

ماهنامه علمى پژوهشى

ی مکانیک مدر س



کا کنوینیس اینده میروینیس مکانیک مدرسی الالالیو

توسعه روش معادلات مجزا برای محاسبه انتگرال L در مسائل مکانیک شکست ارتجاعی خطی

مهدی یزدانی¹ ، ناصر خاجی^{2*}

1- دانشجوی دکترای مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
 2- استاد مهندسی زلزله، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی nkhaji@modares.ac.ir ،14115-397

چکیدہ	اطلاعات مقاله
یکی از مسائل مهم در تحلیل و طراحی سازهها، وجود ترک و نقص در سازه و اثرات آن در تحلیل و طراحی سازهها میباشد. بسیاری از مسائلی که دلرای تیک هستند، بهصورت تحلیل قابل جل نیستند؛ از این ورجا وسائل مکانیک شکست با روش های عددی به یک از وسائل و	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 30 اردیبهشت 1394
تبدیل گشته است. مقاله حاضر به توسعه یک روش جدید به نام روش معادلات مجزا در مسائل مکانیک شکست می پردازد؛ که در آن، با استفاده	پذیرش: 01 تیر 1394 ارائه در سایت: 07 مرداد 1394
از نظریه مکانیک شکست ارتجاعی خطی، انتگرال J محاسبه گشته است. روش معادلات مجزا یک روش نیمه تحلیلی با ماتریس ضرایب قطری	کلید واژگان:
است. در این روش، تنها مرز مسئله با استفاده از توابع شکل مرتبه بالا و توابع نگاشت چبیشفی گسستهسازی می گردد. در این روش، با استفاده از	روش معادلات مجزا
روش باقیماندههای وزندار و روش انتگرالی کلینشا-کورتیز، معادلات دیفرانسیل اویلری بهصورت مجزا ایجاد میگردند. در ادامه با تعریف	مکانیک شکست ارتجاعی خطی
دستگاه مختصات مرجع در نوک ترک و تعریف یک فرم جدید از بردار نیروهای گرهای، مسئله ترک در روش معادلات مجزا پیادهسازی گردیده و	انتگرال ل
انتگرال J محاسبه گردیده است. در نهایت، با حل دو مثال عددی، روش معادلات مجزا مورد صحتسنجی قرار گرفته است. نتایج نشان میدهد	مسائل دوبعدی
که روش معادلات مجزا دارای دقت مناسبی در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و عددی میباشد.	

Development of Decoupled Equations Method to Calculate J-Integral in Linear Elastic Fracture Mechanics Problems

Mahdi Yazdani, Naser Khaji*

Department of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran * P.O.B. 14115-397 Tehran, Iran, nkhaji@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper Received 20 May 2015 Accepted 22 June 2015 Available Online 29 July 2015

Keywords: Decoupled equations method Linear elastic fracture mechanics (LEFM) J-Integral 2D Problems

ABSTRACT

The existence of crack and notch is a significant and critical subject in the analysis and design of solids and structures. As most of the damage problems do not have closed-form solutions, numerical methods are current approaches for dealing with fracture mechanics problems. This study presents a novel application of the decoupled equations method (DEM) to model crack issues. Based on linear elastic fracture mechanics (LEFM), the J-integral is computed using the DEM. In this method, only the boundaries of problems are discretized using specific higher-order sub-parametric elements and higher-order Chebyshev mapping functions. Implementing the weighted residual method and using Clenshaw-Curtis numerical integration result in diagonal Euler's differential equations. Consequently, when the local coordinates origin (LCO) is located at the crack tip, the geometry of crack problems is directly implemented without further processing. In order to present infinite stress at the crack tip, a new form of nodal force function is proposed. Validity and accuracy of this method is fully demonstrated through two benchmark problems. The numerical results agree very well with the results from existing experimental results and numerical methods available in literature.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید: M. Yazdani, N. Khaji, Development of Decoupled Equations Method to Calculate J-Integral in Linear Elastic Fracture Mechanics Problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 59-68, 2015 (In Persian)

روشهای عددی برای حل این دسته از مسائل یک امر اجتنابناپذیر می باشد. مهمترین روش های عددی که تاکنون برای حل مسائل مکانیک شكست توسعه داده شدهاند شامل روش اجزاء محدود، روش المان مرزى، روش اجزاء محدود توسعهیافته، روشهای بدون المان، و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده است. روش اجزاء محدود به طور وسیعی در مسائل مکانیک شکست به کار برده شده است، ولی المان های رایج که در این روش به کار میروند در نزدیکی ترکها و حفرهها دارای دقت خوبی نمیباشند و حتی اگر تعداد المانها را در این محدوده زیاد کنیم به دقت مورد نیاز نخواهیم رسید. برای حل این مشکل، تدابیر خاصی توسط محققان اتخاذ شده است. بهطور کلی، برای بهدست آوردن ضریب شدت تنش با استفاده از روش اجزاء محدود از المانهای تکین یکچهارم (یا المان نوک ترک) استفاده میشود [1-3]. در ادامه، بهعلت بعضی از مشکلات موجود در روش اجزاء محدود، روشهای عددی دیگری توسعه یافتند. بهعنوان مثال به دلیل پیچیدگیهای موجود در فرایند الگوریتمهای المان بندی متوالی در روش اجزاء محدود، روش اجزاء محدود توسعه يافته به وجود آمد [6-4]. همچنين، به دليل نياز به المانهاي فراوان در اطراف نوک ترک ترکهای بسیار ریز و هزینههای محاسباتی و زمانی بالا، روش المان مرزی توسعه داده شده است [7-8]. توسعه روش المان مرزى براى حل مسائل مكانيك شكست، اولين بار توسط كروز ارائه شد که در آن ضریب شدت تنش با دقت کمی بهدست آمده بود با بهدست آوردن تابع گرین ترک، که در آن فرم دقیق ترکشن وجود داشت، نیاز به مدلسازی لبههای ترک از بین رفت و دقت حل ضرایب تنش بهبود یافت و تا به امروز این روش بسیار توسعه یافته است. از آنجایی که در روش المان مرزی فقط مرز حوزه المانبندى مىشود از لحاظ هزينههاى محاسباتى نسبت به روش اجزاء محدود دارای کاهش چشمگیری است. در روش المان مرزی، تنشها در نقاط داخل میدان دارای دقت بالایی هستند؛ زیرا در این روش، تقریبی در جواب در داخل میدان اعمال نمی شود و جواب در داخل میدان دقیق و پیوسته است. بنابراین روش المان مرزی در مسائلی که در آن تغییرات تنش زیاد است (همانند مسئله ترک) بسیار مناسب است. البته لازم به ذکر است كه روش المان مرزى انعطاف پذيرى روش اجزاء محدود را ندارد [9-10]. روشهای بدون المان، باتوجه به اینکه نیازی به گسستهسازی ندارند، نیز برای حل مسائل ترک مورد توجه قرار گرفتهاند [11]. در سالهای اخیر، روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده نیز با توجه به دقت مناسبی که دارد برای حل مسائل مکانیک شکست بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این روش با ترکیب روشهای اجزاء محدود و المان مرزی دارای ویژگیهای منحصر به فردی می باشد. در این روش مشابه المان مرزی فقط مرز مسئله گسسته سازی می گردد با این تفاوت که نیازی به حل اساسی ندارد [12-13]. روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده بسیاری از مشکلات موجود در روش اجزاء محدود، از جمله مشبندی بسیار ریز در اطراف نوک ترک و یا استفاده از المانهای

دارد [5, 19-20]. از آنجایی که انتگرال I به صورت تحلیلی فقط برای مسائل محدودی قابل حل است، و به علت پیچیدگی موجود در روشهای عددی محدودی توسعه یافته است [5، 19 و 21]؛ استخراج آن با کمک روشهای جدیدتر امری ضروری میباشد. یکی از این روشهای نسبتاً جدید، روش معادلات مجزا است که توسط خداکرمی و خاجی پیشنهاد شده است، که برای حل مسائل مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. از مهمترین دست-آوردهای روش مزبور می توان به حل مسائل پتانسیل [22]، الاستواستاتیک [23،24]، الاستوديناميك [25،26] و انتشار امواج ارتجاعي [27] اشاره كرد. هدف ار مقاله حاضر، توسعه روش معادلات مجزا برای میدانهای ترکدار در حالت دوبعدی براساس مکانیک شکست ارتجاعی خطی است. برای این منظور، نحوه استخراج انتگرال *I* برای اولین بار در این روش مورد بررسی قرار می گیرد. در این مقاله با پیشنهاد محل نقطه مرجع و فرم جدیدی از بردار نیروهای گرهای، شرایط مرزی محیطهای ترکدار در مسئله اعمال میگردد، و با حل دو مثال عددی، دقت روش معادلات مجزا مورد ارزیابی قرار می گیرد.

2- مبانی روش معادلات مجزا

در روش معادلات مجزا از چهار ابزار کلیدی استفاده می شود تا ماتریس ضرایب معادلات حاکم قطری شده، و دستگاه معادلات حاکم بهصورت مجزا و مستقل از هم نوشته شود. رسیدن به این هدف با استفاده از (1) توابع شکل مرتبه بالا، (2) توابع نگاشت چبیشف، (3) روش انتگرال گیری کلینشا-کورتیز، و (4) همچنین روند تولید فرم انتگرالی معادله حاکم بر مسئله مربوطه، مهیا شده است. به منظور مدلسازی هندسه و همچنین فیزیک مسئله در روش حاضر، ابتدا یک نقطه بهعنوان مرجع مختصات محلی (LCO) انتخاب شده، و مسئله نسبت به این نقطه ارزیابی 🕥 می گردد. در عین حال، فقط مرزهای مسئله با استفاده از المانهایی با یک بُعد كمتر از بُعد فضاى مسئله المانبندى مى گردند. مطابق شكل 1، مشخصات یک هندسه دلخواه در دستگاه مختصات اصلی و دستگاه مختصات مقیاس شده نشان داده شده است.

با توجه به انتخاب محورهای محلی، مرزهای مسئله بهطور کلی به دو دسته تقسیم می گردند؛ مرزهایی که امتداد آنها از LCO می گذرند و روی محور شعاعی ٤ قرار می گیرند، و مرزهایی که امتداد آنها از LCO نمی گذرند (مرزهایی که موازی η هستند). در این روش، فقط باید مرزهای نوع دوم را المانبندی نمود. محدوده تغییرات محور مماسی η بهصورت است. در مسائل محدود، تغییرات محور شعاعی ξ بین صفر –1 $\leq \eta \leq$ +1 (در LCO) و یک (بر روی مرزها) میباشد.

در روش حاضر، مختصات هر نقطه درون حوزه مسئله در مختصات کلی با (\hat{x}, \hat{y}) مشخص می گردد، درحالی که مختصات هر نقطه از مرزهای مسئله نیز با (x,y) تعیین می گردد. به منظور انتقال هندسه مسئله از مختصات

کلی (\hat{x}, \hat{y}) به مختصات محلی (ξ, η) ، از توابع نگاشت که از نوع	مخصوص تقویت شده در اطراف نوک ترک را حذف مینماید. سانگ و ولف
چندجملهایهای مرتبه بالای چبیشف $[\phi(\eta)]$ میباشند، استفاده می کردد.	نشان دادند که روش جدید اجزاء محدود مرزی مقیاس شده به راحتی می-
بنابراین مختصات هر نقطه روی مرزهای مسئله با استفاده از توابع نگاشت	تواند ضریب شدت تنش را محاسبه کند. [14]. در ادامه، محققین دیگر، -
بهصورت رابطههای (1) و (2) قابل محاسبه خواهد بود: ++ n	مسائل مختلف مکانیک شکست را در این روش مورد ارزیابی قرار دادند [15-
$r(n) = \sum_{n=1}^{n-1} c_n(n) r_n \tag{1}$.[18
$\chi_{i} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i} \varphi_$	در مسائل مکانیک شکست، انتگرال <i>I</i> یکی از مفاهیم پایهای و مهم
$\sum_{n_{\eta}+1}^{n_{\eta}+1} $	میباشد. انتگرال / در محاسبه انرژی محیط تر ⁄ خورده، محاسبه ضریب
$y(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\eta) y_i \tag{2}$	شدت تنش، رشد ترک و مسائل مربوط به مکانیک شکست غیرخطی کاربرد
l - 1	

مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9

www.SID.ir

60

$$\begin{aligned} \eta_n &= -\cos\left(\frac{n\pi}{n_\eta}\right) & (7) \\ \eta_n &= -\cos\left(\frac{n\pi}{n_\eta}\right) & (7) \\ \lambda &= (1 \text{ introduct } N \text{ the set of the$$



شکل 1 نحوه مدلسازی مسائل دو بعدی؛ (الف) هندسه مسئله در مختصات کلی، (ب) هندسه مسئله دو بعدی در مختصات محلی [23]

که در روابط (1) و (2)، x و y مختصات نقاط روی مرز در دستگاه مختصات کلی می باشند و n_{η} عداد نقاط گرهای المانهای روی مرز هستند. در این روش، مختصات هر نقطه درون حوزه مسئله با استفاده از روابط (3) و (4) محاسبه می گردد:

$$\hat{x}(\xi,\eta) = \xi x(\eta) = \xi \sum_{\substack{i=1\\n_n+1}}^{n_n+1} \varphi_i(\eta) x_i$$
(3)

$$\hat{y}(\xi,\eta) = \xi y(\eta) = \xi \sum_{i=1}^{7} \varphi_i(\eta) y_i$$
(4)

تابع نگاشت برای یک المان
$$n_{\eta} + 1$$
 گرەای، با استفاده از
چندجملهایهای چبیشف بهصورت رابطه (5) تعیین می گردد:
م n_{η}

$$2 \sum 1$$

$$\left[n^{\eta}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{(i-1)}c_{n}} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{(i-1)}c_{n}} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{(i-1)}c_{n}} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] = \frac{1}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}(\eta_{i-1})T_{n}(\eta) \qquad (5)$$

$$\left[p_{i}(\eta) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{i-1}(n_{\eta})} \sum_{n=0}^$$

مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9

www.SID.ir

$$N_{\alpha}(\eta_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \tag{18}$$

$$N_{\alpha,\beta}(\eta_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \tag{19}$$

توابع شکل پیشنهادی برای یک المان $n_{\eta} + 1$ گرهای، یک چندجملهای از مرتبه $n_{\eta} + 1$ بهصورت رابطه (20) میباشد که دارای $2n_{\eta}$ پارامتر مجهول است.

$$N_{i}(\eta) = \sum_{m=0}^{2n_{\eta}+1} a_{m}\eta^{m} = a_{0} + a_{1}\eta + a_{2}\eta^{2} + a_{3}\eta^{3} + \cdots + a_{2n_{\mu}+1}\eta^{2n_{\eta}+1}$$
(20)

ضرایب ثابت فوق با اعمال شرایط رابطههای (18) و (19) تعیین می گردند. مؤلفههای تغییرمکان در هر نقطه از فضای مسئله به مختصات می گردند. مؤلفههای تغییرمکان در هر نقطه از فضای مسئله به مختصات $[u_x(\xi,\eta) \quad u_y(\xi,\eta)]^T$ تعریف می گردند، با استفاده از توابع شکل بر حسب تغییرمکان گرههای واقع بر المانهای روی مرز با استفاده از رابطه (21) قابل محاسبه هستند:

 $(u(\xi,\eta)) = [N(\eta)](u(\xi))[u_x(\xi) \quad u_y(\xi)]^T$ (21) با استفاده از روابط (13) و (14)، مولفههای کرنش در نقطه (ξ,η) در فضای مسئله بهصورت (22) بیان می گردند:

$$\{\varepsilon(\xi,\eta)\} = \left[\varepsilon_x(\widehat{x},\widehat{y}) \quad \varepsilon_y(\widehat{x},\widehat{y}) \quad \varepsilon_{xy}(\widehat{x},\widehat{y})\right]^{\mathsf{T}}$$

$$= \left[B^1(\eta)\right] \{u(\xi)\}_{\xi} + \frac{1}{\xi} \left[B^2(\eta)\right] \{u(\xi)\}$$

$$(22)$$

که در آن

$$B^{1}(\eta)] = [b^{1}(\eta)][N(\eta)]$$
(23)

$$[B^{2}(\eta)] = [b^{2}(\eta)][N(\eta)]_{,\eta}$$
⁽²⁴⁾

همچنین با استفاده از قانون هوک، در مورد مؤلفههای تنش در هر نقطه به مختصات (٤,η) میتوان گفت:

$$\{\sigma(\xi,\eta)\} = [D]\{\varepsilon(\xi,\eta)\}$$
(25)

 $(\sigma(\xi,\eta)) = [D] \left(\left[b^{1}(\eta) \right] [N(\eta)] \{ u(\xi) \}_{\xi} \right)$

+
$$\frac{1}{\xi} [b^2(\eta)] [N(\eta)]_{\eta} \{u(\xi)\}$$
 (26)

که در رابطههای (25) و (26)، [D] بیان گر ماتریس خواص مصالح میباشد.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \mathbf{0} \tag{27}$$

که در رابطه (27) σ_{ij} بیان گر اجزاء تانسور تنش دوبعدی بوده و f_i نیز مؤلفههای نیروهای حجمی اعمال شده بر فضای مسئله هستند. لازم به تذکر است که در حالت دو بعدی مسائل الاستواستاتیک، $\widehat{x}, \widehat{y} = i = \widehat{x}, \widehat{y}$ میباشند. معادله حاکم (27) را میتوان به فرم قوی و با استفاده از روشهای تحلیلی، یا به فرم باقیمانده وزندار و به صورت عددی حل نمود. مبنای روش

$$[D^{1}] = \int_{-1}^{+1} [B^{2}(\eta)]^{T} [D] [B^{1}(\eta)]_{,\eta} | J(\eta) | d\eta$$
(31)

$$\{F^{b}(\xi)\} = \int [N(\eta)]^{\mathrm{T}} \{f^{b}(\xi)\} |J(\eta)| \,\mathrm{d}\eta \qquad (32)$$

که در رابطه (32)، $F_{y}^{b} = \begin{bmatrix} F_{x}^{b} & F_{y}^{b} \end{bmatrix}$ بردار نیروهای حجمی در گرمها میباشد. در معادله دیفرانسیل (29) ماتریسهای ضرایب ثابت با استفاده از روش انتگرل گیری کلنشا-کورتیس محاسبه گردیده است. استفاده از این روش انتگرال گیری به همراه توابع شکل و نگاشت ویژه معرفی شده سبب تولید ماتریسهای ضرایب قطری می گردد [21-26]؛ یعنی:

$$D_{ij}^{0} = 2\delta_{ij}[B^{1}(\eta_{i})]^{\mathrm{T}}[\mathbf{D}][B^{1}(\eta_{i})]]/(\eta_{i})|$$
(33)
$$D_{ij}^{0} = 2\delta_{ij}[B^{2}(\eta_{i})]^{\mathrm{T}}[\mathbf{D}][B^{1}(\eta_{i})]_{\eta}]/(\eta_{i})|$$
(34)

که در رابطههای (33) و (34)، δ_{ij} دلتای کرونیکر میباشد. بنابراین δ_{ij} در رابطههای (35) و (34)، ماداد در تگار ماداد (35) و ا

دستگاه معادلات درگیر رابطه (29) را میتوان به صورت (35) به ازای هر درجه آزادی *i* نوشت:

$$\xi D_{ii}^0 u(\xi)_{i,\xi\xi} + D_{ii}^1 u(\xi)_{i,\xi} + \xi F_i^b(\xi) = 0$$
(35)

در گام نخست این روش، رابطه (35) فقط برای گرههایی که تحت بارگذاری قرار دارند محاسبه میشود. در گام دوم، تغییرات تنش برای هریک از درجات آزادی فوقالذکر در امتداد محور ξ با استفاده از رابطه (26) تعیین می گردد. سپس، با استفاده از روابط تعادل، مقدار مؤلفههای نیروهای داخلی متمرکز مرتبط با هر گره در امتداد محور ξ و همچنین میزان تنش داخلی در نقطه LCO بر اساس رابطه (36) محاسبه می شود:

(36)
$$\sigma_{LCO} = \sum_{i=1}^{N} \{\sigma_{LCOi}\}$$

$$\{\sigma_{\text{LCO}i}\} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} D_{jj}^{0}} \{\sigma_{\text{LCO}}\}$$
 (37)
در گام بعدی، بار دیگر معادله حاکم، با در نظر گرفتن نیروی داخلی

حجمی محاسبه شده بر اساس تنش داخلی LCO بهعنوان بار حجمی در امتداد ξ (رابطه (38))، به ازای هر درجه آزادی حل شده، و مؤلفههای تغییرمکان مربوط به هر گره در امتداد محور ξ محاسبه می گردد: $\{f_i^b(\xi)\} = [n^{\eta}]^{\mathrm{T}}\{\sigma_i(\xi)\}$

در گام پایانی، و با مشخص شدن تابع مؤلفههای تغییرمکان برای هر گره در امتداد محور ξ ، پاسخ برای سایر نقاط، با استفاده از توابع شکل درونیابی میشود. همچنین میزان تنش در هر نقطه از حوزه مسئله نیز با استفاده از رابطه (26) تعیین می گردد.

3- توسعه روش معادلات مجزا در مكانيك شكست

طبق مطالب ارائه شده در بخش 2، برای توسعه روش معادلات مجزا برای هر

ارائه شده برای حل مسائل، روش باقیمانده های وزن دار می باشد، بنابراین $\int_{\Omega} w(\sigma_{ij,j} + f_i) d\Omega = 0$ (28) با حل انتگرال فوق با استفاده از روش باقیمانده های وزن دار معادله تعادل در روش معادلات مجزا به صورت رابطه (29) استخراج می گردد [21]. $\xi[D^0] \{u(\xi)\}_{\xi\xi} + [D^1] \{u(\xi)\}_{\xi} + \xi\{F^b(\xi)\} = 0$ (29) $\xi[D^0] \{u(\xi)\}_{\xi\xi} + [D^1] \{u(\xi)\}_{\xi\xi} + \xi\{F^b(\xi)\} = 0$ (29) Σ ماتریس های ضرایب و بردار موجود در رابطه بالا، به صورت روابط (30) تا (30) تا $\int_{-1}^{+1} [B^1(\eta)]^T [D] [B^1(\eta)] d\eta$ (30)

مسئلهای لازم است که هندسه و فیزیک مسئله مربوطه در روش معادلات مجزا استخراج گردد. برای همین منظور در ادامه این دو بخش برای مسائل مکانیک شکست ارائه می گردد.

3-1- مدلسازی هندسه ترک با توجه به مطالعات انجام شده برای بیان مسئله ترک براساس مبانی روش معادلات مجزا و مفاهیم مکانیک شکست از سه فرض جهت بیان ترک در هندسه مسئله بهصورت زیر استفاده شده است:

62

www.SID.ir

مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9

- مدلسازی هندسه ترک در حوزه مسئله: مشابه روشهای اجزاء محدود، المان مرزی، و اجزاء محدود مرزی مقیاسشده، هندسه ترک در حوزه مسئله بهصورت فضای خالی بسیار کوچکی مدلسازی میگردد.
- در نظر گرفتن نقطه مرجع در نوک ترک: در روش معادلات مجزا، تمامی خصوصیات هندسی و فیزیکی مسئله در یک دستگاه مختصات مرجع بیان میشود. با توجه به ضوابط تعریف این نقطه برای تعریف مسئله ترک، نوک ترک در محل نقطه LCO در نظر گرفته شده است. یکی از مهمترین دلایل انجام این کار آن است که در مکانیک شکست، همه خصوصیات فیزیکی ترک با استفاده از نوک ترک بیان میشود، و از آنجایی که در روش معادلات مجزا نقطه LCO نیز همین نقش را دارد، بنابراین برای ایجاد ارتباط بین روش معادلات مجزا و نظریه مکانیک شکست، از این فرض استفاده شده است.
- استخراج رابطه بین دستگاه مختصات مقیاس شده و مختصات قطبی: از آنجایی که مسئله ترک در مختصات قطبی بیان می شود، لازم است که معادلاتی که در روش معادلات مجزا استخراج می شوند، نیز در نهایت در مختصات قطبی بیان شوند.

با توجه به شکل 2، رابطه بین مختصات قطبی و دستگاه مختصات مقیاس شده در روش معادلات مجزا به صورت رابطه (39) نوشته می شود: $r^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$ (39)

با توجه به تعریف مختصات مقیاس شده در روش معادلات مجزا (روابط (3) و (4)) و جایگذاری آن ها در رابطه (39)، رابطه (40) مطابق زیر به دست می آید

$$\hat{x}^{2} = \hat{x}^{2} + \hat{y}^{2} = [\xi x(\eta)]^{2} + [\xi y(\eta)]^{2} = \xi^{2} [x(\eta)^{2} + y(\eta)^{2}]$$

= $\xi^{2} r_{\eta}^{2}(\eta)$ (40)

بنابراین میتوان نوشت:

$$r = \xi r_{\eta}(\eta) \tag{41}$$

از طرفی دیگر طبق شکل 2 رابطه (42) مطابق زیر بهدست میآید
(42)
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y(\eta)}{x(\eta)}\right)$$

همان طور که قبلاً ذکر گردید، جابه جایی و تنش در روش معادلات مجزا بر حسب (r, θ) و در مکانیک شکست بر حسب (r, θ) بیان می شوند. بنابراین با استفاده از رابطه های (41) و (42) به راحتی می توان این پارامترها را در دستگاه مختصات قطبی و محلی به همدیگر تبدیل کرد.

3-2- مدلسازی فیزیک ترک

در محیطهای ترکدار به علت وجود تنش بینهایت در نوک ترک، می توان

معادلات مجزا، یک فرم جدید از f_i^b کمابق زیر ارائه می گردد:

$$f_i^{\,b}(\xi) = \frac{a_i}{\sqrt{\xi}} + \frac{b_i}{\xi\sqrt{\xi}} \tag{43}$$

در روش معادلات مجزا، با ارائه این فرم جدید از بردار نیروها، تکینگی در نوک ترک به صورت فیزیکی ارضاء می گردد. مشابه مسائل دیگر، با اعمال شرایط مرزی مسئله (شکل 3) ضرایب a_i و b_i از شرایط مرزی تراکشن (T_b, T) در $\mathbf{0} = \mathbf{\xi}$ و $\mathbf{1} = \mathbf{\xi}$ محاسبه می گردد.

حال می توان معادله دیفرانسیل برای جابه جایی نهایی هر گره در روش معادلات مجزا، مطابق رابطه (35)، را برای میدان های ترکدار مطابق رابطه (44) بازنویسی کرد:

$$\xi D_{ii}^{0} u(\xi)_{i,\xi\xi} + D_{ii}^{1} u(\xi)_{i,\xi} + a_i \sqrt{\xi} + \frac{b_i}{\sqrt{\xi}} = \mathbf{0}$$
(44)

با حل این معادله دیفرانسیل، پاسخ مربوط به هر درجه آزادی *i* مطابق (45) خواهد بود:

$$u_{i}(\xi) = A_{i}\xi^{\left(\frac{D_{ii}^{0}-D_{ii}^{1}}{D_{ii}^{0}}\right)} + \frac{B_{i}}{D_{ii}^{0}-D_{ii}^{1}} - \frac{4a_{i}}{D_{ii}^{0}-2D_{ii}^{1}}\sqrt{\xi} - \frac{4b_{i}}{3(D_{ii}^{0}+2D_{ii}^{1})}\xi\sqrt{\xi}$$
(45)

که در آن A_i و B_i از شرایط مرزی مسئله (جابهجایی در نوک ترک و بارگذاری در گرهها) برای هر درجه آزادی محاسبه میشوند.

3-3- انتگرال /

در سال 1957، اشلبی با تعریف کانتورهای انتگرال برای مسائل الاستواستاتیک متوجه شد که انرژی میدان مستقل از انتخاب مسیر است. در ادامه، در سال 1968، رایس همین مفهوم را برای مسائل مکانیک شکست به کار برد. وی متوجه شد که انتگرال *I* میتواند یک معیار برای تعریف رشد ترک باشد. انتگرال *I* مشابه مفهوم کار انجام شده است، و بنابراین برای



شکل 2 رابطه بین دستگاه مختصات مقیاس شده و مختصات قطبی



میدان ننش و جابهجایی را با استفاده از بسط سری ویلیامز در مختصات
قطبی و یا مختصات دکارتی نوشت [5 ، 19]. در سری ویلیامز، ضرایب سری
طوری محاسبه میشوند که تکینگی نوک ترک بهصورت تحلیلی قابل بیان
باشد. بنابراین برای توسعه فیزیک ترک در روش معادلات مجزا، از یک فرم
جدید از بردار گرهای نبروهای حجمی استفاده شده است. لازم به ذکر است
که در مسائل الاستواستاتیک، تابع نیروهای حجمی برای هر گره $f^b_i({\mathfrak E})$ به
$(f_i^b(\xi) = a_i\xi + b_i)$ صورت خطی از 0 = ξ تا 1 = ξ تغییر میکند ($f_i^b(\xi) = a_i\xi + b_i$).
برای بهدست آوردن دو مجهول a_i و b_i از شرایط مرزی ترکشن در $\xi = 0$ و
ξ = 1 استفاده میشود. از آنجایی که در مسائل مکانیک شکست، تنش در

مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9

www.SID.ir

محیطهای بسته مقدار آن برابر صفر و برای محیطهای باز غیرصفر است (شکل 3) [28]. رایس نشان داده است که برای محیط ارتجاعی اطراف نوک ترک، انتگرال *I* برابر انرژی پتانسیل است. با استفاده از حل میدان تنش ارتجاعی، میتوان انتگرال / را بهصورت زیر محاسبه کرد [5]:

$$J_{k} = \int_{\Gamma} (W n_{k} - \{T\} \{u\}_{\hat{x}_{k}}) \,\mathrm{d}\Gamma$$
(46)

که در رابطه (46)، W چگالی انرژی کرنشی میدان، (T) بردار ترکشن k در سطح کانتور دلخواه، $\{u\}$ بردار جابه جایی، و n_k بردار نرمال در جهت میباشد. در مسائل دوبعدی می توان انتگرال *I* را به صورت ساده تری برای مودهای خالص به صورت رابطه (47) و (48) نوشت [5]:

$$J_{I} = \int_{\Gamma} W d\hat{y} - \int_{\Gamma} (T) (u)_{\hat{x}} d\Gamma$$
(47)

$$J_{II} = \int_{\Gamma} W d\hat{x} - \int_{\Gamma} \{T\} \{u\}_{\hat{\mathcal{Y}}} \, \mathrm{d}\Gamma \tag{48}$$

3-4- استخراج انتگرال / در روش معادلات مجزا

بر اساس بررسیهای انجامشده، استخراج انتگرال / با استفاده از روش معادلات مجزا تاکنون در هیچ مرجعی گزارش نشده است. برای محاسبه انتگرال /، مطابق رابطه (46)، باید همه عبارتهای این رابطه در دستگاه مختصات مقیاس شده استخراج گردد. در گام نخست برای محاسبه انتگرال *I* باید تابع کانتور دلخواه مشخص گردد. معمولاً برای کاهش هزینههای محاسباتی در روشهای عددی، بایستی به دنبال سهل ترین راه برای تشکیل معادلات حاکم گشت. رابطه (46) برای هر کانتوری قابل محاسبه است؛ با وجود این، از آنجایی که در کانتور دایرهای، شعاع دایره ثابت است، بنابراین تنها پارامتر مستقل heta میباشد. از سوی دیگر، مطابق رابطه (41)، کانتور دایرهای سبب می گردد که تنها پارامتر مستقل در دستگاه مختصات مقياس شده، η باشد، كه اين موضوع نيز سبب كاهش هزينه هاى محاسباتى و سادهتر شدن روابط حاکم می گردد. بنابراین، در این مقاله از کانتور دایرهای جهت محاسبه انتگرال / برای هر یک از مودهای خالص استفاده می شود. برای کانتور دایرهای می توان نوشت:

$$\hat{y} = r \sin \theta$$
 , $\hat{x} = r \cos \theta$ (49)

$$d\hat{y} = r\cos\theta$$
 , $d\hat{x} = -r\sin\theta$ (50)

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = \sqrt{\left(\left(\frac{d\hat{x}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\hat{y}}{d\theta}\right)^2\right)}$$
(51)

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = r$$

$$\begin{aligned} I_{D} = (\eta) - [0] +$$

همه یارامترهای روابط (55) تا (57) در مسائل الاستواستاتیک توسعه داده شدهاند. پارامترهای دیگر در روابط (53) و (54) در مسائل مکانیک شکست به صورت (58) و (59) توسعه داده می شود.

$$\begin{bmatrix} L^{J_{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} L^{J_{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix}$$
(60)

که طبق رابطه (8) به صورت (61) و (62) قابل بیان هستند:
$$\partial$$

$$\begin{bmatrix} L^{J_{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{1J_{I}}(\eta) \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} + \begin{bmatrix} b^{2J_{I}}(\eta) \end{bmatrix} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}$$
(61)

$$\begin{bmatrix} L^{J_{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{1J_{II}}(\eta) \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} + \begin{bmatrix} b^{2J_{II}}(\eta) \end{bmatrix} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}$$
(62)

$$\begin{bmatrix} b^{1J_{I}}(\eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix}$$
(63)
$$\begin{bmatrix} b^{2J_{I}}(\eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} -y(\eta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -y(\eta) \end{bmatrix}$$
(64)
$$\begin{bmatrix} b^{1J_{II}}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\eta)_{,\eta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & x(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix}$$
(65)
$$\begin{bmatrix} b^{2J_{II}}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\eta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & x(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix}$$
(66)

$$\{u\}_{\hat{x}} = [B^{1J_{I}}(\eta)]\{u(\xi)\}_{\xi} + \frac{1}{\xi}[B^{2J_{I}}(\eta)]\{u(\xi)\}$$
(67)

$$\{u\}_{\hat{\mathcal{Y}}} = [B^{1J_{II}}(\eta)]\{u(\xi)\}_{\xi} + \frac{1}{\xi}[B^{2J_{II}}(\eta)]\{u(\xi)\}$$
(68)

$$[B^{1J_l}(\eta)] = [b^{1J_l}(\eta)][N(\eta)]$$
(69)

$$[B^{2J_{I}}(\eta)] = [b^{2J_{I}}(\eta)][N(\eta)]_{,\eta}$$
(70)

$$[B^{1J_{II}}(\eta)] = [b^{1J_{II}}(\eta)][N(\eta)]$$
(71)

$$[B^{2J_{II}}(\eta)] = [b^{2J_{II}}(\eta)][N(\eta)]_{\eta}$$
(72)

با توجه به رابطه (42)، برای بهدست آوردن
$$d heta$$
 در روش معادلات مجزا

$$\int_{-\pi} \int_{-\pi} \int_{-\pi}$$

مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9

64 www.SID.ir

که در آن

$$h_{\eta}(\eta) = \left(\frac{y(\eta)_{,\eta}x(\eta) - x(\eta)_{,\eta}y(\eta)}{r_{\eta}^{2}(\eta)}\right)$$
(76)

در رابطه انتگرال *J* (روابط (53) و (54)) کافی است به جای **6 cos** و از رابطه (76) استفاده گردد:

$$\sin \theta = \frac{y(\eta)}{r_{\eta}(\eta)}, \qquad \cos \theta = \frac{x(\eta)}{r_{\eta}(\eta)}$$
(77)

بنابراین برای یک المان انتگرال / برای مودهای خالص اول و دوم برابر است با:

$$J_{I}^{e} = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2} \{ \sigma(\xi, \eta) \}^{T} \{ \varepsilon(\xi, \eta) \} \frac{x(\eta)}{r_{\eta}(\eta)} - [n^{\xi}(\eta)]^{T} \{ \sigma(\xi, \eta) \} \right]$$

$$\left([B^{1J_{I}}(\eta)] \{ u(\xi) \}_{\xi} + \frac{1}{\xi} [B^{2J_{I}}(\eta)] \{ u(\xi) \} \right) \right] \xi r_{\eta}(\eta) h_{\eta}(\eta)$$

$$J_{II}^{e} = -\int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2} \{ \sigma(\xi, \eta) \}^{T} \{ \varepsilon(\xi, \eta) \} \frac{y(\eta)}{r_{\eta}(\eta)} \right]$$

$$+ [n^{\xi}(\eta)]^{T} \{ \sigma(\xi, \eta) \} ([B^{1J_{II}}(\eta)] \{ u(\xi) \}_{\xi}$$

$$+ \frac{1}{\xi} [B^{2J_{II}}(\eta)] \{ u(\xi) \} \right) \right] \xi r_{\eta}(\eta) h_{\eta}(\eta)$$

$$(79)$$

در این مقاله برای حل انتگرال از روش انتگرال گیری کلینشا-کورتیز استفاده می گردد. روابط (77) و (78) مقادیر انتگرال *I* برای یک المان بر روی یک کانتور دلخواه برای مودهای خالص می باشند. لازم به ذکر است که کانتور دلخواه مورد بررسی در این مقاله در فضای فیزیکی به صورت دایره تعریف شده است که در فضای نگاشت شده طبق رابطه (41) دایره باقی نخواهد ماند. مطابق شکل 4، برای محاسبه انتگرال *I* در روش معادلات مجزا، ابتدا انتگرال *I* برای هر المان محاسبه می شود، و سپس همه مقادیر به دست آمده با همدیگر جمع می شوند. بنابراین انتگرال *I* در کانتور دایره ای برای هر یک از مودهای خالص برابر است با:

$$J_{I}(\eta) = \sum_{i=1}^{n} (J_{I}^{e})_{i}, \qquad J_{II}(\eta) = \sum_{i=1}^{n} (J_{II}^{e})_{i}$$
(80)

4- اعتبارسنجي روش معادلات مجزا

جهت محاسبه انتگرال *I* با استفاده از رابطه (80) از محیط برنامهنویسی نرمافزار متلب استفاده شده است. بههمین منظور سه مثال آزمون جهت اعتبارسنجی روش معادلات مجزا در حل انتگرال *I* مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج آن با سایر مراجع موجود مقایسه شده است.

4-1- ورق محدود با ترک مرکزی

مثال اول مربوط به ورقی محدود با ابعاد $\mathbf{8} \times \mathbf{8}$ واحد با ترک مرکزی مطابق شکل (5 الف) میباشد. بارگذاری در جهت قائم و مقدار آن برابر σ ، مدول ارتجاعی $\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ، و ضریب پواسون $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ است. با در نظر گرفتن رفتار تنش مسطح در این مثال، بهعلت تقارن فقط یک چهارم ورق با 24 المان

روش عددی در حل مسائل مکانیک شکست، و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده [15] استفاده شده است. لازم به ذکر است که در روش اجزاء محدود مورد بررسی در این مقاله، از 5512 گره (1024 درجه آزادی)، و در روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده، از 15 گره (30 درجه آزادی) استفاده شده است. نکته قابل توجه این است که، از آنجایی که انتگرال L در روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده، تاکنون توسعه داده نشده است، از رابطه اجزاء محدود مرزی مقیاس شده، تاکنون توسعه داده نشده است. از رابطه $\frac{K_i^2}{E} = I$ جهت محاسبه غیرمستقیم انتگرال L استفاده گردیده است که در آن، K_I مریب شدت تنش است [5].

نتایج حاصل از روش معادلات مجزا همراه با نتایج آزمایشگاهی و عددی برای نسبتهای مختلف (a/b) در جدول 1، نشان داده شده است. همان طور که مشخص است نتایج در مقایسه با سایر نتایج از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

همان طور که ذکر گردید، یکی از مزایای محاسبه انتگرال l، محاسبه ضریب شدت تنش به صورت غیر مستقیم است. در این مثال، طبق رابطه $K_I = \sqrt{JE}$ ، ضریب شدت تنش مطابق جدول 2 برای نسبتهای مختلف (a/b) محاسبه شده است. همان طور که از جدول 2 مشخص است ضریب شدت تنش از دقت بسیار مناسبی بر خوردار است.

4-2- ورق محدود با ترک لبهای

مثال دوم مربوط به ورقی محدود با ابعاد $h \ge h \ge b \ge b$ واحد با ترک کناری مطابق شکل (6 الف) میباشد. بارگذاری و مشخصات مصالح در مثال دوم مشابه مثال اول درنظر گرفته شده است. با درنظر گرفتن رفتار تنش مسطح در این مثال، بهعلت تقارن فقط نصف ورق با 60 المان سه گرهای (242 درجه آزادی) مطابق شکل (6 ب و ج) مدلسازی گردیده است.

مشابه مثال اول، برای صحتسنجی روش مورد بررسی از نتایج عددی و آزمایشگاهی سایر مراجع استفاده گردیده است. در نتایج آزمایشگاهی از مطالعات تادا و همکارانش [29] استفاده شده است که برای این مثال،



ه گرهای و در مجموع با 98 درجه آزادی مطابق شکل (5 ب و ج) مدلسازی	شکل 4 نحوه محاسبه انتگرال <i>I</i> در روش معادلات مجزا						
ردیده است.	جدول 1 محاسبه انتگرال <i>ل</i> در روش معادلات مجزا به ازای پارامترهای مختلف						
برای صحتسنجی روش معادلات مجزا از نتایج عددی و آزمایشگاهی				در مثال ا	ول		
ایر مراجع استفاده گردیده است. در نتایج آزمایشگاهی، از مطالعات تادا و	بار	$\left(\frac{a}{a}\right)$	مرجع	مرجع	مرجع	بمثر حاض	میانگین خطا
مکارانش [29] استفاده شده است که در آن، ۲ [[۶(a/b] = م_باشد.	اعمالی	$\binom{b}{b}$	[30]	[29]	[15]	روس حاصر	(%)
$\frac{1}{E} = \frac{1}{E} = \frac{1}$		0/25	3/397	3/384	3/437	3/371	0/99
	σ=1	0/5	8/870	8/788		9/001	-1/95
$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1 + 0.128\left(\frac{a}{b}\right) - 0.288\left(\frac{a}{b}\right) + 1.525\left(\frac{a}{b}\right)^{3} $ (81)	_	0/25	13/588	13/536		13/484	0/58
در نتایج عددی از دو روش اجزاء محدود [30] بهعنوان متداول ترین	σ = 2	0/5	17/740	17/575		18/003	-1/96

مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9

www.SID.ir

σ

جدول 2 محاسبه غیرمستقیم ضریب شدت تنش با استفاده از انتگرال / در روش

معادلات مجزا به ازای پارامترهای مختلف در مثال اول						
∂k	К _I /да		K _I		1.	
مرجع [29]	روش حاضر	مرجع [29]	روش حاضر	$\left(\frac{a}{b}\right)$	اعمالی	
0/920	0/918	1/839	1/836	0/25		
0/737	0/75	2/964	3/000	0/5	σ=1	
1/840	1/836	3/679	3/672	0/25	-	
1/048	1/061	4/192	4/243	0/5	σ = 2	









مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9

www.SID.ir

نتایج حاصل از روش معادلات مجزا همراه با نتایج روش آزمایشگاهی و عددی برای نسبتهای مختلف **(**a/b) در جدول 3، نشان داده شده است. همانطور که مشاهده میشود، نتایج روش حاضر در مقایسه با سایر نتایج از دقت خوبی برخوردار است.

4-3- ورق محدود تحت بار برشی

مثال سوم مربوط به ورقی محدود با ابعاد $2 \ge b \ge b$ واحد با ترک لبهای مطابق شکل (7 الف) میباشد. بارگذاری در جهت افقی و مقدار آن برابر τ است. همچنین مدول ارتجاعی 0 = 3 واحد، و ضریب پواسون 0 = 0.25 = v است. با درنظر گرفتن رفتار تنش مسطح در این مثال، ورق با 46 المان سه گرهای (186 درجه آزادی) مطابق شکل (7 ب) مدل سازی گردیده است.

برای صحتسنجی روش معادلات مجزا از نتایج عددی دو روش بدون المان [31] و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده [15] استفاده شده است. نتایج حاصل از روش معادلات مجزا همراه با نتایج دو روش عددی دیگر، برای نسبت a/b = 0.3 در جدول 4، نشان داده شده است. همان طور که



جدول 3 محاسبه انتگرال *I* در روش معادلات مجزا به ازای پارامترهای مختلف

در منال دوم							
میانگین خطا	روش	مرجع	مرجع	مرجع	$\binom{a}{-}$	بار	
(%)	حاضر	[15]	[29]	[30]	$\left({b}\right)$	اعمالي	
0/24	6/828	7/038	7/098	6/394	0/25		
-4/06	52/334		50/290		0/5	σ=1	
-0/51	13/561		14/195	12/789	0/25	-	
-4/06	104/666		100/581		0/5	σ = 2	

مثال سوم	د,	معادلات مجزا	رەش	گرال لاد.	4 محاسبه انڌ	جدول ا
					•	

میانگین خطا (%)	روش حاضر	مرجع [15]	مرجع [31]	J
0/93	13/093	13/273	13/158	J_I
5/54	-3/085	-3/247	-3/285	J_{II}

مشخص است نتایج حاصل در مقایسه با سایر نتایج از دقت مناسبی برخوردار است.

5- نتيجه گيري

انتگرال *I* در نظریه مکانیک شکست بهعلت کاربرد در محاسبه ضریب شدت تنش، پیشبینی رشد ترک، محاسبه انرژی محیط ترکدار و مکانیک شکست غیرخطی دارای اهمیت فراوانی است. اخیراً روش جدیدی به نام روش معادلات مجزا برای حل مسائل پتانسیل، الاستواستاتیک و الاستودینامیک توسعه داده شده است. در این مقاله، با پیشنهاد قرار گرفتن نقطه مرجع در نوک ترک، مدلسازی هندسه ترک و فرم جدیدی از نیروهای گرهای حجمی، نوک ترک، مدلسازی هندسه ترک و فرم جدیدی از نیروهای گرهای حجمی، انتگرال *I* در مسائل دو بعدی برای مودهای خالص توسعه داده شد. در نهایت با حل دو مثال عددی که در آن پارامترهای متنوعی مورد بررسی قرار گرفت، روش پیشنهادی مورد صحتسنجی قرار گرفت. نتایج حاکی از آن است که روش معادلات مجزا دارای دقت مناسبی برای محاسبه انتگرال *I* میباشد.

6- مراجع

- R. D. Henshell, K. G. Shaw, Crack tip finite elements are unnecessary, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, No. 3, pp. 495-507, 1975.
- [2] R. S. Barsoum, On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 1, pp. 25-37, 1976.
- [3] G. R. Liu, S. S, Quek, *The finite element method: a practical course:* Butterworth-Heinemann, 2003.
- [4] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 601-620, 1999.
- [5] S. Mohammadi, *Extended finite element method: for fracture analysis of structures*: John Wiley & Sons, 2008.
- [6] A. Ghasemi Ghalebahman, S. Salavati, Utilizing the extended finite element method for determining crack stress intensity factors and higher order terms coefficients, *Modares Mechanical Engineering*, Vol.
 - 15, No. 2, pp. 135-146, 2015. (In Persian)
- [7] L. Wrobel, M. Aliabadi, The Boundary Element Method, Vol1: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics, Vol2: Applications in Solids and Structures, Wiley, 2002.
- [8] T. A. Cruse, W. Vanburen, Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-15, 1971.
- [9] T. A. Cruse, Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method, *Surface Crack, Physical Problems and Computational Solutions, ASME New York*, pp. 153-170, 1972.
- [10] A. Portela, M. H. Aliabadi, D. P. Rooke, Efficient boundary element analysis of sharp notched plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, No. 3, pp. 445-470, 1991.
- [11] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.



مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9

www.SID.ir

توسعه روش معادلات مجزا برای محاسبه انتگرال ∫ در مسائل مکانیک شکست ارتجاعی خطی

- [22] N. Khaji, M. I. Khodakarami, A new semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for potential problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, No. 6, pp. 845-854, 2011.
- [23] M. I. Khodakarami, N. Khaji, Analysis of elastostatic problems using a semi-analytical method with diagonal coefficient matrices, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, No. 12, pp. 1288-1296, 2011.
- [24] N. Khaji, M. I. Khodakarami, A semi-analytical method with a system of decoupled ordinary differential equations for three-dimensional elastostatic problems, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 18, pp. 2528-2546, 2012.
- [25] M. I. Khodakarami, N. Khaji, M. T. Ahmadi, Modeling transient elastodynamic problems using a novel semi-analytical method yielding decoupled partial differential equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 213–216, No. 0, pp. 183-195, 2012.
- [26] N. Khaji, M. Mirzajani, Frequency domain analysis of elastic bounded domains using a new semi-analytical method, *Acta Mechanica*, Vol. 224, No. 7, pp. 1555-1570, 2013.
- [27] M. I. Khodakarami, N. Khaji, Wave propagation in semi-infinite media with topographical irregularities using Decoupled Equations Method, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 65, pp. 102-112, 2014.
- [28] J. R. Rice, A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65, pp. 379-386. 1968.
- [29] H. Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin *The stress analysis of cracks handbook*: Professional engineering publishing, 2000.
- [30] ANSYS, Commercial finite element package.
- [31] B. N. Rao, S. Rahman, Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods Part I: Rates of stress intensity factors, *Computational Mechanics*, Vol. 28, No. 5, pp. 351-364, 2002.

- [12] J. P. Wolf, C. Song, Scaled boundary finite-element method a primer: Derivations, *Computers and Structures*, Vol. 78, No. 1, pp. 191-210, 2000.
- [13] C. Song, J. P. Wolf, Scaled boundary finite-element method a primer: Solution procedures, *Computers and Structures*, Vol. 78, No. 1, pp. 211-225, 2000.
- [14] C. Song, J. P. Wolf, Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method, *Computers and Structures*, Vol. 80, No. 2, pp. 183-197, 2002.
- [15] [15] S. R. Chidgzey, A. J. Deeks, Determination of coefficients of crack tip asymptotic fields using the scaled boundary finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72, No. 13, pp. 2019-2036, 2005.
- [16] Z. Yang, Fully automatic modelling of mixed-mode crack propagation using scaled boundary finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, No. 12, pp. 1711-1731, 2006.
- [17] Z. Yang, Application of scaled boundary finite element method in static and dynamic fracture problems, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 22, No. 3, pp. 243-256, 2006.
- [18] C. Song, Z. Vrcelj, Evaluation of dynamic stress intensity factors and Tstress using the scaled boundary finite-element method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 8, pp. 1960-1980, 2008.
- [19] T. L. Anderson, *fracture mechanics fundamental and applications*: Taylor & Francis, 2005.
- [20] N. Choupani, M. Soltanpour Khamneh, Investigation on mixed mode elastic-plastic fracture behavior of ABS polymeric material, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 272-280, 2015. (In Persian)
- [21] A. Portela, M. H. Aliabadi, D. P. Rooke, Dual boundary element method. Effective implementation for crack problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 6, pp. 1269-1287, 1992.

مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دورہ 15، شمارہ 9