین در یک تیر دو سر درگیر را با اثر اندازه $(\delta)$ نشان می‌دهد.

مطابق این شکل تغییرات ولتاژ پولین بدون بعد با پارامتر اثر اندازه به‌صورت تقریباً خطی است و افزایش $\delta$ باعث افزایش $\beta_{PI}$ می‌شود. همچنین این شکل اهمیت تأثیر در نظر گرفتن پارامتر $\eta$ در میزان ولتاژ ناپایداری را به‌خوبی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است ازآنجاکه وجود این پارامتر در معادلات حاکم نانو تیر باعث افزایش سختی نانو عملگر می‌شود، انتظار می‌رود با در نظر گرفتن آن، نانو عملگر خیز کمتری را در مقابل تغییرات ولتاژ از خود نشان دهد و درنتیجه میزان ولتاژ ناپایداری بیشتری داشته باشد.




**شکل** 2 نمودار خیز تیر برحسب جابه‌جایی ($\beta=64, N=0$)

**جدول** 1 پارامترها و ثوابت الاستیک استفاده‌شده در شکل 2(مرجع [10])

| پارامتر هندسی | | | | | ثوابت الاستیک | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g/B$ | $l/H$ | $\eta$ | $D_1$ | $D_2$ | $E$ | $\mu$(GPa) | $\nu$ |
| 0/2 | 0/33 | 24 | 1/47 | 0 | 98/49 | 34/68 | 0/42 |

### 5-2-2- وابستگی به نیروی واندروالس در غیاب اثر اندازه

در این قسمت از اثر اندازه صرفنظر می‌شود، لذا از نظریه محیط پیوسته کلاسیک استفاده می‌شود ($D_2=0$ و $D_1=1$). در شکل 5 اثر نیروی واندروالس بر روی ولتاژ پولین در یک نانو تیر دوسرگیردار با $g/B=0.1$ نشان داده‌شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است، با افزایش نیروی واندروالس تا مقدار بحرانی خود $\alpha_{cp}$، مقدار $\beta_{PI}$ کاهش می‌یابد، معنی فیزیکی این پدیده این است که در مقیاس کوچک کلاً نیروی واندروالس باعث کاهش ولتاژ پولین می‌گردد. لازم به ذکر است هنگامی‌که مقدار نیروی واندروالس به مقدار بحرانی خود $\alpha_{cp}$ برسد، تیر دچار ناپایداری شده و مقدار $\beta_{PI}$ صفر خواهد شد. می‌توان نتیجه گرفت که در فواصل کوچک بین الکترود ثابت و متحرک، نیروی واندروالس می‌تواند باعث رهاشدگی تیر بدون اعمال ولتاژ بین دو الکترود شود.

### 5-3- تأثیر توأم نیروی واندروالس و اثر اندازه

در مقیاس نانو، می‌توان نشان داد که هر دو عامل نیروی بین‌مولکولی (واندروالس) و اثر اندازه بر روی پارامترهای پولین تأثیرگذار هستند. لذا در این قسمت اثر توأم آن‌ها بررسی‌شده است. همان‌طور که از شکل 6 مشخص است با افزایش نیروی واندروالس مقدار $\beta_{PI}$ کاهش می‌یابد؛ اما مطابق این شکل مشخص است که با افزایش پارامتر $H/l$ که معادل کاهش اثر اندازه ($\delta$) است، ولتاژ ناپایداری نیز کاهش می‌یابد. در کل با بزرگ‌تر شدن مقدار $H/l$ پیش‌بینی نظریه گرادیان کرنش به نتایج نظریه کلاسیک میل می‌نماید، چراکه اثر اندازه به سمت صفر میل می‌کند. می‌توان گفت کاهش ولتاژ ناپایداری با افزایش پارامتر $H/l$، به دلیل رفتار کاهشی سختی نانو عملگر در معادلات حاکم نظریه کلاسیک است و لذا میزان پیش‌بینی ولتاژ ناپایداری در آن کمتر خواهد بود. مشابه آنچه در پیش‌گفته شد در هر مقدار معین پارامتر $H/l$ میزان ولتاژ ناپایداری با در نظر گرفتن پارامتر $\eta$ بیشتر از مقدار ولتاژ ناپایداری بدون در نظر گرفتن پارامتر $\eta$ است.

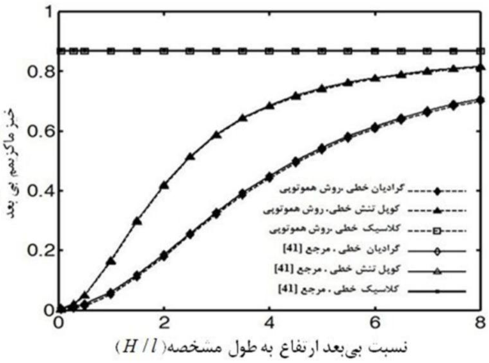
می‌توان نتیجه گرفت که در سیستم‌های در مقیاس نانو بکارگرفتن نظریه‌های مناسب و تحلیل آن‌ها امکان طراحی و ساخت دقیق‌تر را به سازنده خواهد داد که درصورت استفاده ازنظریه کلاسیک به اشتباهات فاحشی منجر خواهد شد. شکل7 تغییرات خیز برحسب طول بی‌بعد شده یک نانو تیر دو درگیر را نشان می‌دهد محور افقی طول بی‌بعد شده نانو تیر را در فاصله صفرتا یک و محور عمودی خیز تیر را نشان می‌دهد، پارامترهای بی‌بعد در نظر گرفته‌شده به‌صورت $\alpha_3=30$ و $N=\nu=0$ و $\beta=25.91$ و $\eta=6$ می‌باشند. همان‌طور که از این شکل مشخص است میزان خیز یا جابجایی نانو عملگر در تئوری کلاسیک بیشتر از تئوری گرادیان کرنش است. دلیل این پدیده وجود پارامتر اثر اندازه در معادلات تئوری گرادیان کرنش بوده که باعث رفتار سخت‌شوندگی در نانو تیر می‌شود و باعث شده در یک ولتاژ معین نانو تیر خیز کمتری مشابه باحالت استفاده از تئوری کلاسیک داشته باشد. در هر حالت وجود پارامتر $\eta$ به دلیل افزایش سختی در معادلات حاکم نانو تیر، خیز کمتری مشاهده می‌شود. برای نتیجه‌گیری بهتر تأثیر نیروی واندروالس و اثر اندازه، نتایج به‌گونه‌ای دیگر در شکل‌های 8 و 9 رسم شده است. اثر نیروی واندروالس بر ولتاژ پولین بدون بعد و خیز ماکزیمم نانو تیر برای مقادیر مختلف $\alpha_3=1$ و $\alpha_3=30$ به ترتیب در شکل 8 و 9 رسم شده است .همانطور که از شکل‌ها مشخص است با افزایش نیروی واندروالس، مقدار $\beta_{PI}$ کاهش‌یافته و لذا حداکثر خیز وسط نانو تیر دو سر درگیر نیز کاهش می‌یابد. مطابق آنچه گفته شد در ابعادکوچک خواص مکانیکی به‌سوی سخت شدن پیش رفته [36] و نکته قابل‌تأمل در شکل 8 و 9 پیش‌بینی نظریه گرادیان کرنش است که مطابق آن در ابعاد کوچک تیر (نسبت کوچک $H/l$) مقدار $\beta_{PI}$ بزرگ‌تری نتیجه می‌شود که با نتایج به‌دست‌آمده در مراجع همخوانی مناسبی دارد. شکل 10 نشان می‌دهد که در مقیاس نانو هر دو پارامتر اثر اندازه و نیروی واندروالس مهم هستند. در این شکل تغییرات ولتاژ ناپایداری به‌صورت تابعی از $H/l$ نمایش داده‌شده است. زمانی که ما از اثر اندازه صرفنظر کنیم خطوط افقی بر ولتاژ پولین منطبق می‌شوند که این نشان می‌دهد در نظریه کلاسیک ولتاژ ناپایداری نسبت به تغییرات اثر اندازه حساس نیست. علاوه بر این با در نظر گرفتن اثر نیروی واندروالس ($\alpha_3=30$) با کاهش $H/l$ ولتاژ ناپایداری در سیستم‌های نانو افزایش می‌یابد و کاهش مقدار $H/l$ با افزایش اثر اندازه منطبق است. نیز زمانی که پارامتر $H/l$ افزایش می‌یابد پارامتر $\delta$ به سمت صفر میل می‌کند و درنتیجه نتایج تئوری گرادیان کرنش به نتایج تئوری کلاسیک میل می‌کند. در این شکل تأثیر پارامتر $N$ بر روی نتایج کاملاً مشخص است. با توجه به معادله حاکم بر نانو تیر (رابطه (28)) اثر این پارامتر کاملاً مشابه با پارامتر $\eta$ می‌باشد، بطوری‌که با افزایش این پارامتر سختی نانو تیر افزایش‌یافته و متعاقباً ولتاژ ناپایداری افزایش می‌یابد. شکل 11 اثر نیروی محوری ($N$) روی رفتار استاتیکی یک تیر با مقادیر مختلف $N$ و مقدار $\eta=6$ را نشان می‌دهد، در این

**جدول 2** پارامترها و ثوابت الاستیک استفاده‌شده در مرجع [39،40]

| حالت | پارامتر هندسی(میکرومتر) | | | | ثوابت الاستیک | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $g$ | $H$ | $B$ | $L$ | $\nu$ | تنش پسماند | $E$(GPa) |
| 1 | 1 | 3 | 50 | 250 | 0/06 | 0 | 169 |
| 2 | 1 | 3 | 50 | 350 | 0/06 | 0 | 169 |

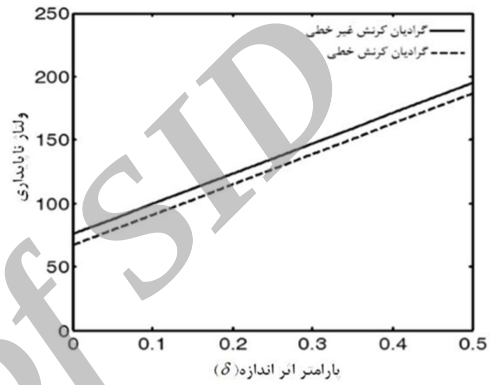
**جدول 3** مقایسه ولتاژ ناپایداری نانو تیر توسط روش پریشیدگی هوموتوپی با داده‌های تجربی و عددی

| ولتاژ پولین حالات 1 و 2 مربوط به جدول2 | | نظریه و روش حل | | مرجع |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | روش | نظریه | |
| 39/40 | 20/10 | | کلاسیک($l$=0nm) | |
| 39/45 | 20/13 | | کوپل تنش($l$=65) | |
| 49/20 | 25/10 | | کوپل تنش($l$=950/9) | |
| 39/27 | 20/04 | | پریشیدگی هوموتوپی گرادیان($l$=65) | |
| 67/81 | 34/60 | | پریشیدگی هوموتوپی گرادیان($l$=950/9) | |
| 39/13 | 20/36 | تفاضل مربعات($l$=0) | | [39] |
| 39/40 | 20/10 | تحلیلی($l$=0) | | [40] |

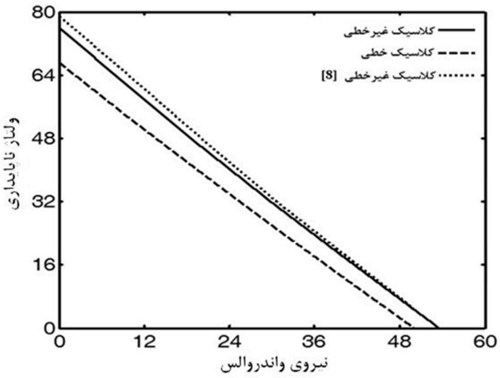


**شکل 3** نمودار تأثیر اثر اندازه $H/l$ روی خیز ماکزیمم

$\nu = 0.38, N = 0, \eta = 6, L = 20H, F_{\text{external}} = 66.66$



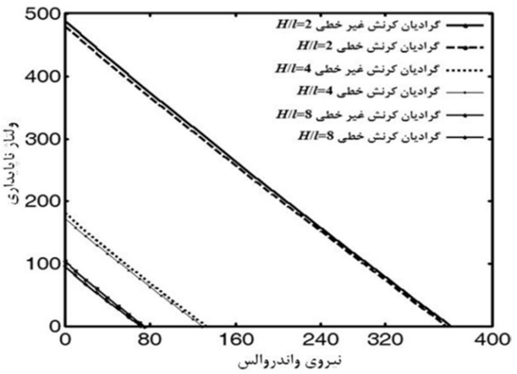
**شکل 4** نمودار اثر ولتاژ ناپایداری بر روی پارامتر اثر اندازه بدون در نظر گرفتن نیروی واندروالس ( $g / B = 0.1, \eta = 6, N = \nu = 0, L = 15H$ )



**شکل 5** اثر نیروی واندروالس بر روی ولتاژ ناپایداری

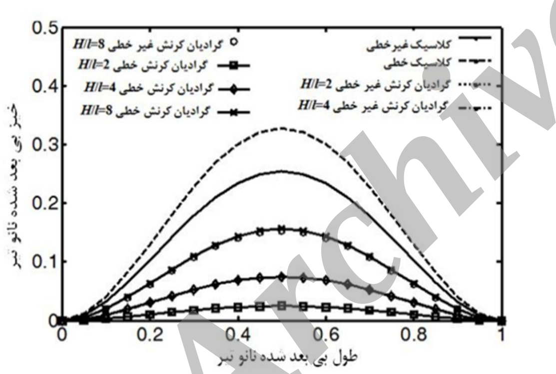
( $g / B = 0.1, \eta = 6, N = 0$ )

شکل رابطه نیروی واندروالس و خیز وسط تیر وقتی‌که هیچ‌گونه ولتاژی به سیستم اعمال نمی‌شود بیان‌شده است ( $\beta = 0$ ). در حقیقت وقتی فاصله بین تیر دو سر درگیر و بستر به مقدار کافی کوچک می‌شود نیروی واندروالس بدون هیچ‌گونه اعمال ولتاژ تحریکی به مقدار بحرانی خود می‌رسد و تیر به بستر برخورد می‌کند؛ بنابراین این‌چنین دستگاهی نمی‌تواند پایدار باشد، بمنظور محاسبه مقدار بحرانی نیروی واندروالس معادله حاکم نانو تیر برای $\beta = 0$ حل می‌شود. شکل 12 اثر نیروی کشش محوری ناشی از تنش را برای تیر دو سر درگیر و مقادیر مختلف $\eta$ و $N = 0$ نشان می‌دهد، در این شکل رابطه نیروی واندروالس و خیز ماکزیمم وقتی هیچ‌گونه ولتاژی به سیستم اعمال نشده است بیان‌شده است، این شکل نشان می‌دهد که خیز ماکزیمم با کاهش نیروی محوری کشیدگی برای یک نیروی واندروالس مشخص افزایش می‌یابد، همچنین هرچه پارامتر $\eta$ افزایش یابد، میزان سختی نیز افزایش‌یافته و برای ایجاد یک جابجایی معین، نیروی واندروالس بیشتری موردنیاز است. در شکل 13 که نتایج آن به‌گونه‌ای دیگر مشابه شکل 10 ترسیم‌شده تغییرات ولتاژ ناپایداری به‌صورت تابعی از $H/l$ نمایش داده‌شده است اما در این شکل نیروی محوری $N = 0$ در نظر گرفته‌شده است. ضمناً مقدار ضریب پؤاسون $\nu = 0.284$ می‌باشد. سایر پارامترهای بی‌بعد در این مسئله $\eta = 24$ و $L = 25H$ است. مشابه شکل 10 مشاهده می‌شود که در حالت کلاسیک ازآنجاکه پارامتر اثر اندازه در معادلات حاکم

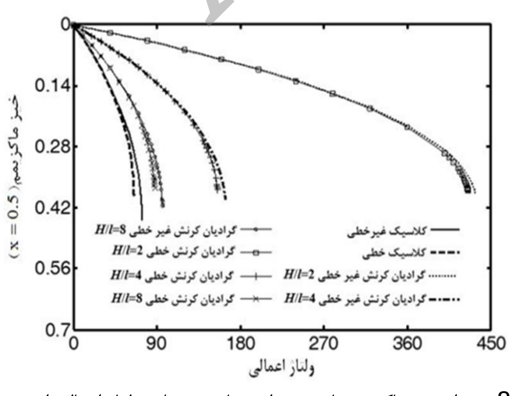


**شکل6** اثر نیروی واندروالس بر روی ولتاژ ناپایداری برای اثر اندازه‌های مختلف

( $g / B = 0.1, \eta = 6, N = \nu = 0, L = 15H$ )

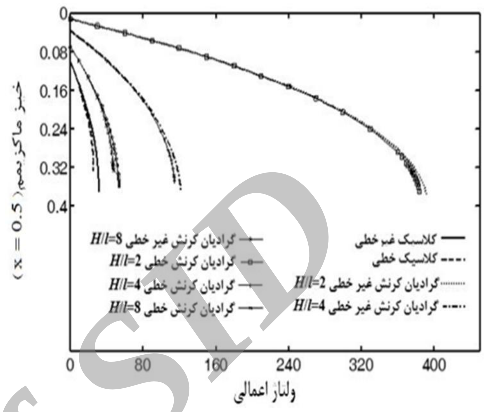


**شکل 7** نمودار خیز تیر برحسب جابه‌جایی برای اثر اندازه‌های مختلف ($L$=25$H$)

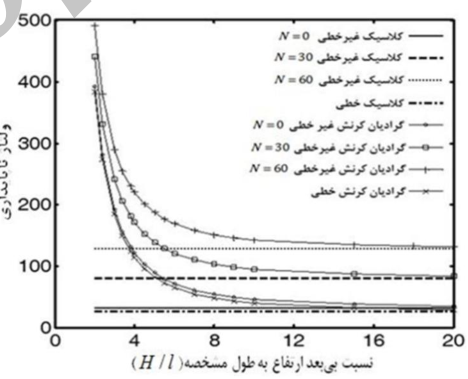


**شکل 8** نمودار خیز ماکزیمم نانو تیر برای مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی از صفرتا ولتاژ ناپایداری $\alpha_3 = 1, g / B = 0.1, \eta = 6, N = \nu = 0, L = 15H$ .

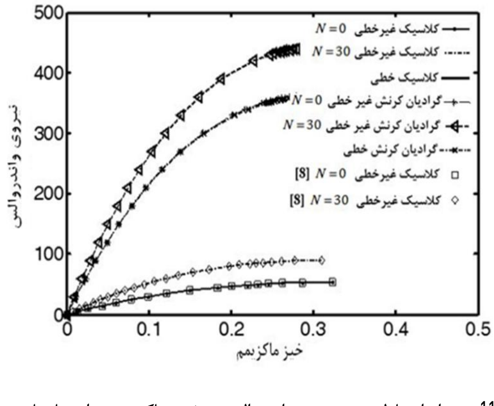
وجود ندارد، بنابراین ولتاژ ناپایداری مستقل از اثر اندازه است. نکته دیگری که این شکل بیان می‌کند این است که با افزایش نیروی واندروالس ولتاژ ناپایداری سیستم کاهش می‌یابد؛ اما با افزایش پارامتر $H/l$ که معادل کاهش پارامتر اثر اندازه ($\delta$) است، در دو حالت وجود یا صفر بودن نیروی واندروالس ولتاژ ناپایداری با یک رفتار مشابه کاهش می‌یابد. این شکل بیانگر آن است که اثر اندازه باعث افزایش سختی، افزایش ولتاژ ناپایداری و افزایش مقاومت الاستیک نانو تیر می‌شود، به‌عبارت دیگر با افزایش ضخامت نانو تیر و




**شکل** 9 نمودار خیز ماکزیمم نانو تیر برای مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی از صفرتا ولتاژ ناپایداری $\alpha_3=30, g/B=0.1, \eta=6, N=\nu=0, L=15H$ .




**شکل** 10 نمودار تأثیر اثر اندازه روی ولتاژ ناپایداری برای ضخامت‌های مختلف نانو تیر با مقادیر مختلف بارمحوری $g/B=0.1, \eta=6, \nu=0, L=15H$

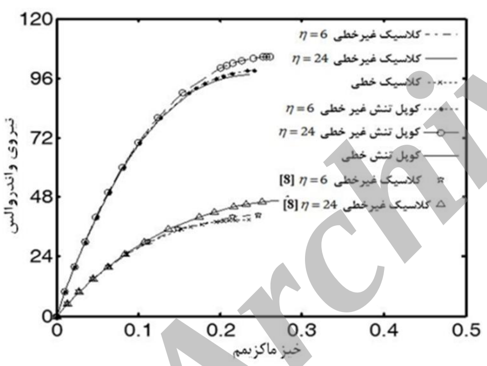



**شکل** 11 نمودار ارتباط بین نیروی واندروالس و خیز ماکزیمم برای بارهای محوری مختلف $g/B=0.1, \eta=6, \nu=0, L=15H, H=2l$ .

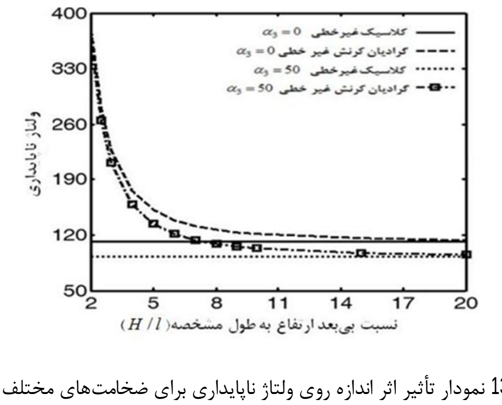
ثابت بودن پارامتر طول مشخصه، اثر اندازه کاهش‌یافته و نتایج نظریه گرادیان کرنش به نتایج نظریه کلاسیک میل می‌کند[42-44]. شکل 14 تأثیر پارامتر $H/l$ را روی خیز ناپایداری نانو تیر بررسی‌شده در شکل 13 نشان می‌دهد، همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود در غیاب نیروی واندروالس ($\alpha_3=0$)، با افزایش اثر اندازه ($\delta$)(کاهش $H/l$) خیز ناپایداری نانو تیر دو سر درگیر کاهش می‌یابد این روند برای حالت $\alpha_3=50$ برای تیر دو سر درگیر نیز مشاهده می‌شود. شکل 15 تأثیر اثر پارامتر اندازه ($\delta$) را بر روی ولتاژ ناپایداری نانو تیر برای دو مقدار مختلف نیروی واندروالس نشان می‌دهد، همانطورکه از شکل مشخص می‌باشد با افزایش نیروی بین‌مولکولی واندروالس ولتاژ ناپایداری در تیر کاهش می یابد. از سوی دیگر این شکل بیانگر این است که در حضور نیروی بین‌مولکولی واندروالس، ولتاژ ناپایداری نانو سازه‌ها با افزایش اثر اندازه ($\delta$)، افزایش می‌یابد. شکل 16 تغییرات خیز ناپایداری را برحسب تابعی از پارامتر اثر اندازه و حضور نیروی واندروالس نشان می‌دهد، همان‌طور که دیده می‌شود خیز ناپایداری نانو تیر دوسر درگیر با افزایش پارامتر اثر اندازه و حضور نیروی واندروالس کاهش پیدا می‌کند. نتایج بررسی اخیر نشان می‌دهد که اثر همزمان وجود نیروی واندروالس و اثر اندازه یک موضوع مهم برای تعیین پارامترهای ناپایداری نانو سازه‌ها بوده و باید در مدل‌های تئوری لحاظ گردد.

## 6- نتیجه‌گیری

در این مقاله نظریه‌های گرادیان کرنش به همراه نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده و نظریه کلاسیک برای مدل نمودن اثرات نیروهای بین‌مولکولی و اثر اندازه بر



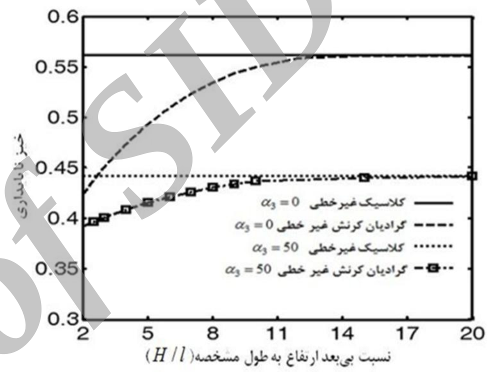

**شکل** 12 نمودار ارتباط بین نیروی واندروالس و خیز ماکزیمم برای بارهای محوری مختلف $\beta=0, g/B=0.1, \nu=N=0, L=15H, H=2l$



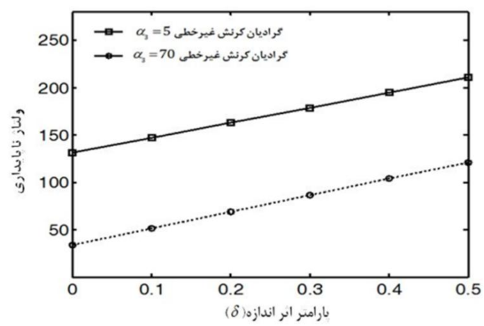

**شکل** 13 نمودار تأثیر اثر اندازه روی ولتاژ ناپایداری برای ضخامت‌های مختلف نانو تیر ($g/B=0.1$)

روی پارامترهای پولین استاتیکی نانو عملگر مورداستفاده قرار گرفت. موارد زیر از نتایج این تحقیق می‌باشد:

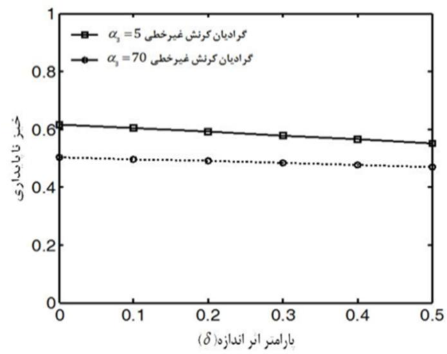
- نیروی واندروالس ولتاژ پولین و خیز عملگر دو سر درگیر را کاهش می‌دهد.
- در غیاب نیروی بین‌مولکولی (واندروالس)، ولتاژ پولین تیر با افزایش اثر اندازه افزایش می‌یابد
- در اندازه‌های کوچک ابعاد تیر به صورتی که این اندازه قابل‌مقایسه با اندازه طول مادی باشد با توجه به نتایج نظریه‌های گرادیان کرنش و تنش کوپل اصلاح‌شده می‌توان نتیجه گرفت که اثر اندازه یکی از پارامترهای مهم در طراحی و ساخت نانو عملگر می‌باشد.
- روش پریشیدگی هوموتوپی در قیاس با روش‌های موجود در مراجع دارای پاسخ‌های مناسبی بوده و به نتایج حل عددی همگرا است.




**شکل 14** نمودار تأثیر اثر اندازه روی خیز ناپایداری برای ضخامت‌های مختلف نانو تیر




**شکل 15** تأثیر پارامتر اثر اندازه ( $\delta$ ) روی ولتاژ ناپایداری با در نظر گرفتن نیروی واندروالس $g/B=1, \nu=N=0, L=20H, \eta=24$




**شکل 16** تأثیر پارامتر اثر اندازه ( $\delta$ ) روی خیز ناپایداری با در نظر گرفتن نیروی واندروالس $g/B=1, \nu=N=0, L=20H, \eta=24$

- درنهایت آزمایش‌های بیشتری بر روی نانو عملگرها نیاز است تا محدودیت‌های نظریه‌های گرادیان کرنش و تنش کوپل اصلاح‌شده را آشکار نماید. به‌هرحال نظریه گرادیان کرنش و تنش کوپل اصلاح‌شده قابلیت مدل نمودن اثر اندازه را دارد که توسط نتایج آزمایشگاهی مورد قبول است ولی مدل کلاسیک محیط پیوسته چنین قابلیتی ندارد.

## 7- پیوست

$$a_0=a', a_1=(-a_0+(1/(k_1D_1+k_2-D_2k_4))N(a_0)) \quad (\text{پ}.1)$$

$$a_2=((a_1/(k_1D_1+k_2-D_2k_4))N'(a_0)),... \quad (\text{پ}.2)$$

همچنین روابط زیر برای ترم‌های غیرخطی حاصل می‌شود.

$$N(a_0)=-a_0^3k_3+\int_0^1\left(\frac{\alpha_3\phi}{(1-a_0\phi)^3}\right)dx + \int_0^1\left(\frac{\beta\phi}{(1-a_0\phi)^2}(1+\gamma(1-a_0\phi))\right)dx,... \quad (\text{پ}.3)$$

## 8- مراجع


[1] A .Koochi, A .Kazemi, M. Abadyan, Simulating deflection and determining stable length of freestanding carbon nanotube probe/sensor in the vicinity of graphene layers using a nanoscale continuum model, *World Scientific,* Vol. 6, No. 5, pp. 419-429, 2011.

[2] C. H. Ke, H. D. Espinosa, *Nanoelectromechanical Systems (NEMS) and Modeling, in: M. Rieth, W. Schommers and P. D. Gennes (Eds), Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology,* chapter 121, American Scientific Publishers: Valencia, CA,, 2006.

[3] P. M. Osterberg, S. D. Senturia, M-TEST: A test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures, *J. Microelectromech. S,* Vol. 6, No.2, pp. 107-118, 1997.

[4] M. I. Younis, A. H. Nayfeh, A study of the nonlinear response of a resonant microbeam to an electric actuation, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 31, pp. 91–117, 2003.

[5] A. Koochi, N. Fazli, R. Rach, Modeling the pull-in instability of the CNT-based probe/actuator under the Coulomb force and the van der Waals attraction, *Latin American Journal of Solids and Structures, Vol.* 11, No. 8, pp. 1315-1328, 2014.

[6] A. Farrokhabadi, N. abadian, R. Rach, M. R. Abadyan, Theoretical modeling of the Casimir force-induced instability in freestanding nanowires with circular cross-section, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 63, pp. 67–80, 2014.

[7] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012. (In Persian)

[8] M. Moghimi Zand, M. T. Ahmadian, B. Rashidian, Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating Casimir and van der Waals forces, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J.Mech. Eng. Sci*, Vol. 224, pp. 2037-2047, 2010.

[9] J. M. Dequesnes, S. V. Rotkin, N. R. Aluru, Calculation of pull-in voltages for switches, *Nanotechnology,* Vol. 13, No. 120, 2002.

[10] M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. T. Ahmadian, Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory, *Sens. Actuators, A,* Vol.171, pp. 370– 374, 2011.

[11] Y. Tadi Beni, M. R. Abadyan, A. Noghrehabadi, Investigation of Size Effect on the Pull-In Instability of Beamtype NEMS under Van Der Waals Attraction, *Procedia Engineering,* Vol. 10, pp. 1718–1723, 2011.

[12] B. Altan, E. Aifantis, On some aspects in the special theory of gradient elasticity, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials,* Vol. 8, No. 3, pp. 231–282, 1997.

[13] Cosserat, E,Cosserat, F, "Theorie des corp deformables", Herman, Paris,1909.

[14] R. D. Mindlin, N. N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 4, No. 1, pp. 109 – 124, 1968.

[15] A. C. Eringen, D. B. G. Edelen, On nonlocal elasticity, *Int. J. Eng. Sci*, Vol. 10, pp. 233–248, 1972.

[16] U. B. C. O. Ejike, The plane circular crack problem in the linearized couple-stress theory, *Int. J. Eng. Sci*, Vol. 7, pp. 947–961, 1969.

[17] D.C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.

*Scripta,* Vol. 81, No. 1, (10pp), 2010.

[33] A. Koochi, A. Noghrehabadi, M. R. Abadyan, Approximating the Effect of Van Der Waals Force on the Instability of Electrostatic Nano-Cantilevers, *International Journal of Modern Physics B*,Vol. 25, No. 29, pp. 3965–3976, 2011.

[34] J. Abdi, Y. T Beni, A. R Noghrehabadi, A. Koochi, A. S. Kazemi, A. Yekrangi, Analytical approach to compute the internal stress field of NEMS considering casimir forces, *Procedia Engineering, Vol.* 10, pp. 3757-3763, 2011.

[35] Y. Tadi Beni, A. Koochi, M. Abadyan, Theoretical study of the effect of Casimir force, elastic boundary conditions and size dependency on the pull-in instability of beam-type NEMS, *Physica E,* Vol. 43, pp. 979-988, 2011.

[36] I. Karimipour, A.R. Fotuhi, Analysis of mode III in infinite plane with multiple cracks based on strain gradient elasticity, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 7, pp.139-149, 2014 (In Persian)

[37] M. Mojahedia, M. Moghimi Zand, M. T. Ahmadian, Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 34, pp. 1032–1041, 2010.

[38] S. Abbasbandy, The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Phys. Lett. A,* Vol. 360, pp. 109–113, 2006.

[39] H. Sadeghian, G. Rezazadeh, P.M. Osterberg, Application of the generalized differential quadrature method to the study of pull-in phenomena of MEMS switches, *Journal of Microelectromechanical Systems,* Vol. 16, pp. 1334–1340, 2007.

[40] H, Roknia, R. J. Seethalerb, A. S. Milanib, S. Hosseini-Hashemic, X. F. Li, Analytical closed-form solutions for size-dependent static pull-in behavior in electrostatic micro-actuators via Fredholm integral equation, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol.190, pp. 32–43, 2013.

[41] M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. T. Ahmadian, A nonlinear strain gradient beam formulation, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 49, No. 11, pp. 1256–1267, 2011.

[42] A. Karami mohammadi, M. Abbasi, Investigation of the size effect on the vibrational behavior of an AFM microcantilever with a sidewall probe, using strain gradient elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 13, pp. 90-99, 2013. (In Persian)

[43] Tadi Beni, I. Karimipour, M. R. Abadyan, Modeling the effect of intermolecular force on the size-dependent pull-in behavior of beam-type NEMS using modified couple stress theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*.۲۰۱٤ (in press).

[44] N. Fazli, A. Koochi, A. S. Kazemi, Mohamadreza Abadyanb, Influence of electrostatic force and the van der Waals attraction on the pull-in instability of the CNT-based probe–actuator, *Canadian Journal of Physics,* Vol. 92, No. 9, pp. 1047-1057, 2014.

[18] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Int. J. Solids Struct*, Vol. 39, pp. 2731–2743, 2002.

[19] N. A. Fleck, G. M. Muller, M. F. Ashby, J. W. Hutchinson, Strain gradient plasticity theory and experiments, *Acta Metall Mater,* Vol. 42, pp. 475–487, 1994.

[20] J. S. Steolken, A. G. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Metall Mater,* Vol. 46, pp. 5109–5115, 1998.

[21] W. D. Nix, Mechanical properties of thin films, *Metall Trans,* vol. 20, pp. 2217–2245, 1989.

[22] N. A. Stelmashenko, M. G. Walls, L. M. Brown, Y. V. Milman, Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study, *Acta Metall. Mater,* Vol. 41, No. 10, pp. 2855–2865, 1993.

[23] A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers*, Journal of Materials Research*, Vol. 14, No. 10, pp. 4103-4110, 1999.

[24] W. Wang, Y. Huang, K. J. Hsia, K. X. Hu, A. Chandra, A study of microbend test by strain gradient plasticity*, International Journal of Plasticity,Vol.* 19, pp. 365–382, 2003.

[25] Y. Cao, D. D. Nankivil, S. Allameh, W. O. Soboyejo, Mechanical Properties of Au Films on Silicon Substrates, *Materials and Manufacturing Processes* ,Vol. 22, pp. 187–194, 2007.

[26] He, J, Lille, C. M, Surface effect on the elastic behavior of static bending nanowires, *Nano Letters,* Vol. 8, No. 7, pp. 1798–1802, 2008.

[27] A. Koochi, A. Kazemi, F. Khandani, M. Abadyan, Influence of surface effects on size-dependent instability of nano-actuators in the presence of quantum vacuum fluctuations, *Physica Scripta, Vol.* 85, No. 3, (11pp), 2012.

[28] R. Soroush, A. Koochi, A. S. Kazemi, A. Noghrehabadi, H. Haddadpour, Investigating the effect of Casimir and van der Waals attractions on the electrostatic pull-in instability of nano-actuators, *Physica scripta, Vol.* 82, No. 4, (11pp), 2010.

[29] J. Abdi, A. Koochi, A. S. Kazemi, M. Abadyan, Modeling the effects of size dependence and dispersion forces on the pull-in instability of electrostatic cantilever NEMS using modified couple stress theory, *Smart Materials and Structures, Vol.* 20, No. 5,(9pp), 2011.

[30] Ji. H. He, A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.* 35, pp. 37- 43, 1998.

[31] S. Pamuk, N. Pamuk, He's homotopy perturbation method for continuous population models for single and interacting species, *Computers & Mathematics with Applications, Vol.* 59, No. 2, pp. 612-621, 2010.

[32] M. Abadyan, A. Novinzadeh, A. S. Kazemi, Approximating the effect of the Casimir force on the instability of electrostatic nano-cantilevers, *Physica*