مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دوره 15، شماره 9، ص‌ص 51-58

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

شبیه‌سازی عددی جریان‌های دوفازی با استفاده از مدل شار رانشی و روش مرتبه‌بالای DG-ADER

یونس شکاری، علی طیبی *

استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

* یاسوج، صندوق پستی 75918-74831، tayebi@yu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 12 خرداد 1394
پذیرش: 14 تیر 1394
ارائه در سایت: 03 مرداد 1394

کلید واژگان:
جریان دوفازی
مدل شار رانشی
روش DG-ADER
روش وینو
لوله ضربه دوفازی

چکیده

در تحقیق حاضر روش مرتبه بالای DG-ADER برای حل عددی معادلات حاکم بر مدل دوفازی شار رانشی بکار گرفته می‌شود. مدل شار رانشی برای تشریح جریان‌های دوفازی که برهم‌کنش قوی دارند مدلی بسیار مناسب است. معادلات حاکم بر این مدل شامل سه معادله دیفرانسیلی است. این معادلات شامل دو معادله پیوستگی برای هر یک از فازها و یک معادله مومنتم برای مخلوط می‌باشند. در این مدل از یک رابطه جبری نیز برای ارتباط دادن سرعت فازها استفاده می‌شود. دستگاه معادلات حاکم با استفاده از روش عددی مرتبه بالای DG-ADER که روشی نوین برای دست‌یابی به دقت‌های بالاست حل و نتایج به دست آمده با نتایج ارائه شده توسط سایر محققین مقایسه می‌شوند. روش DG-ADER یک روش غیرخطی است که در آن بازسازی اطلاعات با استفاده از روش وینو و پیمایش زمانی با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته صورت می‌گیرد. دو لوله ضربه و یک مساله انبساط خالص توسط این روش حل شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که با استفاده از روش بکار رفته می‌توان مسائل جریان دوفازی را با دقت بسیار خوب، حتی بر روی شبکه‌های درشت حل نمود. نقطه ضعف این روش بروز نوسانات عددی با دامنه بسیار محدود در محل موج‌های ضربه‌ای است.

Numerical simulation of two-phase flows, using drift flux model and DG-ADER scheme

Younes Shekari, Ali Tayebi*

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
* P.O.B. 75918-74831, Yasouj, Iran, tayebi@yu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 June 2015
Accepted 05 July 2015
Available Online 25 July 2015

Keywords:
Two-phase flow
drift flux model
DG-ADER method
WENO method
two-phase shock tube

ABSTRACT

In the present research, the high-order DG-ADER method is used to solve governing equations of two-phase drift flux model. The drift flux model is suitable for studying two-phase flows where the phases are strongly coupled. This model is composed of three differential equations including two continuity equations for two phases and a mixture momentum equation. The mixture model also uses an algebraic relation to link the velocity of the phases. The high-order DG-ADER numerical method, which is a new scheme to obtain high order accuracy of results, is used to solve the governing equations. The DG-ADER is a nonlinear method in which the reconstruction process is performed using WENO method and the time evolution part is achieved by discontinuous Galerkine approach. The results are compared with those reported by other researchers. Three problems including two two-phase shock tubes and a pure rarefaction test problem are solved using this method. The results show that DG-ADER method can solve the two-phase flow problems with a very good accuracy even on a coarse grid. The drawback of this method is presenting numerical fluctuations with limited domain at the position of shock waves.

1- مقدمه

جریان‌های دوفازی در بسیاری از کاربردهای صنعتی و پدیده‌های طبیعی قابل مشاهده هستند. از جمله کاربردهای این نوع جریان‌ها می‌توان به جریان دوفازی در راکتورهای هسته‌ای، کندانسورها، تبخیرکننده‌ها، جریان درون جداکننده‌های نفتی و جریان درون لوله‌های انتقال نفت و گاز اشاره کرد [1].

برای مدل‌سازی جریان‌های دوفازی مدل‌های متعددی وجود دارد که یکی از آن‌ها مدل شار رانشی [1] (مدل مخلوط) می‌باشد. این مدل شامل دو معادله پیوستگی (یک معادله پیوستگی برای هر یک از فازها) و یک معادله مومنتم برای مخلوط دوفازی است. در مدل شار رانشی از یک رابطه جبری نیز برای ارتباط دادن سرعت دو فاز استفاده می‌گردد. این مدل برای تشریح جریان‌هایی که در آن بر هم‌کنش قوی میان دو فاز وجود دارد، جواب‌هایی بسیار خوبی ارائه می‌کند. به عنوان مثال این مدل برای الگوهای جریان

1- Drift flux model (Mixture model)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
Y. Shekari, A. Tayebi, Numerical simulation of two-phase flows, using drift flux model and DG-ADER scheme, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 51-58, 2015 (In Persian)

حبابی پراکنده، حبابی و لخته‌ای جواب‌های خوبی ارائه می‌دهد. در مقایسه با مدل همگن، مدل شار رانشی قادر است که اختلاف سرعت دو فاز را نیز در نظر بگیرد و برای هر یک از فازها سرعت جداگانه‌ای ارائه کند.

در حالت یک‌بعدی و با فرض تراکم‌پذیر بودن دو فاز، معادلات حاکم بر مدل شار رانشی ماهیتی هذلولوی دارند. این معادلات را می‌توان به‌صورت بقایی نوشت. برای حل عددی معادلات هذلولوی بقایی، روش‌های عددی متعددی وجود دارد [3,2] که از جمله آن‌ها می‌توان به روش‌هایی همانند لکس-فردریکس، فورس[1]، روی[2] و ... اشاره کرد. مدل شار رانشی توسط تعدادی از محققین با استفاده از چند حلگر ریمانی تقریبی حل شده است [6-4]. اغلب روش‌های ارئه شده دارای دقت مرتبه یک و یا حداکثر از دقت مرتبه دو هستند. در این روش‌ها برای رسیدن به جوابی دقیق بایستی از تعداد سلول‌های محاسباتی زیادی استفاده کرد. نتیجه این امر افزایش زمان و هزینه محاسباتی تحلیل جریان‌های دوفازی و همچنین حذف برخی از جزئیات جریان است. با آگاهی از این مشکلات روش‌های عددی مرسوم، محققین همواره بدنبال ارائه راه‌کارهایی برای غلبه بر آن‌ها بوده‌اند.

یکی از این راه‌کارها، استفاده از روش‌های عددی مرتبه بالا (با دقت بالاتر از دو) بوده است. متأسفانه استفاده از روش‌های با دقت بالا، با محدودیت‌های متعددی مواجه است که مهم‌ترین آن‌ها بروز نوسانات شدید در محل ناپیوستگی‌های میدان جریان است. مطابق قضیه گادانوف، هیچ روش خطی وجود ندارد که دقتی بالاتر از مرتبه یک داشته و یکنوا باشد [7]. نکته بسیار مهم در قضیه گادانوف خطی بودن روش عددی است. بنابراین اگر بتوان روشی غیرخطی به‌کار برد، آنگاه قضیه گادانوف صادق نیست و ممکن است بتوان به‌نحوی دامنه نوسانات را محدود کرد. بدین ترتیب می‌توان گفت برای رسیدن به دقت‌های بالاتر از مرتبه یک، بایستی از مفهوم روش‌های غیرخطی استفاده نمود.

پس از اینکه گادانوف قضیه خود را ارائه نمود روش‌های غیرخطی متعددی ارائه شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های تی‌وی‌دی[3] و تکنیک ماسل-هنکاک[4] اشاره کرد [3]. علی‌رغم مزایای بسیار زیاد، در همه این روش‌ها نهایتاً دقت عددی از مرتبه دوم است و امکان رسیدن به دقت‌های بالاتر وجود ندارد. برای رفع این مشکل و برای رسیدن به دقت‌های بالاتر تورو و تیتاروف روش ایدر[5] را ابداع کردند که با استفاده از آن می‌توان به دقت‌های اختیاری دست یافت [12-8]. این روش در حقیقت بسط تکنیک ماسل-هنکاک برای رسیدن به دقت‌های بالاتر است. روش ایدر برای سیستم‌های خطی و یا معادلات اسکالر غیرخطی به‌خوبی اعمال می‌شود ولی برای سیستم معادلات غیرخطی با مشکلات متعددی مواجه است که از جمله آن می‌توان به پیچیده شدن محاسبه مشتقات زمانی بر حسب مشتقات مکانی با استفاده از روش کوشی-کوالوفسکی اشاره کرد. علاوه بر این وقتی که عبارت چشمه موجود در معادلات خوش رفتار نباشد، این روش قادر به پیش‌بینی جریان نیست. دومبسر و همکاران با اصلاح روش ایدر با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته، روش جدید و بسیار بهینه‌ای ارائه کردند که ضمن داشتن مزایای روش ایدر مشکلات آن را ندارد [17-13]؛ آن‌ها این روش را DG-ADER نامیدند [13]. در تحقیق حاضر از این نسخه‌ی روش ایدر برای افزایش دقت عددی حل مسائل جریان دوفازی با بکارگیری مدل شار رانشی استفاده می‌شود. شایان ذکر است که این روش تاکنون برای حل عددی معادلات مدل شار رانشی استفاده نشده است و این موضوع برای اولین بار در این تحقیق مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای رسیدن به این هدف در بخش 2 معادلات حاکم بر مدل شار رانشی و روابط کمی مورد نیاز ذکر می‌شوند. در بخش‌های 3 تا 6 روش عددی DG-ADER برای ارتقاء دقت حل عددی معرفی می‌گردد. در بخش 7 نتایج به‌دست آمده از این روش تشریح و نهایتاً در بخش 8 مهمترین نتایج این تحقیق ارائه می‌شوند.

2- معادلات حاکم

در این تحقیق فرض می‌شود که جریان یک‌بعدی است و هر دو فاز تراکم‌پذیر هستند. همچنین از حضور نیروهای حجمی همانند نیروی گرانش صرف‌نظر شده است. با در نظر گرفتن این فرضیات، معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مدل شار رانشی که شامل معادلات پیوستگی هر یک از فازها و معادله مومنتم مخلوط است را می‌توان به شکل بقایی به‌صورت رابطه (1) بیان کرد [5]:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \vec{S} \tag{1}$$

که در آن $\vec{q}$ بردار متغیرهای پایستار است و به صورت رابطه (2) بیان می‌شود:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \rho_g \alpha_g \\ \rho_l \alpha_l \\ \rho_g \alpha_g u_g + \rho_l \alpha_l u_l \end{pmatrix} \tag{2}$$

و $\vec{F}$ بردار شار است و به صورت رابطه (3) محاسبه می‌شود:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho_g \alpha_g u_g \\ \rho_l \alpha_l u_l \\ \rho_g \alpha_g u_g^2 + \rho_l \alpha_l u_l^2 + p \end{pmatrix} \tag{3}$$

همچنین $\vec{S}$ بردار چشمه می‌باشد و به صورت رابطه (4) تعریف می‌شود:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{2 f_F \rho_m u_m^2}{d_h} + \rho_m g \end{pmatrix} \tag{4}$$

در روابط (2) تا (4)، α_l کسر حجمی مایع، α_g کسرحجمی گاز، u_g سرعت گاز، u_l سرعت مایع، ρ_g چگالی گاز، ρ_l چگالی مایع و p فشار است. همچنین ρ_m چگالی و u_m سرعت میانگین دو فاز هستند. f_F ضریب اصطکاک دیواره و d_h قطر هیدرولیکی لوله است.

3- روابط کمکی

در مجموعه معادلات فوق سه معادله و هفت مجهول وجود دارد. بنابراین، به چهار معادله دیگر نیز نیاز است. در این بخش این معادلات تکمیلی ارائه می شوند.

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \tag{5}$$

چگالی و فشار فازها از طریق معادله حالت به‌صورت روابط (6) و (7) به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$\rho_l = \rho_{l,0} + \frac{p - p_{l,0}}{C_l^2} \tag{6}$$

$$\rho_g = \rho_{g,0} + \frac{p - p_{g,0}}{C_g^2} \tag{7}$$

در روابط (6) و (7)، $\rho_{k,0}$ چگالی و $p_{k,0}$ فشار مرجع فاز و C_k سرعت صوت در هر یک از فازها می‌باشد.

رابطه دیگری که برای بستن مجموعه معادلات فوق مورد نیاز است، معادله‌ای است که سرعت دو فاز را به هم ارتباط می‌دهد:

1- FORCE
2- Roe
3- TVD
4- MUSCL-Hancock
5- ADER

$$u_g - u_l = \Phi(\alpha_g, p, u_g) \tag{8}$$

در حالت خاص رابطه فوق را می‌توان به‌صورت رابطه (9) بیان کرد که به رابطه زوبر و فایندلی مشهور است [18]:

$$u_g = c_0(\alpha_g u_g + \alpha_l u_l) + v_d \tag{9}$$

که در این رابطه c_0 و v_d پارامترهایی هستند که به نوع جریان وابسته‌اند.

4- روش DG-ADER

روش ایدر از سه مرحله اساسی تشکیل شده است. در مرحله اول بازسازی اطلاعات با استفاده از روش غیرخطی وینو[1] صورت می‌پذیرد. در مرحله دوم اطلاعات بازسازی شده در زمان پیمایش شده تا یک چند جمله‌ای زمانی-مکانی با مرتبه مشخص به‌دست آید. در مرحله سوم از این اطلاعات برای محاسبه متغیرهای پایستار جریان در گام زمانی جدید استفاده می‌شود. در ادامه جزئیات بیشتری از این روش ارائه می‌گردد. گسسته‌سازی یک مرحله‌ای معادله (1) بعد از انتگرال‌گیری بر روی یک حجم کنترل زمانی-مکانی $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ به صورت رابطه (10) به‌دست می‌آید:

$$\vec{\bar{q}}_j^{n+1} = \vec{\bar{q}}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\vec{F}_{j+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{j-\frac{1}{2}}\right) + \Delta t \vec{S}_j^n \tag{10}$$

که در آن $\Delta x = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ و $\Delta t = [t^n, t^{n+1}]$ است. مقدار متوسط سلول به صورت رابطه (11) بیان می‌شود:

$$\vec{\bar{q}}_j^n = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \vec{q}(x, t^n)dx \tag{11}$$

و انتگرال عبارت شار و چشمه به صورت روابط (12) و (13) محاسبه می شوند:

$$\vec{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} g\left(\vec{q}_h\left(x^-_{j+\frac{1}{2}}, t\right), \vec{q}_h(x^+_{j-\frac{1}{2}}, t)\right)dt \tag{12}$$

$$\vec{S}_j = \frac{1}{\Delta t \Delta x}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \vec{S}(\vec{q}_h(x,t))dxdt \tag{13}$$

در حالی‌که $g(Q^-, Q^+)$ شار عددی کلاسیک (یا یک حل‌گر ریمان، به عنوان مثال شار روزانوف) می‌باشد، همچنین $\vec{q}_h$ یک پیشگویی کننده زمانی-مکانی موضعی از فضای چند جمله‌ای زمانی-مکانی از درجه M می‌باشد. در روش حجم محدود کلاسیک $\vec{\bar{q}}_h$ مقدار متوسط سلول می‌باشد. استفاده از مقادیر متوسط سلول در روش حجم محدود کلاسیک باعث می‌شود که بخش زیادی از اطلاعات مورد نیاز برای رسیدن به دقت بهتر از بین برود. حال اگر بتوان به نحوی دقت محاسبه این عبارت را افزایش داد، می‌توان دقت روش حجم محدود بکار رفته را بهبود بخشید. در روش DG-ADER این عبارت از فرم ضعیف معادلات حاکم بر روی هر سلول محاسباتی به‌دست می‌آید. جزئیات کاملی از نحوه محاسبه $\vec{q}_h$ را می‌توان در مراجع [19,17-15,13] یافت. در بخش بعد به اختصار این موضوع مورد بررسی قرار می‌گیرد.

5- گسسته‌سازی زمانی یک مرحله‌ای مرتبه بالا

در این مقاله به دلیل رعایت اختصار همه جزئیات روش DG-ADER ارائه نمی شود و تنها چارچوب کلی آن بیان می‌گردد. روش مذکور در مراجع [13, 19,17-15] به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. در روش DG-ADER ابتدا معادلات حاکم به چارچوب مرجع سلول واحد زمانی-مکانی یعنی $T_E = [0,1] \times [0,1]$ با مختصات پایه ξ و τ تصویر می‌شوند. ξ و τ با استفاده از روابط زیر به ترتیب به x و t ارتباط دارند:

$$x = x_{j-1/2} + \xi\Delta x \quad ; \quad t = t^n + \tau\Delta t \tag{14}$$

با ضرب معادله دیفرانسیل تبدیل‌شده در تابع آزمون زمانی-مکانی درجه N، یعنی $\theta_k(\xi,\tau)$ و با انتگرال‌گیری دوگانه بر روی T_E و همچنین به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء از مشتق زمانی، می‌توان به رابطه (15) دست یافت:

$$[\theta_k, \vec{q}_h]^1 - \langle\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_k, \vec{q}_h\rangle + \langle\theta_k, \frac{\partial}{\partial\xi}f^*(\vec{q}_h)\rangle = [\theta_k, w_h^n]^0 + \langle\theta_k, \vec{S}^*(\vec{q}_h)\rangle \tag{15}$$

در جایی‌که

$$\vec{f}^*(\vec{q}_h) = \frac{\Delta t}{\Delta x}\vec{F}(\vec{q}_h), \qquad \vec{S}^*(\vec{q}_h) = \Delta t\vec{S}(\vec{q}_h) \tag{16}$$

و

$$[a,b]^\tau = \int_0^1 a(\xi,\tau)b(\xi,\tau)d\xi,$$
$$\langle a,b\rangle = \int_0^1\int_0^1 a(\xi,\tau)b(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{17}$$

عبارت w_h^n یک چندجمله‌ای تکه‌ای مکانی درجه M در زمان موضعی $\tau = 0$ و شرط اولیه مسئله کوشی موضعی (15) بر روی سلول محاسباتی است. این تابع مکانی از مرحله اول روش ایدر یا همان مرحله بازسازی اطلاعات به‌دست می‌آید و به صورت رابطه (18) بیان می‌شود:

$$w_h^n = w_i(\xi, t^n) = \widehat{w}_l(t^n)\phi_l(\xi) \tag{18}$$

که در آن از قانون جمع اینشتین بر روی اندیسی که دو بار تکرار شده، استفاده شده است. w_h^n با استفاده از اپراتورهای استاندارد بازسازی همانند اینو[2] و یا وینو به‌دست می‌آید. حال با داشتن این شرط اولیه بایستی مسئله کوشی (15) بر روی چارچوب مرجع موضعی سلول حل شود. بدین منظور ابتدا متغیرهای $\vec{q}_h$ ، ${\vec{f}^*}_h$ و ${\vec{S}^*}_h$ برحسب تابع آزمون $\theta_k = \theta_k(\xi,\tau)$ به صورت رابطه (19) بسط داده می‌شوند:

$$\vec{q}_h(\xi,\tau) = \sum_{l=1}^{(N+1)^2}\theta_l(\xi,\tau)\,\hat{q}_l = \theta_l\hat{q}_l$$
$${\vec{f}^*}_h(\xi,\tau) = \sum_{l=1}^{(N+1)^2}\theta_l(\xi,\tau)\,f_l = \theta_l\hat{f}_l$$
$${\vec{S}^*}_h(\xi,\tau) = \sum_{l=1}^{(N+1)^2}\theta_l(\xi,\tau)\,\hat{S}_l = \theta_l\hat{S}_l \tag{19}$$

با وارد کردن این عبارت‌ها در رابطه (15) می‌توان معادله (20) را به دست آورد:

$$[\theta_k, \theta_l]^1_{T_i}\hat{q}_l - \langle\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_k, \theta_l\rangle_{T_i}\hat{q}_l + \langle\theta_k, \frac{\partial}{\partial\xi}\theta_l\rangle_{T_i}\hat{f}_l - \langle\theta_k, \theta_l\rangle\hat{S}_l = [\theta_k, \phi]^0_{T_i}\widehat{w}_l \tag{20}$$

در قالب ماتریسی می‌توان رابطه فوق را به صورت فشرده زیر نیز بیان کرد:

$$K_1\hat{q}_l^{m+1} - MS^*(\hat{q}_l^{m+1}) = f_0\widehat{w}_l - K_\xi f^*(\hat{q}_l^m) \tag{21}$$

به‌طوری‌که

$$K_1 = [\theta_k, \theta_l]^1_{T_i} - \langle\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_k, \theta_l\rangle_{T_i}$$
$$K_\xi = \langle\theta_k, \frac{\partial}{\partial\xi}\theta_l\rangle_{T_i}$$
$$M = \langle\theta_k, \theta_l\rangle_{T_i}, \quad f_0 = [\theta_k, \phi]^0_{T_i} \tag{22}$$

در رابطه اخیر ماتریس M را ماتریس جرم و K_ξ را ماتریس سختی می‌نامند. با حل معادله (21) و محاسبه $\hat{q}_l$ می‌توان بردار متغیرهای پایستار

1- WENO

2- ENO

یعنی $\vec{q}_h(\xi,\tau)$ را محاسبه نمود. این معادله به صورت تکراری حل می‌گردد و به صورت تئوری نشان داده شده که بعد از $N+1$ تکرار به حل درست همگرا می‌شود که در آن M، درجه چندجمله‌ای بازسازی است [13-15]. در روابط بالا توابع ϕ معمولاً از چند جمله‌ای‌های لژاندر و توابع θ از توابع درون‌یاب زمانی-مکانی لاگرانژ انتخاب می‌شوند [19].

6- الگوریتم اجرای برنامه

در این بخش الگوریتم بکار رفته برای اجرای روش DG-ADER بطور خلاصه ذکر می‌گردد:

1. محاسبه ماتریس‌های K_1، K_ξ، M و f_0 با استفاده از فرمول‌های ارائه شده در رابطه (22). عناصر این ماتریس‌ها با استفاده از روش انتگرال‌گیری گوس و در نقاط گوسی محاسبه می‌شوند (نحوه محاسبه ماتریس M به عنوان نمونه‌ای از چگونگی محاسبه این ماتریس‌ها در انتهای همین بخش توضیح داده شده است).
2. شروع پیمایش زمانی
3. محاسبه ماکزیمم مقدار ویژه مسئله
4. محاسبه گام زمانی با استفاده از شرط CFL
5. بازسازی اطلاعات سلول با استفاده از روش WENO
6. انجام عملیات تکراری برای محاسبه $\hat{q}$ با استفاده از رابطه (21)
7. محاسبه متغیرهای پایستار و شارهای متناظر با استفاده از $\hat{q}$ به‌دست آمده از مرحله قبل
8. محاسبه شارهای عددی بر روی مرزهای سلول محاسباتی با استفاده از روش روزانوف و اطلاعات مرحله 7
9. حاسبه متغیرها در گام زمانی جدید با استفاده از رابطه (10)
10. گشت به گام سوم الگوریتم
11. این فرآیند تا رسیدن به زمان مورد نظر ادامه می‌یابد.

همان‌گونه که در گام اول نیز اشاره شد، نحوه محاسبه ماتریس M به عنوان مثال در این‌جا شرح داده می‌شود؛ مطابق رابطه (22) ماتریس M به صورت رابطه (23) تعریف می‌شود:

$$M=\langle\theta_k,\theta_l\rangle_{T_i}=\int_0^1\int_0^1\theta_k(\xi,\tau)\theta_l(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{23}$$

در این رابطه توابع θ_k و θ_l توابع درونیاب (تابع زمان و مکان) لاگرانژ هستند. به عنوان مثال توابع درجه یک لاگرانژ عبارتند از:

$$\theta_1(\xi,\tau)=(1-\xi)(1-\tau)\;;\;\theta_2(\xi,\tau)=(1-\xi)\tau$$
$$\theta_3(\xi,\tau)=(1-\tau)\xi\;;\;\theta_4(\xi,\tau)=\tau\xi \tag{24}$$

با استفاده از این توابع می‌توان انتگرال فوق را به صورت تحلیلی محاسبه کرد؛ ولی وقتی که از چند جمله‌ای‌هایی با درجه بالاتر استفاده می‌شود، حجم تعداد انتگرال‌های تحلیلی زیاد شده و اغلب این انتگرال به‌صورت عددی و با استفاده از روش گوس-کوادرچر محاسبه می‌گردد. در روش انتگرال‌گیری گوس-کوادرچر نقاط مشخصی وجود دارند که بایستی مقادیر تابع در این نقاط محاسبه شده، سپس در وزن‌های متناظر با این نقاط ضرب و در نهایت مجموع این حاصل‌ضرب به عنوان حاصل انتگرال معرفی می‌گردد، یعنی:

$$M(k,l)=\sum_{i=1}^{nGp}\sum_{j=1}^{nGp}w_iw_j\theta_k(s_j,s_i)\theta_l(s_j,s_i) \tag{25}$$

در این معادله nGp تعداد نقاط روش انتگرال‌گیری گوس است؛ همچنین s نقاط و w ضرایب گوسی هستند. به عنوان مثال در روش گوس سه نقطه‌ای ضرایب و نقاط مطابق جدول 1 محاسبه می‌شوند.

جدول 1 ضرایب وزنی و نقاط انتگرال‌گیری روش گوس-کوادرچر 3 نقطه‌ای

s_i	ω_i
$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{18}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{18}$
$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{18}$

ماتریس M دارای ابعاد $(N+1)\times(N+1)$ می‌باشد، که در آن N درجه چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ است.

سایر ماتریس‌ها با روشی مشابه محاسبه می‌شوند. پس از محاسبه ماتریس‌های موردنیاز با استفاده از روش ذکر شده در بالا، بایستی با استفاده از معادله (21)، $\hat{q}$ محاسبه شود. پس از محاسبه $\hat{q}$، مقادیر $\vec{q}_h$، $\vec{f}^*{}_h$ و $\vec{S}^*{}_h$ با استفاده از رابطه (19) محاسبه می‌شوند. پس از آن با استفاده از روش روزانوف و یا هر روش محاسبه شار دیگری، شار عددی بر روی مرزهای سلول محاسباتی به‌دست می‌آید. پس از این مرحله با استفاده از رابطه (10) مقدار $\vec{q}$ در گام زمانی جدید به‌دست می‌آید.

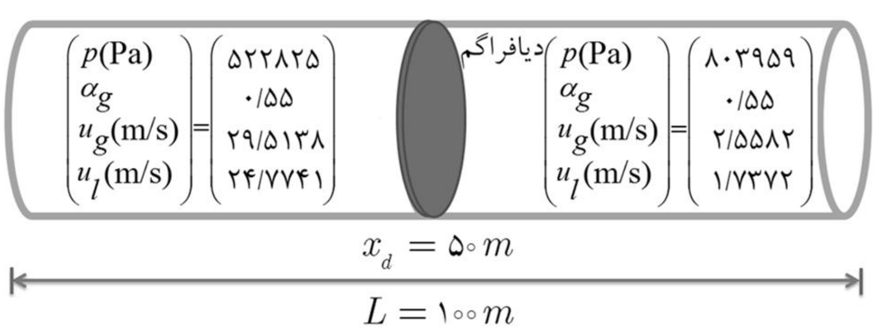
7- نتایج

به منظور بررسی قابلیت روش DG-ADER در تحلیل جریان‌های دوفازی بر پایه مدل شار رانشی از دو لوله ضربه دوفازی استفاده می‌شود. این دو مسئله توسط برخی از محققین برای نشان دادن قابلیت روش‌های عددی مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

7-1- لوله ضربه اول

این مساله را بادین و همکاران [20] با فرض تراکم ناپذیری مایع حل کردند و توسط تعدادی دیگر از محققین نیز مورد بررسی قرار گرفته است [5, 21]. این مسئله شامل لوله‌ای به طول 100 متر است که از وسط توسط یک میان-بند به دو بخش چپ و راست تقسیم می‌شود. شرایط اولیه موجود در این مساله در شکل 1 نشان داده شده است. در جدول 2 پارامترهای معادله حالت ذکر شده است. همچنین ضرایب موجود در رابطه زوبر و فایندلی (رابطه لغزش) برابر c_o = 1.07 و v_d = 0.2162 در نظر گرفته می‌شوند.

این مساله به ترتیب مکانی شامل یک موج ضربه‌ای، یک موج تماسی و یک موج ضربه‌ای دیگر است. مطالعه همگرایی روش DG-ADER مرتبه چهارم بر روی شبکه‌های محاسباتی مختلف در شکل 2 نشان داده شده است.



شکل 1 شرایط اولیه در مساله لوله ضربه اول

جدول 2 پارامترهای معادله حالت برای لوله ضربه

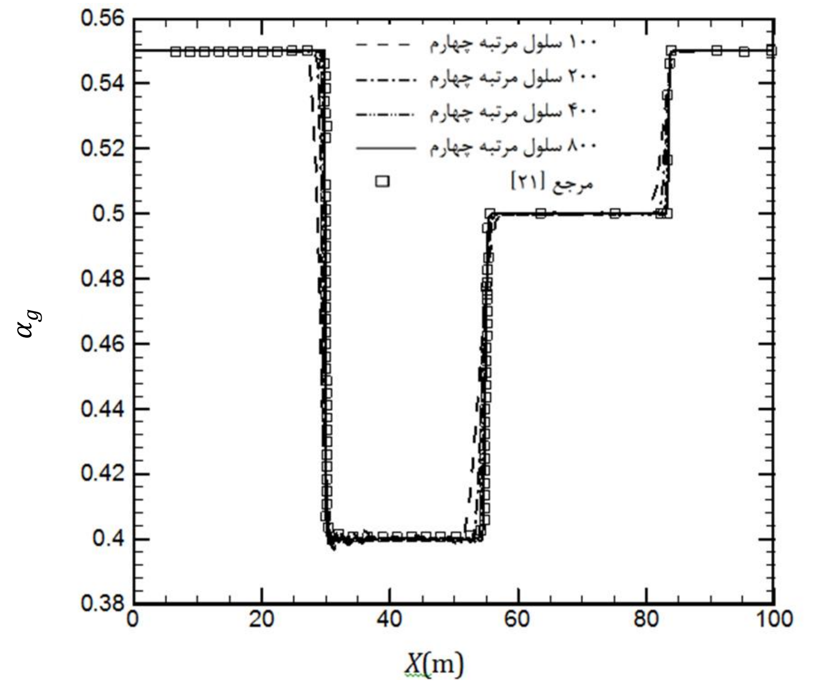
فاز	$C_k(\frac{m}{s})$	$\rho_{k,0}(\frac{kg}{m^3})$
گاز	300	0
مایع	1000	999/916

ملاحظه می‌شود که با ریزتر کردن شبکه، دامنه نوسانات عددی کاهش می یابد ولی فرکانس آن‌ها افزایش می‌یابد.

این نوسانات در محل موج ضربه‌ای اول (سمت چپ) قابل مشاهده هستند. صرف‌نظر از نوسانات ظاهر شده (که قابل انتظار بودند) ملاحظه می‌شود که با استفاده از شبکه‌های 400 و 800 سلولی جواب‌هایی به دقت روش به‌کار رفته در مرجع [21] با استفاده از 3200 سلول محاسباتی به‌دست آمده است.

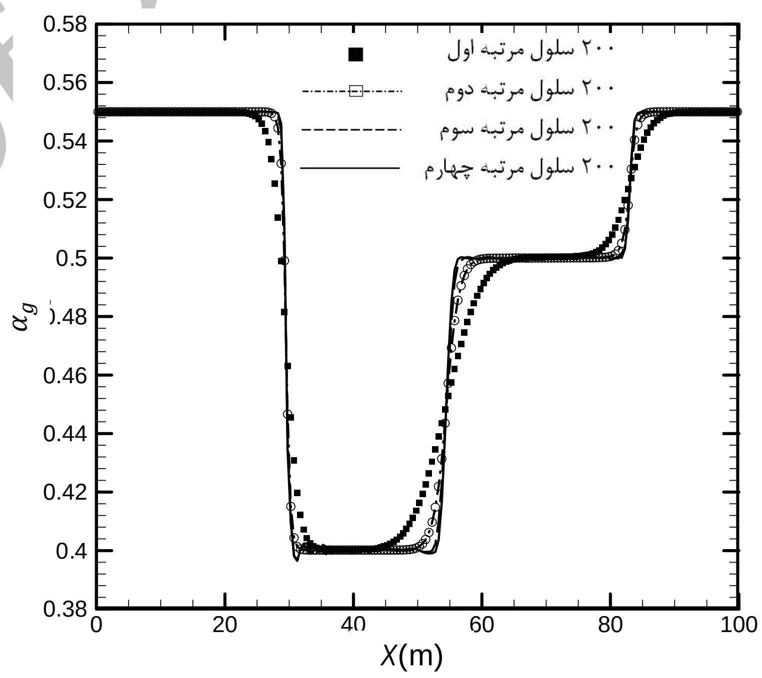
در شکل 3 نتایج تحلیل لوله ضربه مورد نظر بر روی یک شبکه 200 سلولی و با استفاده از روش DG-ADER با دقت‌های مختلف ارائه شده است.

ملاحظه می‌شود که به‌طور کلی با افزایش دقت روش به‌کار رفته، جواب‌های دقیق‌تری به‌دست می‌آید. تنها نقطه ضعف روش DG-ADER بروز نوسانات با دامنه محدود در محل ناپیوستگی‌های میدان جریان است که البته این ضعف از ماهیت روش عددی سرچشمه می‌گیرد که در آن هدف کنترل دامنه نوسانات با بکارگیری روش وینو است. بررسی جواب‌های به‌دست آمده نشان می‌دهد که در پروفیل‌های سرعت فاز مایع و کسر حجمی فاز گاز سه ناپیوستگی مشاهده می‌شود ولی در سرعت فاز گاز و توزیع فشار تنها دو ناپیوستگی وجود دارد. این امر را می‌توان با توجه به مشخصه‌های مساله توجیه کرد. مدل مخلوط سه مشخصه حقیقی دارد که دو مشخصه متناظر با امواج فشاری و انبساطی و یک مشخصه متناظر با ناپیوستگی تماسی می‌باشد.

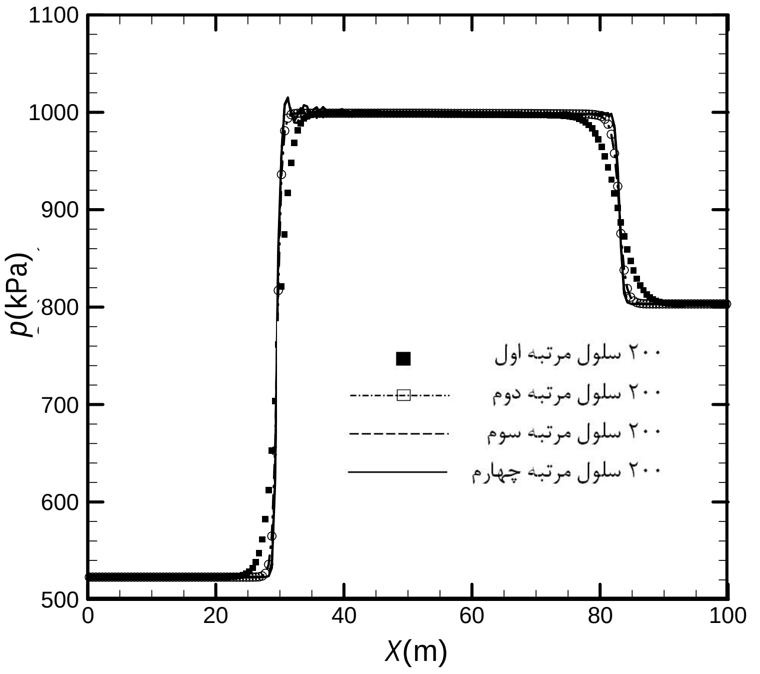


شکل 2 مطالعه همگرایی روش DG-ADER برای مسئله لوله ضربه اول بر روی شبکه های محاسباتی مختلف و با روش مرتبه چهارم

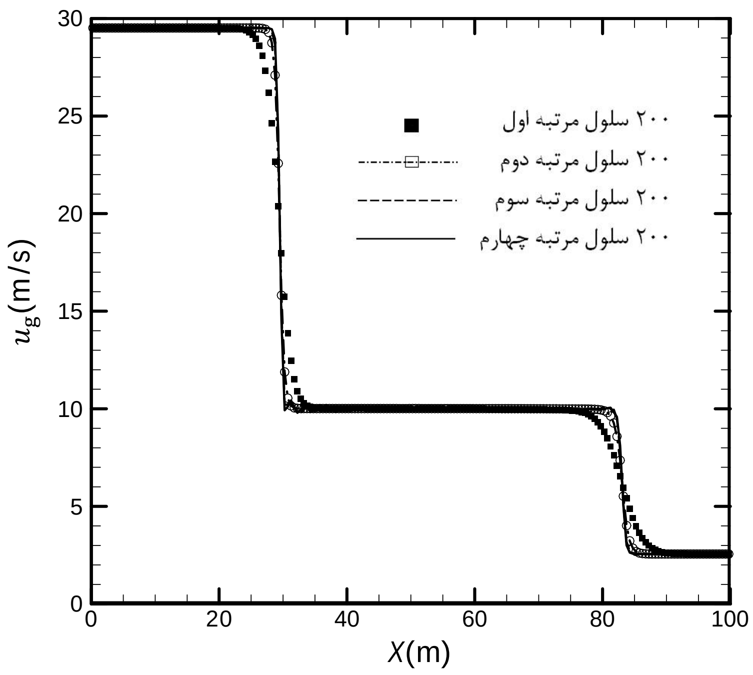
بدیهی است که اطلاعات فشار تنها توسط مشخصه‌های فشاری و تراکمی منتقل می‌شوند، ولی اطلاعات سایر متغیرها توسط هر سه مشخصه منتقل می‌گردد. در محل ناپیوستگی تماسی فشار و سرعت فاز گاز هیچ تغییری نمی‌کند ولی سایر متغیرها در عبور از این محل دچار تغییر می‌شوند، علت



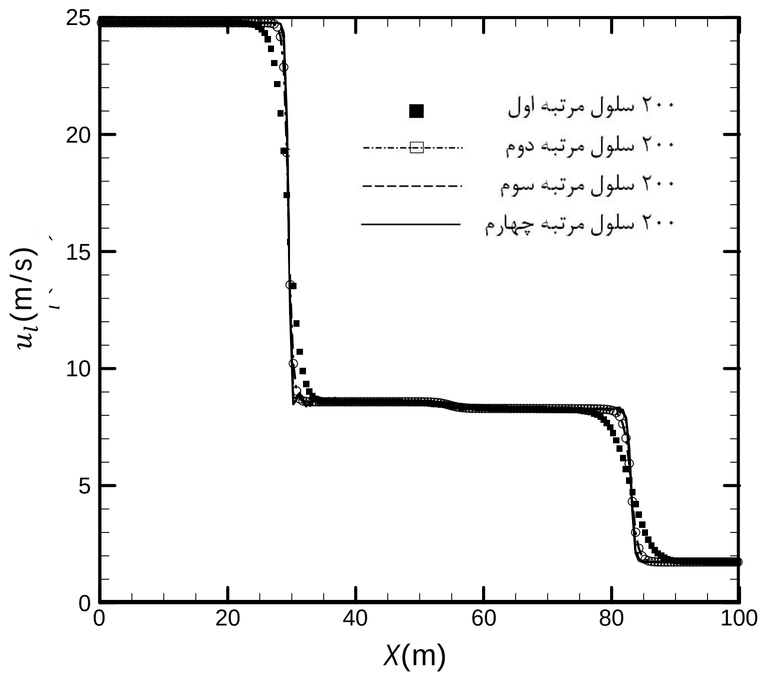
الف: کسر حجمی فاز گاز



ب: فشار



ج: سرعت فاز گاز



د: سرعت فاز مایع

شکل 3 نتایج تحلیل مسئله لوله ضربه اول بر روی یک شبکه محاسباتی 200 سلولی و با دقت‌های مختلف روش DG-ADER در زمان t=0.5 s

عدم تغییر سرعت فاز گاز در این محل آن است که در مدل شار رانشی ناپیوستگی تماسی با سرعت فاز گاز حرکت می‌کند.

7-2- لوله ضربه دوم

این لوله ضربه توسط اوجه و افجلده [22] و افجلده و کارلسن [23] برای حالت چگالی ثابت مایع مورد بررسی قرار گرفته است. همانند مسئله قبل این مسئله نیز شامل لوله‌ای به طول 100 متر است که از وسط توسط یک میان بند به دو بخش چپ و راست تقسیم می‌شود. شرایط اولیه موجود در این مساله در شکل 4 داده شده است.

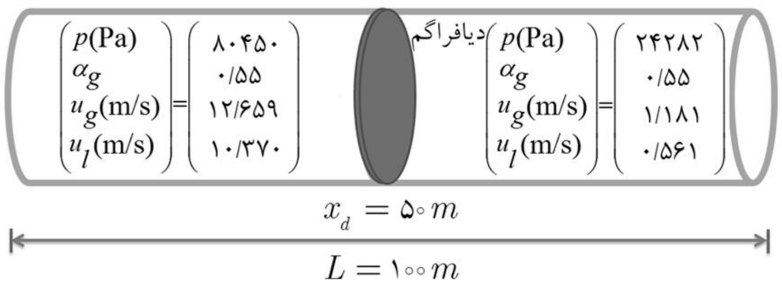
در جدول 3 پارامترهای معادله حالت ذکر شده است. همچنین ضرایب موجود در رابطه زوبر و فایندلی (رابطه لغزش) برابر $c_o = 1.07$ و $v_d = 0.2162$ در نظر گرفته می‌شوند.

در شکل 5 روند همگرایی روش DG-ADER مرتبه چهارم با استفاده از سلول‌های محاسباتی مختلف برای کسر حجمی فاز گاز نشان داده شده‌است.

ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد سلول‌های محاسباتی توزیع کسر حجمی گاز در امتداد لوله به سمت حل مرجع میل کرده است و اختلاف چشمگیری میان نتایج شبکه‌های 400 و 800 سلولی با نتایج حل مرجع وجود ندارد. حل مرجع جواب‌های ارائه شده توسط روش روی از مرجع [21] بر روی یک شبکه 3200 سلولی بوده است. مشاهده می‌شود که روش عددی بکار رفته توانسته بر روی یک شبکه درشت جواب‌هایی به دقت روش حل مرجع بر روی یک شبکه ریز ارائه کند.

نتایج تحلیل لوله ضربه دوم بر روی یک شبکه 200 سلولی و با استفاده از روش DG-ADER با دقت‌های مختلف در شکل 6 ارائه و با نتایج روش ترکیبی مرجع [23] مقایسه شده است. نتایج برای کسر حجمی فاز گاز، سرعت دو فاز و فشار مشترک آن‌ها نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش دقت روش عددی، جواب‌های دقیق‌تری حاصل شده است. روش مرتبه اول به‌کار رفته در روش DG-ADER روش روزانوف می‌باشد که در محل موج‌های ضربه‌ای مقداری دیفیوژن عددی وارد حل می‌کند. با افزایش دقت حل، از دیفیوژن عددی کاسته شده است ولی در محل موج‌های ضربه‌ای، نوسانات عددی مشاهده می‌شود. ملاحظه می‌شود که نتایج به‌دست آمده مطابقت خوبی با حل مرجع [23] بر روی شبکه محاسباتی 200 سلولی دارد.

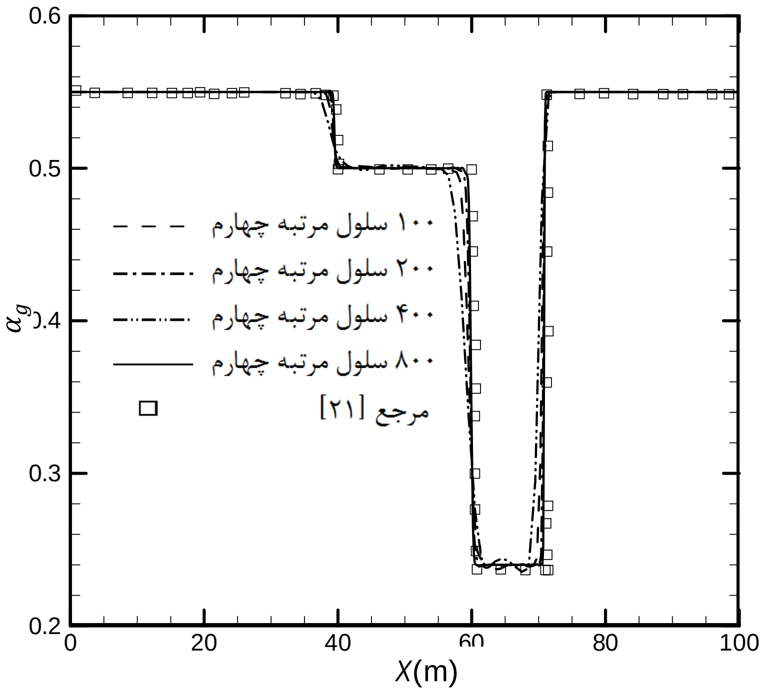
در روش ایدر همواره تلاش بر این است که دامنه نوسانات محدود شود.



شکل 4 شرایط اولیه در مساله لوله ضربه دوم

جدول 3 پارامترهای معادله حالت برای لوله ضربه

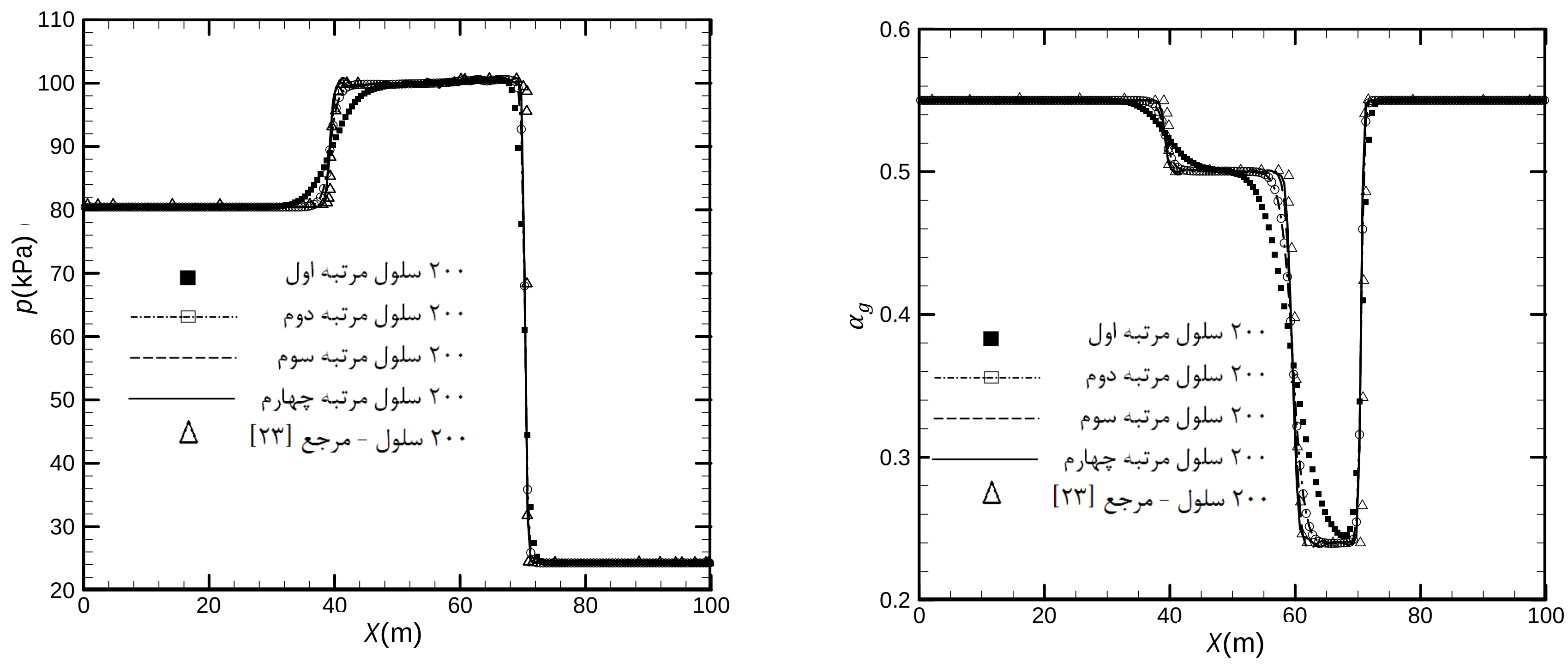
فاز	$C_k(\frac{m}{s})$	$\rho_{k,0}(\frac{kg}{m^3})$
گاز	316/227	0
مایع	1000	999/90



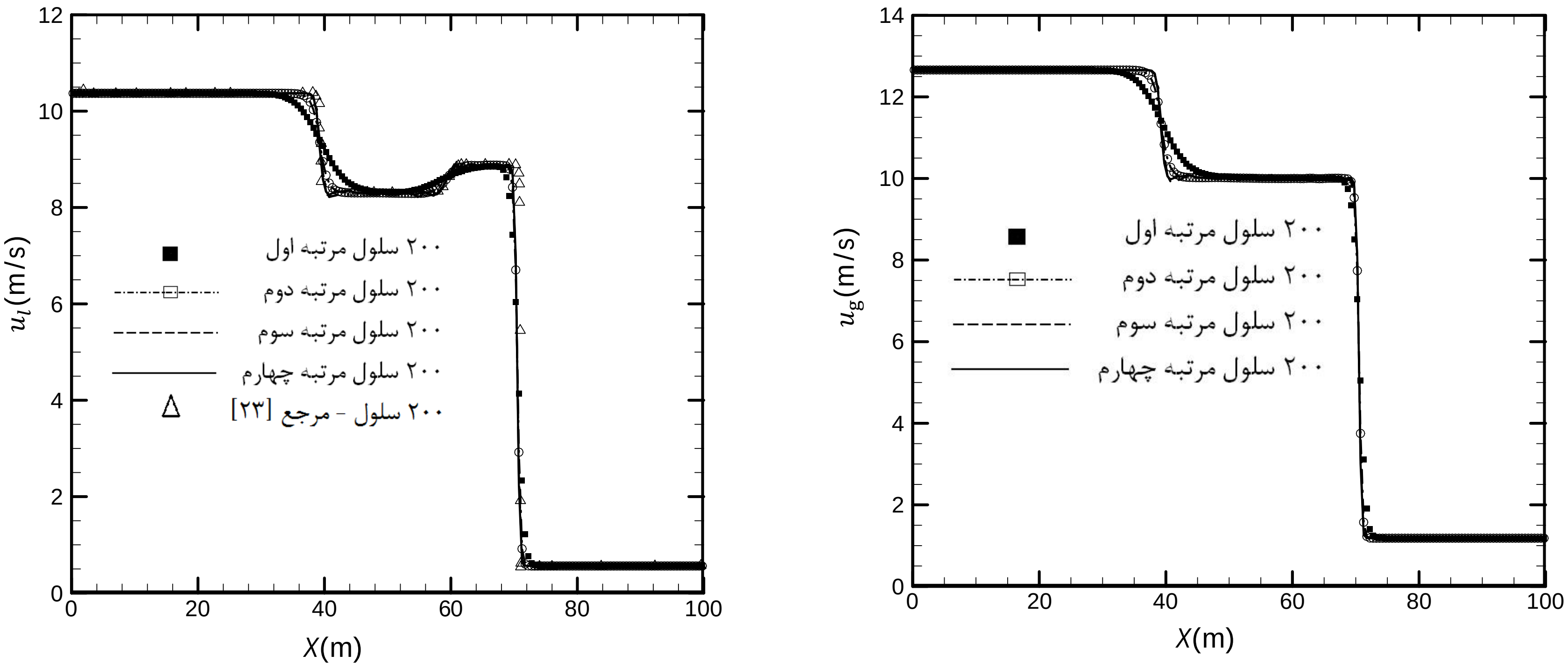
شکل 5 مطالعه همگرایی روش DG-ADER برای مسئله لوله ضربه دوم

هر چقدر دقت روش عددی بالاتر رود، امکان بروز نوسانات عددی نیز افزایش می‌یابد، به عنوان مثال در لوله ضربه دوم اگر سرعت فاز مایع در میانه لوله با بزرگنمایی رسم شود نتایج نشان داده شده در شکل 7 به‌دست می‌آید.

ملاحظه می‌شود که نتایج تا اندازه‌ای دچار نوسان شده‌اند ولی دامنه آن‌ها محدود است. بنابراین یکی از ویژگی‌های روش ایدر محدود کردن دامنه نوسانات عددی است. دامنه این نوسانات با ریزتر کردن شبکه کوچکتر



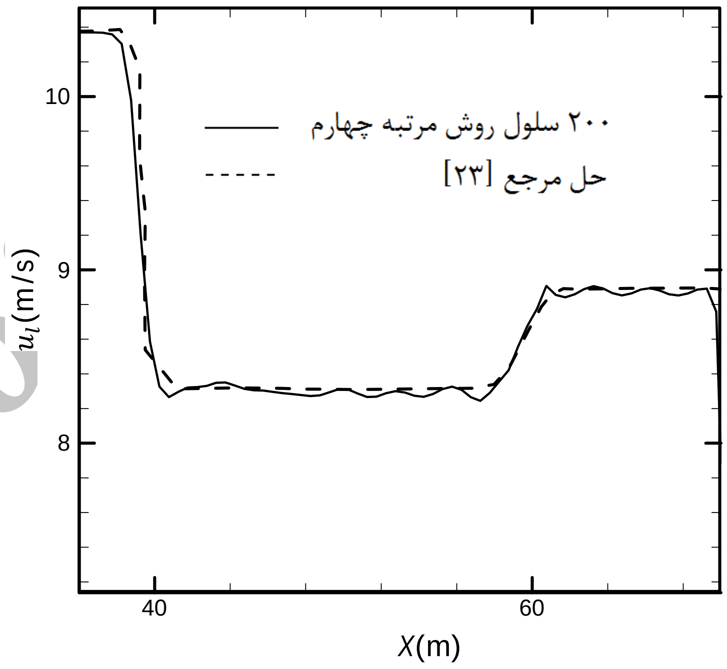
الف: کسر حجمی فاز گاز
ب: فشار



د: سرعت فاز مایع

ج: سرعت فاز گاز

شکل 6 نتایج تحلیل مسئله لوله ضربه دوم بر روی یک شبکه محاسباتی 200 سلولی و با دقت‌های مختلف روش DG-ADER در زمان t=1.0 s



شکل 7 بزرگنمایی توزیع سرعت در میانه لوله برای مساله لوله ضربه دوم بر روی یک شبکه 200 سلولی و با دقت مرتبه چهارم روش DG-ADER در زمان t=1 s

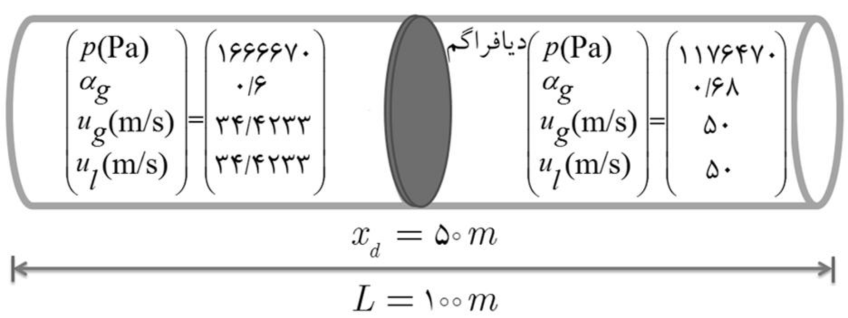
می‌شود ولی فرکانس آن‌ها افزایش می‌یابد.

7-3- مساله انبساط خالص

در این قسمت مساله انبساط خالص بررسی می‌شود که بوسیله بادین و همکاران [20] ارائه شده است. شرایط اولیه این مساله در شکل 8 داده شده است.

در جدول 4 پارامترهای معادله حالت ذکر شده است. فرض می‌شود که بین فازها لغزش وجود ندارد یعنی، $\phi = 0$، $v_d = 0$ و $c_o = 1$.

در این مساله فرض می‌شود که بین فازها لغزش وجود ندارد یعنی، $\phi = 0$، $v_d = 0$ و $c_o = 1$. نتایج به‌دست آمده برای این مساله بر روی یک شبکه محاسباتی 100 سلولی و با استفاده از روش DG-ADER با دقت‌های مختلف (از مرتبه یک تا چهار) در شکل 9 نشان داده شده است.



شکل 8 شرایط اولیه در مساله انبساط خالص

ملاحظه می‌شود که یک موج انبساطی به سمت چپ لوله در حال حرکت است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که با به‌کارگیری روش DG-ADER با دقت بالاتر، از لزجت مصنوعی حل عددی کاسته شده است.

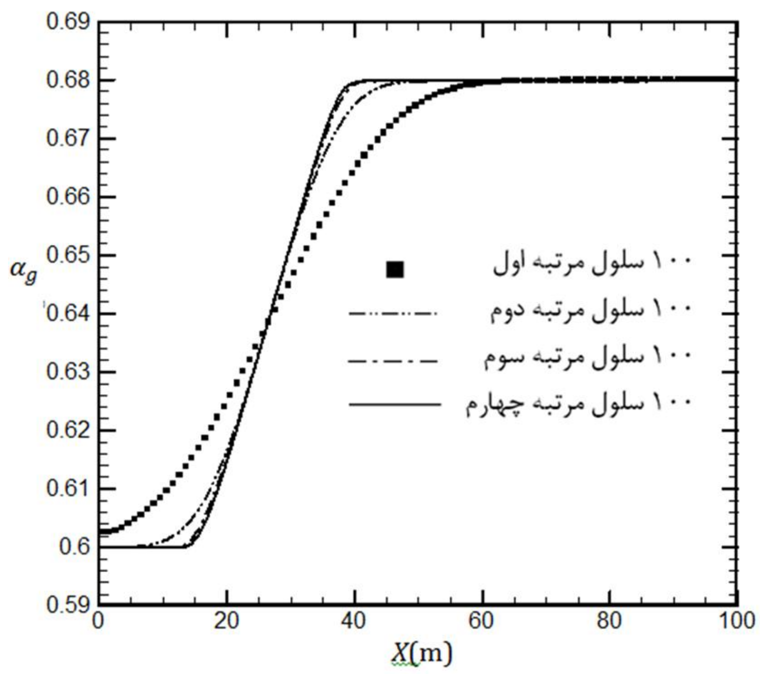
در شکل 10 نتایج توزیع کسر حجمی و فشار با استفاده از شبکه‌های محاسباتی مختلف و با به‌کارگیری روش DG-ADER مرتبه چهارم نشان داده شده و با نتایج حل دقیق ارائه شده در مرجع [20] مقایسه شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد سلول‌های محاسباتی از پخش عددی روش کاسته و نتایج حل عددی به حل دقیق همگرا شده است.

8- نتیجه گیری

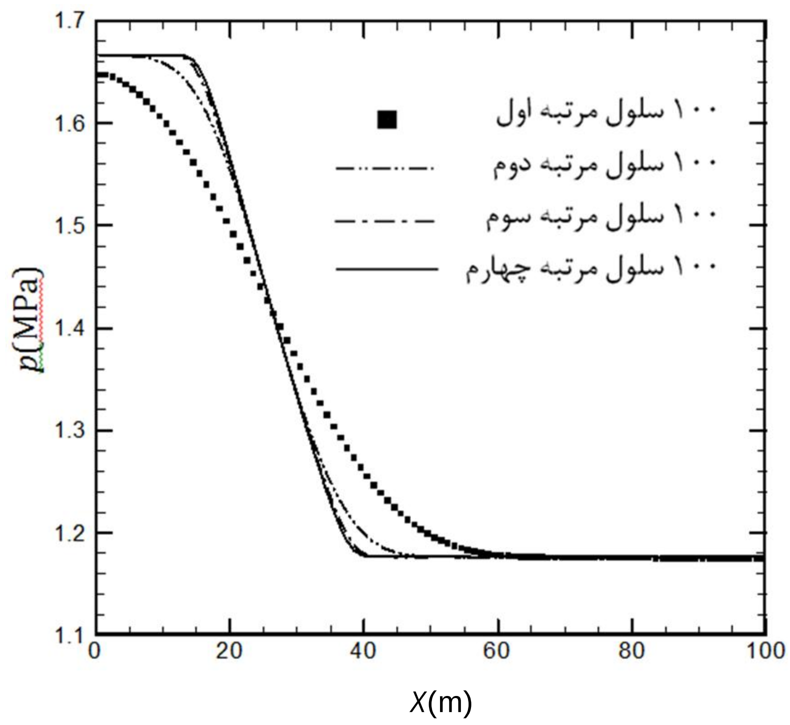
تحلیل جریان‌های دوفازی بر مبنای مدل شار رانشی و با بکارگیری روش

جدول 4 پارامترهای معادله حالت برای مساله انبساط خالص

فاز	$c_k(\frac{m}{s})$	$\rho_{k,0}(\frac{kg}{m^3})$
گاز	100	0
مایع	1000	999/924

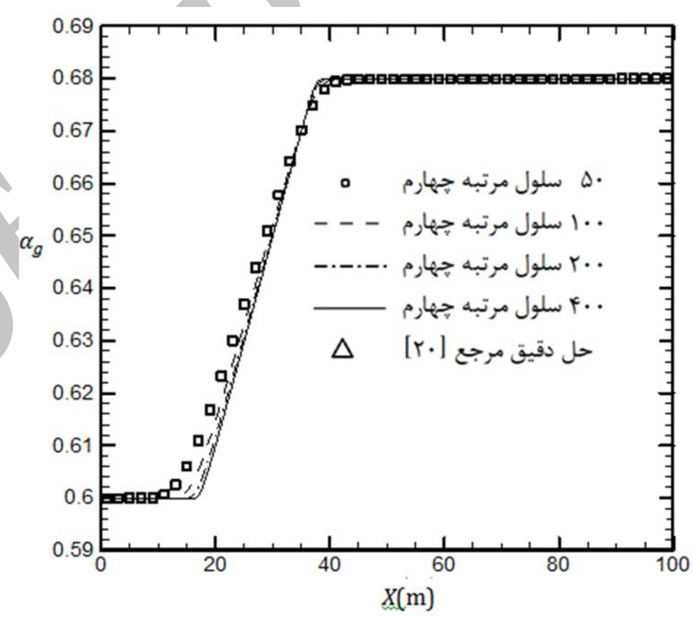


الف: کسر حجمی فاز گاز

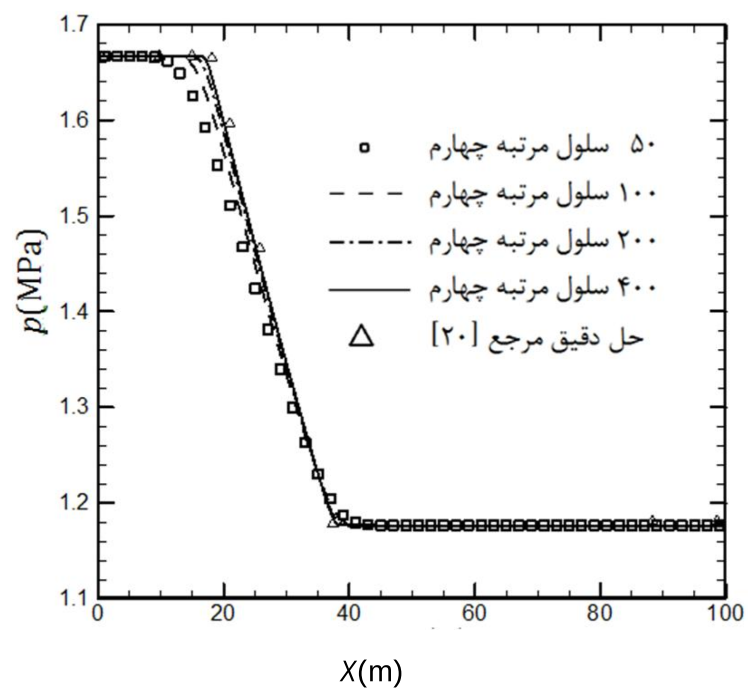


ب: فشار

شکل 9 نتایج تحلیل مسئله انبساط خالص بر روی یک شبکه 100 سلولی و با دقت‌های مختلف روش DG-ADER در زمان t=0.8 s



الف: کسر حجمی فاز گاز



ب: فشار

شکل 10 نتایج تحلیل مساله انبساط خالص بر روی شبکه‌های مختلف با استفاده از روش DG-ADER مرتبه چهارم در زمان t=0.8 s

عددی مرتبه بالای DG-ADER صورت پذیرفت. روش به‌کار رفته یک روش غیرخطی برای رسیدن به دقت اختیاری برای حل عددی معادلات هذلولوی است. در این تحقیق برای نشان دادن قابلیت این روش در حل عددی مدل شار رانشی از دو لوله ضربه دوفازی استفاده شد. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که این روش می‌تواند بر روی شبکه‌های درشت نیز جواب‌هایی با دقت مناسب ارائه کند. نقطه ضعف این روش بروز نوسانات عددی با دامنه بسیار محدود در محل موج‌های ضربه‌ای است. به‌هرحال دامنه نوسانات کوچک است و برای مسائل واقعی که در آن‌ها تغییرات شدید متغیرهای جریان وجود ندارد این نوسانات نیز مشاهده نخواهند شد. بنابراین این روش برای تحلیل جریان‌های دوفازی کاربردی پیشنهاد می‌شود.

9- مراجع

[1] M. Ishii, T. Hibiki, *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow,* West Lafayette: Springer, 2005.
[2] R. J. Leveque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems,* Cambridge university press, 2004.
[3] E. F. Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, *3 ed., Manchester*: Springer, 2005.
[4] S. Evje, K. K. Fjelde, On a rough AUSM scheme for a one-dimensional two-phase model, *Computers & Fluids,* Vol. 32, No. 10, pp. 1497-1530, 2003.
[5] T. Flåtten, S. T. Munkejord, The approximate Riemann solver of Roe applied to a drift-flux two-phase flow model, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis,* Vol. 40, No. 04, pp. 735-764, 2006.
[6] S. T. Munkejord, S. Evje, T. Flåtten, The multi-stage centred-scheme approach applied to a drift-flux two-phase flow model, *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* Vol. 52, No. 6, pp. 679-705, 2006.
[7] S. K. Godunov, Finite difference methods for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics., *Mathematics of the USSR,* Vol. 47, pp. 271–306, 1959.
[8] M. R. Ansari, A. Daramizadeh, Slug type hydrodynamic instability analysis using a five equations hyperbolic two-pressure, two-fluid model, *Ocean Engineering,* Vol. 52, No. 0, pp. 1-12, 2012.
[9] V. Titarev, E. Toro, ADER: Arbitrary high order Godunov approach, *Journal of Scientific Computing,* Vol. 17, No. 1-4, pp. 609-618, 2002.
[10] V. Titarev, E. Toro, ADER schemes for three-dimensional non-linear hyperbolic systems, *Journal of Computational Physics,* Vol. 204, No. 2, pp. 715-736, 2005.
[11] E. Toro, V. Titarev, ADER schemes for scalar non-linear hyperbolic conservation laws with source terms in three-space dimensions, *Journal of Computational Physics,* Vol. 202, No. 1, pp. 196-215, 2005.
[12] E. Toro, V. Titarev, Derivative Riemann solvers for systems of conservation laws and ADER methods, *Journal of Computational Physics,* Vol. 212, No. 1, pp. 150-165, 2006.
[13] M. Dumbser, D. S. Balsara, E. F. Toro, C.-D. Munz, A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes, *Journal of Computational Physics,* Vol. 227, pp. 8209-8253, 2008.
[14] M. Dumbser, C. Enaux, E. F. Toro, Finite volume schemes of very high order of accuracy for stiff hyperbolic balance laws, *Journal of Computational Physics,* Vol. 227, pp. 3971-4001, 2008.
[15] M. Dumbser, A. Hidalgo, M. Castro, C. Parés, E. F. Toro, FORCE schemes on unstructured meshes II: Non-conservative hyperbolic systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 199, No. 9, pp. 625-647, 2010.
[16] M. Dumbser, M. Kaser, V. Titarev, E. F. Toro, Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems, *journal of Computational Physics,* Vol. 226, pp. 204-243, 2007.
[17] A. Taube, M. Dumbser, D. S. Balsara, C.-D. Munz, Arbitrary high-order discontinuous Galerkin schemes for the magnetohydrodynamic equations, *Journal of Scientific Computing,* Vol. 30, No. 3, pp. 441-464, 2007.
[18] N. Zuber, J. Findlay, Average volumetric concentration in two-phase flow systems, *Journal of heat transfer,* Vol. 87, No. 4, pp. 453-468, 1965.
[19] M. Dumbser, Advanced Numerical Methods for Hyperbolic Equations and Applications, *lecture notes,* Trento, Italy, 2011.
[20] m. Baudin, Berthon, c., Coquel, f., masson, r. And tran, q. H, a relaxation method for two phase flow models with hydrodynamic closure law, *Numerische mathematik,* Vol. 99, No. 3, pp. 411–440, january 2005a.
[21] S. T. Munkejord, *Analysis of the two-fluid model and the drift-flux model for numerical calculation of two-phase flow,* PhD Thesis, Department of Energy and Process Engineering, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2005.
[22] S. Evje, K. K. Fjelde, Hybrid flux-splitting schemes for a two-phase flow model, *Journal of Computational Physics,* Vol. 175, No. 2, pp. 674-701, 2002.
[23] K. K. Fjelde, K. H. Karlsen, High-resolution hybrid primitive–conservative upwind schemes for the drift flux model, *Computers & Fluids,* Vol. 31, No. 3, pp. 335-367, 2002.