مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1394، دوره 15، شماره 2، ص‌ص 198-204

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل خمش میکروتیرهای یک‌سرگیردار بر اساس تئوری پلاستیسیته‌ی گرادیانی چن-ونگ

حکیمه علیزاده[1]، رضا انصاری[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشیار، مهندسی مکانیک ، دانشگاه گیلان، رشت

* رشت، صندوق پستی 3756، r_ansari@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 06 شهریور 1393
پذیرش: 24 آذر 1393
ارائه در سایت: 13 دی 1393

کلید واژگان:
پلاستیسیته گرادیان کرنش
میکروتیر یک‌سرگیردار
خمش
مقیاس طول داخلی
تئوری چن- ونگ

چکیده

وقتی ضخامت تیر یک‌سرگیردار به میکرون تقلیل می‌یابد، رفتار مکانیکی تیر تحت تأثیر ابعاد ماده و مقیاس طول داخلی قرار می‌گیرد. هدف این مقاله، تحلیل خمش میکرو تیر یک‌سرگیردار و ارائه رابطه‌ای برای خیز تیر مذکور با استفاده از تئوری پلاستیسیته گرادیان کرنش چن – ونگ می‌باشد. مدل تیر مورد استفاده، اویلر- برنولی است که در سه حالت الاستیک، صلب – پلاستیک و الاستو پلاستیک مورد تحلیل قرار گرفته است و روابط دقیقی برای کرنش‌های الاستیک و پلاستیک ارائه شده‌است. خیز تیر برای هر سه حالت، به ازای طول مشخصه های مختلف و بارگذاری‌های متفاوت بدست آمده، نتایج حاصل با یکدیگر و نیز با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده و تحلیل‌هایی ارائه شده‌اند. هم‌چنین نتایج حاصل از تئوری کلاسیک برای مشخص کردن ناتوانی این تئوری در پیش‌بینی دقیق رفتار مواد در اندازه‌های میکرون یا پایین‌تر نیز رسم‌شده‌اند. نتایج بدست آمده نشان دهنده وابستگی جواب‌ها به حدود ابعاد و طول مشخصه می باشد. هم‌چنین مقایسه نتایج حاصل از این تحقیق و نتایج تجربی، نشان‌دهنده صحت تقریبی تئوری گرادیانی به‌کار گرفته شده است.

Bending analysis of micro cantilevers based on the Chen-Wang strain gradient plasticity theory

Hakimeh Alizadeh, Reza Ansari*

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran
* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r_ansari@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 28 August 2014
Accepted 15 December 2014
Available Online 03 January 2015

Keywords:
Strain Gradient Plasticity
Micro Cantilever Beam
Bending
Intrinsic Length Scale
Chen-Wang Theory

ABSTRACT

When the cantilever beam thickness is scaled down to micron, the dimension of material and the intrinsic length scale affect the mechanicalbehavior of the beam. The purpose of this paper is to analyze the bending of cantilever micro-beam and present a relation for the beam deflection using Chen-Wang gradient plasticity theory. To this end, the Euler-Bernoulli beam model is utilized and three cases including elastic, rigid-plastic and elasto-plastic beams are considered. Clear relations for elastic and plastic strains are given. For all mentioned cases, the beam deflection is determined for different intrinsic lengths and the obtained results are compared with each other and experimental data and some explanations are presented. The results obtained from classical theory are also shown in the results section to prove that classical theories do not have the ability to predict behavior of micron-size structures precisely. Numerical results clarify the dependence of responses to the range of dimensions and intrinsic lengths. The comparison between the present results and those observed from experimental tests authenticate the reliability of utilized gradient theory.

1- مقدمه

استفاده از تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته[1] برای پیش‌بینی رفتار مواد در بسیاری از تغییرشکل‌ها در ابعاد میکرو به شکست می‌انجامد. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که در این موارد وابستگی معناداری به پارامترهای طولی اندازه‌ای وجود دارد و برای تحلیل رفتار مواد، لازم است تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته بسط داده شده و کمیت‌هایی شامل ابعاد ماده وارد معادلات ساختاری شود. تأثیرات اندازه در توجیه رفتار مکانیکی، در تحقیقات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است.

این تحقیقات نشان داده‌اند که رفتار مکانیکی مواد آشکارا به حدود ابعاد ماده وابسته است. این آزمایشات شامل پیچش سیم مسی در ابعاد میکرو [1]، خمش ورق‌های نیکل در ابعاد میکرو [2]، سختی‌سنجی در ابعاد میکرو و نانو [3] و کامپوزیت‌های دارای ذرات کوچک فلزی [4] می‌باشند.

با توجه به این که تئوری‌های پلاستیسیته کلاسیک، پارامتری برای در نظر گرفتن مقیاس طول داخلی ندارند، قادر به پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو نمی‌باشند. بنابراین نیاز به بسط تئوری‌های پلاستیسیته جدید می‌باشد که شامل پارامتری برای اثرات ابعاد و اندازه باشد. مقیاس طولی ماده تاکنون مفهوم فیزیکی خاصی که مورد قبول محققین باشد را ندارد. در واقع

1- Classic continuum mechanic theories

Please cite this article using: برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
H. Alizadeh, R. Ansari, Bending analysis of micro cantilevers based on the Chen-Wang strain gradient plasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 198-204, 2015 (In Persian)

تنها چیزی که با قاطعیت می‌توان گفت این است که مقیاس طولی ماده، کمیتی است که بصورت ضریبی از گرادیان‌های مرتبه‌ی بالای کرنش در معادلات وارد می‌شود و به کمک آن‌ها سعی شده رفتار وابسته به ابعاد ماده توجیه گردد. البته تلاش‌هایی به منظور پیدا کردن توجیه فیزیکی برای مقیاس طول داخلی انجام شده است. در تلاش‌های اولیه سعی شده است که مقیاس طول داخلی ماده، l، به کمیت‌های میکرو ساختار[1] ارتباط داده شود[5]. در معادلات روش‌های گرادیانی، گرادیان مرتبه‌ی بالای کمیت‌های اساسی، با ضرایبی که نشان‌دهنده‌ی کمیت‌های وابسته به ابعاد ماده می‌باشند، همراه با در نظر گرفتن محیط پیوسته‌ی غیر موضعی[2] ارائه شده است. تاکنون تئوری‌های پلاستیسیته گرادیانی متعددی برای حل مسائل مربوط به تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ ارائه شده است که به دو دسته تقسیم می‌شوند.

دسته‌ی اول، تئوری‌های مرتبه‌ی پایین[3] هستندکه ابتدا توسط آچاریا و بیودوین [6] مطرح شد. این دسته از تئوری‌ها، تئوری مرسوم پلاستیسیته را همراه با در نظر گرفتن گرادیان کرنش پلاستیک به صورت شبه زمانی و یا مدول مماسی در خود دارند. به عبارتی در تابع تسلیم[4] ماده عبارتی وابسته به گرادیان کرنش پلاستیک مؤثر وارد می‌شود و سایر معادلات ساختاری کلاسیک ماده و همچنین شرایط مرزی به صورت اولیه خود باقی می‌مانند و نیازی به در نظر گرفتن شرایط مرزی اضافی نیست.

دسته‌ی دوم تئوری‌های مرتبه‌ی بالا[5] هستند که ابتدا توسط ایفانتیس [7] با یک مقیاس طولی داخلی و سپس توسط فلک و هاتچینسون [8-10] با سه مقیاس طولی داخلی ارائه شد. این دسته از تئوری‌ها شرایط مرزی اضافی داشته و تنش‌های مرتبه‌ی بالا را به همراه کرنش‌های مرتبه‌ی بالای سازگار با آن وارد معادلات ساختاری می‌نماید و معادلات ساختاری مرتبه‌ی بالا با شرایط مرزی اضافی ارائه می‌گردد.

تئوری چن- ونگ که از دسته تئوری‌های مرتبه پایین است، توسط چن و ونگ ارائه شد [11]. در این تئوری یک قانون جدید سخت‌شوندگی گرادیان کرنش، بر اساس حفظ ساختار پلاستیسیته‌ی فون-میسز[6] مطرح شده‌است. در این تئوری اثرات گرادیانی به صورت مدول مماسی وارد معادلات می‌شود و نیازی به تعریف تنش‌های مرتبه‌ی بالا و شرایط مرزی اضافی نمی‌باشد. با به‌کارگیری این تئوری، چن و ونگ [12] به بررسی و تحلیل پدیده تسلیم پرداختند.

کاربردهای بی‌اندازه میکروتیرهای یک‌سرگیردار در میکروسیستم‌های الکترو-مکانیکی باعث ترغیب محققان برای تحلیل رفتار آن‌ها شده است. خمش میکرو تیر در حالت‌های الاستیک و پلاستیک در تحقیقات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است [13-16]. آیدیارت و همکارانش [17] با استفاده از تئوری پلاستیسیته‌ی گرادیانی فلک و ویلیس [18] اثرات اندازه را در خمش تیرهای نازک مورد تحلیل قرار دادند. جی و همکارانش [19] رفتار الاستوپلاستیک میکرو تیر را با استفاده از تئوری پلاستیسیته‌ی تنش کوپل[7] بررسی نمودند. شی و همکارانش [20] اثرات گرادیان کرنش و منحنی تنش و کرنش[8] در مقیاس میکرو را در خمش میکروتیر مورد توجه قرار دادند. مائو و همکارانش [21] رفتار الاستوپلاستیک میکروتیر ساخته شده از مواد هوشمند را با تئوری برپایه مکانیزم[9] تحلیل نمودند.

1- Microstructure
2-Non-Local
3- Lower order
4- Yield surface
5- Higher order
6- Von-mises
7- Couple stress
8- Stress-Strain curve
9- Mechanism- Based

در این مقاله ابتدا به توصیف تئوری پلاستیسیته‌ی گرادیانی چن-ونگ پرداخته شده است. سپس با استفاده از این تئوری، رابطه‌ی تحلیلی برای خیز میکروتیر یک‌سرگیردار تحت دو نوع بارگذاری ممان M و نیروی متمرکز P در انتهای تیر، برای حالت‌های الاستیک، صلب-پلاستیک و الاستوپلاستیک ارائه شده‌است. سپس نتایج برای پارامتر طول‌های مختلف رسم می‌شود. با مشاهده نتایج می‌توان به روشنی دریافت که در ابعاد میکرون، خیز تیر بسیار وابسته به اندازه می‌باشد.

2- تئوری پلاستیسیته‌ی گرادیانی چن-ونگ

در این بخش خلاصه‌ای از تئوری چن- ونگ [11] ارائه می‌شود.

در پلاستیسیته‌ی کلاسیک تنش مؤثر، مزدوج با کرنش مؤثراست که به با رابطه (1) بیان می‌شود:

$$\sigma_e = \frac{du(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} \quad \sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}^{\prime}:\sigma_{ij}^{\prime}} \tag{1}$$

تغییرات چگالی انرژی کرنشی نیز با رابطه (2) ارائه می‌شود:

$$\delta u = \sigma^{\prime} : \delta\varepsilon^{\prime} + \sigma_m : \delta\varepsilon_m = \sigma : \delta\varepsilon \tag{2}$$

که

$$\sigma_{ij}^{\prime} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}^{\prime}} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\varepsilon_{ij}^{\prime} \tag{3}$$

نرخ تنش انحرافی $\dot{\sigma}_{ij}^{\prime}$، به ترتیب رابطه (4) می‌باشد:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\prime} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_{ij}^{\prime}}{\varepsilon_e}\dot{\sigma}_e + \frac{2}{3}\frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime}}{\varepsilon_e}\sigma_e - \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_{ij}^{\prime}\sigma_e}{\varepsilon_e^2}\dot{\varepsilon}_e \tag{4}$$

تنش مؤثر فون‌میسز با توجه به معیار تسلیم فون‌میسز در پلاستیسیته‌ی کلاسیک، تابعی ازکرنش مؤثر می‌باشد که با توجه به [11] به صورت رابطه (5) نیز بیان می‌شود:

$$\sigma_e = A(\varepsilon_e) = \Sigma_0 + \frac{3}{2}E_p\varepsilon_e \tag{5}$$

و نرخ آن به ترتیب رابطه (6) می‌باشد:

$$\dot{\sigma}_e = A^{\prime}(\varepsilon_e)\dot{\varepsilon}_e \tag{6}$$

در این تئوری، گرادیان کرنش و نرخ قانون سخت‌شوندگی، شامل جمله گرادیانی، به صورت رابطه (7) معرفی می‌گردد:

$$\dot{\sigma}_e = A^{\prime}(\varepsilon_e)\left(1 + \frac{l_{cw}\eta}{\varepsilon_e}\right)^{1/2}\dot{\varepsilon}_e = B(\varepsilon_e, l_{cw}\eta)\dot{\varepsilon}_e \tag{7}$$

که در آن

$$\eta = \sqrt{c_1\eta_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)} + \chi_e^2} \tag{8}$$

$\eta_{ijk}^{(1)}$ تانسور گرادیان کرنش می‌باشدکه همانند عبارت گرادیان کشیدگی[10] فلک و هاتچینسون [8] تعریف می‌گردد و c_1 نیز به صورت رابطه (9) بیان می‌گردد:

$$c_1 = \left(\frac{l_1}{l_{cw}}\right)^2 \tag{9}$$

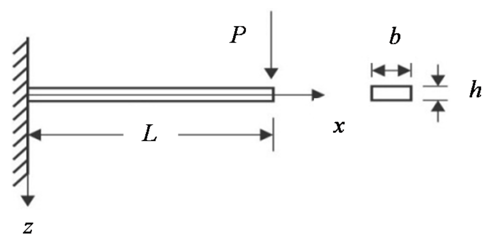
در این تئوری l_1 و l_{cw}، به ترتیب مقیاس طول داخلی مربوط به گرادیان کشش و گرادیان چرخش[11] می‌باشد.

3- خیز میکروتیر یک‌سرگیردار تحت بارگذاری نیروی متمرکز در انتهای تیر

3-1- حالت صلب-پلاستیک

شکل 1، میکرو تیر یک‌سرگیردار اویلر- برنولی را تحت بارگذاری نیروی متمرکز P نشان می‌دهد. محور x در راستای طول تیر، محور y در راستای پهنای تیر و محور z در راستای ضخامت تیر می‌باشد.

10- Stretch gradient
11- Rotation gradient



شکل 1 میکرو تیر یک‌سرگیردار تحت نیروی متمرکز در انتهای تیر

میدان جابجایی برای تیر مذکور به صورت رابطه (10) بیان می‌شود:

$$u_1 = -zw'(x), u_2 = 0, u_3 = w(x) \tag{10}$$

با توجه به میدان جابجایی مولفه‌های کرنش نیز به ترتیب رابطه (11) می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx} = -zw''(x) \qquad \text{(11-الف)}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \qquad \text{(11-ب)}$$

کرنش حجمی ε_m و مؤلفه‌های کرنش انحرافی ε'_{ij} به صورت روابط (12) و (13) محاسبه می‌شوند:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -zw''(x) \tag{12}$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_m\delta_{ij} \qquad \text{(13-الف)}$$

$$\varepsilon'_{xx} = -\frac{1}{2}\varepsilon'_{yy} = -\frac{1}{2}\varepsilon'_{zz} = -\frac{2}{3}zw''(x) \qquad \text{(13-ب)}$$

کرنش موثر ε_{eff}، نیز به‌ترتیب رابطه (14) بدست می‌آید:

$$\varepsilon^2_{eff} = \frac{2}{3}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij} \qquad \text{(14-الف)}$$

$$\varepsilon_{eff} = \frac{2}{3}zw''(x) \qquad \text{(14-ب)}$$

مؤلفه بردار چرخش θ_y، نیز با رابطه (15) مشخص می‌گردد:

$$\theta_y = w'(x) \tag{15}$$

و تانسور انحنا به ترتیب رابطه (16) می‌باشد:

$$\chi_{ij} = \theta_{i,j} \qquad \text{(16-الف)}$$

$$\chi_{yx} = w''(x) \qquad \text{(16-ب)}$$

تانسور انحنای مؤثر با رابطه (17) بیان می‌گردد:

$$\chi^2_{eff} = \frac{2}{3}\chi_{ij}\chi_{ij} = \frac{2}{3}w''^2 \tag{17}$$

با توجه به تعریف $\eta^{(1)}_{ijk}$ در تئوری فلک و هاتچینسون [8]، $\eta^{(1)}_{ijk}\eta^{(1)}_{ijk}$ با رابطه (18) بیان می‌گردد.

$$\eta^{(1)}_{ijk}\eta^{(1)}_{ijk} = \frac{2}{5}z^2(w''')^2 + \frac{4}{15}(w'')^2 \tag{18}$$

قانون سخت‌شوندگی پلاستیک در این تئوری با توجه به رابطه‌ی (7) به صورت رابطه (19) بیان می‌گردد:

$$\dot{\sigma}_e = \frac{3}{2}E_p\dot{\varepsilon}_e\left(1 + \frac{l_{cw}\eta}{\varepsilon_e}\right)^{1/2} \tag{19}$$

که η، تانسور گرادیان کرنش پلاستیک، با توجه به رابطه (8) به ترتیب رابطه (20) می‌باشد:

$$\eta = \sqrt{c_1\left[\frac{2}{5}z^2(w''')^2 + \frac{4}{15}(w'')^2\right] + \frac{2}{3}w''^2} \tag{20}$$

از آنجا که مقیاس طول داخلی مربوط به گرادیان کشش یعنی l_1 بسیار کمتر از مقیاس طول داخلی مربوط به گرادیان چرخش l_{cw} می‌باشد[13]، عبارت c_1 بسیار کوچک و قابل صرفنظر می‌باشد، در نتیجه رابطه‌ی (20) به صورت رابطه (21) بازنویسی می‌شود:

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{3}w''^2} \tag{21}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (19) تنش مؤثر کل σ_e مشخص خواهد شد:

$$\sigma_e = (\Sigma_0 + E_pzw'')\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{l_{cw}}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

که Σ_0 تنش تسلیم است، با توجه به رابطه (3) اجزای غیر قابل حذف تنش-های انحرافی به صورت رابطه (23) می‌باشد:

$$\sigma'_{xx} = -\frac{1}{2}\sigma'_{yy} = -\frac{1}{2}\sigma'_{zz} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\varepsilon'_{ij} \tag{23}$$

تنش حجمی σ_m، به صورت رابطه (24) خواهد بود:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{2} = \frac{\sigma'_{xx}}{2} \tag{24}$$

حال با استفاده از اصل انرژی پتانسیل مینیمم کل، معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج می‌شود:

$$\delta\pi = (k_2w'' + k_1)\delta w'(x)\Big|_0^L - k_2w'''(x)\Big|_0^L + \int_0^L k_2w''''(x)\,\delta w(x)dx - P\delta w(L) = 0 \tag{25}$$

که k_1 و k_2 ثابت‌های وابسته به مقیاس طولی داخلی می‌باشند و با روابط(26-الف) و (26-ب) مشخص می‌گردند:

$$k_1 = \frac{1}{8}\Sigma_0b[(2h + \sqrt{6}l_{cw})\sqrt{h^2 + l_{cw}h\sqrt{6}} - 3l^2_{cw}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}}\right) \qquad \text{(26-الف)}$$

$$k_2 = E_Pb[\frac{1}{48}\sqrt{h^2 + l_{cw}h\sqrt{6}}(4h^2 + l_{cw}h\sqrt{6} - 9l^2_{cw}) + \frac{3\sqrt{6}}{32}l^3_{cw}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}}\right) \qquad \text{(26-ب)}$$

حال با توجه به شرایط مرزی و معادله حاکم به محاسبه‌ی خیز تیر پرداخته می‌شود، شرایط مرزی در انتهای گیردار تیر یعنی $x = 0$ بصورت رابطه (27) می‌باشد:

$$w(0) = 0\,, w'(0) = 0 \tag{27}$$

در انتهای آزاد، یعنی $x = L$ داریم:

$$M_{x=L} = \int_A (m_{xy} + \sigma_{xx}z)dA|L = (k_2w'' + k_1) = 0 \qquad \text{(28-الف)}$$

$$M'_{x=L} = M' = -k_2w'''(L) = 0 \qquad \text{(28-ب)}$$

با توجه به رابطه (25) خواهیم داشت:

$$k_2w''''(x) = 0 \tag{29}$$

با توجه به رابطه (29) و شرایط مرزی، خیز تیر بصورت رابطه (30) مشخص می‌شود:

$$w^P = \frac{Px^2}{6k_2}\left[3\left(L - \frac{k_1}{P}\right) - x\right] \tag{30}$$

و شیب پلاستیک، θ^P، نیز به صورت رابطه (31) خواهد بود:

$$\theta^P = \frac{(2PL - Px - 2k_1)x}{k_2} \tag{31}$$

کرنش پلاستیک ε^P_{xx}، به ترتیب رابطه (32) می‌باشد:

$$\varepsilon^P_{xx} = -\frac{(PL - Px - k_1)z}{k_2} \tag{32}$$

3-2- حالت الاستیک

در حالت الاستیک، $\Sigma_0 = 0$ و $E_p = E$ خواهد بود، بنابراین خیز تیر در حالت الاستیک، تحت اعمال نیروی متمرکز به انتهای تیر با رابطه (33) تعیین می‌گردد:

$$w^e = \frac{P(3L-x)x^2}{6k_3} \quad (\text{الف-33})$$

$$k_3 = Eb[\frac{1}{48}\sqrt{h^2 + l_{cw}h\sqrt{6}}(4h^2 + l_{cw}h\sqrt{6} - 9l_{cw}^2) + \frac{3\sqrt{6}}{32}l_{cw}^3 \ln\left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}}\right) \quad (\text{ب-33})$$

که e، بیانگر حالت الاستیک است. شیب الاستیک θ^e، نیز به صورت رابطه (34) خواهد بود:

$$\theta^e = \frac{(2PL - Px)x}{3k_3} \quad (34)$$

اگر $l_{cw} = 0$ باشد، به رابطه (35) خواهیم رسید که همان رابطه‌ی خیز در الاستیسیته‌ی کلاسیک می‌باشد.

$$w_{\text{classic}} = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x)\ , I = \frac{bh^3}{12} \quad (35)$$

و کرنش الاستیک نیز بصورت رابطه (36) خواهد بود:

$$\varepsilon_{xx}^e = -\frac{P(L-x)z}{k_3} \quad (36)$$

3-3- حالت الاستو-پلاستیک

در این حالت، تغییر شکل پلاستیک در شکل 1 از انتهای گیردار شروع می‌شود که همانند حالت صلب-پلاستیک بوده و خیز تیر در این قسمت با معادله (30) تعیین می‌گردد. تغییر شکل الاستیک در $x = l_0$ از انتهای گیردار شروع می‌شود که l_0 طول جداکننده ناحیه الاستیک و پلاستیک می‌باشد. با توجه به پیوستگی ε_{xx} در این طول، به محاسبه‌ی l_0 پرداخته می‌شود. در $x = l_0$، کرنش الاستیک برابر با کرنش پلاستیک می‌باشد:

$$\varepsilon_{xx_{x=l_0}}^e = \varepsilon_{xx_{x=l_0}}^P \quad (37)$$

با جایگذاری رابطه‌های (32) و (36) در رابطه (37)، l_0 بدست می‌آید:

$$l_0 = L + \frac{k_1}{P\left[\frac{E_P}{E} - 1\right]} \quad (38)$$

شیب و خیز در $x = l_0$، که به ترتیب با θ^{l_0} و w^{l_0} نشان داده می‌شود با توجه به معادلات (30) و (31) به ترتیب با روابط (39) و (40) مشخص می‌گردند:

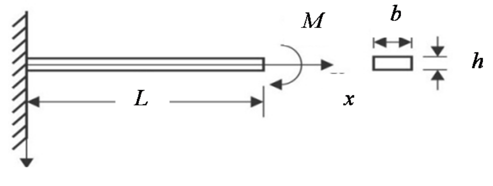
$$\theta^{l_0} = \frac{(2PL - Px - 2k_1)x}{k_2} \quad (39)$$

$$w^{l_0} = \frac{l_0^2(3PL - Pl_0 - 3k_1)}{6k_2} \quad (40)$$

حال به محاسبه‌ی خیز تیر در حالت الاستوپلاستیک پرداخته می‌شود، همانطور که ذکر گردید تغییر شکل پلاستیک از $x = 0$ تا $x = l_0$ می‌باشد که این تغییر شکل به صورت صلب- پلاستیک بوده وخیز تیر با معادله (30) بیان می‌گردد، اکنون به محاسبه خیز تیر در محدوده‌ی الاستیک پرداخته می‌شود، تغییر شکل الاستیک تیر از طول l_0 شروع می‌شود که در این طول، تیر دارای یک شیب θ^{l_0} و یک خیز w^{l_0} می‌باشد. خیز تیر در قسمت الاستیک شامل سه بخش است:

$$w^{eP} = w_1 + w_2 + w_3 \quad (41)$$

که eP، بیانگر حالت الاستو پلاستیک است. w_1، همان w^{l_0} در $x = l_0$ ، w_2، خیز ایجاد شده توسط شیب θ^{l_0} و w_3، خیز مربوط به قسمت تغییر شکل الاستیک می‌باشد که با معادلات (42) بیان می‌شود:



شکل2 میکرو تیر یک‌سرگیردار تحت بارگذاری ممان M

$$w_1 = w^{l_0} \quad (\text{الف-42})$$

$$w_2 = \theta^{l_0}(x - l_0) \quad (\text{ب-42})$$

$$w_3 = \frac{P(x-l_0)^2(3L - 2l_0 - x)}{6k_3} \quad (\text{ج-42})$$

می‌توان خیز تیر را در این حالت با معادله کلی (43) بیان نمود:

$$w^{eP} = \begin{cases} \frac{Px^2}{6k_2}\left[3\left(L - \frac{k_1}{P}\right) - x\right] & x < l_0 \\ w^{l_0} + \theta^{l_0}(x - l_0) + \\ \frac{P(x-l_0)^2(3L - 2l_0 - x)}{6k_3} & x \geq l_0 \end{cases} \quad (43)$$

که l_0، θ^{l_0} و w^{l_0} به ترتیب با معادلات (38-40) بیان می‌شوند.

4- خیز میکروتیر یک‌سرگیردار تحت بارگذاری ممان M در انتهای تیر

4-1- حالت صلب-پلاستیک

شکل 2، میکرو تیر یک‌سرگیردار اویلر-برنولی به طول L، ضخامت h و پهنای b را تحت بارگذاری ممان M نشان می‌دهد. محور x در راستای طول تیر، محور y در راستای پهنای تیر و محور z در راستای ضخامت تیر می‌باشد.

با بکارگیری اصل انرژی پتانسیل مینیمم کل خواهیم داشت:

$$\delta\pi = k_2w'' + k_1)\delta w'(x)\Big|_0^L - k_2w'''(x)\Big|_0^L + \int_0^L k_2w''''(x)\,\delta w(x)dx - M\delta w'(L) = 0 \quad (44)$$

شرایط مرزی در انتهای گیردار تیر یعنی در $x = 0$، همان رابطه (27) می‌باشد و در انتهای آزاد، یعنی $x = L$ داریم:

$$M_{x=L} = \int_A (\,m_{xy} + \sigma_{xx}z)dA_L = (k_2w'' + k_1) = M \quad (\text{الف-45})$$

$$M'_{x=L} = M' = -k_2w'''(L) = 0 \quad (\text{ب-45})$$

با توجه به معادله حاکم:

$$w''''(x) = 0 \quad (46)$$

با توجه به معادله حاکم و شرایط مرزی (27) خیز تیر یکسر گیردار با معادله‌ی (47) مشخص می‌گردد:

$$w = \frac{M - k_1}{2k_2}x^2 \quad (47)$$

رابطه (47) نشان می‌دهد که خیز تیر وابسته به اثرات ابعاد و مقیاس طولی داخلی می‌باشد.

4-2- حالت الاستیک

در حالت الاستیک، $\Sigma_0 = 0$ و $E_p = E$ خواهد بود، بنابراین خیز تیر در حالت الاستیک، تحت اعمال ممان به انتهای تیر با رابطه (48) تعیین می‌گردد:

$$w = \frac{M}{2k_3}x^2 \quad (48)$$

اگر $l_{cw} = 0$ باشد، رابطه (49) حاصل خواهدشد که همان رابطه خیز در الاستیسیته کلاسیک می‌باشد:

$$w_{\text{classic}} = \frac{M}{2EI}x^2\ , I = \frac{bh^3}{12} \quad (49)$$

لازم به ذکر است که برای تحلیل الاستوپلاستیک تیر تحت خمش خالص، با توجه به [19] حل تحلیلی ارائه نشده است. دلیل این امر این است که در محاسبات ذکر شده روابط مربوط به ε_{xx}^e و ε_{xx}^P وابسته به x نخواهند بود.

5- بحث ونتایج

در این بخش ابتدا در بخش (5-1)، برای تعیین صحت تقریبی نتایج و اطمینان از قابل قبول بودن تئوری ارائه شده، به مقایسه نتایج به‌دست آمده

از تئوری چن-ونگ با داده‌های تجربی پرداخته می‌شود و سپس در بخش (5-2)، با استفاده از روابط تعیین شده برای خیز تیر، اثر پارامتر مقیاس طول ماده در سه حالت ذکر شده و برای بارگذاری‌های مختلف بررسی می‌شود.

5-1- مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

5-1-1- حالت الاستیک

در این بخش، با توجه به تحقیق لم[1] و همکارانش [22]، برای مقایسه‌ی نتایج آزمایشگاهی با نتایج تحلیلی در حالت الاستیک، صلبیت خمشی بی‌بعد بکارگرفته می‌شود. درحالت پلاستیک نیزبا توجه به تحقیق شرتریا و همکارانش [23] از ممان خمشی بی‌بعد استفاده می‌شود.

رابطه بین صلبیت خمشی و ضخامت تیر به صورت آزمایشگاهی توسط لم و همکارانش [22] ارائه شده‌است. صلبیت خمشی برای تیر، D، با توجه به رابطه‌ی $\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M}{EI}$، بصورت حاصلضرب مدول الاستیسیته E در ممان اینرسی I تعریف می‌گرددکه با ضخامت رابطه‌ی مستقیم دارد و با رابطه‌ی (50) مشخص می‌شود.

$$D = EI \tag{50}$$

و با توجه به تحقیق لم و همکارانش [22]، صلبت خمشی بی بعد، بصورت $D' = \frac{D}{bh^3}$ تعریف شده است که b پهنای تیر و h ضخامت تیر می‌باشد و با ضخامت رابطه‌ی عکس دارد. این تعریف برای مقایسه با نتایج آزمایشگاهی بکار گرفته شده است.

صلبیت خمشی در حالت کلاسیک به‌ترتیب رابطه (51) می‌باشد:

$$D'_{\text{classic}} = \frac{EI}{bh^3} = \frac{E}{12} \tag{51}$$

صلبیت خمشی برای تئوری چن-ونگ نیز با توجه به رابطه‌ی (48) با رابطه‌ی (52) بیان می‌گردد:

$$D' = Eh^{-3}\left[\frac{1}{48}\sqrt{h^2 + l_{cw}h\sqrt{6}}\left(4h^2 + l_{cw}h\sqrt{6} - 9l_{cw}^2\right)\right] + Eh^{-3}\left[\frac{3\sqrt{6}}{32}l_{cw}^3 \ln\left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}}\right)\right] \tag{52}$$

صلبیت خمشی به ازای مقیاس طول داخلی صفر، برابر $\frac{E}{12}$ می‌باشد. به منظور مقایسه نتایج تحلیلی در حالت الاستیک با نتایج آزمایشگاهی، همانند تحقیق لم و همکارانش [22]، مدول الاستیسیته معادل 1/44 گیگاپاسکال، مقیاس طول داخلی تئوری چن-ونگ در حالت الاستیک برابر با 8/14 میکرومتر می‌باشد. جدول 1 مقایسه نتایج را در حالت الاستیک نشان می‌دهد.

5-1-2- حالت صلب-پلاستیک

برای مقایسه‌ی نتایج تحلیلی حالت صلب-پلاستیک، نتایج آزمایشگاهی شروتریا[2] و همکارانش [23] بکار گرفته می‌شود. بدین منظور از ممان خمشی بی‌بعد، $\frac{4M}{\Sigma_0 bh^2}$ به عنوان تابعی از کرنش سطح، $\varepsilon_b\left(z=\frac{h}{2}\right)$ استفاده می‌شود.

ممان خمشی بی‌بعد تئوری چن-ونگ نیز با بکارگیری رابطه (11) و (47) به ترتیب رابطه (53) می‌باشد:

$$\frac{4M}{\Sigma_0 bh^2} = \frac{1}{6}\varepsilon_b\left(\frac{E_P}{\Sigma_0}\right)\sqrt{1+\sqrt{6}\left(\frac{l_{cw}}{h}\right)} \times\left[4+\sqrt{6}\left(\frac{l_{cw}}{h}\right)-9\left(\frac{l_{cw}}{h}\right)^2\right] + \frac{3\sqrt{6}}{4}\left(\frac{E_P}{\Sigma_0}\right)\left(\frac{l_{cw}}{h}\right)^3 \times \ln\left\{1+\frac{\sqrt{6}}{3}\left[\left(\frac{h}{l_{cw}}\right)+\sqrt{\left(\frac{h}{l_{cw}}\right)^2+\sqrt{6}\left(\frac{h}{l_{cw}}\right)}\right]\right\} + \left[1+\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{l_{cw}}{h}\right)\right]\sqrt{1+\sqrt{6}\left(\frac{l_{cw}}{h}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{l_{cw}}{h}\right)^2} \times \ln\left\{1+\frac{\sqrt{6}}{3}\left[\left(\frac{h}{l_{cw}}\right)+\sqrt{\left(\frac{h}{l_{cw}}\right)^2+\sqrt{6}\left(\frac{h}{l_{cw}}\right)}\right]\right\} \tag{53}$$

ممان خمشی بی‌بعد کلاسیک نیز با صفر قراردادن مقیاس طول داخلی به صورت رابطه (54) بدست می‌آید:

$$\frac{4M}{\Sigma_0 bh^2} = \frac{8}{12}\varepsilon_b\left(\frac{E_P}{\Sigma_0}\right) \tag{54}$$

برای مقایسه نتایج تحلیلی در حالت پلاستیک با داده‌های تجربی ، مانند تحقیق شرتریا و همکارانش [23]، مدول پلاستیسیته معادل 1/03 گیگاپاسکال، مقیاس طول داخلی تئوری چن-ونگ برابر با 4/8 میکرومتر درنظر گرفته شده‌اند. جدول 2 مقایسه‌ی نتایج را در حالت پلاستیک نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که این تئوری هم در حالت الاستیک و هم درحالت پلاستیک، برای تیرهای ضخیم‌تر تطابق بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد.

5-2- تحلیل نتایج

نمودارهای 3 الی 7 خیز بی‌بعد تیر، $\frac{w}{h}$، بر حسب طول بی‌بعد، $\frac{x}{h}$، می‌باشند که برای حالت‌های صلب-پلاستیک، الاستیک و الاستوپلاستیک و تحت بارگذاری‌های نیروی متمرکز و ممان وارد به انتهای تیر رسم شده است و تأثیر مقیاس طول داخلی را بر خیز تیر نشان می‌دهد.

برای رسم نمودارها، نسبت طول تیر به ضخامت تیر، $\frac{L}{h}$، معادل 40، نسبت پهنای تیر به ضخامت، $\frac{b}{h}$، معادل 6، نسبت مدول پلاستیسیته به تنش تسلیم، $\frac{E_P}{\Sigma_0}$، معادل 40، نسبت $\frac{M}{\Sigma_0 bh^2}$ برابر 1/2، نسبت $\frac{M}{Ebh^2}$ برابر 1/200، نسبت $\frac{PL}{\Sigma_0 bh^2}$ برابر 2/3 و نسبت $\frac{PL}{Ebh^2}$ معادل1/200 می‌باشد. لازم به ذکر است که در نتایج غیرکلاسیک، l ثابت فرض شده و با تغییر h ، نسبت‌های مختلف $\frac{l}{h}$ بدست آمده‌اند، و برای رسم نتایج کلاسیک l برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود.

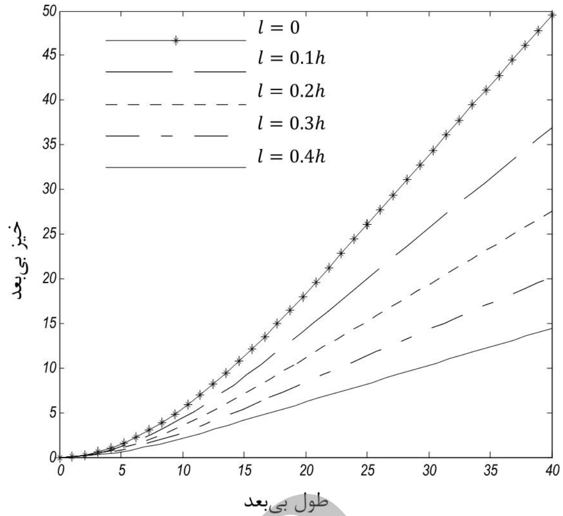
جدول 1 مقایسه نتایج حاصل با داده‌های آزمایشگاهی در حالت الاستیک

ضخامت (میکرومتر)	صلبیت خمشی لم و همکاران (مرجع[22]) (گیگاپاسکال)	صلبیت خمشی چن-ونگ (تحقیق حاضر) (گیگاپاسکال)
20	0/33	0/229
40	0/18	0/183
75	0/16	0/157
115	0/14	0/1455

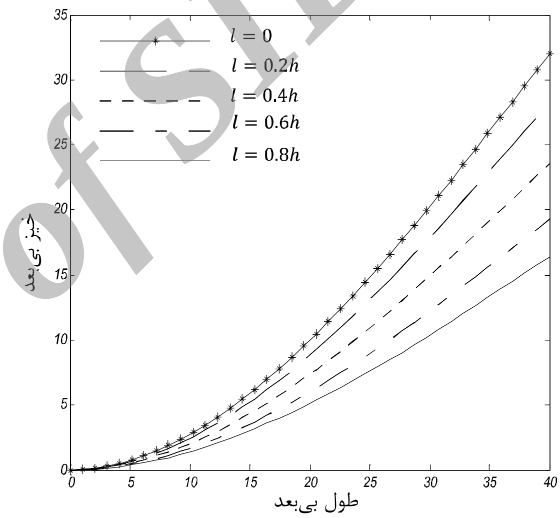
جدول2 مقایسه نتایج حاصل با داده‌های آزمایشگاهی در حالت پلاستیک

ضخامت (میکرومتر)	کرنش سطح	ممان خمشی بی‌بعد شرتریا و همکاران (مرجع [23]) (گیگاپاسکال)	ممان خمشی بی‌بعد چن-ونگ (تحقیق حاضر) (گیگاپاسکال)
25	0/025	1/5	1/36
50	0/054	1/35	1/20
100	0/088	1/22	1/10
200	0/09	1/09	1/055

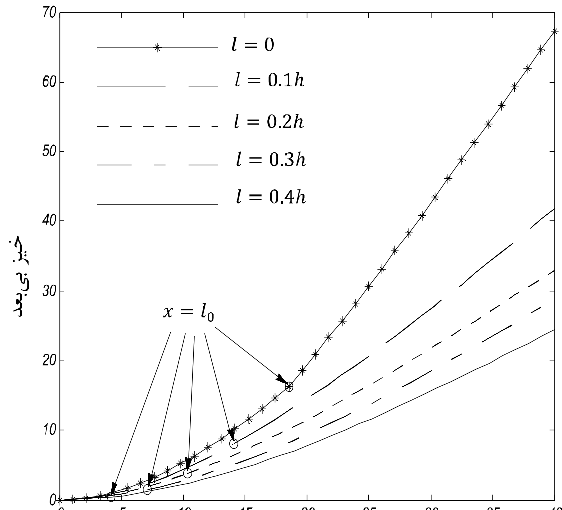
1- Lam
2- Shrotriya



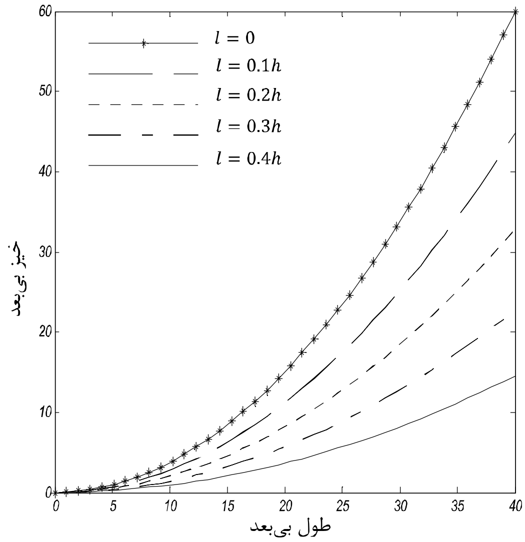
شکل 3 خیز بی‌بعد میکروتیر یک‌سرگیردار صلب-پلاستیک بر حسب طول بی‌بعد و تحت اعمال نیروی متمرکز



شکل 4 خیز بی‌بعد میکروتیر یک‌سرگیردار الاستیک بر حسب طول بی‌بعد و تحت اعمال نیروی متمرکز



شکل 5 خیز بی‌بعد میکروتیر یک‌سر گیردار الاستوپلاستیک بر حسب طول بی‌بعد و تحت اعمال نیروی متمرکز



شکل 6 خیز بی بعد میکرو تیر یک‌سرگیردار صلب-پلاستیک بر حسب طول بی‌بعد تحت بار گذاری ممان M

شکل‌های 3 و 4 بترتیب، خیز بی‌بعد تیر بر حسب طول بی‌بعد را تحت بار-گذاری نیروی متمرکز به انتهای تیر در حالت صلب-پلاستیک و الاستیک نشان می‌دهد.

همانگونه که قابل مشاهده است، در هر دو حالت با کاهش ضخامت، سفتی[1] تیر بیشتر و خیز کمتر می‌گردد.

در صورتی که مقیاس طول داخلی برابر صفر باشد، حل کلاسیک حاصل می‌گرددکه به منظور مقایسه رسم شده است. بیشترین مقدار خیز تیر به ازای $l = 0$ و کمترین میزان خیز به ازای $l = 0.4h$ می‌باشد. در هر دو حالت الاستیک و صلب-پلاستیک با کاهش ضخامت تیر اثرات اندازه و طول مشخصه تاثیر بیشتری بر میزان خیز تیر دارد. هم‌چنین با کاهش نسبت $\frac{l}{h}$، نتایج به نتایج حاصل از تئوری کلاسیک میل می‌کنند.

در شکل 5، خیز تیر در حالت الاستوپلاستیک رسم شده‌است. l_0، طول جداکننده‌ی محدوده‌ی تغییر شکل پلاستیک از بخش الاستیک می‌باشد.

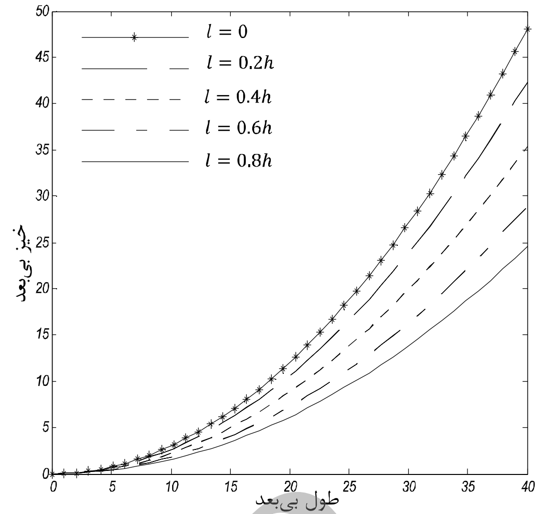
همانگونه که از شکل مشخص است، با کاهش ضخامت محدوده پلاستیک کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود. دلیل این امر این است که با کاهش ضخامت، سفتی تیر بیشتر شده و بنابراین در یک نیروی مشخص، تیر با ضخامت کمتر یا به‌عبارت دیگر با نسبت $\frac{l}{h}$ بیشتر، نسبت به تیرهای با ضخامت بیشتر، کمتر دچار تغییر شکل پلاستیک می‌شود.

در این حالت نیز اثرات ابعاد واندازه بر میزان خیز تیر حائز اهمیت است، هم‌چنین واضح است که با کاهش ضخامت، سفتی تیر افزایش می‌یابد.

شکل‌های 6 و 7 بترتیب ، خیز بی‌بعد تیر بر حسب طول بی‌بعد را تحت بار گذاری ممان M، در حالت صلب-پلاستیک و الاستیک و برای مقادیر متغیر مقیاس طول داخلی نشان می‌دهد.

قابل مشاهده است، باز هم در هر دو حالت با کاهش ضخامت، سفتی تیر بیشتر و خیز کمتر می‌گردد. در هر دو حالت الاستیک و صلب-پلاستیک با کاهش ضخامت تیر اثرات اندازه و طول مشخصه تأثیر بیشتری بر میزان خیز تیر دارد. همانند حالات قبلی، در اینجا باز هم با کاهش نسبت $\frac{l}{h}$، نتایج به تئوری کلاسیک نزدیک شده و نیز با قرار دادن مقدار این نسبت برابر با صفر، نتایج تئوری کلاسیک حاصل می‌شوند. هم‌چنین واضح است که میزان خیز تیر تحت اعمال ممان نسبت به نیروی متمرکز بیشتر است.

1- Stiffness



شکل 7 خیز بی بعد میکرو تیر یک‌سرگیردار الاستیک بر حسب طول بی‌بعد تحت بار گذاری ممان M

در یک نگاه کلی به نتایج می‌توان عدم توانایی تئوری کلاسیک را در پیش‌بینی دقیق رفتار ماده مشاهده کرد، هرچه ابعاد ماده کوچکتر شود، این عدم توانایی بیشتر شده و نتیجه پیش‌بینی شده اختلاف بیشتری نسبت به جواب واقعی خواهد داشت، این امر لزوم بکارگیری تئوری‌های غیرکلاسیک را که قادر به در نظر گرفتن اثرات ابعاد و اندازه باشند، به‌وضوح نشان می‌دهد.

6- جمع‌بندی

در این تحقیق خمش میکروتیر یک‌سرگیردار در حالت الاستیک، صلب-پلاستیک و الاستوپلاستیک با به‌کار گیری تئوری چن-ونگ و تحت بارگذاری‌های متفاوت بررسی شده است و روابط مربوط به خیز تیر در تمامی حالات ذکر شده به‌دست آمده و با استفاده از روابط به‌دست‌آمده، نمودارهای خیز تیر رسم شده‌اند.

نتایج نشان می‌دهند که خیز میکرو تیر در تمامی حالت‌ها وابسته به کمیات ابعاد و مقیاس طول داخلی می‌باشد، در صورت استفاده از تئوری‌های کلاسیک، نمی‌توان این وابستگی را نشان داد، درحالی که تئوری گرادیانی چن- ونگ این وابستگی را به خوبی نشان می‌دهد، هر چه که مقدار ضخامت میکرو تیر کوچکتر باشد این وابستگی بیشتر در رفتار ماده تأثیر گذار می‌باشد، علاوه بر این مشاهده شد که میزان خیز تیر تحت بارگذاری ممان در انتهای تیر، نسبت به بارگذاری نیروی متمرکز اعمال شده در انتهای تیر، بیشتر است، در حالت الاستوپلاستیک نیز با افزایش نسبت $\frac{l}{h}$، محدوده پلاستیک کوچکتر خواهد شد.

7- مراجع

[1] N. A. Fleck, G. M. Muler, M. F. Ashby, J. W. Hutchinson, Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment, *Acta Metallorgica et Materialia,* Vol. 42, pp. 475-487, 1994 .

[2] J. S. Stolken, A. G. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Materialia,* Vol. 46, pp. 5109-5115, 1998 .

[3] R. K. Abu Al-Rub, G. Z. Voyiadjis, Analytical and Experimental Determination of the Material Intrinsic Length Scale of Strain Gradient Plasticity Theoty from Micro- and Nano-Indentation Experiments, *International Journal of Plasticity,* Vol. 20(6), pp. 1139-1182, 2004.

[4] M. B. Taylor, H. M. Zabib, M. A. Khaleel, Damage and size effect durind superplastic deformation, *International Journal of Plasticity,* Vol. 18, pp. 415-442, 2002.

[5] W. D. Nix, H. Gao, Indentation size effect in crystalline materials: A low for strain gradient plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids,* Vol. 46(3), pp. 411-425, 1998.

[6] A. Acharya, A. J. Beaudoin, Grain-size effect in viscoplastic polycrystals at moderate strains, *Journal of mechanics and physics of Solids,* Vol. 48, pp. 2213-2230, 2000.

[7] E. C. Aifantis, Strain gradient interpretation of size effect, *International Journal of Fracture,* , Vol. 95, pp. 299-314, 1999.

[8] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids,* Vol. 41, pp. 1825-1857, 1993.

[9] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, Strain gradient plasticity, *Advances in Applied Mechanics,* Vol. 33, pp. 295-361, 1997.

[10] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, A reformulation of strain gradient plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids,* Vol. 49, pp. 2245-2271, 2001.

[11] S. H. Chen, T. C. Wang, A new hardening law for strain gradient plasticity, *Acta Materialia,* Vol. 48, pp. 3997-44005, 2000.

[12] S. H. Chen, T. C. Wang, Interface crack problems with strain gradient effects , *International Journal of Fracture,* Vol. 117, pp. 25-37, 2002.

[13] S. K. Park, X. L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of mechanics and physics of Solids,* Vol. 16, pp. 2355-2359, 2006.

[14] S.H. Chen, B. Feng, Size effect in micro-scale cantilever beam bending, *Acta Mechanica,* Vol. 219, pp. 291-307, 2011.

[15] N. Challamel, C. M. Wang, The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved, *Nanotechnology,* Vol. 19, pp. 345703, 2008.

[16] W. Wang, Y. Huang, K. J. Hsia, K. X. Hu, A. Chandra, A study of microbend test by strain gradient plasticity, *International Journal of Plasticity,* Vol. 19, pp. 365-382, 2003.

[17] M. I. Idiart, V. S. Deshpande, N. A. Fleck, J. R. Willis, Size effect in the bending of thin foils, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 47, pp. 1251-1264, 2009.

[18] N. A. Fleck, J. R. Willis, A mathematical basis for strain gradient plasticity theory. Part II: tensorial plastic multiplier, *Journal of mechanics and physics of Solids,* Vol. 57, pp. 1045-1057, 2009.

[19] B. Ji, W. J. Chen, J. Zhao, Measurement of length-scale and solution of cantilever beam in couple stress elasto-plasticity, *Acta Mechanica,* Vol. 25, pp. 381-387, 2009.

[20] Z. F. Shi, B. Huang, H. Tan, Y. Huang, T. Y. Zhang, P. D. Wu, K. C. Hwang, H. Gao, Determination of the microscale stress-strain curve and strain gradient effect from the micro-bend of ultra- thin beams, *International Journal of Plasticity,* Vol. 24, pp. 1606-1624, 2008.

[21] Y. Q. Mao, S. G. Ai, D. N. Fang, Y. M. Fu, C. P. Chen, Elassto-plastic analysis micro FGM beam basing on mechanism-based strain gradient plasticity theory, *Composite Structure,* Vol. 101, pp. 168-179, 2013.

[22] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids,* Vol. 51, pp. 1477-1503, 2003.

[23] P. Shrotriya, S. M. Allameh, J. Lou, T. Buchheit, W. O. Soboyejo, On the measurement of the plasticity length scale parameter in LIGA nickel foils, *Mechics of Materials,* , Vol. 35, pp. 233-243, 2003.