



مدل سازی و کنترل غیرخطی یک عمودپرواز بدون سرنشین با ساختار جدید

محمد علی توفیق¹، محمد محبوب^{2*}، موسی آیتی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی دانشگاه تهران، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی دانشگاه تهران، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 11155-4563، mmahjoob@ut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 دی 1393

پذیرش: 19 خرداد 1394

ارائه در سایت: 13 تیر 1394

کلید واژگان:

عمود پرواز پنج ملخه

پرنده بدون سرنشین

کوادروتور

فیدبک خطی ساز ورودی خروجی

در این مقاله یک عمود پرواز بدون سرنشین با پیکربندی جدید شامل پنج روتور بطور کامل مدل سازی و یک سیستم کنترلی تعقیب مسیر، برای آن طراحی و شبیه سازی شده است. عمود پرواز مشابه کوادروتور بوده، با این تفاوت که یک ملخ با دور ثابت و قابلیت ایجاد نیروی تراست بالا، به مرکز آن اضافه گردیده است. ملخ اضافه شده مشکل پایین بودن ظرفیت بار مفید کوادروتور را برطرف نموده و همچنین باعث افزایش پایداری آن در برابر بادهای عرضی می شود. ساختار پیشنهادی کاملاً دارای نوآوری است. به منظور اعتبار سنجی، مدل سازی دینامیکی سیستم هم به روش نیوتن - اویلر و هم به روش لاگرانژ انجام شده است. معادلات بدست آمده غیرخطی، زیر تحریک، جفت شده و به شدت ناپایدار می باشند، لذا برای حرکت پرنده بطور دلخواه، بایستی سیستم کنترلی مناسب طراحی شود. در این مقاله روش فیدبک خطی ساز ورودی - خروجی با در نظر گرفتن مدل دقیق به کار رفته و برای سیستم خطی شده نیز از کنترل کننده بهینه تنظیم کننده خطی مرتبه دو استفاده می گردد. کنترل کننده شامل مشتق گیری مرتبه بالا بوده و نسبت به دینامیک های مدل نشده حساس است بنابراین نمی توان از تأثیر عملگرها در مدل صرف نظر کرد. از طرفی اضافه کردن دینامیک عملگرها به دینامیک سیستم باعث افزایش پیچیدگی طراحی و پیاده سازی سیستم کنترلی می شود. لذا به منظور جبران دینامیک عملگرها از یک کنترل کننده ثانویه استفاده شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که سیستم کنترلی طراحی شده عملکرد مناسبی در پایداری سازی، تعقیب مسیر مطلوب و کاهش اثر اغتشاش دارد.

Modeling and nonlinear tracking control of a novel multi-rotor UAV

Mohamad Ali Tofigh, Mohamad Mahjoob*, Moosa Ayati

Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

* P.O.B. 11155-4563 Tehran, Iran, mmahjoob@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 January 2015
Accepted 09 June 2015
Available Online 04 July 2015

Keywords:

Unmanned Aerial Vehicle
Five-rotor Aircraft
Modified Quadrotor
Input-Output Feedback Linearization

ABSTRACT

In this paper, modeling and design of a trajectory tracking control system for a novel multi-rotor UAV (Unmanned Aerial Vehicle) is developed. The UAV is similar to a quadrotor with an extra no feedback propeller which is added to center of vehicle. The additional rotor improves the ability of lifting heavier payloads, and anti-crosswind capability for quadrotor. For validation, the dynamic model is obtained via both Newton Euler and Lagrange approaches. The dynamical model is under actuated, nonlinear, and has strongly coupled terms. Therefore, an appropriate control system is necessary to achieve desired performance. The proposed nonlinear controller of this paper is an input-output feedback linearization companioned with an optimal LQR controller for the linearized system. The controller involves high-order derivative terms and turns out to be quite sensitive to un-modeled dynamics. Therefore, precise model of UAV is derived by considering actuator's dynamics. To compensate the actuator's dynamic and moreover, to avoid complexity in the controller, a second control loop is utilized. The obtained simulation results confirm that the proposed control system has a promising performance in terms of stabilization and position tracking even in presence of external disturbances.

1- مقدمه

بالا و خاصیت شناور ماندن در هوا و همچنین فراز و فرود عمودی، دارای محبوبیت بیشتری هستند.

عمود پروازها نیز دارای انواع گوناگونی از جمله هلیکوپترهای معمولی، هلیکوپترهای هم محور و نیز انواع چندروتورها با پیکربندهای مختلف می باشند که در این بین کوادروتورها به دلیل ساختار ساده ای که دارند از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. زیرا که بدون نیاز به اتصالات مکانیکی پیچیده، تنها از طریق تغییر دور روتور، می توان هر گونه حرکت دلخواهی را در آن

امروزه وسایل پرنده بدون سرنشین¹ به دلیل کاربردهای نظامی و تجاری از جمله عملیات نجات، کنترل ترافیک، دیدبانی، مهار آتش سوزی، نقشه برداری در بین ساختمان های بلند و به ویژه جستجو در مناطق خطرناک و دور از دسترس مورد توجه بسیار قرار گرفته اند. این وسایل عمدتاً به دو دسته ی بال ثابت و عمود پرواز تقسیم می شوند که عمود پروازها به دلیل قابلیت مانوردهی

1- UAV

ایجاد کرد.

در شکل 1 مکانیزم کلی مانوردهی پرنده نشان داده شده است. در این شکل مبدا دستگاه در مرکز ملخ پنج و محور X آن به سمت ملخ یک و محور Y به سمت ملخ دو فرض می‌شود. در حالت شناور سرعت ملخ‌های یک با سه و همچنین سرعت ملخ‌های دو با چهار برابر می‌باشند. به منظور تغییر ارتفاع پرنده کافی است سرعت ملخ‌های یک تا چهار به یک میزان افزایش یا کاهش داده شود. برای دوران پرنده حول محور X (حرکت رول) بایستی سرعت ملخ دو زیاد و به همان میزان سرعت ملخ چهار کاهش یابد، این دوران باعث حرکت افقی در راستای محور Y نیز می‌شود. دوران حول محور Y (حرکت پیچ) نیز مشابه حرکت رول ایجاد شده و این دوران نیز باعث حرکت افقی در راستای محور X می‌شود. همچنین برای دوران حول محور Z (حرکت یاو) بایستی سرعت چرخش دو ملخ هم جهت به یک میزان افزایش (یا کاهش) و سرعت چرخش دو روتور دیگر نیز به همان میزان کاهش (یا افزایش) یابد. در اثر دوران هر ملخ یک نیروی رانش و یک گشتاور پسا بصورت روابط (1) و (2) ایجاد می‌شود [2].

$$T = K_t \Omega^2 \quad (1)$$

$$D = -K_d \Omega^2 \quad (2)$$

در معادلات فوق T نیروی رانش، D گشتاور پسا و Ω سرعت هر ملخ است، همچنین ثوابت K_t و K_d بترتیب ضریب رانش و ضریب پسا نامیده می‌شوند. نیروها و گشتاورهای حاصل از دوران ملخ هادر شکل 2 نمایش داده شده‌اند. برآیند نیروها و گشتاورهای ایجاد شده ناشی از چرخش ملخ‌ها در مرکز جرم پرنده بصورت روابط (3) تا (6) می‌باشند.

$$F = K_t (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) + K_{d5} \Omega_5^2 \quad (3)$$

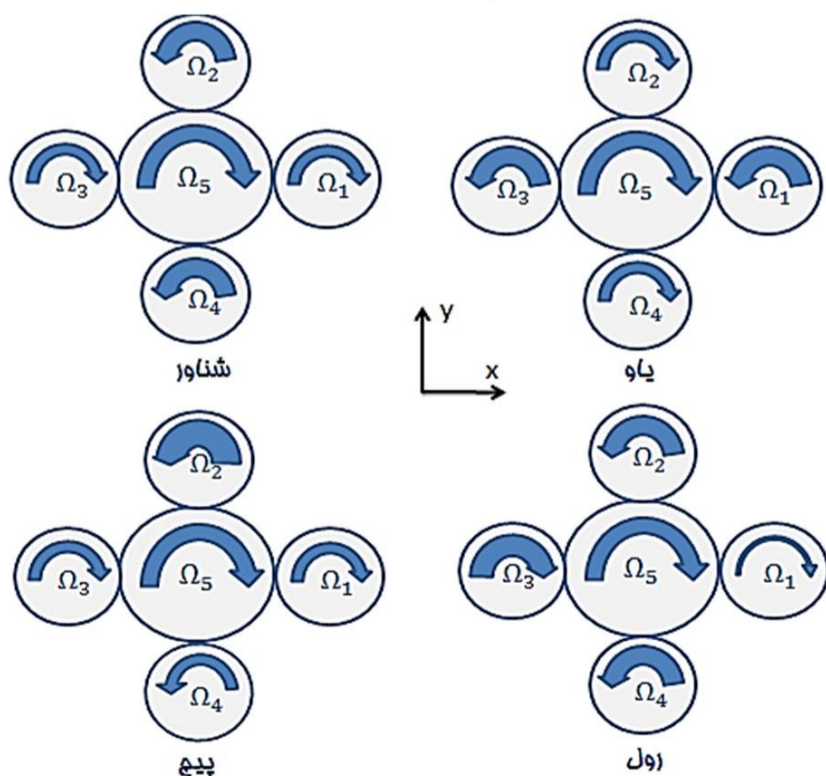
$$\tau_x = K_t l (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \quad (4)$$

$$\tau_y = K_t l (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \quad (5)$$

$$\tau_z = K_d (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) + K_{d5} \Omega_5^2 \quad (6)$$

نیروی F در راستای محور Z بوده و باعث تغییر ارتفاع پرنده می‌شود، همچنین گشتاورهای τ_x و τ_y و τ_z به ترتیب باعث دوران پرنده حول محورهای X و Y و Z می‌شوند.

برای شناور ماندن پرنده در هوا بایستی برآیند نیروی رانش پنج ملخ با نیروی وزن پرنده برابر بوده و همچنین مجموع گشتاور پسای ملخ‌ها نیز برابر صفر باشند تا از چرخش پرنده به دور خود جلوگیری شود. سرعت ملخ‌های



شکل 1 مکانیزم تغییر سرعت ملخ‌ها در مودهای مختلف پرواز

در زمینه مدلسازی و کنترل کوادروتور کارهای متنوعی صورت گرفته است. در [1] معادلات حرکت کوادروتور استخراج شده و تأثیر نیروهای آیرودینامیکی در مدلسازی کوادروتور در [2] بررسی شده است. از روش‌های کنترل غیر خطی متفاوتی به منظور ردیابی مسیر استفاده شده است [3,4]. یکی از مشکلات اصلی کوادروتور این است که ظرفیت بار مفید آن بسیار کم است، برای رفع این مشکل در [5] بجای چهار روتور از شش روتور بصورت متقارن، و در [6,7] نیز از هشت روتور استفاده شده است، عیب این ساختارها این است که علاوه بر افزایش وزن پرنده، فرآیند کنترل آن‌ها نیز پیچیده می‌گردد. افزودن یک روتور به مرکز کوادروتور علاوه بر بهبود بار مفید باعث افزایش مقاومت آن در برابر بادهای عرضی نیز می‌شود. چرخش این روتور مرکزی با ممان اینرسی مشخص همانند ژيروسکوپ عمل کرده و در مقابل دوران‌های افقی عمودپرواز مقاومت می‌کند. به منظور ساده نگه‌داشتن ساختار پرنده، روتور مرکزی فاقد فیدبک سرعت است و سرعت آن بصورت مدار باز و براساس وزن پرنده تعیین شده و در طی حرکت پرنده ثابت می‌ماند.

در این مقاله سعی شده است معادلات عمودپرواز پیشنهادی به روش نیوتن و روش لاگرانژ استخراج گردد تا همخوانی معادلات بدست آمده از دو روش، صحت آن‌ها را تایید نماید. وجود روتور مرکزی باعث افزایش جفت-شدگی بین معادلات شده و این بر پیچیدگی حرکت پرنده می‌افزاید. جهت بررسی رفتار پرنده، معادلات دینامیکی شبیه‌سازی شده و تأثیر روتور مرکزی بر عملکرد سیستم بررسی گردیده است. به منظور کنترل عمودپرواز از روش فیدبک خطی‌ساز ورودی-خروجی استفاده شده و با توجه به این که این روش کنترلی در برابر عدم قطعیت دینامیک‌های مدل نشده چندان مقاوم نیست، تأثیر عملگرها در سیستم کنترلی لحاظ گردیده است.

از آن جا که مدل سیستم دارای پیچیدگی زیادی بوده و کنترل‌کننده نیز دارای مشتق‌گیری مرتبه بالا می‌باشد لذا دینامیک عملگرها مستقیماً به دینامیک سیستم اضافه نشده، بلکه موتور بطور مستقل به گونه‌ای کنترل شده است که خروجی آن بدون خطا و با نرخ بالایی به ورودی مرجع آن (که همان سیگنال‌های کنترلی بدست آمده از کنترل‌کننده فیدبک خطی‌ساز است) میل نماید. این ایده باعث شده عملگرها مشابه یک المان استاتیکی با بهره واحد عمل نموده و سیگنال‌های کنترلی طراحی شده از کنترل‌کننده اول بدون تغییر به دینامیک سیستم اعمال شوند [8].

در بخش دوم این مقاله مدل دینامیکی پرنده پیشنهادی استخراج و صحت سنجی شده است. در بخش سوم سیستم کنترلی طراحی و در بخش چهارم کل پرنده در نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی شده است.

2-مدلسازی عمودپرواز

1-2- مشخصات فیزیکی

عمودپرواز موضوع این تحقیق دارای پنج روتور است، چهار روتور که کاملاً مشابه هستند بطور متقارن نصب شده‌اند و با تغییر سرعت این روتورها می‌توان حرکات مختلف را در پرنده ایجاد کرد. از یک روتور با ملخ بزرگتر نیز در مرکز پرنده استفاده شده است. کنترل حرکت پرنده توسط روتورهای جانبی انجام می‌شود و روتور مرکزی نقشی در کنترل پرنده نداشته بلکه صرفاً جهت جبران بخشی از نیروی وزن افزوده شده و سرعت چرخش آن در کل بازه حرکت پرنده ثابت است. به منظور جلوگیری از چرخش عمودپرواز به دور خود و همچنین کاهش اثرات ژيروسکوپی، جهت چرخش روتورهای جانبی مقابل هم یکسان و در خلاف جهت روتورهای مجاور خود می‌باشند.

رابطه (10) می‌باشد.

$$m_t \cdot a^E = F_{\text{external}}^E \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_t} \begin{bmatrix} F(s\psi s\varphi + c\psi s\theta c\varphi) - k_f \dot{X}^2 \\ F(s\psi s\theta c\varphi - c\psi s\varphi) - k_f \dot{Y}^2 \\ Fc\theta c\varphi - m_t g - k_f \dot{Z}^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

نیروهای خارجی در رابطه فوق عبارتند از نیروی وزن، مجموع نیروی رانش کل ملخ‌ها و نیروهای آیرودینامیکی وارد بر بدنه پرنده.

معادله حرکت زاویه‌ای برای سیستم متشکل از چند جرم متحرک در براساس قوانین نیوتن-ویلر نیز به صورت رابطه (11) می‌باشد.

$$\sum M_G = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\delta H_i}{\delta t} + \omega_i^B \times H_i + R_{O_i/G} \times m_i a_i \right) \quad (11)$$

که نقطه G در این معادله مرکز جرم سیستم است و نقاط O_i نیز مرکز جرم هر کدام از اجرام متحرک فرض می‌شود، H_i تکانه زاویه‌ای هر جزء حول مرکز جرم آن است، $R_{O_i/G}$ فاصله مرکز جرم هر جزء تا مرکز جرم کل سیستم است و a_i نیز شتاب مرکز جرم هر جزء متحرک است. سمت چپ معادله فوق برآیند گشتاورهای خارجی است که عبارتند از روابط (4-6) و گشتاورهای آیرودینامیکی وارد بر کل جسم. با محاسبه تک تک ترم‌های معادله (11) در دستگاه بدنی معادلات نهایی بصورت رابطه (12) بدست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 q r - J_z q \Omega - J_z' q \Omega_5 + \tau_x - k_{ft} p) / I_x \\ (B_1 p r + J_z p \Omega + J_z' p \Omega_5 + \tau_y - k_{ft} q) / I_y \\ (C_1 p q - J_z \Omega - J_z' \Omega_5 + \tau_z - k_{ft} r) / I_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در این رابطه داریم:

$$\begin{cases} A_1 = I_y - I_z - 4J_z - 2J_z' \\ B_1 = I_z - I_x + 4J_z + 2J_z' \\ C_1 = I_x - I_y \\ \Omega = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4 \\ \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4 \end{cases} \quad (13)$$

برای نوشتن معادلات حرکت دورانی برحسب زوایای اوایلر و مشتق‌های آنها کافی است از رابطه (9) مشتق‌گیری شود تا ارتباط بین شتاب زاویه‌ای در دستگاه بدنی با مشتق دوم زوایای اوایلر بصورت رابطه (14) بدست آید

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \dot{\varphi} - \dot{\psi} s\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} c\theta \\ \dot{q} &= \dot{\theta} c\varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} s\varphi + \dot{\psi} s\varphi c\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} s\theta s\varphi \\ &\quad + \dot{\psi} \dot{\varphi} c\varphi c\theta \\ \dot{r} &= \dot{\theta} s\varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} c\varphi + \dot{\psi} c\varphi c\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} s\theta c\varphi \\ &\quad + \dot{\psi} \dot{\varphi} s\varphi c\theta \end{aligned} \quad (14)$$

با جای‌گذاری روابط (9) و (14) در رابطه (12)، معادلات حرکت دورانی برحسب زوایای اوایلر بدست می‌آیند.

2-2-2-2-2- روش لاگرانژ

با در نظر گرفتن زوایای اوایلر و مختصات مرکز جرم جسم بعنوان مختصات تعمیم یافته، انرژی پتانسیل سیستم به صورت $PE=mgZ$ و انرژی جنبشی کل سیستم نیز به صورت رابطه (15) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} KE &= (1/2) [m_t (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + I_{xx} (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 \\ &\quad + I_{yy} (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta)^2 \\ &\quad + I_{zz} (\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 \\ &\quad + J_{zz} [(\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi + \Omega_1)^2 \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi - \Omega_2)^2 \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi + \Omega_3)^2 \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi - \Omega_4)^2] \\ &\quad + J'_{zz} (\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi + \Omega_5)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

مقابل هم در حالت شناور برابر بوده و سرعت ثابت ملخ پنج براساس رابطه (7) به گونه‌ای تعیین می‌شود که سرعت دیگر روتورها در طی حرکت پرنده در محدوده مجاز باقی بماند.

$$\begin{cases} 2K_t(\Omega_2^2 + \Omega_1^2) + K_{t5}\Omega_5^2 = mg \\ 2K_d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2) + K_{d5}\Omega_5^2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

از روابط فوق ملاحظه می‌شود که با افزایش سرعت ملخ پنج بایستی سرعت ملخ‌های دو و چهار نیز افزایش یافته و در عین حال سرعت ملخ‌های یک و سه کاهش یابد. با توجه به اینکه مانوردهی پرنده توسط ملخ‌های یک تا چهار انجام می‌شود لذا در طی پرواز پرنده باز هم سرعت ملخ‌های یک و سه کاهش و سرعت ملخ‌های دو و چهار نیز افزایش می‌یابد، از طرفی حداقل سرعت هر ملخ صفر و حداکثر آن نیز دارای سقف محدودی می‌باشد. بنابراین، سرعت ملخ پنج بایستی به گونه‌ای انتخاب شود که در طول حرکت پرنده در مودهای مختلف پرواز، سرعت روتورهای جانبی از مقادیر محدودشان تجاوز نکنند و این یک عامل محدود کننده در تعیین مقدار جبران وزن پرنده توسط ملخ پنج می‌باشد. در صورتی که ملخ پنج بگونه‌ای طراحی شود که ضریب برا و پسای آن به یک نسبت بزرگتر از ضریب برا و پسای ملخ‌های جانبی باشد، از معادلات (7) مشاهده می‌شود که ازای نیروی رانش تولید شده برابر 0.5mg توسط ملخ پنج سرعت ملخ‌های یک و سه صفر خواهد شد. بنابراین حداکثر 50 درصد وزن پرنده را می‌توان توسط ملخ پنج جبران نمود.

2-2- استخراج معادلات

به منظور مدلسازی پرنده، یک دستگاه اینرسی متصل به زمین و یک دستگاه بدنی در مرکز جرم جسم در نظر گرفته می‌شود (شکل 2). ماتریس تبدیل دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی با در نظر گرفتن سه دوران متوالی برحسب زوایای اوایلر بترتیب $\psi \leftarrow \theta \leftarrow \varphi$ بصورت رابطه (8) بدست می‌آید.

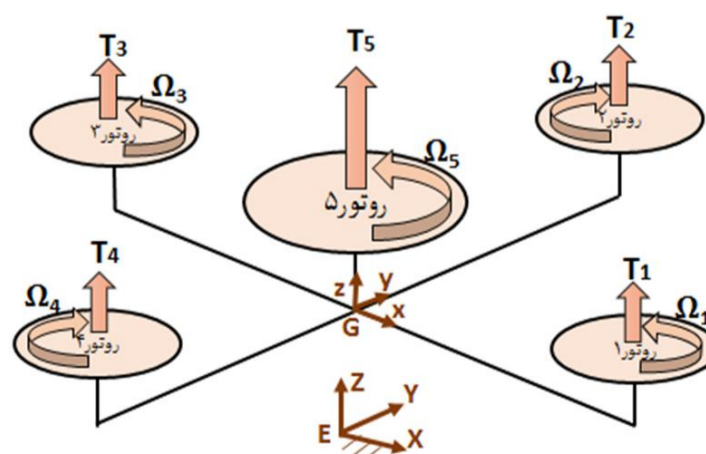
$$R(\psi, \theta, \varphi) = R(x, \varphi) \cdot R(y, \theta) \cdot R(z, \psi) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ -s\psi c\varphi + c\psi s\theta s\varphi & c\psi c\varphi + s\psi s\theta s\varphi & c\theta s\varphi \\ s\psi s\varphi + c\psi s\theta c\varphi & -c\psi s\varphi + s\psi s\theta c\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \quad (8)$$

در روابط فوق c و s به ترتیب مخفف cos و sin می‌باشد. با ضرب ماتریس (8) در هر بردار توصیف شده در دستگاه اینرسی، مؤلفه‌های آن در دستگاه بدنی بدست می‌آید، همچنین مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای جسم در دستگاه بدنی را می‌توان توسط رابطه (9) برحسب نرخ زوایای اوایلر بدست آورد [9].

$$\omega^B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & c\theta s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

2-2-2-1- روش نیوتن اوایلر

معادلات حرکت انتقالی براساس قوانین نیوتن در دستگاه اینرسی بصورت



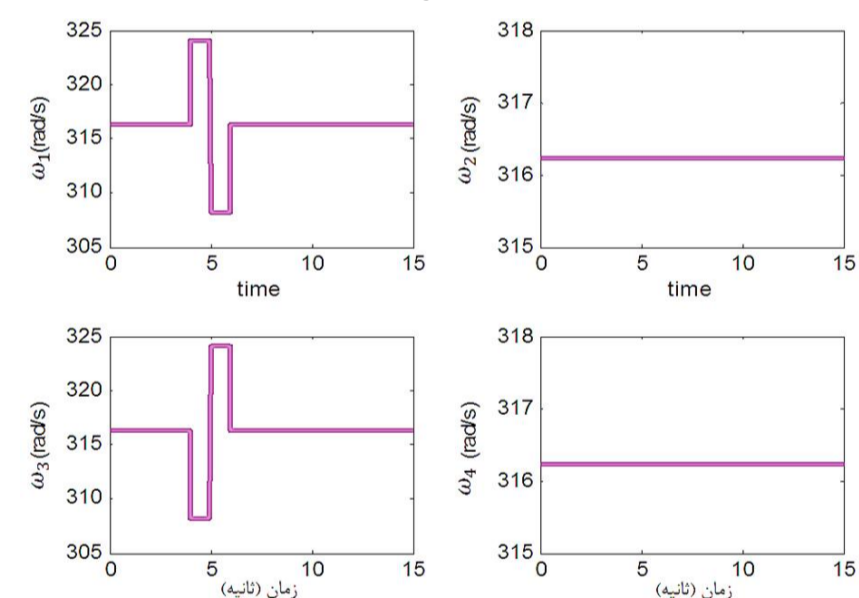
شکل 2 نمایش نیروی رانش و گشتاور پساناشی از چرخش هر ملخ

حول محور Y گشتاور ژيروسکوپي به میزان $J'_5 \Omega_5$ در جهت محور X به آن اعمال شده و باعث دوران عمودپرواز در آن جهت می‌شود، در اثر این دوران پرنده در راستای Y نیز جابجایی خواهد داشت. تغییر ارتفاع پرنده به این دلیل است که با دوران پرنده حول محورهای افقی، نیروی F در راستای Z کمتر از وزن شده و پرنده سقوط می‌کند. در شکل 4 پاسخ سیستم با حذف ملخ مرکزی نیز نمایش داده شده که این پاسخ کاملاً قابل انتظار بوده زیرا پرنده با دوران حول محور Y در راستای محور X حرکت می‌نماید. بنابراین از مقایسه پاسخ دو سیستم در شکل 4 نتیجه می‌شود که پرنده پنج-ملخه دارای رفتار دینامیکی پیچیده‌تری نسبت به کوادروتور می‌باشد.

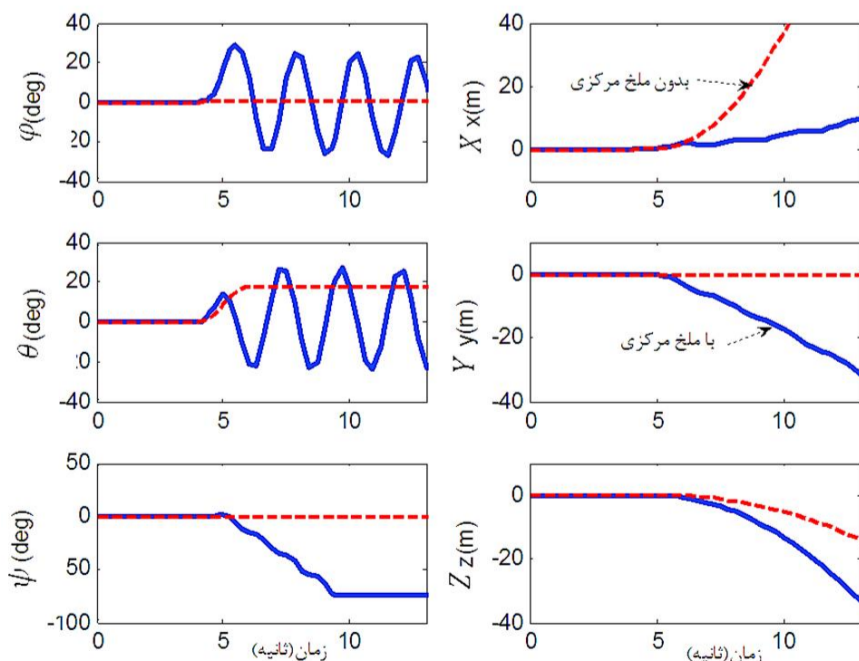
3- طراحی سیستم کنترل

با توجه به غیرخطی بودن معادلات حرکت، روش فیدبک خطی‌ساز برای کنترل عمودپرواز ارائه می‌گردد. در این روش، کنترل‌کننده با حذف ترم‌های غیرخطی، سیستم را به سیستم خطی معادل برحسب ورودی جدید تبدیل نموده تا بتوان از روش‌های متنوع کنترل خطی استفاده کرد [10]. جهت جلوگیری از پیچیدگی سیستم کنترلی، ابتدا ساده‌سازی در معادلات حرکت صورت می‌گیرد. از معادلات حرکت زاویه‌ای (فرمول 9) مشاهده می‌شود که با فرض کوچک بودن زوایای اوپلر، سرعت زاویه‌ای پرنده در دستگاه بدنی با نرخ زوایای اوپلر برابر می‌شود. بنابراین معادلات زیر با تقریب خوبی حرکت دورانی پرنده را به ازای زوایای اوپلر کوچک توصیف می‌کنند.

$$\begin{cases} I_x \ddot{\phi} = -A_1 \dot{\psi} \dot{\theta} - J_z \dot{\theta} \Omega - J'_z \dot{\theta} \Omega_5 + u_2 \\ I_y \ddot{\theta} = -B_1 \dot{\psi} \dot{\phi} + J_z \dot{\phi} \Omega + J'_z \dot{\phi} \Omega_5 + u_3 \\ I_z \ddot{\psi} = -C_1 \dot{\phi} \dot{\theta} - J_z \dot{\Omega} - J'_z \dot{\Omega}_5 + u_4 \end{cases} \quad (18)$$



شکل 3 سرعت روتورهای جانبی به عنوان ورودی معادلات



شکل 4 پاسخ دینامیکی پرنده پنج ملخه در مقایسه با کوادروتور

با تشکیل لاگرانژین بصورت $L=KE-PE$ معادلات حرکت از فرمول $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$ قابل محاسبه می‌باشد که در آن q_i می‌تواند هر کدام از مختصات تعمیم یافته باشد و Q_i نیز نیروی تعمیم یافته متناظر با هر مختصه است. به این ترتیب معادلات حرکت براساس فرمول فوق بصورت رابطه (16) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} m_t \ddot{X} &= Q_X \\ m_t \ddot{Y} &= Q_Y \\ m_t \ddot{Z} + m_t g &= Q_Z \\ (I_x) (\ddot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) + (I_z - I_y) (\dot{\psi}^2 \sin 2\varphi (\cos \theta)^2 - \dot{\theta}^2 \sin 2\varphi + 2\dot{\psi} \dot{\theta} \cos 2\varphi \cos \theta) \\ &+ J_z \Omega (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta) \\ &+ J'_z \Omega_5 (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta) = Q_\varphi \\ \ddot{\theta} (I_y (\cos \varphi)^2 + I_z (\sin \varphi)^2) + \frac{1}{2} (I_y - I_z) (\dot{\psi} \sin 2\varphi \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\varphi + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos 2\varphi \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\phi} I_x \cos \theta \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 \sin 2\theta (I_y (\sin \varphi)^2 + I_z (\cos \varphi)^2 - I_x) \\ &- J_z \Omega \cos \varphi (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) - J'_z \Omega_5 \cos \varphi (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \\ &- \sin \theta (J_z \dot{\Omega} + J'_z \dot{\Omega}') = Q_\theta \\ \dot{\psi} (I_x (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 (I_z (\cos \varphi)^2 + I_y (\sin \varphi)^2) \\ &- I_x \ddot{\phi} \sin \theta + \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cos \theta (\dot{\theta} \sin 2\varphi + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos 2\varphi \\ &- 2\dot{\psi} \dot{\phi} \sin 2\varphi \cos \theta) - \frac{1}{2} (I_x - I_y) \dot{\theta}^2 \sin 2\varphi \sin \theta \\ &+ I_x \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin 2\theta (I_y (\sin \varphi)^2 - I_z (\cos \varphi)^2) \\ &+ I_x = Q_\psi \end{aligned} \quad (16)$$

نیروهای تعمیم یافته نیز به شکل زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} Q_X &= F (\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi) \\ Q_Y &= F (\sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi) \\ Q_Z &= F \cos \theta \cos \varphi \\ Q_\varphi &= \tau_x \\ Q_\theta &= \tau_y \cos \varphi - \tau_z \sin \varphi \\ Q_\psi &= \tau_y \sin \varphi \cos \theta + \tau_z \cos \varphi \sin \theta - \tau_x \sin \theta \end{aligned} \quad (17)$$

با صرف نظر از نیرو و گشتاورهای آیرودینامیکی وارد بر بدنه جسم، معادلات حرکت انتقالی و معادله دورانی در راستای مؤلفه φ از هر دو روش لاگرانژ و نیوتن یکسان می‌باشد. همچنین در صورتی که معادله در راستای θ نیوتن در $\cos \varphi$ و معادله در راستای ψ نیوتن در $\sin \varphi$ ضرب کرده و دو معادله را با هم جمع کنیم معادله در راستای θ از روش لاگرانژ حاصل می‌گردد. با ضرب معادله در راستای ψ نیوتن در $\sin \theta \cos \varphi$ و ضرب معادله در راستای θ نیوتن در $\sin \varphi \cos \theta$ و ضرب معادله φ نیوتن در $\sin \theta$ - و جمع این سه معادله نیز می‌توان معادله ψ لاگرانژ را بدست آورد. نتایج یکسان روش نیوتن - اوپلر و روش لاگرانژ، صحت معادلات استخراج شده را تأیید می‌نماید.

3-2- شبیه‌سازی معادلات دینامیکی

در این بخش با شبیه‌سازی روابط (10) و (12) رفتار معادلات دینامیکی پرنده مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. شعاع ملخ مرکزی یک و نیم برابر شعاع ملخ‌های جانبی و سرعت آن نیز 200 rad/s در نظر گرفته می‌شود که تقریباً 40 درصد وزن پرنده توسط این ملخ جبران می‌شود. سرعت ملخ‌های جانبی به عنوان ورودی سیستم مطابق شکل 3 تغییر داده می‌شود. انتظار می‌رود با توجه به نوع ورودی، پرنده ضمن دوران حول محور Y در راستای X نیز جابجا شود. همان‌طور که در شکل 4 مشاهده می‌شود پاسخ سیستم به دلیل حضور ملخ مرکزی کاملاً غیر قابل انتظار می‌باشد. زیرا با دوران پرنده

سیستم بصورت رابطه (23) خواهد بود.

$$\begin{cases} \ddot{X} = (v_1 + g) \tan x_3 / \cos x_1 \\ \ddot{Y} = (v_1 + g) \tan x_1 \end{cases} \quad (23)$$

از آنجائی که معادلات فوق ناپایدار می‌باشند به روش فیدبک خطی ساز نمی‌توان خروجی مذکور را کنترل نمود بنابراین بایستی یا از روش دیگری استفاده گردد و یا خروجی دیگری انتخاب کرد. در ادامه با تغییر خروجی سیستم کنترل کننده مناسب طراحی می‌گردد [11].

3-2- موقعیت مرکز جرم و زاویه یاو بعنوان خروجی

با در نظر گرفتن X, Y, Z و ψ به عنوان خروجی سیستم، برای ظاهر شدن ورودی‌های کنترلی در خروجی از معادلات (20) دو مرتبه بصورت زیر مشتق‌گیری می‌شود.

$$\begin{aligned} m\ddot{X}^{(4)} &= \ddot{u}_1 \sin \theta + 2\dot{\theta}\dot{u}_1 \cos \theta - u_1 \dot{\theta}^2 \sin \theta + u_1 \ddot{\theta} \cos \theta \\ m\ddot{Y}^{(4)} &= (-\ddot{u}_1 + u_1 \dot{\phi}^2 + u_1 \dot{\theta}^2) \sin \varphi \cos \theta + (2\dot{\theta}\dot{u}_1 + u_1 \ddot{\theta}) \sin \theta \sin \varphi - (2\dot{u}_1 \dot{\phi} + u_1 \ddot{\phi}) \cos \varphi \cos \theta \\ &\quad + 2u_1 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \varphi \sin \theta \\ m\ddot{Z}^{(4)} &= (\ddot{u}_1 - u_1 \dot{\phi}^2 - u_1 \dot{\theta}^2) \cos \varphi \cos \theta - (2\dot{\theta}\dot{u}_1 + u_1 \ddot{\theta}) \sin \theta \cos \varphi - (2\dot{u}_1 \dot{\phi} + u_1 \ddot{\phi}) \sin \varphi \cos \theta \\ &\quad + 2u_1 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \varphi \sin \theta \end{aligned} \quad (24)$$

با ظاهر شدن مشتق دوم زوایای اوپلر در رابطه فوق و جایگزینی آن‌ها از روابط (18) ورودی‌های کنترلی در مشتق چهارم خروجی نمایان می‌گردد. با در نظر گرفتن بردار $U = [\ddot{u}_1, u_2, u_3, u_4]^T$ به عنوان ورودی جدید، می‌توان معادلات را به فرم ماتریسی (25) بازنویسی کرد. در این صورت u_1 و \ddot{u}_1 نیز به عنوان حالت در نظر گرفته می‌شوند. با معرفی حالت‌های سیستم جدید به صورت $X = [\ddot{z}, \dot{z}, z, \ddot{y}, \dot{y}, y, \ddot{x}, \dot{x}, x, \ddot{u}_1, u_1]^T$ ملاحظه می‌شود کل سیستم از مرتبه چهارده بوده و با توجه به این که از خروجی‌های $X - Y - Z$ هر کدام چهار مرتبه و از خروجی ψ نیز دو مرتبه مشتق‌گیری شده تا ورودی به طور مستقیم در خروجی ظاهر شود بنابراین مرتبه نسبی سیستم نیز برابر چهارده است. با توجه به این که مرتبه نسبی سیستم با مرتبه کل سیستم برابر است، دینامیک داخلی وجود ندارد و به عبارتی خطی‌سازی ورودی - خروجی برای این سیستم، معادل خطی‌سازی ورودی - حالت است. با نمایش معادلات (25) بصورت نمادین $[X^{(4)}, Y^{(4)}, Z^{(4)}]^T = [\beta][\ddot{u}_1, u_2, u_3]^T + [\alpha]$ می‌توان با طراحی سیگنال‌های کنترلی بصورت رابطه (26)

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\beta]^{-1}(-[\alpha] + m \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}) \quad (26)$$

معادلات (25) را به فرم خطی زیر تبدیل نمود.

$$\begin{cases} \dot{X}^{(4)} = V_1 \\ \dot{Y}^{(4)} = V_2 \\ \dot{Z}^{(4)} = V_3 \end{cases} \quad (27)$$

در روابط فوق V_1 تا V_3 ورودی کنترلی مجازی می‌باشند. به این ترتیب معادلات نه تنها خطی شده‌اند بلکه کاملاً از هم مستقل نیز می‌باشند.

از آنجا که هدف سیستم کنترلی تعقیب مسیر مطلوب است در ابتدا مسئله تعقیب مسیر را به مسئله تنظیم برای خطای خروجی به صورت $e_\gamma^{(4)} = w_\gamma$ تبدیل نموده که در آن $e_\gamma = \gamma - \gamma_d$ و $\gamma = (X, Y, Z)$ همچنین ورودی مجازی جدید بوده و از روش کنترل بهینه LQR با در نظر گرفتن تابع هزینه به شکل

$$J_\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (e_\gamma^T Q_\gamma e_\gamma + w_\gamma^T R_\gamma w_\gamma) dt \quad (28)$$

در رابطه فوق ورودی‌های کنترلی بصورت $[u_1, u_2, u_3, u_4]^T = [F, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ می‌باشند. همچنین اثرات آیرودینامیکی به عنوان اغتشاش به سیستم اعمال می‌گردند. برای ساده‌تر نمودن معادلات حرکت انتقالی پرنده، ترتیب دوران‌های زوایای اوپلر را عوض کرده و به صورت $\varphi \leftarrow \theta \leftarrow \psi$ در نظر گرفته می‌شوند. با این دوران‌ها ماتریس تبدیل به فرم زیر خواهد بود.

$$R(\psi, \theta, \varphi) = R(x, \varphi) \cdot R(y, \theta) \cdot R(z, \psi) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta + c\psi s\theta s\varphi & s\psi s\varphi - c\psi s\theta c\varphi \\ -s\psi c\theta & c\psi c\theta - s\psi s\theta s\varphi & c\psi s\varphi + s\psi s\theta c\varphi \\ -s\theta & -c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \quad (19)$$

با در نظر گرفتن ماتریس تبدیل فوق، معادلات حرکت انتقالی به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} m\ddot{X} = u_1 \sin \theta \\ m\ddot{Y} = -u_1 \sin \varphi \cos \theta \\ m\ddot{Z} = u_1 \cos \varphi \cos \theta - mg \end{cases} \quad (20)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود معادلات (20) شامل ترم‌های غیرخطی کمتری نسبت به معادلات (10) بوده و برای کنترل به مراتب ساده‌تر می‌باشند، بنابراین از معادلات (18) و (20) جهت کنترل پرنده استفاده می‌شود.

سیستم دارای شش درجه آزادی بصورت بردار $[\varphi, \theta, \psi, X, Y, Z]^T$ و چهار ورودی کنترلی بصورت $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ می‌باشد. با توجه به این که تعداد ورودی‌ها از تعداد درجات آزادی سیستم کمتر است لذا سیستم زیر تحریک بوده و تنها چهار خروجی را می‌توان بطور مستقل کنترل کرد.

با تعریف متغیرهای حالت سیستم بصورت بردار $X^T = [\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ فرم فضای حالت معادلات بصورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (1/I_x)(-A_1 x_4 x_6 - J_Z x_4 \Omega - J_Z' x_4 \Omega_5 + u_2) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = (1/I_y)(-B_1 x_2 x_6 + J_Z x_2 \Omega + J_Z' x_2 \Omega_5 + u_3) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = (1/I_z)(-C_1 x_2 x_4 - J_Z \dot{\Omega} - J_Z' \dot{\Omega}_5 + u_4) \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = (1/m)(u_1 \sin x_3) \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = (1/m)(-u_1 \sin x_1 \cos x_3) \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = (1/m)(u_1 \cos x_1 \cos x_3 - mg) \end{cases} \quad (21)$$

3-1- زوایای اوپلر و ارتفاع به عنوان خروجی

با در نظر گرفتن ψ, θ, φ و Z به عنوان خروجی، از معادلات (21) مشاهده می‌شود که ورودی کنترلی در مشتق دوم هر یک از خروجی‌ها ظاهر شده، لذا مرتبه نسبی کل سیستم برابر هشت بوده و از آنجائی که سیستم مرتبه 12 می‌باشد، دینامیک‌های داخلی بصورت $[X, \dot{X}, Y, \dot{Y}]^T$ در سیستم وجود خواهند داشت. با طراحی ورودی کنترلی به فرم

$$\begin{aligned} u_1 &= m/(\cos x_1 \cos x_3)(g + v_1) \\ u_2 &= (A_1 x_4 x_6 + J_Z x_4 \Omega + J_Z' x_4 \Omega_5 + I_x v_2) \\ u_3 &= (B_1 x_2 x_6 - J_Z x_2 \Omega - J_Z' x_2 \Omega_5 + I_y v_3) \\ u_4 &= (C_1 x_2 x_4 + J_Z \dot{\Omega} + J_Z' \dot{\Omega}_5 + I_z v_4) \end{aligned} \quad (22)$$

معادلات (21) خطی خواهند شد. در روابط فوق v_1 تا v_4 ورودی جدید بوده که با استفاده از کنترل کننده PD بصورت $v_i = \sigma_d - k_{\sigma 1} e_\sigma - k_{\sigma 2} \dot{e}_\sigma$ طراحی می‌شوند که در آن $\sigma = Z, \varphi, \theta, \psi$ و $k_{\sigma 1}$ و $k_{\sigma 2}$ ضرایب کنترل کننده می‌باشند. با جای‌گذاری سیگنال u_1 معادلات حاکم بر دینامیک‌های داخلی

$$\begin{bmatrix} mX^{(4)} \\ mY^{(4)} \\ mZ^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \frac{u_1}{I_y} \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \varphi & -\frac{u_1}{I_x} \cos \theta \cos \varphi & \frac{u_1}{I_y} \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & -\frac{u_1}{I_x} \sin \varphi \cos \theta & -\frac{u_1}{I_y} \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} 2\dot{u}_1 \cos \theta - u_1 \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{u_1}{I_y} \cos \theta (-B_1 \dot{\psi} \dot{\phi} + J_z \dot{\phi} \dot{\Omega}_5 + J_z' \dot{\phi} \dot{\Omega}_5) \\ 2u_1 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \varphi \sin \theta + \left(2\dot{\theta} \dot{u}_1 + \frac{u_1}{I_y} (-B_1 \dot{\psi} \dot{\phi} + J_z \dot{\phi} \dot{\Omega}_5 + J_z' \dot{\phi} \dot{\Omega}_5) \right) \sin \theta \sin \varphi - \left(2\dot{u}_1 \dot{\phi} + \frac{u_1}{I_x} (-A_1 \dot{\psi} \dot{\theta} - J_z \dot{\theta} \dot{\Omega}_5 - J_z' \dot{\theta} \dot{\Omega}_5) \right) \cos \varphi \cos \theta + u_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \sin \varphi \cos \theta \\ 2u_1 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \varphi \sin \theta - u_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \cos \varphi \cos \theta - (2\dot{u}_1 \dot{\theta} + \frac{u_1}{I_y} (-B_1 \dot{\psi} \dot{\phi} + J_z \dot{\phi} \dot{\Omega}_5 + J_z' \dot{\phi} \dot{\Omega}_5)) \cos \varphi \sin \theta - (2\dot{u}_1 \dot{\phi} + \frac{u_1}{I_x} (-A_1 \dot{\psi} \dot{\theta} - J_z \dot{\theta} \dot{\Omega}_5 - J_z' \dot{\theta} \dot{\Omega}_5)) \sin \varphi \cos \theta \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه معادلات حرکت سیستم پیچیده بوده و روش کنترلی نیز شامل مشتق گیری مرتبه چهار است لذا با اضافه کردن دینامیک موتور به دینامیک سیستم بر پیچیدگی مسئله افزوده می شود. در این جا از این ایده استفاده می شود که اثر دینامیک عملگرها توسط حلقه کنترلی دیگری جبران گردد. به این صورت که بدون در نظر گرفتن عملگرها همانند قبل، ورودی های کنترلی از حلقه کنترل اول (روابط 26 و 31) محاسبه شده و این سیگنال ها به عنوان ورودی مرجع به حلقه کنترلی عملگرها وارد می شوند. حلقه کنترل دوم به گونه ای طراحی می شود که خروجی آن با نرخ بالا و بدون خطای دائمی ورودی مرجع را تعقیب نماید. به این ترتیب خروجی عملگرها که به دینامیک پرنده اعمال می گردند تقریباً همان ورودی های کنترلی حلقه اول می باشند [8].

دینامیک موتور (رابطه 32) سیستمی خطی و غیرکوپل می باشد، برای جبران این دینامیک تابع خطایی بصورت $e = \Omega_m - \Omega_{md}$ تعریف می گردد که مشتق آن به شکل $\dot{e} = k_m v_m - c_m \Omega_m - \dot{\Omega}_{md}$ می باشد، با انتخاب تابع لیاپانوف $V = \frac{1}{2} e^2$ و با طراحی ورودی کنترلی موتور بصورت رابطه (33)

$$v_m = \frac{1}{k_m} (c_m \Omega_m + \dot{\Omega}_{md} - k_c e) \quad (33)$$

مشتق تابع لیاپانوف به فرم $\dot{V} = e \dot{e} = -k_c e^2$ حاصل می شود که در صورت مثبت بودن k_{cm} ورودی کنترلی v_m باعث پایداری مجانبی موتور شده و هر چه k_{cm} بزرگتر انتخاب شود خروجی موتور سریع تر به ورودی مرجع میل می کند. بنابراین هر یک از چهار موتور بطور مشابه توسط ورودی (33) کنترل می شوند.

در شکل 5 دیاگرام سیستم کنترلی مشاهده می شود. ورودی های کنترلی بدست آمده از روابط (26 و 31) به عنوان مقادیر مطلوب وارد حلقه دوم شده و در بلوک دینامیک معکوس ملخ، سرعت مطلوب هر یک از روتورهای جانبی با استفاده از روابط زیر بدست می آیند.

$$\begin{cases} \Omega_1^2 = \frac{u_1 - k_{t5} \Omega_5^2}{4k_t} - \frac{u_3}{2lk_t} - \frac{u_4 + k_{d5} \Omega_5^2}{4k_d} \\ \Omega_2^2 = \frac{u_1 - k_{t5} \Omega_5^2}{4k_t} - \frac{u_2}{2lk_t} + \frac{u_4 + k_{d5} \Omega_5^2}{4k_d} \\ \Omega_3^2 = \frac{u_1 - k_{t5} \Omega_5^2}{4k_t} + \frac{u_3}{2lk_t} - \frac{u_4 + k_{d5} \Omega_5^2}{4k_d} \\ \Omega_4^2 = \frac{u_1 - k_{t5} \Omega_5^2}{4k_t} + \frac{u_2}{2lk_t} + \frac{u_4 + k_{d5} \Omega_5^2}{4k_d} \end{cases} \quad (34)$$

در بلوک کنترلر موتور با توجه به رابطه (33) سرعت موتورها با نرخ بالا به مقادیر مطلوب بدست آمده از رابطه (34) همگرا شده و نهایتاً در بلوک دینامیک مستقیم ملخ نیرو و گشتاورها از روابط (3-6) محاسبه شده و به دینامیک پرنده اعمال می گردد.

بصورت $w_\gamma = -(R^{-1} B^T k) E_\gamma$ بدست می آید که در آن k از معادله جبری ریکاتی بصورت $A^T k + k A - k B R^{-1} B^T k^T + Q = 0$ بدست می آید. در روابط مذکور ماتریس R_γ مثبت با ابعاد (1×1) و Q_γ مثبت نیمه معین با ابعاد (4×4) بوده و ماتریس های A و B و E_γ نیز بصورت زیر تعریف می شوند.

$$E_\gamma = \begin{bmatrix} e_\gamma \\ \dot{e}_\gamma \\ \ddot{e}_\gamma \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

بنابراین ورودی های مجازی بصورت روابط زیر تعیین می شوند.

$$\begin{cases} V_1 = X_d^{(4)} + w_X \\ V_2 = Y_d^{(4)} + w_Y \\ V_3 = Z_d^{(4)} + w_Z \end{cases} \quad (30)$$

برای مؤلفه ψ نیز با توجه به رابطه (18) ورودی کنترلی به روش فیدبک خطی ساز و با استفاده از کنترل کننده PD بصورت زیر طراحی می گردد.

$$\begin{cases} u_4 = C_1 \dot{\phi} \dot{\theta} + J_z \dot{\Omega} + J_z' \dot{\Omega}_5 + I_z V_4 \\ V_4 = \dot{\psi}_d - k_{\psi 1} \dot{e}_\psi - k_{\psi 2} e_\psi \end{cases} \quad (31)$$

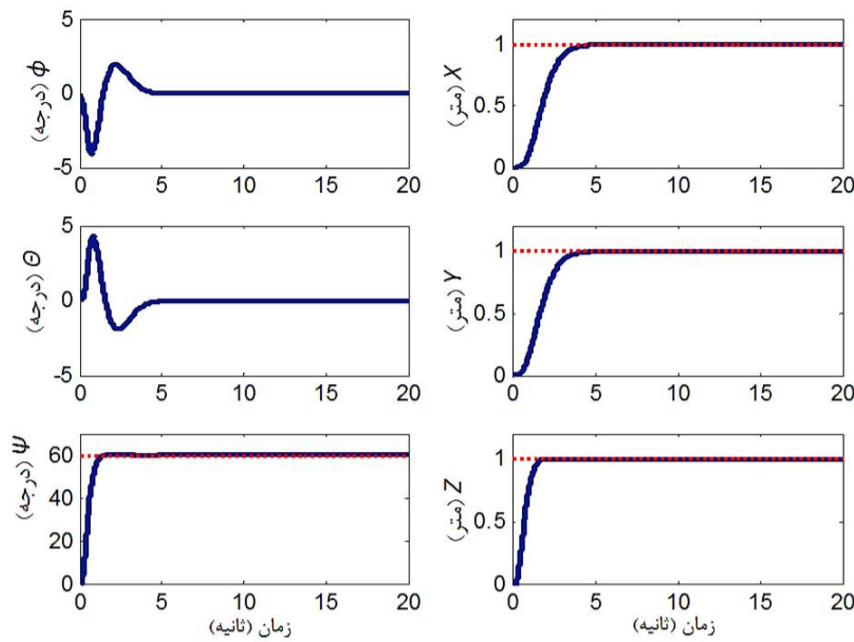
در رابطه فوق $k_{\psi 1}$ و $k_{\psi 2}$ بترتیب ضرایب کنترل کننده مشتق گیر و تناسبی هستند که براساس پاسخ گذرا و دائم مناسب تعیین می گردند.

3-3- تأثیر موتورها

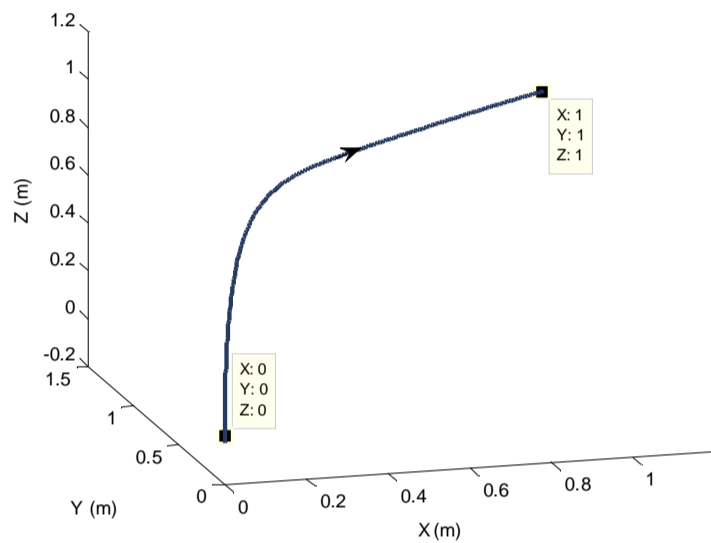
ورودی های کنترلی بدست آمده از روابط (26) و (31) مستقیماً به دینامیک سیستم اعمال نمی گردند، بلکه این ورودی ها به عملگرها وارد شده و خروجی عملگرها به دینامیک سیستم اعمال می شود. از آنجا که ورودی های اعمالی به سیستم با ورودی های بدست آمده از کنترل کننده متفاوت می باشند، لذا عملکرد سیستم تحت تأثیر قرار خواهد گرفت. با توجه به اینکه کنترل کننده فیدبک خطی ساز نسبت به دینامیک های مدل نشده مقاوم نیست چشم پوشی از دینامیک عملگرها می تواند به ناپایداری سیستم منجر شود. بنابراین در این قسمت به بررسی تأثیر عملگرها در عملکرد سیستم کنترلی پرداخته می شود. موتورهای استفاده شده برای عمودپرواز مورد بررسی، از نوع جریان مستقیم براشلس در نظر گرفته می شوند. دینامیک موتور مربوط به ملخ مرکزی نقشی در کنترل پرنده ندارد زیرا سرعت این روتور از ابتدا تعیین شده و در کل زمان حرکت پرنده ثابت می ماند، بنابراین از مدل کردن آن پرهیز می شود. ورودی موتور الکتریکی ولتاژ است و خروجی آن سرعت چرخش محور آن می باشد. رابطه مرتبه اول بین ولتاژ و سرعت محور موتور بصورت معادله (32) است [12].

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_m = -c_m \Omega_m + \frac{k_v}{I_m R_a} v_m \\ c_m = \frac{k_v^2 + B_m R_a}{I_m R_a}, \quad k_m = \frac{k_v}{I_m R_a} \end{cases} \quad (32)$$

در این رابطه I_m ممان اینرسی موتور، R_a مقاومت آرمیچر، B_m ضریب میرایی، v_m ولتاژ موتور و k_v ثابت سرعت به ولتاژ است.



شکل 6 پاسخ سیستم مدار بسته به ورودی مرجع پله

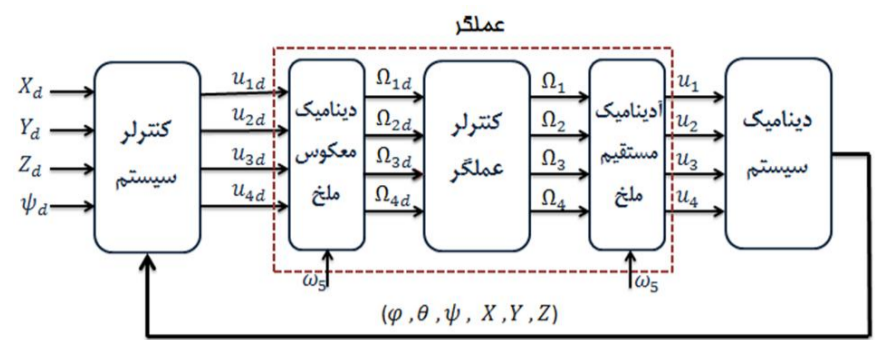


شکل 7 مسیر پرواز پرنده از مبدا به سمت نقطه ثابت (1, 1, 1)

حرکت می‌کند. با توجه به این که کنترل کننده شامل مشتق گیری مرتبه ایجاد می‌کنیم تا پرنده با ردیابی این مسیره‌ها به نقاط مطلوب برسد.

$$\sigma_r(t) = \begin{cases} 0 & t < t_{\sigma 1} \\ \sigma_1 + \sigma_2(1 + \sigma_3(t - t_{\sigma 1}))e^{-\sigma_3(t - t_{\sigma 1})} & t_{\sigma 1} \leq t \leq t_{\sigma 2} \\ \sigma_0 - \sigma_2(1 + \sigma_4(t - t_{\sigma 2}))e^{-\sigma_4(t - t_{\sigma 2})} & t > t_{\sigma 2} \end{cases} \quad (35)$$

در این رابطه $\sigma_r = x_r, y_r, z_r$ سایر پارامترهای مسیر مرجع در جدول 2 ذکر شده‌اند. مقدار مطلوب زاویه یا $\psi_d = \frac{\pi}{3}$ در نظر گرفته و شرایط اولیه سیستم نیز برابر صفر قرار داده می‌شود. در شکل 8 مسیر حرکت عمودپرواز در ردیابی نقطه مرجع نشان داده شده است. در شکل 9 مشاهده می‌شود که خروجی سیستم بخوبی مسیر مرجع را تعقیب می‌کند، همچنین در این شکل ملاحظه می‌شود که پرنده پس از رسیدن به هر نقطه مدتی در آن نقطه شناور مانده و سپس به سمت نقطه بعدی حرکت می‌کند به عبارتی مسیر مربعی در شکل 8 بصورت پیوسته ردیابی نشده است. در شکل 10 نیز وضعیت تغییر زوایای اوایل در طول حرکت پرنده نمایش داده شده، کوچک ماندن زوایای ϕ و θ نشان می‌دهد که روابط (18) تقریب خوبی از معادلات حرکت دورانی پرنده است. تغییر زاویه ψ در لحظه $t = 80s$ (هنگام فرود عمودپرواز) ناشی از این است که سرعت روتورهای 1 و 3 بدلیل عبور از حد مجاز برای لحظه‌ای صفر شده و باعث می‌شود کنترل کننده u_4 به درستی عمل نکرده و پرنده اندکی به دور خود می‌چرخد. اگر عدم چرخش پرنده به دور خود دارای اهمیت باشد می‌توان برای فرود مسیر مرجع را هموارتر در نظر گرفت و یا این که سرعت چرخش ملخ پنج را کاهش داد. در شکل 11 تغییر سرعت موتورهای جانبی در مدت مانوردهی پرنده مشاهده می‌شود.



شکل 5 دیاگرام سیستم کنترلی

4- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش برای بررسی عملکرد سیستم کنترلی پیشنهاد شده برای عمود پرواز، سه شبیه‌سازی مختلف انجام شده تا قابلیت‌های پایداری، تعقیب مسیر دلخواه و همچنین مقاوم بودن در برابر اغتشاش نشان داده شود. سرعت ملخ مرکزی در همه مانورها ثابت و برابر 200 rad/s در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای کنترل کننده به روش سعی و خطا طوری انتخاب شده‌اند که اولاً سرعت موتورهای جانبی در محدوده مجاز باقی مانده، ثانیاً عملکرد سیستم کنترل شده بهینه باشد. برای کانال‌های X و Y ماتریس‌های $Q_{x,y} = 500I_{4 \times 4}$ و باعث سقوط پرنده شده لذا پارامترهای کنترل کننده در این راستا به نحوی تعیین شده که سیستم دارای پاسخ سریعتری باشد. در جدول 1 پارامترهای کنترل کننده و همچنین پارامترهای عمودپرواز مشخص شده‌اند.

4-1- پایداری

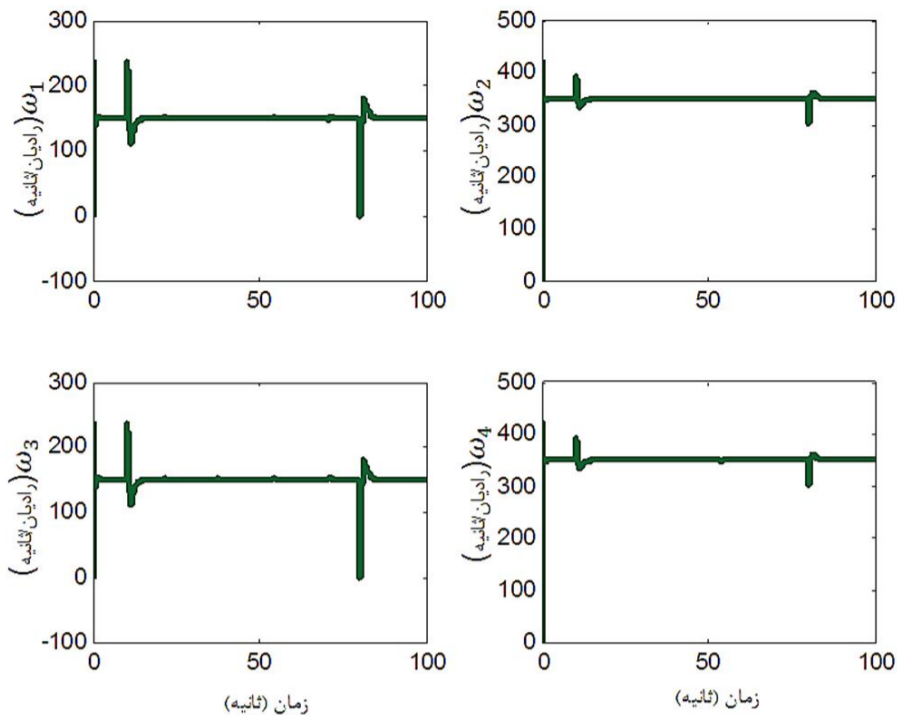
به منظور بررسی پایداری سیستم کنترل شده، با در نظر گرفتن ورودی مرجع ثابت بصورت $(X_d = Y_d = Z_d = 1, \psi_d = \frac{\pi}{3})$ از شکل 6 مشاهده می‌شود که خروجی سیستم بدون فراجش و بدون خطای ماندگار به ورودی مرجع میل می‌کند. کنترل کننده بصورت مستقیم بر روی مؤلفه‌های ϕ و θ عمل نمی‌کند ولی به دلیل پایداری جانبی کل سیستم، این مقادیر نیز در نهایت به صفر میل می‌کنند. در شکل 7 مسیر پرواز پرنده در حرکت از مبدا به سمت نقطه مطلوب نشان داده شده است.

4-2- ردیابی مسیر مرجع

اولین مأموریت عمودپرواز شامل بلند شدن، شناور ماندن، تعقیب نقطه در ارتفاع ثابت و فرود است. پرنده از مبدا $(X_d = 0, Y_d = 0, Z_d = 0)$ ابتدا به نقطه $(0,0,2)$ رفته سپس به ترتیب به نقاط $(0,-2,2)$ ، $(-2,0,2)$ و $(0,0,2)$ رفته و در نهایت به مبدا $(0,0,0)$ باز می‌گردد، پس از رسیدن به هر نقطه پرنده مدتی در آن نقطه شناور مانده و سپس به سمت نقطه بعدی بالاست لذا مسیر مرجع همواری به صورت زیر برای رفتن به نقاط دلخواه

جدول 1 پارامترهای کنترل کننده و عمودپرواز

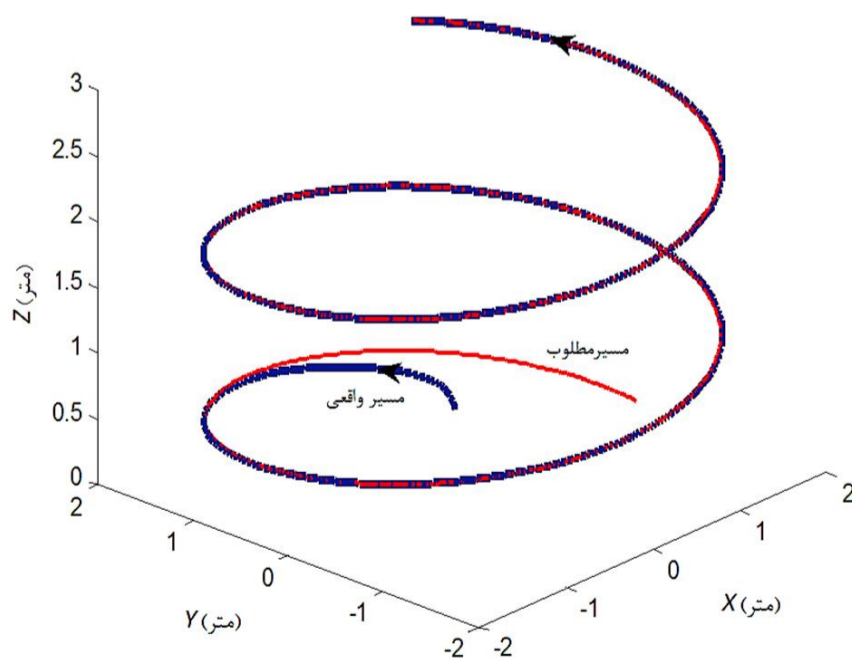
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
$k_{x1} = k_{y1}$	4/082	k_{z1}	625	$k_{\psi 1}$	7/103
$k_{x2} = k_{y2}$	9/842	k_{z2}	500	$k_{\psi 2}$	15/81
$k_{x3} = k_{y3}$	9/822	k_{z3}	150	k_{cm}	200
$k_{x4} = k_{y4}$	4/469	k_{z4}	20		
پارامتر	مقدار	واحد	پارامتر	مقدار	واحد
m	2	kg	k_t	0/00004	Ns^2/rad^2
$I_x = I_y$	0/0081	NmS^2/rad	k_{t5}	0/0002	Ns^2/rad^2
I_z	0/0142	NmS^2/rad	k_d	0/000001	$\text{NmS}^2/\text{rad}^2$
J	0/0001	NmS^2/rad	k_{d5}	0/000005	$\text{NmS}^2/\text{rad}^2$
J'	0/0005	NmS^2/rad			



شکل 11 سرعت موتورهای جانبی طی مانور پرنده

دومین مأموریت عمودپرواز شامل تعقیب مسیر پیوسته مارپیچی بصورت $(x_d = 2 \cos(\frac{t}{2}), y_d = 2 \sin(\frac{t}{2}), z_d = 0.1t, \psi_d = 0)$ می‌باشد، شرایط اولیه $\psi(0) = \varphi(0) = \theta(0) = x(0) = y(0) = z(0) = 0$ در نظر گرفته می‌شود.

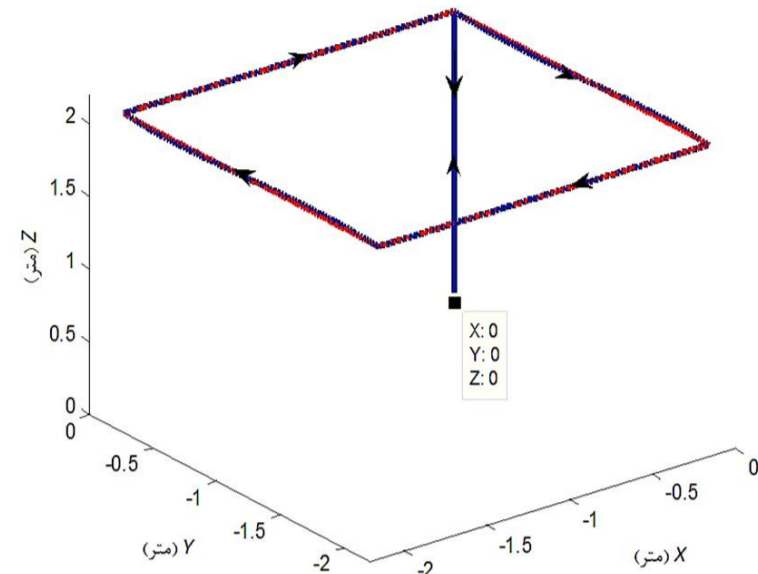
نتایج شبیه سازی در شکل‌های 12 و 13 نشان می‌دهد مسیر حرکت عمودپرواز در زمان کوتاهی بر مسیر مطلوب منطبق شده و علاوه بر میل کردن خروجی سیستم به مقادیر مطلوب، زوایای اوپلر نیز طی مانور پرنده کوچک باقی می‌مانند. فروجهش مؤلفه ψ در شکل 13 به این دلیل است که در شروع کار، ملخ مرکزی با سرعت ثابت شروع به دوران کرده و گشتاور پسای ایجاد شده روی این ملخ باعث تغییر زاویه ψ می‌شود ولی پس از مدت کوتاهی سیستم کنترلی این تغییر زاویه را جبران می‌کند. شکل 14 خطای خروجی سیستم پس از رسیدن به مقادیر مطلوب را نشان می‌دهد، مقدار ریشه‌ی میانگین مربعات¹ خطا برای هر خروجی پس از گذشت پنج ثانیه بصورت $RMS(e_x) = 0.011$ و $RMS(e_y) = 0.0012$ و $RMS(e_z) = 0.0002$ و $RMS(e_\psi) = 0.0001$ می‌باشد. همچنین از شکل 15 مشاهده می‌شود سرعت موتورهای جانبی در محدوده مجاز بوده و بنابراین عملکرد سیستم کنترلی در ردیابی مسیر مارپیچ و هموار مناسب است.



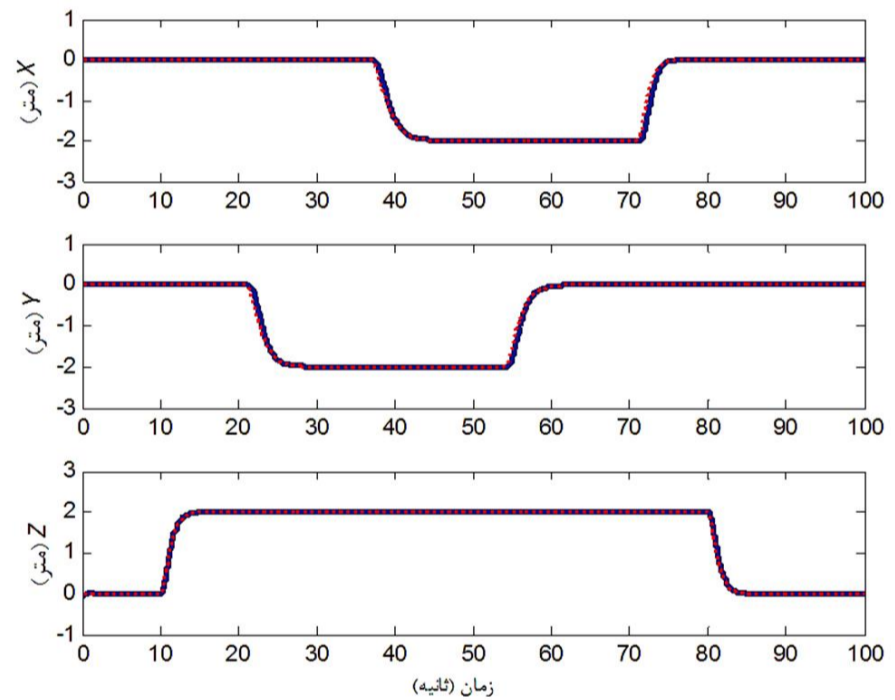
شکل 12 مسیر پرواز پرنده در تعقیب ورودی مرجع مارپیچ

جدول 2 پارامترهای مسیر مرجع

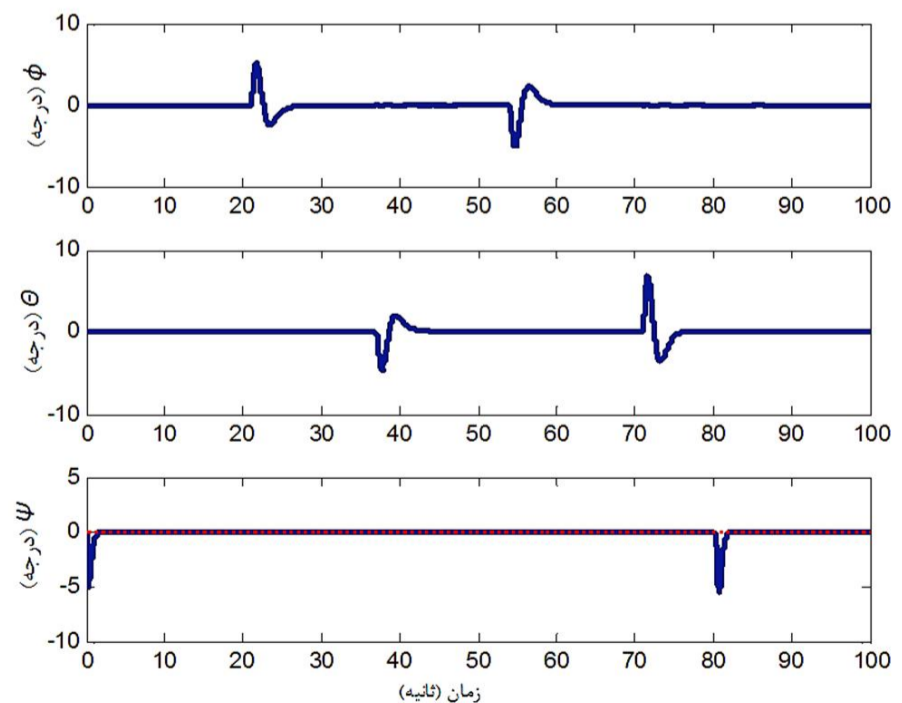
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
x_1	-2	y_1	-2	z_1	2
x_2	2	y_2	2	z_2	-2
x_3	0/9	y_3	1	z_3	1/5
x_4	1/4	y_4	1	z_4	1/5
t_{x1}	37	t_{y1}	21	t_{z1}	10
t_{x2}	71	t_{y2}	54	t_{z2}	80



شکل 8 مسیر پرواز پرنده در عملیات صعود، تعقیب مسیر مربعی و فرود



شکل 9 عملکرد سیستم کنترلی در ردیابی موقعیت مسیر مرجع



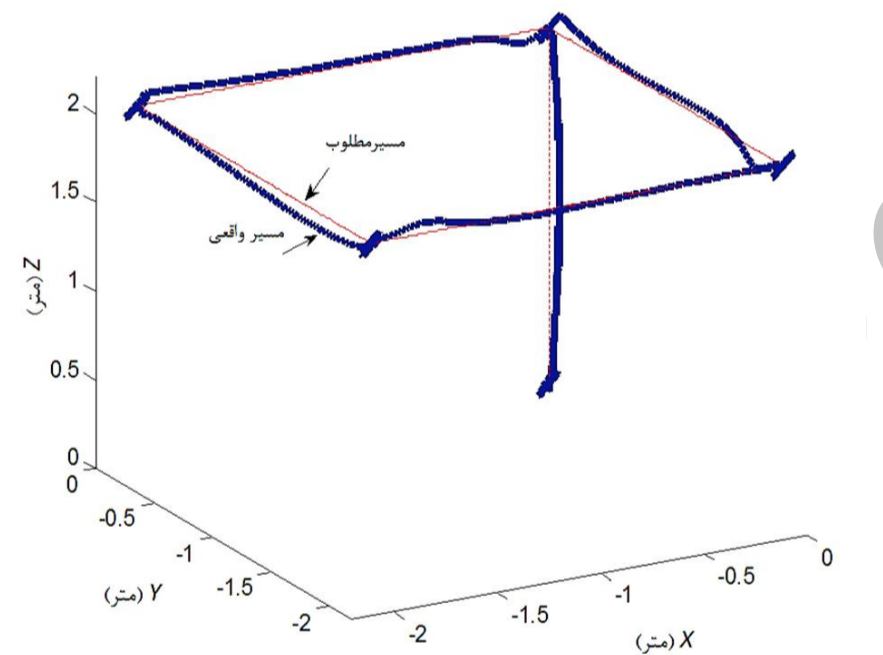
شکل 10 پاسخ زوایای اوپلر در تعقیب مسیر مرجع مربعی

1- RMS (root mean square)

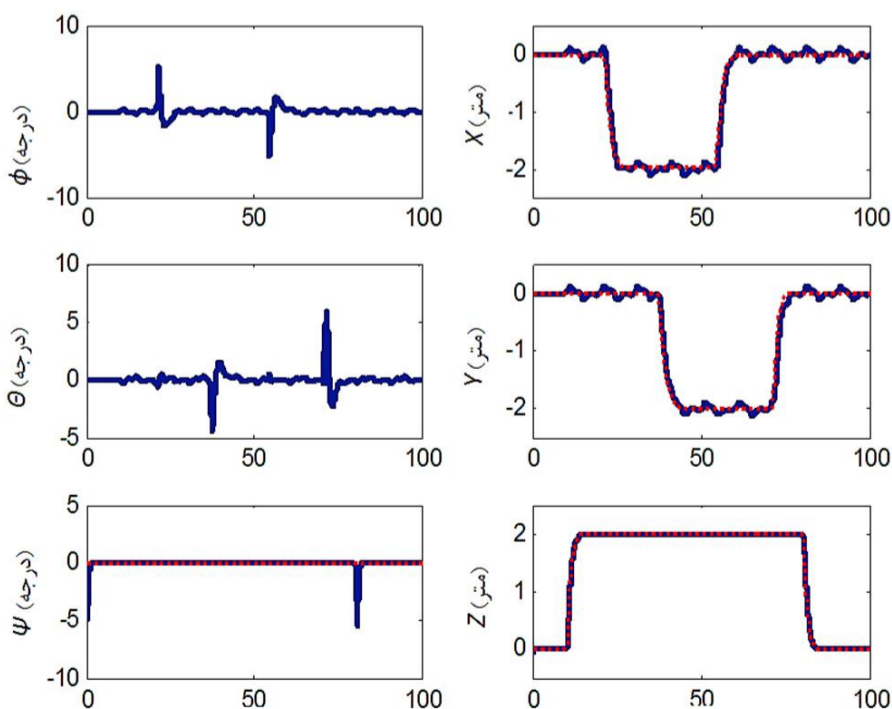
همان‌طور که از شکل‌های 16 و 17 مشخص است، سیستم کنترل شده اثر اغتشاش را تا حدودی کاهش داده و مسیر مرجع را به همراه اغتشاش وارده ردیابی کرده و نسبت به آن مقاوم می‌باشد. البته به دلیل مشتق‌گیری مرتبه بالا در سیستم کنترلی حذف کامل اغتشاش صورت نمی‌گیرد، با این وجود اغتشاش باعث ناپایداری سیستم نشده و سیستم کنترل شده اغتشاش را با اندکی کاهش اثر، ردیابی می‌نماید.

5- نتیجه‌گیری

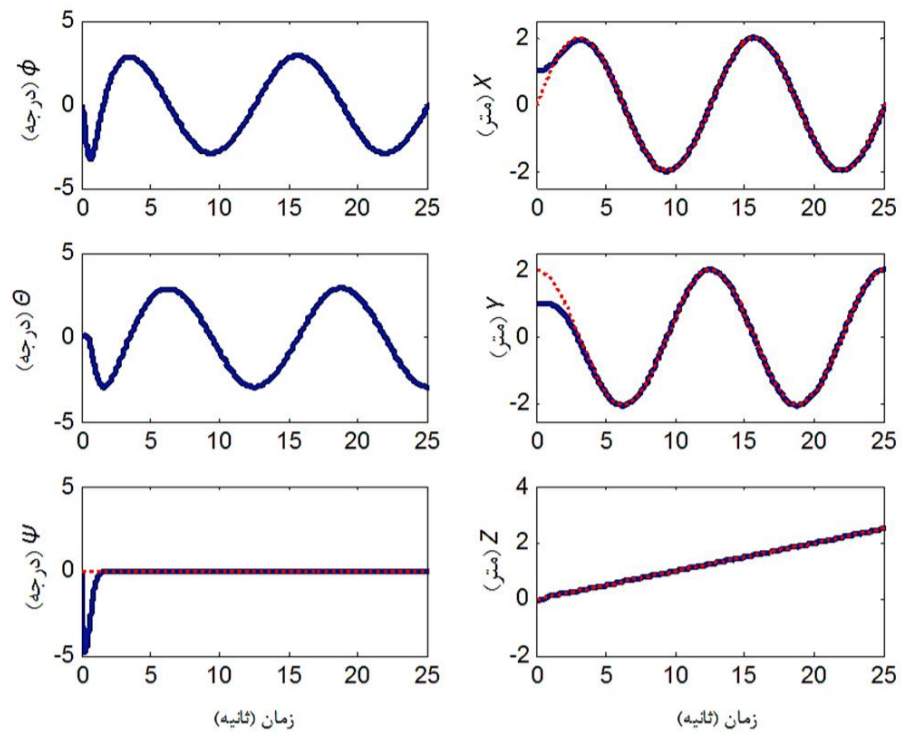
در این مقاله مدلسازی دینامیکی کامل یک عمودپرواز بدون سرنشین دارای پنج ملخ با ساختار پیشنهادی جدید به روش نیوتن اویلر انجام شد و به منظور تأیید معادلات بدست آمده، به روش لاگرانژ نیز این معادلات استخراج شدند. مدل پیشنهاد شده دارای ظرفیت بار مفید بالایی نسبت به کوادروتور هم وزن خود بوده ولی مانوردهی آن به دلیل دینامیک حاکم، با محدودیت‌هایی همراه بوده است. کنترل کننده پیشنهاد شده برای این سیستم، فیدبک خطی‌ساز ورودی- خروجی با مشتق‌گیری مرتبه بالا بود که نسبت به دینامیک‌های مدل نشده مقاوم نبوده، لذا برای کنترل عمود پرواز از مدل نسبتاً دقیق، و با در نظر گرفتن دینامیک عملگرها استفاده شد. همچنین سیستم خطی شده به روش بهینه تنظیم کننده خطی مرتبه دو کنترل گردید. البته برای بهبود فرآیند کنترل از این ابتکار استفاده شد که با تغییر ترتیب زوایای اویلر، معادلات حرکت انتقالی توابع ساده‌تری از این زوایا شده



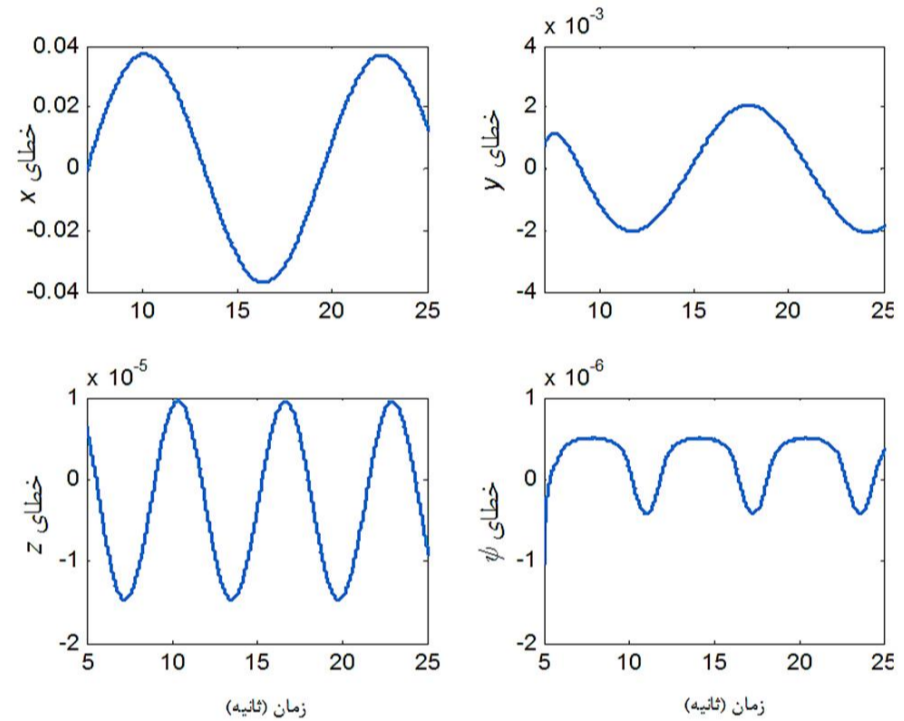
شکل 16 مسیر حرکت پرنده در تعقیب مسیر مرجع با حضور اغتشاش



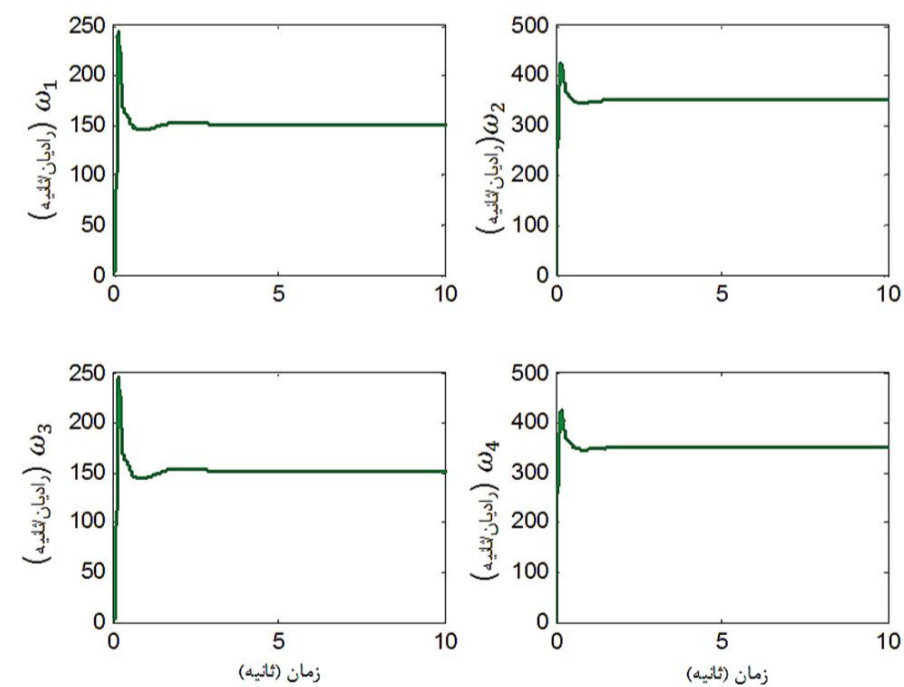
شکل 17 ردیابی ورودی مرجع در حضور اغتشاش



شکل 13 پاسخ سیستم در تعقیب مقادیر مطلوب مسیر مارپیچ



شکل 14 خطای خروجی سیستم از مقدار مطلوب



شکل 15 سرعت موتورهای جانبی در حرکت مارپیچ

3-4- عملکرد سیستم کنترلی در حضور اغتشاش

به منظور ارزیابی مقاومت سیستم کنترلی در برابر اغتشاش، نیروی باد بصورت $d(t) = 0.04(\sin(0.8\pi t) + \cos(0.2\pi t) + \sin(0.4\pi t))$ مدل شده و 10 ثانیه پس از شروع پرواز در راستای X و Y به سیستم اعمال می‌گردد [13].

7-مراجع

- [1] P. Castillo, A. Dzul, and R. Lozano, Real-Time Stabilization and Tracking Four-Rotor Mini Rotorcraft, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, pp. 510-516, 2004.
- [2] G. M. Hoffmann, H. Huang, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin, Precision flight control for a multi-vehicle quad rotor helicopter testbed, *Control Engineering Practice*, vol. 19, pp. 1023–1036, 2011.
- [3] D. Cabecinhas, R. C. a, and C. Silvestre, "A nonlinear quadrotor trajectory tracking controller with disturbance rejection," *Control Engineering Practice*, vol. 26, pp. 1 – 10, 2014.
- [4] Y.-C. Choi and H.-S. Ahn, Nonlinear Control of Quadrotor for Point Tracking: Actual Implementation and Experimental Tests, *ASME Transactions on Mechatronics*, pp. 1-14, 2014.
- [5] c. Yang, z. yang, and x. huang, modelling and robust trajectory tracking control for a novel six-rotor uav, *Mathematical Problem in Engineering*, vol. 2013, p. 13, 2013.
- [6] A. Sámano, R. Castro, R. Lozano, and S. Salazar, Modeling and Stabilization of a Multi-Rotor Helicopter, *J Intell Robot Syst*, vol. 69, pp. 161–169, 2013.
- [7] A. a. Alaimo, V. Artale, and A. Ricciardello, PID Controller Applied to Hexacopter Flight, *J Intell Robot Syst*, vol. 73, pp. 261–270, 2014.
- [8] m. k. mohamed, design and control of UAV system: a tri-rotor UAV, PhD Thesis, School of Electrical and Electronic Engineering, University of Manchester, Manchester, 2012.
- [9] J. H. Ginsberg, *Advanced Engineering Dynamics*, Second Edition. New York: Cambridge University Press, 1998.
- [10] H. K. Khalil, *Nonlinear System*, Third C. New Jersey: Prentice HALL, 2002.
- [11] D. Lee and H. J. Sastry, Feedback Linearization vs. Adaptive Sliding Mode Control for a Quadrotor Helicopter, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 7, pp. 419-428, 2009.
- [12] B. C. Kuo, *Automatic Control System*, Seventh Edition. New York: wiley, 1995.
- [13] H. Ramirez-Rodriguez and V. Parra-Vega, Robust Backstepping Control Based on Integral Sliding Modes for Tracking of Quadrotors, *J Intell Robot Syst*, vol. 73, pp. 51-66, 2014.

تا مشتق‌گیری از آن‌ها با پیچیدگی کمتری همراه باشد. علاوه بر این، دینامیک عملگرها مستقیماً به دینامیک سیستم اضافه نگردید بلکه با حلقه کنترل دیگری عملگرها به گونه‌ای کنترل شدند که خروجی آن‌ها با نرخ بالا و بدون خطای دائمی به ورودی‌های کنترلی بدست آمده از حلقه کنترلی اول میل کند. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که روش کنترلی پیشنهاد شده عملکرد مناسبی در پایداری سیستم، تعقیب مسیر مطلوب و نیز کاهش اثر اغتشاش داشته است.

6- فهرست علائم

J	ممان اینرسی روتورهای جانبی حول محور Z
J'	ممان اینرسی روتور مرکزی حول محور Z
k_f	ضریب درگ انتقالی کل جسم
k_d	ضریب درگ روتورهای جانبی
k_{d5}	ضریب درگ روتور مرکزی
k_t	ضریب تراست روتورهای جانبی
k_{t5}	ضریب تراست روتورها مرکزی
L	طول بازوهای هلیکوپتر
p	سرعت زاویه‌ای در جهت x
q	سرعت زاویه‌ای در جهت y
r	سرعت زاویه‌ای در جهت z

Archive of SID