مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1394، دوره 15، شماره 2، ص‌ص 221-230

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل خمش غیرخطی ورق‌های مستطیلی ضخیم با استفاده از تئوری برشی اصلاح شده چهار متغیره و روش رهایی پویا

سید جعفر روزگار[1*]، محمد غلامی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

* شیراز، صندوق پستی 313-71555، rouzegar@sutech.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 11 مهر 1393

پذیرش: 15 آذر 1393

ارائه در سایت: 13 دی 1393

کلید واژگان:

تئوری برشی چهار متغیره

تئوری ورق مرتبه بالا

جابجایی بزرگ

خمش غیرخطی

روش رهایی پویا

چکیده

در این مقاله به تحلیل خمش غیرخطی ورق‌های مستطیلی ایزوتروپ و ارتوتروپ با استفاده از روش رهایی پویا پرداخته شده است. به منظور مدل‌سازی ورق، از تئوری اصلاح شده چهار متغیره استفاده شده است که یک تئوری برشی مرتبه بالای جدید بوده که در عین سادگی، قابلیت خوبی در تحلیل ورق‌های نسبتاً ضخیم و ضخیم دارد. این تئوری بر خلاف تئوری برشی مرتبه اول نیاز به ضریب اصلاح تنش برشی ندارد، کرنش و تنش برشی را در راستای ضخامت به صورت سهمی پیش‌بینی کرده و شرایط بدون تنش بودن سطوح آزاد ورق را ارضا می‌کند. معادلات حاکمه با استفاده از روش کار مجازی بدست آمده و اثر ترم‌های غیر خطی فون- کارمن در روابط کرنش- جابجایی لحاظ شده است. به منظور حل معادلات حاکمه کوپل و غیرخطی از روش رهایی پویا به همراه روش تفاوت‌های محدود استفاده شده و یک برنامه کامپیوتری در نرم‌افزار متلب تهیه شده است. جواب‌های بدست آمده با تحقیقات پیشین مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی در نتایج حاصله مشاهده شده است. همچنین اثرات نسبت ضخامت به طول ورق و شرایط مرزی مختلف بر روی نتایج، مورد بررسی قرار گرفته است. نهایتاً میزان تغییرات اثرات برشی با تغییر ضخامت و همچنین تغییر اثرات ارتوتروپی در مورد ورق‌های ارتوتروپ مورد ارزیابی قرار گرفته است.

Non-linear bending analysis of thick rectangular plates by four-variable refined plate theory and Dynamic Relaxation method

Jafar Rouzegar*, Mohammad Gholami

Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran.

*P.O.B. 7155-313 Shiraz, Iran. rouzegar@sutech.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 October 2014
Accepted 06 December 2014
Available Online 03 January 2015

Keywords:
Dynamic Relaxation Method
Four-variable Refined Plate Theory
Higher-order Plate Theory
Large Deflection
Non-linear bending

ABSTRACT

In this study, the non-linear bending analysis of isotropic and orthotropic rectangular plates is performed by Dynamic Relaxation (DR) method. In order to model the plate, the four-variable refined plate theory, which is a new and simple higher-order shear deformation theory and has a good capability in analysis of thick plates, is adopted. Despite the first-order shear deformation plate theory, this theory does not need the shear correction factor, predicts shear strains and stress parabolically across the plate thickness and satisfies the zero stress conditions on free surfaces. The governing equations are obtained using virtual work principle and the Von-Karman nonlinear terms are considered in strain-displacement equations. The non-linear coupled governing equations are solved by DR method combined with finite difference technique, and for this purpose a computer code is provided in MATLAB software. In order to demonstrate the accuracy of the present method, the numerical results are compared with the existing ones and very good agreement is observed. Also, the effects of side-to-thickness ratio and boundary conditions on the results are examined. Finally, the variations of shear effects by changing the plate thickness and also changing the orthotropy ratio in orthotropic plates are investigated.

1- مقدمه

ورق‌ها، سازه‌های تخت و بدون انحنا اولیه می‌باشند که نسبت ضخامت به طول و عرض آن‌ها کوچک است. ورق‌ها معمولاً با توجه به نوع کاربرد، متحمل نیروی برشی و گشتاورهای خمشی و پیچشی می‌شوند. ورق‌های نازک با توجه به نسبت بالای تحمل بار به وزن، مزیت‌های بسیاری را میسر می‌سازند و به طور گسترده در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تئوری‌های مورد استفاده در تحلیل ورق‌ها در ابتدا با ارائه تئوری کلاسیک مطرح شد [1]. بر اساس فرضیات این تئوری خطوط عمود بر صفحه‌ی میانی بعد از تغییر شکل همچنان به صورت مستقیم، بدون تغییر طول و عمود بر صفحه‌ی میانی باقی می‌مانند. در نظر گرفتن این فرضیات باعث نادیده گرفته شدن اثر برش در تحلیل ورق‌ها گردید و استفاده از این تئوری را محدود به ورق‌های نازک نمود. با معرفی تئوری مرتبه اول توسط ریزنر [2] و میندلین [3] اثرات تغییر شکل برشی در فرمول‌بندی ورق در نظر

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

J. Rouzegar, M. Gholami, Non-linear bending analysis of thick rectangular plates by four-variable refined plate theory and Dynamic Relaxation method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 2, pp. 221-230, 2015 (In Persian)

گرفته شد. طبق این تئوری خطوط عمود بر صفحه‌ی میانی دچار چرخش می‌شوند که این فرض منجر به ایجاد تنش برشی ثابت در راستای ضخامت می‌گردد. این در حالی است شرایط بدون تنش بودن سطوح آزاد ورق در این تئوری ارضاء نمی‌گردد و کل انرژی برشی در راستای ضخامت بیش از مقدار واقعی بدست می‌آید که منجر به استفاده از ضریب اصلاح برشی می‌گردد.

بدلیل معایب تئوری‌های موجود، تئوری‌های مرتبه بالا ارائه شد. این تئوری‌ها با رفع محدودیت تئوری‌های پیشین دقت قابل قبولی را در تحلیل صفحات و پوسته‌ها میسر ساختند. ردی [4] با در نظرگیری یک تابع درجه سه برای جابجایی، کرنش برشی را در راستای ضخامت به صورت یک سهمی بدست آورد. توراتیر [5] تئوری مرتبه بالای مثلثاتی را با پنج متغیر به منظور مدل‌سازی ورق‌ها معرفی کرد. شیمپی [6] تئوری اصلاح شده‌ی دو متغیره را برای ورق‌های ایزوتروپ ارائه کرد که در ادامه از این تئوری برای انواع تحلیل‌های ورق‌های ایزوتروپ، اورتوتروپ، لایه‌ای و هدفمند استفاده شد. بناچور و همکارانش [7] با افزودن ترم‌های مربوط به جابجایی صفحه‌ای، تئوری اصلاح شده چهار متغیره را ارایه نمودند. حمیدی و همکارانش [8] با استفاده از تئوری چهارمتغیره به تحلیل ورق‌های هدفمند ساندویچی تحت بارهای ترمومکانیکال پرداختند. بویادرا و همکارانش [9] با استفاده از این تئوری به تحلیل کمانش حرارتی ورق‌های هدفمند پرداختند. اخیراً تئوری‌های مرتبه بالای دیگری نیز بمنظور تحلیل ورق‌های لایه‌ای و هدفمند ارائه شده است. ال‌میچ و همکارانش [10] تئوری هایپربولیک جدیدی را به‌منظور تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد ورق‌های از جنس مواد تابعی عرضه کردند. هواری و همکارانش [11] به بررسی رفتار خمش ترموالاستیک ورق‌های ساندویچی چندلایه با استفاده از تئوری جدید نرمال و برشی مرتبه بالا پرداختند. منتاری و سوارز [12] تئوری بهینه شده‌ی مثلثاتی را برای تحلیل ورق‌ها و پوسته‌ها از جنس مواد تابعی ارائه کردند. تای و چوی [13] ورق‌های هدفمند را با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی مرتبه بالا و با در نظر گرفتن اثرات کشش در راستای ضخامت مورد تحلیل قرار دادند.

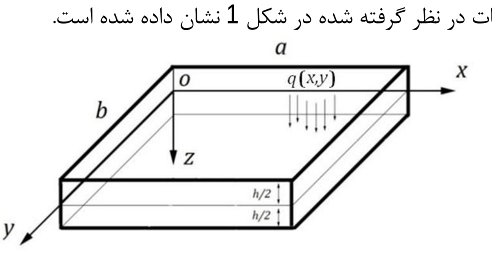
عوامل مختلفی موجب رفتار غیرخطی در سازه‌ها می‌گردد، از جمله رفتار غیرخطی ناشی از ماده که به نوعی در رابطه تنش- کرنش بروز می‌یابد و رفتار غیرخطی هندسی که در جابجایی‌های بزرگ موجب غیرخطی شدن رابطه جابجایی- کرنش می‌گردد. در صورتی که جابجایی‌ها در مقایسه با ضخامت ورق کوچک باشند، تئوری تغییر شکل کوچک نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد. در صورتی که جابجایی‌ها هم‌مرتبه ضخامت ورق شوند، اثرات کشش صفحه میانی مقادیر قابل توجهی خواهد بود و تنش‌های غشایی و انحنای ورق اثرمتقابلی بر روی یکدیگر خواهند داشت و باید از تئوری جابجایی‌های بزرگ استفاده کرد. در حالت استاتیکی، معادلات غیرخطی مربوط به جابجایی‌های بزرگ توسط فون کارمن ارائه شد. این معادلات با استفاده از روش‌هایی مانند آنالیز فوریه، روش انرژی، پرتوربیشن[1] و رهایی پویا[2] حل شده است.

روش قدرتمند رهایی پویا، روشی تکراری و صریح[3] بوده که در تحلیل مسائل غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش برای اولین بار توسط اوتر [14] و دی [15] مطرح شد. در این روش هم از اینرسی مجازی و هم از استهلاک (دمپینگ) مجازی استفاده می‌شود و با استفاده از این دو پارامتر معادلات حاکمه‌ی مقدار مرزی به معادلات مقدار اولیه تبدیل خواهند شد. این روش کارایی خود را در تحلیل مسائل مختلف نشان داده است. ژانگ و یو [16] روش رهایی پویای تطبیقی بهبود یافته را برای تحلیل خمشی الاستیک- پلاستیک و چین‌خوردگی ورق‌های دایره‌ای ارائه کردند و ژانگ و همکارانش [17] با ارائه الگوریتم جدیدی این روش را توسعه دادند. صالحی و آقایی [18] با استفاده از روش رهایی پویا، جابجایی بزرگ ورق‌های ویسکوالاستیک دایره‌ای را مورد تحلیل قرار دادند. علامتیان [19] فرمول‌بندی جدیدی برای محاسبه جرم مجازی افزوده با استفاده از میرایی جنبشی ارائه کرد. صالحی و سافی جهانشاهی [20] با استفاده از این روش رفتار ورق‌های مستطیلی ویسکوالاستیک تحت نیروهای درون صفحه‌ای را بررسی کردند. گلمکانی و کدخدایان [21] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، جابجایی بزرگ ورق‌های تقویت شده توخالی قطاعی از جنس مواد تابعی تحت اثر بارهای مکانیکی و حرارتی را مورد تحلیل قرار دادند. گلمکانی [22] رفتار ترموالاستیک غیرخطی دیسک‌های دوار با ضخامت متغیر ساخته شده از مواد هدفمند را با تئوری برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار داد. گلمکانی و امامی [23] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و روش رهایی پویا به تحلیل خمش و کمانش صفحات حلقوی از جنس مواد تابعی پرداختند. گلمکانی و محرابیان [24] خمش غیرخطی صفحات کامپوزیتی دایره‌ای توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول بررسی کردند. فلاحتگر [25] کمانش خزشی صفحات ویسکوالاستیک ضخیم را با در نظرگیری تئوری برشی مرتبه اول و استفاده از روش المان محدود در کنار روش رهایی پویا بررسی کرد. توروی و عثمان [26] خمش ورق‌های ارتوتروپ را با فرض جابجایی بزرگ و شرایط مرزی مختلف با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول بررسی کردند.

تحقیقات صورت رفته بر روی رفتار غیرخطی ورق‌ها با استفاده از روش رهایی پویا اغلب محدود به تئوری کلاسیک و تئوری برشی مرتبه اول ورق می‌باشد. در این تحقیق با استفاده از روش رهایی پویا در کنار روش تفاوت‌های محدود مرکزی[4] به تحلیل خمش غیرخطی ورق‌های مستطیلی ضخیم با در نظرگیری تئوری برشی مرتبه بالای چهار متغیره پرداخته می‌شود. این تئوری بر خلاف تئوری برشی مرتبه اول نیاز به ضریب اصلاح تنش برشی ندارد، کرنش و تنش برشی را در راستای ضخامت به صورت سهمی پیش‌بینی کرده و شرایط بدون تنش بودن سطوح آزاد ورق را ارضا می‌کند. نتایج بدست آمده بمنظور اعتبارسنجی با نتایج موجود مقایسه شده است. همچنین اثرات شرایط مرزی مختلف، نسبت ضخامت به طول ورق و اثرات ارتوتروپی بر نتایج به دست آمده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- معادلات حاکم

در این قسمت معادلات حاکمه بر ورق مستطیلی ارتوتروپ تحت بارگذاری یکنواخت عرضی استخراج خواهد شد. هندسه ورق مورد بررسی و دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در شکل 1 نشان داده شده است.



شکل 1 هندسه ورق و دستگاه مختصات در نظر گرفته شده

1- Perturbation method
2- Dynamic relaxation method
3- Iterative and Explicit method
4- Central Finite difference method

2-1- تئوری برشی اصلاح شده چهار متغیره

میدان تغییر مکان با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالای چهار متغیره به صورت رابطه (1) در نظر گرفته می‌شود [7]:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x}\\
v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y}\\
w(x,y,z) &= w_b(x,y) + w_s(x,y)\\
f(z) &= -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z\left(\frac{z}{h}\right)^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

که چهار متغیر مورد نظر شامل جابجایی‌های درون صفحه‌ای صفحه میانی (u_0 و v_0) و مولفه‌های خمشی و برشی خیز عمودی صفحه میانی(w_b و w_s) می‌باشند. همانگونه که مشاهده می‌شود خیز عمودی ورق به دو بخش خیز خمشی w_b و خیز برشی w_s تقسیم می‌شود. چنانچه از خیز برشی صرفنظر شود تئوری مورد نظر به تئوری کلاسیک منجر خواهد شد. تغییرمکان نقاط مختلف ورق در جهت x و y از حاصل‌جمع سه ترم تشکیل شده‌اند. ترمهای اول مربوط به تغییرمکان درون صفحه‌ای صفحه میانی ورق (u_0 و v_0) می‌باشند. ترمهای دوم از حاصلضرب فاصله عمودی نقاط از صفحه میانی (z) در مشتقات خیز خمشی (w_b) نسبت به x و y به دست می‌آیند. این ترمها مشابه ترمهای موجود در تئوری کلاسیک ورق‌ها می‌باشند. ترمهای سوم که عملاً ناشی از در نظر گرفتن اثرات برشی می‌باشند از حاصلضرب تابع $f(z)$ در مشتقات خیز برشی (w_s) نسبت به x و y به دست می‌آیند. انتخاب تابع $f(z)$ به‌گونه‌ای است که شرط بدون تنش بودن سطوح آزاد ورق را ارضا کند. همچنین خاصیت دیگر این تابع صفر بودن انتگرال آن در راستای ضخامت ورق می‌باشد که این شرط باعث عدم ایجاد کوپلینگ بین اثرات خمشی و برشی خواهد شد که نهایتاً منجر به معادلات حاکمه مستقل (غیرکوپل) برای مولفه خمشی خیز (w_b) و مولفه برشی خیز (w_s) خواهد گردید.

2-2- میدان کرنش - تغییر مکان غیر خطی

با صرف‌نظر از کرنش عمودی در راستای ضخامت در مقابل سایر کرنش‌ها، مولفه‌های کرنش به صورت رابطه (2) تعریف می‌شوند[7]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^b + f(z)\kappa_x^s\\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^b + f(z)\kappa_y^s\\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^b + f(z)\kappa_{xy}^s\\
\gamma_{yz} &= g(z)\gamma_{yz}^s\\
\gamma_{xz} &= g(z)\gamma_{xz}^s
\end{aligned}
\tag{الف-2}
$$

که با در نظر گرفتن ترمهای غیرخطی فون‌کارمن، روابط کرنش- جابجایی به صورت زیر خواهد بود[7]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2\\
\varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2\\
\gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right)\\
\kappa_x^b &= -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \qquad \kappa_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\
\kappa_y^b &= -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \qquad \kappa_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\
\kappa_{xy}^b &= -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}, \qquad \kappa_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\\
\gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \qquad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}
\end{aligned}
$$

$$
g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \tag{ب-2}
$$

که در این روابط εها و γها کرنش‌های صفحه میانی و κها انحناهای صفحه میانی می‌باشند.

2-3- روابط ساختاری تنش - کرنش

با صرف‌نظر کردن از تنش عمودی در راستای محور z در مقایسه با تنش‌های درون صفحه‌ای، رابطه بین مولفه‌های تنش و کرنش به صورت رابطه(3) خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}Q_{55} & 0\\ 0 & Q_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{الف-3}
$$

که ضرایب ماتریس سفتی در معادلات فوق به صورت زیر می‌باشد [26]:

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}},\\
Q_{12} &= \frac{\upsilon_{21}E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}},\\
Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\upsilon_{21}\upsilon_{12}},\\
Q_{44} &= G_{13}, \quad Q_{55} = G_{23}, \quad Q_{66} = G_{12}
\end{aligned}
\tag{ب-3}
$$

که در این رابطه E_1 و E_2 مدول الاستیسیته، G_{12}، G_{13} و G_{23} مدول برشی و υ_{21} و υ_{12} ضریب پؤاسون می‌باشند.

2-4- استخراج معادلات تعادل

معادلات حاکم بر ورق مستطیلی تحت بار عرضی یکنواخت با استفاده از روش کار مجازی بصورت رابطه (4) بدست خواهد آمد:

$$
W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \tag{الف-4}
$$

که در این رابطه کار نیروهای خارجی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
W_{\text{ext}} = \int_A q(\delta w_b + \delta w_s)\,dxdy \tag{ب-4}
$$

و کار نیروهای داخلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
W_{\text{int}} = \int_V \{\sigma_x\,\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz}\}\,dV \tag{ج-4}
$$

که در رابطه (4-ج) V حجم ورق، A مساحت ورق و q بار عرضی وارد بر ورق می‌باشد. با جایگذاری معادله (2-الف) در معادله (4-ج) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت ورق (h)، کار نیروهای داخلی به صورت رابطه (4-د) به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
W_{\text{int}} = \int_A \{ & N_x\delta\varepsilon_x^0 + N_y\delta\varepsilon_y^0 + N_{xy}\delta\gamma_{xy}^0\\
& + M_x^b\delta\kappa_x^b + M_y^b\delta\kappa_y^b\\
& + M_{xy}^b\delta\kappa_{xy}^b + M_x^s\delta\kappa_x^s\\
& + M_y^s\delta\kappa_y^s + M_{xy}^s\delta\kappa_{xy}^s\\
& + Q_{xz}\delta\gamma_{xz}\\
& + Q_{yz}\delta\gamma_{yz}\}\,dx\,dy
\end{aligned}
\tag{د-4}
$$

در معادله فوق منتجه‌های تنش به صورت رابطه (5-الف) محاسبه می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})\,dz\\
(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})\,zdz
\end{aligned}
$$

$$(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})\, f dz$$

$$(Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz})\, g dz \qquad \text{(5-الف)}$$

از جایگذاری معادلات (2-الف) و (3-الف) در معادلات (6) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت، روابط (5-ب) نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 \\
N_y &= A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 \\
N_{xy} &= A_{66}\gamma_{xy}^0 \\
M_x^b &= D_{11}^b\kappa_x^b + D_{12}^b\kappa_y^b \\
M_y^b &= D_{12}^b\kappa_x^b + D_{22}^b\kappa_y^b \\
M_{xy}^b &= D_{66}^b\kappa_{xy}^b \\
M_x^s &= D_{11}^s\kappa_x^s + D_{12}^s\kappa_y^s \\
M_y^s &= D_{12}^s\kappa_x^s + D_{22}^s\kappa_y^s \\
M_{xy}^s &= D_{66}^s\kappa_{xy}^s
\end{aligned} \qquad \text{(5-ب)}$$

که:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\, dz \qquad (i,j = 1,2,6) \\
D_{ij}^b &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\, z^2 dz \qquad (i,j = 1,2,6) \\
D_{ij}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\, f^2 dz \qquad (i,j = 1,2,6) \\
Q_i &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_i\, g^2 dz \qquad (i = 44,55)
\end{aligned} \qquad \text{(5-ج)}$$

معادلات (5) برای یک ماده ایزوتروپ به صورت (6-الف) ساده می‌شود:

$$N_x = C\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x} + v\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x}\right]^2 + \frac{v}{2}\left[\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial y}\right]^2\right\}$$

$$N_y = C\left\{\frac{\partial v_0}{\partial y} + v\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial y}\right]^2 + \frac{v}{2}\left[\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x}\right]^2\right\}$$

$$N_{xy} = \frac{C}{2}(1 - v)\left\{\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial y}\right)\right]\right\}$$

$$M_x^b = -D^b\left\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right\}$$

$$M_x^s = -D^s\left\{\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right\}$$

$$M_y^b = -D^b\left\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\right\}$$

$$M_y^s = -D^s\left\{\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right\}$$

$$M_{xy}^b = -D^b(1 - v)\left\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}\right\}$$

$$M_{xy}^s = -D^s(1 - v)\left\{\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}\right\} \qquad \text{(6-الف)}$$

که:

$$C = Q_{11}h$$

$$D^b = Q_{11}\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$D^s = Q_{11}\int_{-h/2}^{h/2} f^2(z) dz \qquad \text{(6-ب)}$$

از جایگذاری معادلات (2-الف و ب) در معادله (4) و استفاده از تکنیک انتگرال جزء به جزء و سپس جمع آوری ضرایب δu_0، δv_0، δw_b و δw_s و برابر صفر قرار دادن هرکدام به‌صورت مجزا، معادلات حاکمه ورق به‌صورت رابطه(7) بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) + N_y\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) + 2N_{xy}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}\right) + q = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + N_x\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) + N_y\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) + 2N_{xy}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = 0 \qquad (7)$$

2-5- شرایط مرزی

در این تحقیق شرایط مرزی مختلف برای ورق مستطیلی شامل تکیه‌گاه ساده- ساده (SSSS)، گیردار- گیردار (CCCC) و ترکیب ساده- گیردار (SCSC) مورد بررسی می‌گیرد. با استفاده از تئوری برشی اصلاح شده چهار متغیره، این شرایط مرزی منجر به اعمال شرایط ذیل بر روی لبه‌های ورق خواهد شد:

- شرایط مرزی مربوط به تکیه‌گاه ساده- ساده (SSSS):

برای $x = 0, a$:

$$u_0 = v_0 = w_b = w_s = M_x^b = M_x^s = 0$$

برای $y = 0, b$:

$$u_0 = v_0 = w_b = w_s = M_y^b = M_y^s = 0 \qquad \text{(8-الف)}$$

- شرایط مرزی مربوط به تکیه‌گاه گیردار- گیردار (CCCC):

برای $x = 0, a$:

$$u_0 = v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0$$

برای $y = 0, b$:

$$u_0 = v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \qquad \text{(8-ب)}$$

- شرایط مرزی مربوط به تکیه‌گاه ساده- گیردار (SCSC):

برای $x = 0, a$:

$$u_0 = v_0 = w_b = w_s = M_x^b = M_x^s = 0$$

برای $y = 0, b$:

$$u_0 = v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \qquad \text{(8-ج)}$$

3- حل معادلات حاکمه غیرخطی

معادلات حاکمه بدست آمده در معادله (7) معادلاتی کوپل و غیرخطی می باشند که برای حل این سیستم معادلات از روش رهایی پویا استفاده می‌شود. در این روش معادلات استاتیکی مقدار مرزی بدست آمده در رابطه (7)، با

افزودن ترم‌های مجازی اینرسی و میرایی به معادلات دینامیکی مقدار اولیه تبدیل می‌شود، همچنین از روش تفاوت‌های محدود مرکزی برای تقریب مشتقات موجود در این معادلات استفاده خواهد شد.

با توجه به فرمول‌بندی صریح روش رهایی پویا، بمنظور تضمین همگرایی و پایداری نیاز است تا شرط پایداری ارایه شده توسط گرشگورین در محاسبات لحاظ گردد [27]. با افزودن ترم‌های مجازی جرم و میرایی به معادلات حاکمه استاتیکی، معادلات (7) به معادلات دینامیکی مقدار اولیه زیر تبدیل خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=\rho_{u_0}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+c_{u_0}\frac{\partial u_0}{\partial t}\\
&\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=\rho_{v_0}\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+c_{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial t}\\
&\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2}+N_x\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)\\
&\qquad+N_y\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\\
&\qquad+2N_{xy}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\right)+q\\
&\qquad=\rho_{w_b}\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2}+c_{w_b}\frac{\partial w_b}{\partial t}\\
&\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2}+N_x\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)\\
&\qquad+N_y\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\\
&\qquad+2N_{xy}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}\\
&\qquad+\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y}+q\\
&\qquad=\rho_{w_s}\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}+c_{w_s}\frac{\partial w_s}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

که در رابطه (9) ρ و c ضرایب چگالی و میرایی مجازی می‌باشند.

با استفاده از روش تفاوت‌های محدود، مشتقات زمانی موجود در ترم‌های سرعت و شتاب مجازی افزوده شده به سمت راست معادلات فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^a+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^b\right]\\
&\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta t}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^a-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^b\right]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

که اندیس a و b به ترتیب بیانگر گام زمانی بعد و قبل می‌باشند. با جایگزینی معادلات (10) در معادلات (9) می‌توان این معادلات را بر حسب ترم‌های سرعت در گام زمانی بعد بازنویسی و با استفاده از روابط روش رهایی پویا معادلات بدست آمده را به صورت صریح حل کرد. برای جزییات بیشتر روش و الگوریتم حل مربوطه می‌توان به مرجع [18] مراجعه نمود.

4- بحث و نتایج عددی

در این بخش ابتدا بمنظور ارزیابی روش به مقایسه نتایج روش استفاده شده در تحقیق حاضر با نتایج موجود در تحقیقات پیشین برای ورق‌های ایزوتورپ و ارتوتروپ پرداخته می‌شود و پس از اطمینان از صحت و دقت روش، به بررسی پارامترهای مختلف و تأثیر آن‌ها بر روی نتایج پرداخته می‌شود.

4-1- تحلیل ورق ایزوتروپ

یک ورق مربعی با تکیه‌گاه ساده- ساده و ساده- گیردار، تحت اثر بار یکنواخت عرضی در نظر گرفته شده و پس از حل مسئله، نتایج به دست آمده با نتایج مرجع [28] مقایسه می‌شود. از پارامترهای بی‌بعد زیر به منظور ارائه نتایج استفاده شده است که پارامترهای بی بعد مربوط به ورق ایزوتروپ در رابطه‌ی (14-الف) و پارامترهای بی بعد مربوط به ورق ارتوتروپ در رابطه‌ی (14-ب) لیست شده است:

$$
\begin{aligned}
&w^*=\frac{w}{h}\\
&Q=\frac{qa^4}{D^b h}\\
&\sigma_y^*=\frac{\sigma_y a^2}{Eh^2}\\
&\tau_{xz}^*=\frac{\tau_{xz}a^2}{Eh^2}
\end{aligned}
\tag{14-الف}
$$

$$
\begin{aligned}
&w^*=\frac{w}{h}\\
&\bar{q}=\frac{qa^4}{E_2h^4}\\
&\bar{\sigma}_x=\frac{\sigma_x a^2}{E_2h^2}\\
&\bar{\tau}_{xz}=\frac{\tau_{xz}a^2}{E_2h^2}
\end{aligned}
\tag{14-ب}
$$

که h ضخامت ورق، a اندازه طول و عرض ورق، D صلبیت خمشی ورق و q اندازه بار یکنواخت اعمالی به ورق می‌باشد. نتایج ارایه شده در جداول شامل جابجایی عرضی بر روی صفحه میانی و وسط ورق $w(a/2, a/2, 0)$، تنش عمودی بر روی سطح زیرین و وسط ورق $\sigma_y(a/2, a/2, h/2)$ و تنش برشی بر روی صفحه‌ی میانی و لبه‌ی ورق $\tau_{xz}(0,a/2,0)$ می‌باشد.

در جداول 1 تا 3 همگرایی جابجایی عرضی و تنش‌های عمودی برای شرایط مرزی مختلف با در نظر گرفتن Q=100 و h=0.05a بررسی شده است، بدلیل تقارن موجود در هندسه، شرایط مرزی و بارگذاری می‌توان از یک‌چهارم ورق برای انجام محاسبات استفاده نمود. تعداد شبکه‌بندی استفاده شده برای یک‌چهارم ورق در روش تفاوت‌های محدود در جداول 1 تا 3 ذکر شده است. همانطور که دیده می‌شود همگرایی جواب‌ها در حالت تکیه‌گاه گیردار- گیردار نسبت به حالت گیردار- ساده و همچنین گیردار- ساده نسبت به تکیه‌گاه ساده- ساده روند کندتری را نشان می‌دهد، با در نظر گیری شبکه‌بندی 12×12 برای تکیه‌گاه ساده- ساده، 14×14 برای تکیه‌گاه ساده- گیردار و 16×16 برای تکیه‌گاه گیردار- گیردار نتایج همگرایی مناسبی داشته و دقت مناسبی را ارائه می‌کنند. جداول 4 و 5 به مقایسه جواب‌های بدست آمده برای مقادیر بی‌بعد شده جابجایی عرضی $w(a/2, a/2, 0)$ و تنش عمودی $\sigma_y(a/2, a/2, h/2)$ می‌پردازند

جدول 1 همگرایی جواب‌ها برای جابجایی عرضی بی‌بعد w^* و تنش عمودی بی‌بعد σ_y^* برای تکیه‌گاه گیردار- گیردار

اندازه شبکه‌بندی	جابجایی عرضی بی‌بعد	تنش عمودی بی‌بعد
6×6	0/14099	1/1292
8×8	0/13815	1/1346
10×10	0/13670	1/2076
12×12	0/13545	1/2675
14×14	0/13438	1/2959
16×16	0/13356	1/3051

جدول 2 همگرایی جواب‌ها برای جابجایی عرضی بی‌بعد w^* و تنش عمودی بی‌بعد σ_y^* برای تکیه‌گاه ساده- گیردار

اندازه شبکه‌بندی	جابجایی عرضی بی‌بعد	تنش عمودی بی‌بعد
6×6	0/20245	1/8312
8×8	0/19826	1/8176
10×10	0/19635	1/8377
12×12	0/19520	1/8626
14×14	0/19439	1/8772
16×16	0/19379	1/8827

جدول 3 همگرایی جواب‌ها برای جابجایی عرضی بی‌بعد w^* و تنش عمودی بی‌بعد σ_y^* برای تکیه‌گاه ساده- ساده

اندازه شبکه‌بندی	جابجایی عرضی بی‌بعد	تنش عمودی بی‌بعد
6×6	0/35233	2/5768
8×8	0/35107	2/5741
10×10	0/35048	2/5734
12×12	0/35015	2/5730
14×14	0/34994	2/5727
16×16	0/34980	2/5722

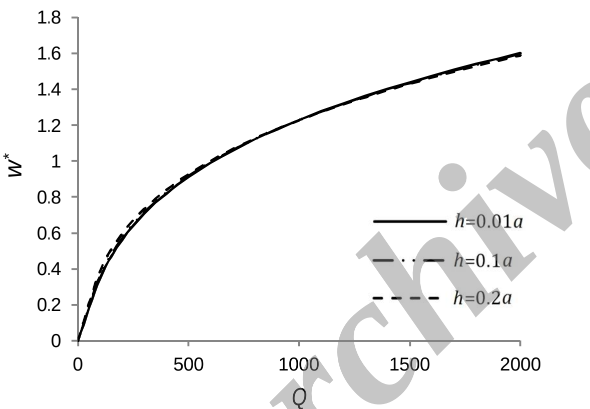
جدول 4 مقایسه جابجایی عرضی بی‌بعد w^*

h/a	Q	نوع تکیه‌گاه	تئوری کلاسیک [28]	تئوری برشی مرتبه اول [28]	پژوهش حاضر	خطای نسبی (%)
0/01	100	ساده- ساده	0/34670	0/34938	0/34746	0/55
		ساده- گیردار	0/18671	0/18712	0/18900	1/00
	400	ساده- ساده	0/81537	0/81539	0/81664	0/15
		ساده- گیردار	0/60183	0/60265	0/60799	0/88
	1600	ساده- ساده	1/4628	1/4625	1/4648	0/16
		ساده- گیردار	1/3034	1/3037	1/3154	0/90
	6400	ساده- ساده	2/3890	2/3882	2/3930	0/20
		ساده- گیردار	2/2728	2/2714	2/3000	1/26
0/05	10	ساده- ساده	0/04053	0/04105	0/04114	0/22
		ساده- گیردار	0/01915	0/01998	0/01997	0/05
	50	ساده- ساده	0/19292	0/19503	0/19550	0/24
		ساده- گیردار	0/09513	0/09883	0/09920	0/37
	75	ساده- ساده	0/27504	0/27760	0/27824	0/23
		ساده- گیردار	0/14155	0/14694	0/14750	0/38
	100	ساده- ساده	0/34670	0/34938	0/35015	0/22

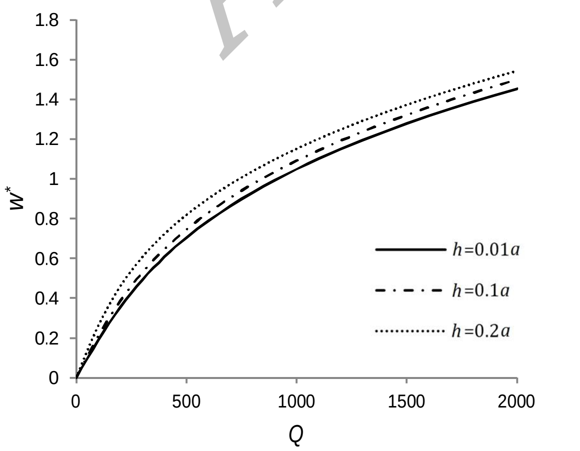
همانگونه که مشاهده می‌شود تطابق بسیار خوبی بین جواب‌های بدست آمده و نتایج مرجع [28] وجود دارد. لازم به ذکر است مرجع [28] برپایه‌ی تئوری برشی مرتبه اول می‌باشد؛ در صورتیکه در پژوهش حاضر از تئوری اصلاح شده چهار متغیره که یک تئوری مرتبه بالا می‌باشد استفاده شده است. نحوه اعمال شرط مرزی در این دو تئوری متفاوت است بدین صورت که در تئوری مرتبه اول، اثرات برش در اعمال شرایط مرزی با اعمال شرایطی بر شیب خطوط عمود بر صفحه میانی لحاظ می‌شود؛ ولی در تئوری حاضر، اثرات برش با استفاده از ترم برشی حاصل از تفکیک جابجایی عرضی اعمال می‌گردد. علیرغم تفاوت در نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی، تطابق بسیار خوبی در جواب‌های بدست آمده مشاهده می‌شود و این تفاوت در نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی اثر ناچیزی بر روی جواب‌ها دارد. در شکل‌های 2، 3 و 4 نمودار جابجایی عرضی بی‌بعد بر حسب بار عرضی یکنواخت بترتیب برای تکیه‌گاه‌های ساده- ساده، ساده- گیردار و گیردار- گیردار برای نسبت‌های مختلف ضخامت به طول ترسیم شده است.

جدول 5 مقایسه تنش عمودی بی‌بعد σ_y^*

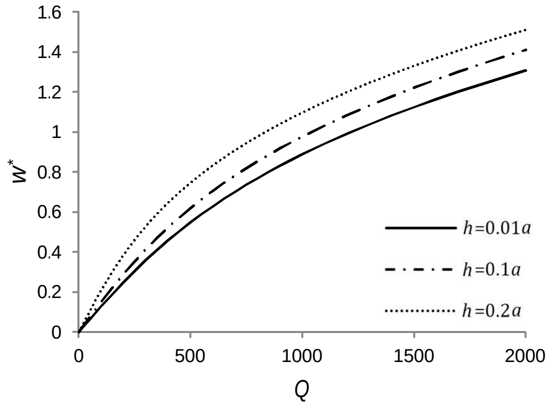
h/a	Q	نوع تکیه‌گاه	تئوری کلاسیک [28]	تئوری برشی مرتبه اول [28]	پژوهش حاضر	خطای نسبی (%)
0/01	100	ساده- ساده	2/5708	2/5686	2/5746	0/23
		ساده- گیردار	1/8462	1/9367	1/8676	3/57
	400	ساده- ساده	6/8915	6/8890	6/9014	0/18
		ساده- گیردار	6/4450	6/7090	6/4912	3/25
	1600	ساده- ساده	14/498	14/400	14/534	0/93
		ساده- گیردار	15/050	15/415	15/069	2/24
	6400	ساده- ساده	29/850	29/640	30/015	1/27
		ساده- گیردار	30/185	30/163	29/761	1/33
0/05	10	ساده- ساده	0/2672	0/2677	0/2682	0/19
		ساده- گیردار	0/1803	0/1851	0/1836	0/81
	50	ساده- ساده	1/3542	1/3571	1/3594	0/17
		ساده- گیردار	0/9172	0/9414	0/9342	0/76
	75	ساده- ساده	1/9898	1/9914	1/9948	0/17
		ساده- گیردار	1/3823	1/4189	1/4075	0/80
	100	ساده- ساده	2/5708	2/5686	2/5730	0/17
		ساده- گیردار	1/8462	1/8925	1/8772	0/81



شکل 2 نمودار جابجایی عرضی بی‌بعد w^* بر حسب بار عرضی بی‌بعد Q برای ورق با تکیه‌گاه ساده- ساده



شکل 3 نمودار جابجایی عرضی بی‌بعد w^* بر حسب بار عرضی بی‌بعد Q برای ورق با تکیه‌گاه گیردار- ساده

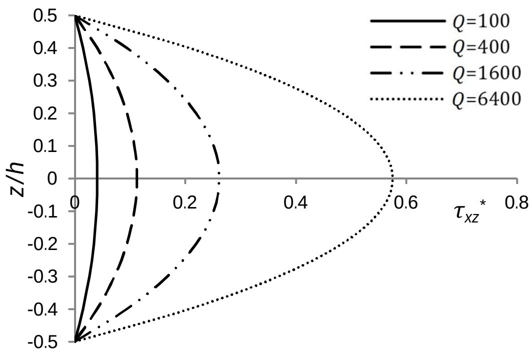


شکل 4 نمودار جابجایی عرضی بی‌بعد w^* بر حسب بار عرضی بی‌بعد Q برای ورق با تکیه‌گاه گیردار- گیردار

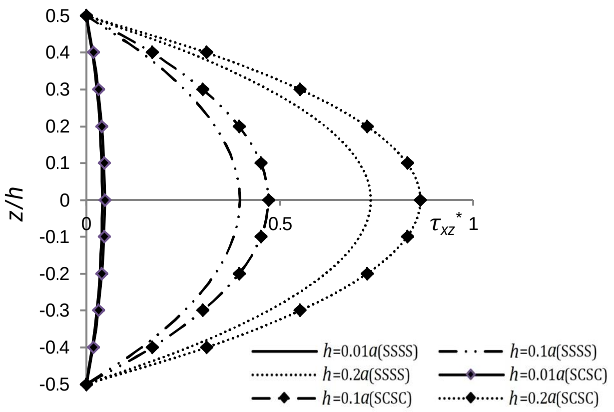
در حالت تکیه‌گاه ساده- ساده در شکل 2 اختلاف بسیار کمی در نتایج برای ورق‌های نازک و ضخیم مشاهده می‌شود و این نوع تکیه‌گاه تغییرات محسوسی برای جابجایی عرضی با تغییر نسبت ضخامت به طول‌های مختلف ایجاد نمی‌کند، در حالی که اثر شرایط مرزی در حالت ساده- گیردار (شکل 3) و به‌خصوص در حالت گیردار- گیردار (شکل 4) محسوس‌تر می‌باشد و با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق جابجایی عرضی بزرگ‌تری دیده می‌شود.

در شکل 5 نمودار تنش برشی بی‌بعد در راستای ضخامت بی‌بعد برای بارهای عرضی مختلف ترسیم شده است، همانطور که انتظار می‌رود با توجه به تئوری استفاده شده در این تحقیق، تغییرات تنش برشی در راستای ضخامت به صورت سهمی شکل می‌باشد که شرایط مرزی سطوح بدون تنش را ارضاء می‌نماید، همچنین با افزایش بار عرضی وارده و تغییر شکل بیشتر، ورق متحمل نیروهای برشی بیشتری در راستای ضخامت می‌گردد.

در شکل 6 نمودار تنش برشی بی‌بعد در راستای ضخامت برای نسبت ضخامت به طول‌های مختلف و همچنین شرایط مرزی ساده- ساده و ساده- گیردار ترسیم شده است، با توجه به تقارن موجود در مسئله توزیع تنش متقارنی مشاهده می‌شود و با افزایش ضخامت ورق و در نتیجه افزایش اثرات برشی، تنش‌های برشی بزرگتری مشاهده می‌شود، در مورد ورق‌های نازک مقدار تنش‌های برشی ناچیزی مشاهده می‌شود که نشان می‌دهد در مورد این ورق‌ها می‌توان از تئوری کلاسیک، که عملاً اثرات برشی را در نظر نمی‌گیرد، استفاده نمود، همچنین مشاهده می‌شود که میزان تنش برشی برای ورق با تکیه‌گاه ساده- گیردار بیشتر از ورق با تکیه‌گاه ساده- ساده است و این افزایش تنش برشی در ورق‌های ضخیم بیشتر است.



شکل 5 نمودار تنش برشی بی‌بعد در راستای ضخامت برای ورق با تکیه‌گاه‌های ساده



شکل 6 نمودار تنش برشی بی‌بعد در راستای ضخامت برای ورق با تکیه‌گاه‌های ساده- ساده و ساده- گیردار

در جداول 6 و 7 جابجایی‌های عرضی و تنش‌های عمودی بی‌بعد برای نسبت ضخامت به طول و همچنین شرایط مرزی مختلف با در نظر گرفتن بارهای عرضی بدون بعد 100 و 400 لیست شده است. همانطور که دیده می‌شود با تغییر شرایط تکیه‌گاهی از ساده- ساده به ساده- گیردار و سپس گیردار- گیردار مقادیر جابجایی و تنش عمودی بی‌بعد کاهش می‌یابد، همچنین با افزایش ضخامت ورق، برای جابجایی بی‌بعد روند افزایشی مشاهده می‌شود، در حالی که این روند برای تنش‌های عمودی بی‌بعد اغلب روند کاهشی دارد. باید توجه داشت که در این دو جدول مقادیر جابجایی و تنش بی‌بعد آمده است و مقادیر واقعی جابجایی و تنش را می‌توان از رابطه (14) محاسبه نمود. به عنوان مثال هرچند بار بی‌بعد Q برای همه ورق‌ها یکسان است اما با تغییر نسبت ضخامت به طول بار واقعی q اعمالی به هر ورق تغییر می‌کند.

4-2- تحلیل ورق ارتوتروپ

دو نوع ماده ارتوتروپ در تحلیل‌ها در نظر گرفته شده است که خواص هریک در جدول 8 نشان داده شده است و به منظور سهولت، با ماده 1 و 2 مشخص شده‌اند.

جدول 6 جابجایی عرضی بی‌بعد w^* و تنش عمودی بی‌بعد σ_y^* برای نسبت ضخامت، شرایط مرزی مختلف (Q = 100)

ضخامت به طول (h/a)	نوع تکیه‌گاه	جابجایی عرضی بی‌بعد w^*	تنش عمودی بی‌بعد σ_y^*
	ساده- ساده	0/34746	2/5746
0/01	ساده- گیردار	0/18900	1/8676
	گیردار- گیردار	0/12710	1/2595
	ساده- ساده	0/35015	2/5730
0/05	ساده- گیردار	0/19439	1/8772
	گیردار- گیردار	0/13356	1/3051
	ساده- ساده	0/35810	2/5674
0/1	ساده- گیردار	0/20932	1/8968
	گیردار- گیردار	0/15005	1/3273
	ساده- ساده	0/38589	2/5365
0/2	ساده- گیردار	0/26176	1/9355
	گیردار- گیردار	0/20814	1/3994

جدول 7 جابجایی عرضی بی‌بعد w^* و تنش عمودی بی‌بعد σ_y^* برای نسبت ضخامت، شرایط مرزی مختلف ($Q = 400$)

ضخامت به طول (h/a)	نوع تکیه‌گاه	جابجایی عرضی بی‌بعد w^*	تنش عمودی بی‌بعد σ_y^*
0/01	ساده- ساده	0/81664	6/9014
	ساده- گیردار	0/60799	6/4912
	گیردار- گیردار	0/46144	4/9275
0/05	ساده- ساده	0/81795	6/8701
	ساده- گیردار	0/61938	6/4713
	گیردار- گیردار	0/48105	5/0676
0/1	ساده- ساده	0/82178	6/7771
	ساده- گیردار	0/64718	6/3546
	گیردار- گیردار	0/52647	5/0541
0/2	ساده- ساده	0/83477	6/4512
	ساده- گیردار	0/72158	5/9013
	گیردار- گیردار	0/64838	4/8944

جدول 8 خواص ماده ارتوتروپ

ماده	v_{12}	G_{23}/E_2	G_{13}/E_2	G_{12}/E_2	E_1/E_2
1	0/25	0/2	0/5	0/5	25
2	0/25	0/5	0/5	0/5	3

در تحلیل ورق‌های ارتوتروپ از معادلات حاکمه (7) استفاده شده است و منتجه‌های تنش با استفاده از روابط (5- ب) و (5- ج) حاصل خواهد شد. اعمال شرایط مرزی در مورد ورق‌های ارتوتروپ همانند ورق‌های ایزوتروپ خواهد بود و برای ارائه پارامترهای بی‌بعد از روابط مربوطه در رابطه (14-ب) استفاده خواهد شد. در جدول 9 جابجایی عرضی بی‌بعد برای ورق ارتوتروپ نازک با تکیه‌گاه گیردار- گیردار از جنس ماده 2 برای بارهای بی‌بعد مختلف نشان داده شده است. در نتایج ارائه شده مطابق انتظار با افزایش بار بی‌بعد اعمالی، جابجایی‌های عرضی بی‌بعد بزرگتری مشاهده می‌شود. نتایج حاصله در مقایسه با نتایج مراجع [26 ، 29] تطابق خوبی نشان می‌دهد.

در جدول 10 جابجایی عرضی بی‌بعد به ازای بارهای عرضی بی‌بعد مختلف برای ورق‌های ارتوتروپ با تکیه‌گاه گیردار- گیردار از جنس ماده 1 با نسبت ضخامت به طول متفاوت نشان داده شده است و با نتایج حاصله از مرجع [26] که بر پایه‌ی تئوری برشی مرتبه اول می‌باشد، مقایسه شده است. نتایج حاصله برای ورق‌های نازک ارتوتروپ در حالت ورق نازک به دلیل اثرات ناچیز نیروهای برشی بسیار نزدیک می‌باشند، در حالی که برای ورق ضخیم این اختلاف بیشتر می‌باشد که ناشی از افزایش اثرات برشی در خمش ورق ارتوتروپ و تأثیر آن با توجه به تئوری استفاده شده در تحلیل می‌باشد. با افزایش بار عرضی بی‌بعد وارد شده در نتایج حاصله برای هر دو نوع نسبت ضخامت به طول افزایش مشاهده می‌شود و این نرخ برای ورق‌های ضخیم بیشتر است. در جدول 11 تنش نرمال بی‌بعد برای بارهای عرضی مختلف و نسبت ضخامت به طول مختلف نشان داده شده است. با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق روند افزایشی در تنش‌های نرمال بی‌بعد مشاهده می‌شود.

در جدول 12 با در نظر گرفتن بارهای عرضی مختلف، تنش برشی بی‌بعد برای نسبت ضخامت به طول‌های متفاوت نشان داده شده است. در این جدول از خواص ماده ارتوتروپ شماره 1 در تحلیل‌ها استفاده شده است. با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق برای بارهای عرضی بی‌بعد مختلف روند

جدول 9 جابجایی عرضی بی‌بعد w^*

بار بی‌بعد $\bar{q}$	پژوهش حاضر	مرجع [26]	مرجع [29]
82	0/5733	0/5824	0/53
163	0/9164	0/9251	0/9
245	1/1543	1/1639	1/16
326	1/3350	1/3421	1/33
408	1/4853	1/4984	1/5

جدول 10 جابجایی عرضی بی‌بعد w^*

بار بی‌بعد $\bar{q}$	ضخامت به طول (h/a)	پژوهش حاضر	مرجع [26]
1	0/02	0/0014	0/0014
	0/2	0/0101	0/0122
10	0/02	0/145	0/0143
	0/2	0/0970	0/1144
20	0/02	0/0290	0/0287
	0/2	0/1770	0/2005
30	0/02	0/0435	0/0430
	0/2	0/2399	0/2640
40	0/02	0/0579	0/0574
	0/2	0/2907	0/3137
50	0/02	0/0723	0/0717
	0/2	0/3332	0/3547
60	0/02	0/0866	0/0860
	0/2	0/3697	0/3898

جدول 11 تنش نرمال بی‌بعد $\bar{\sigma}_x$ برای نسبت ضخامت و بار عرضی مختلف

بار بی‌بعد $\bar{q}$	ضخامت به طول (h/a)	تنش نرمال $\bar{\sigma}_x$
5	0/02	1/3180
	0/05	1/3734
10	0/02	2/6445
	0/05	2/7575
15	0/02	3/9759
	0/05	4/1503
20	0/02	5/3120
	0/05	5/5508
25	0/02	6/6524
	0/05	6/9581
30	0/02	7/9967
	0/05	8/3713

افزایشی در تنش برشی بی‌بعد مشاهده می‌گردد که همانطور که انتظار می‌رود با افزایش ضخامت ورق اثرات برشی نقش محسوس‌تری در خمش ورق ایفا می‌کنند، همچنین با افزایش بار عرضی بی‌بعد وارده و در نتیجه افزایش خیز ورق در یک نسبت ضخامت به طول مشخص، تنش برشی عرضی بی‌بعد بزرگ‌تری حاصل می‌شود.

در جدول 13 اثر افزایش ارتوتروپی بر روی تنش برشی بی‌بعد برای نسبت ضخامت به طول‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته شده است. به‌این منظور از خواص ماده ارتوتروپ شماره 1 برای بررسی این اثر استفاده شده است، برای ورق‌های نازک با افزایش اثر ارتوتروپی روند افزایشی در تنش

برشی بی‌بعد مشاهده می‌گردد که نرخ این تغییر با افزایش اثر ارتوتروپی کاهش می‌یابد. این کاهش نرخ با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق اثر محسوس‌تری دارد به‌گونه‌ای که در ورق ضخیم با افزایش اثر ارتوتروپی تنش برشی بی‌بعد عموما کاهش می‌یابد.

5- نتیجه‌گیری

در این تحقیق رفتار خمش غیرخطی ورق مستطیلی با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالای چهار متغیره مورد بررسی قرار گرفت. در تحلیل ورق‌های ضخیم و خصوصاً تحلیل‌های غیرخطی در نظر گرفتن اثرات برشی بسیار قابل توجه می‌باشند. تئوری ورق اصلاح شده چهار متغیره یک تئوری برشی مرتبه بالای جدید بوده که در این تحقیق از آن برای مدل‌سازی رفتار خمش غیرخطی ورق‌های نسبتا ضخیم و ضخیم استفاده شد. معادلات حاکم با استفاده از روش کار مجازی و با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی فون-کارمن به دست آمد. برای حل معادلات دیفرانسیل کوپل غیر خطی حاصل از روش رهایی پویا و روش تفاوت‌های محدود استفاده شد. نتایج به دست آمده با نتایج تحقیقات پیشین مقایسه گردید و مشاهده شد که با استفاده از تئوری برشی چهار متغیره و روش رهایی پویا می‌توان رفتار غیر خطی ورق‌های ضخیم را با دقت بسیار خوبی ارزیابی نمود. همچنین اثرات نسبت ضخامت به طول ورق و شرایط مرزی مختلف بر روی نتایج به دست آمده مورد بررسی قرار گرفت. در نتایج حاصل شده مشاهده گردید که با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف، اثرات برشی با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق افزایش می‌یابد و هرچه این نسبت افزایش پیدا می‌کند سهم نیروهای برشی در جابجایی عرضی و تنش‌های عمودی و برشی بیشتر می‌شود. با ترسیم نمودار تنش برشی مشاهده گردید که این تنش در راستای ضخامت به صورت سهمی تغییر می‌کند که در نتیجه نیازی به استفاده از ضریب اصلاح برش در فرمول‌بندی نمی‌باشد و شرایط مرزی روی سطوح آزاد نیز ارضاء می‌شود.

جدول 12 تنش برشی بی‌بعد $\bar{\tau}_{xz}$ برای نسبت ضخامت و بار عرضی مختلف برای ورق با تکیه‌گاه ساده

بار بی‌بعد $\bar{q}$	ضخامت به طول (h/a)	تنش برشی $\bar{\tau}_{xz}$
10	0/2	1/0176
	0/1	0/5970
	0/05	0/3111
	0/01	0/0638
30	0/2	2/1407
	0/1	1/5654
	0/05	0/8661
	0/01	0/1807
60	0/2	3/0544
	0/1	2/5382
	0/05	1/4999
	0/01	0/3212

جدول 13 اثر افزایش ارتوتروپی بر روی تنش برشی عرضی بی بعد $\bar{\tau}_{xz}$ برای ورق با تکیه‌گاه ساده و نسبت ضخامت به طول مختلف $(\bar{q} = 30)$

E_1/E_2	h/a 0/2	0/1	0/01
10	2/1215	1/4140	0/1598
20	2/1503	1/5355	0/1766
30	2/1243	1/5849	0/1835
40	2/0824	1/6062	0/1867
50	2/0366	1/6146	0/1884

6- فهرست علائم

a	طول ورق (m)
c_u, c_v	میرایی مجازی درون صفحه‌ای (kgsm^{-3})
c_{w_b}, c_{w_s}	میرایی مجازی خارج صفحه‌ای (kgsm^{-3})
E_1, E_2	مدول‌های الاستیک طولی و عرضی (kgm^{-1}s^{-2})
G_{12}, G_{23}, G_{13}	مدول‌های برشی (kgm^{-1}s^{-2})
h	ضخامت ورق (m)
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	منتجه‌های گشتاور خمشی ناشی از مولفه خمشی خیز (kgs^{-2})
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	منتجه‌های گشتاور خمشی ناشی از مولفه برشی خیز (kgs^{-2})
N_x, N_y, N_{xy}	منتجه‌های تنش نرمال ناشی از نیروهای درون صفحه‌ای (kgms^{-2})
Q	بار عرضی بی‌بعد وارد به ورق ایزوتروپ
Q_{xz}, Q_{yz}	منتجه‌های تنش برشی (kgms^{-2})
$Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{66}$	ضرایب ماتریس سفتی درون صفحه‌ای (kgm^{-1}s^{-2})
Q_{44}, Q_{55}	ضرایب ماتریس سفتی برشی عرضی (kgm^{-1}s^{-2})
q	بار عرضی وارده به ورق (kgm^{-1}s^{-2})
$\bar{q}$	بار عرضی بی‌بعد وارد به ورق ارتوتروپ
u, v	جابجایی‌های صفحه میانی ورق در جهات x و y (m)
w_b, w_s	جابجایی‌های عرضی خمشی و برشی (m)
w^*	جابجایی عرضی بی‌بعد (m)
علایم یونانی	
$\gamma_{xz}^s, \gamma_{yz}^s$	کرنش‌های برشی عرضی صفحه‌ی میانی
δ_t	بازه‌ی زمانی (s)
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$	کرنش‌های نرمال و برشی صفحه‌ی میانی
$\kappa_x^b, \kappa_y^b, \kappa_{xy}^b$	انحناهای صفحه‌ی میانی مربوط به مولفه‌های خمشی (m^{-1})
$\kappa_x^s, \kappa_y^s, \kappa_{xy}^s$	انحناهای صفحه‌ی میانی مربوط به مولفه‌های برشی (m^{-1})
ν_{12}, ν_{21}	ضرایب پؤاسن
ρ_u, ρ_v	چگالی مجازی درون صفحه‌ای (kgm^{-3})
ρ_{w_b}, ρ_{w_s}	چگالی مجازی خارج صفحه‌ای (kgm^{-3})
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	تنش‌های نرمال و برشی درون صفحه‌ای (kgm^{-1}s^{-2})
σ_y^*	تنش‌های نرمال بی‌بعد ورق ایزوتروپ
$\bar{\sigma}_y$	تنش‌های نرمال بی‌بعد ورق ارتوتروپ
τ_{xz}, τ_{yz}	تنش‌های برشی عرضی (kgm^{-1}s^{-2})
τ_{xz}^*	تنش برشی عرضی بی‌بعد ورق ایزوتروپ
$\bar{\tau}_{xz}$	تنش برشی عرضی بی‌بعد ورق ارتوتروپ
بالانویس‌ها	
a	مقدار متغیر در انتهای بازه‌ی زمانی
b	مقدار متغیر در ابتدای بازه‌ی زمانی
زیرنویس‌ها	
int	مولفه‌های مربوط به نیروهای داخلی

ext مولفه‌های مربوط به نیروهای خارجی

0 مولفه‌های مربوط به صفحه‌ی میانی

7- مراجع

[1] G.Kirchhoff, ÄUber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe, *J Reine Angew Math,* Vol. 40, pp. 51-88, 1850.
[2] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J Appl Mech,* Vol.12, pp. 69-77, 1945.
[3] R. D. Mindlin, of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plate, *J. Appl. Mech,* Vol.18, pp. 31-38, 1951.
[4] J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J Appl Mech,* Vol. 51, pp. 745-52, 1984.
[5] M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int J Eng Sci,* Vol. 29, pp. 901-16, 1991.
[6] R. P. Shimpi, Refined plate theory and its variants, *AIAA J,* Vol. 40, pp. 137-46, 2002.
[7] A. Benachour, H.D. Tahar, H.A. Atmane, A. Tounsi, M.S. Ahmed, A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Compos Part B-ENG,* vol. 42, pp. 1386–139٤, 2011.
[8] A. Hamidi, M. Zidi, M.S.A. Houari, A. Tounsi, A new four variable refined plate theory for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading, *Compos part B-ENG,* 2012.
[9] M.B. Bouiadjra, M.S.A. Houari, A. Tounsi, Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory, *J Therm Stresses,* Vol. 35, No. 8, pp. 677-94, 2012.
[10] N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, E. A. Adda Bedia, A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, *Int J Mech Sci,* Vol. 53, pp. 237-47, 2011.
[11] M. S. A. Houaria, A. Tounsia, O. A. Bég, Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory, *Int J Mech Sci,* Vol. 76, pp. 102-11, 2013.
[12] J. L. Mantari, C. G.Soares, Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells, *Compos part B-ENG,* Vol. 56, pp.126-36, 2014.
[13] H. T. Thai, D. H. Choi, Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates, *Compos part B-ENG,* Vol. 56, pp.705-16, 2014.
[14] J. R. H. Otter, Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation, *Nucl. Struct. Engng,* Vol. 1, pp. 61-75, 1965.
[15] A. S. Day, An introduction to dynamic relaxation, *The Engineer,* Vol. 219, pp. 218-21, 1965.
[16] L. C. Zhang, T. X. Yu, Modified adaptive dynamic relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates, *Comput Struct,* Vol. 33, pp. 609-14, 1989.
[17] L. C. Zhang, M. Kadkhodayan, Y. W. Mai,Development of the maDR method, *Comput Struct.,* Vol. 52, pp. 1-8, 1994.
[18] M. Salehi, H. Aghaei, Dynamic relaxation large deflection analysisof non-axisymmetric circularviscoelastic plates, *J Comp and Struct,*Vol.83, pp. 1878-90, 2005.
[19] J. Alamatian, A new formulation for fictitious mass of the Dynamic Relaxation methodwith kinetic damping, *Comput Struct,* Vol. 90-91, pp. 42-54, 2012.
[20] M. Salehi, A. Safi-Djahanshahi, Non-Linear analysis of viscoelastic rectangular plates subjected to in-plane compression, *J MRA,*Vol. 2, pp. 11-21, 2010.
[21] M. E. Golmakani, M. Kadkhodayan, Large deflection thermoelastic analysis of functionally graded stiffened annular sector plates, *Int J Mech Sci,* Vol.69, pp. 94-106, 2013.
[22] M. E. Golmakani, Large deflection thermoelastic analysis of shear deformable functionally gradedvariable thickness rotating disk,*Compos part B-ENG,*Vol. 45, pp. 1143-55, 2013.
[23] M. E. Golmakani, M. Emami, Nonlinear bending and buckling analysis of functionally graded annular plates, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 11, pp. 1-14, 2014. (In persian)
[24] M. E. Golmakani, M. Mehrabian, Elastic large deflection analysis of ring-stiffened annular laminated plates by using of dynamic relaxation method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 12, pp. 109-23, 2014. (In persian)
[25] S. R. Falahatgar, Creep buckling analysis of rectangular viscoelastic thick plate by pseudo- transient finite element method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 13, pp. 132-42, 2014. (In persian)
[26] G. J. Turvey, M. Y. Osman, DR large deflection analysis of orthotropic Mindlin plates with simply-supported and clamped-edge conditions, *COMPOS ENG,*Vol. 1, No. 4, pp. 235-48, 1991.
[27] W. A. Watson, T. Philipson, P. J. Oates, *Numerical Analysis: The Mathematics of Computing.* 2nd Edn. Edward Arnold, London, 1981.
[28] Z. G. Azizian, D. J. Dawe, Geometrically nonlinear analysis of rectangular mindlin plates using the finite strip method, *J Comp and Struct,* Vol. 21, No. 3, pp. 423-36, 1985.
[29] C. Y. Chia, *Nonlinear analysis of plates,* pp. 227, 228, 379, New York: McGraw-Hill, 1980.