مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دوره 15، شماره 9، ص‌ص 59-68

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

توسعه روش معادلات مجزا برای محاسبه انتگرال J در مسائل مکانیک شکست ارتجاعی خطی

مهدی یزدانی[1]، ناصر خاجی[2*]

1- دانشجوی دکترای مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- استاد مهندسی زلزله، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، صندوق پستی 397-14115، nkhaji@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 30 اردیبهشت 1394
پذیرش: 01 تیر 1394
ارائه در سایت: 07 مرداد 1394

کلید واژگان:
روش معادلات مجزا
مکانیک شکست ارتجاعی خطی
انتگرال J
مسائل دوبعدی

چکیده

یکی از مسائل مهم در تحلیل و طراحی سازه‌ها، وجود ترک و نقص در سازه و اثرات آن در تحلیل و طراحی سازه‌ها می‌باشد. بسیاری از مسائلی که دارای ترک هستند، به‌صورت تحلیلی قابل حل نیستند؛ از این‌رو، حل مسائل مکانیک شکست با روش‌های عددی به یکی از مسائل مهم تبدیل گشته است. مقاله حاضر به توسعه یک روش جدید به‌نام روش معادلات مجزا در مسائل مکانیک شکست می‌پردازد؛ که در آن، با استفاده از نظریه مکانیک شکست ارتجاعی خطی، انتگرال J محاسبه گشته است. روش معادلات مجزا یک روش نیمه‌تحلیلی با ماتریس ضرایب قطری است. در این روش، تنها مرز مسئله با استفاده از توابع شکل مرتبه بالا و توابع نگاشت چیبیشفی گسسته‌سازی می‌گردد. در این روش، با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار و روش انتگرالی کلینشا-کورتیز، معادلات دیفرانسیل اویلری به‌صورت مجزا ایجاد می‌گردند. در ادامه با تعریف دستگاه مختصات مرجع در نوک ترک و تعریف یک فرم جدید از بردار نیروهای گره‌ای، مسئله ترک در روش معادلات مجزا پیاده‌سازی گردیده و انتگرال J محاسبه گردیده است. در نهایت، با حل دو مثال عددی، روش معادلات مجزا مورد صحت‌سنجی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که روش معادلات مجزا دارای دقت مناسبی در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و عددی می‌باشد.

Development of Decoupled Equations Method to Calculate J-Integral in Linear Elastic Fracture Mechanics Problems

Mahdi Yazdani, Naser Khaji*

Department of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
* P.O.B. 14115-397 Tehran, Iran, nkhaji@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 May 2015
Accepted 22 June 2015
Available Online 29 July 2015

Keywords:
Decoupled equations method
Linear elastic fracture mechanics (LEFM)
J-Integral
2D Problems

ABSTRACT

The existence of crack and notch is a significant and critical subject in the analysis and design of solids and structures. As most of the damage problems do not have closed-form solutions, numerical methods are current approaches for dealing with fracture mechanics problems. This study presents a novel application of the decoupled equations method (DEM) to model crack issues. Based on linear elastic fracture mechanics (LEFM), the J-integral is computed using the DEM. In this method, only the boundaries of problems are discretized using specific higher-order sub-parametric elements and higher-order Chebyshev mapping functions. Implementing the weighted residual method and using Clenshaw-Curtis numerical integration result in diagonal Euler's differential equations. Consequently, when the local coordinates origin (LCO) is located at the crack tip, the geometry of crack problems is directly implemented without further processing. In order to present infinite stress at the crack tip, a new form of nodal force function is proposed. Validity and accuracy of this method is fully demonstrated through two benchmark problems. The numerical results agree very well with the results from existing experimental results and numerical methods available in literature.

1- مقدمه

تحقیقات نشان می‌دهد که اکثر فروریختگی‌های ایجادشده در سازه‌ها به‌علت ایجاد ناپیوستگی در هندسه سازه‌ها و به‌وجود آمدن تمرکز تنش می‌باشد. ناپیوستگی در هندسه می‌تواند به‌صورت تغییرات در شکل هندسی، بازشدگی، سوراخ، ترک و شکاف باشد. بنابراین یکی از مسائل مهم در تحلیل و طراحی سازه‌ها در نظر گرفتن اثر وجود ترک در سازه می‌باشد. بسیاری از مسائلی که دارای ترک هستند به‌صورت تحلیلی قابل حل نیستند؛ و لازم است این مسائل با روش‌های عددی حل شوند. حل مسئله ترک با استفاده از برخی از روش‌های عددی از لحاظ فرمول‌بندی تا حدودی پیچیده بوده و از لحاظ محاسباتی دارای هزینه‌ی نسبتاً بالایی هستند. از این‌رو، توسعه و بهبود

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
M. Yazdani, N. Khaji, Development of Decoupled Equations Method to Calculate J-Integral in Linear Elastic Fracture Mechanics Problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 59-68, 2015 (In Persian)

روش‌های عددی برای حل این دسته از مسائل یک امر اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. مهمترین روش‌های عددی که تاکنون برای حل مسائل مکانیک شکست توسعه داده شده‌اند شامل روش اجزاء محدود، روش المان مرزی، روش اجزاء محدود توسعه‌یافته، روش‌های بدون المان، و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده است. روش اجزاء محدود به‌طور وسیعی در مسائل مکانیک شکست به‌کار برده شده است، ولی المان‌های رایج که در این روش به کار می‌روند در نزدیکی ترک‌ها و حفره‌ها دارای دقت خوبی نمی‌باشند و حتی اگر تعداد المان‌ها را در این محدوده زیاد کنیم به دقت مورد نیاز نخواهیم رسید. برای حل این مشکل، تدابیر خاصی توسط محققان اتخاذ شده است. به‌طور کلی، برای به‌دست آوردن ضریب شدت تنش با استفاده از روش اجزاء محدود از المان‌های تکین یک‌چهارم (یا المان نوک ترک) استفاده می‌شود [1-3]. در ادامه، به‌علت بعضی از مشکلات موجود در روش اجزاء محدود، روش‌های عددی دیگری توسعه یافتند. به‌عنوان مثال به دلیل پیچیدگی‌های موجود در فرایند الگوریتم‌های المان‌بندی متوالی در روش اجزاء محدود، روش اجزاء محدود توسعه‌یافته به‌وجود آمد [4-6]. همچنین، به‌دلیل نیاز به المان‌های فراوان در اطراف نوک ترک ترک‌های بسیار ریز و هزینه‌های محاسباتی و زمانی بالا، روش المان مرزی توسعه داده شده است [7-8]. توسعه روش المان مرزی برای حل مسائل مکانیک شکست، اولین بار توسط کروز ارائه شد که در آن ضریب شدت تنش با دقت کمی به‌دست آمده بود با به‌دست آوردن تابع گرین ترک، که در آن فرم دقیق ترکشن وجود داشت، نیاز به مدلسازی لبه‌های ترک از بین رفت و دقت حل ضرایب تنش بهبود یافت و تا به امروز این روش بسیار توسعه یافته است. از آنجایی که در روش المان مرزی فقط مرز حوزه المان‌بندی می‌شود از لحاظ هزینه‌های محاسباتی نسبت به روش اجزاء محدود دارای کاهش چشمگیری است. در روش المان مرزی، تنش‌ها در نقاط داخل میدان دارای دقت بالایی هستند؛ زیرا در این روش، تقریبی در جواب در داخل میدان اعمال نمی‌شود و جواب در داخل میدان دقیق و پیوسته است. بنابراین روش المان مرزی در مسائلی که در آن تغییرات تنش زیاد است (همانند مسئله ترک) بسیار مناسب است. البته لازم به ذکر است که روش المان مرزی انعطاف‌پذیری روش اجزاء محدود را ندارد [9-10]. روش‌های بدون المان، باتوجه به اینکه نیازی به گسسته‌سازی ندارند، نیز برای حل مسائل ترک مورد توجه قرار گرفته‌اند [11]. در سال‌های اخیر، روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده نیز با توجه به دقت مناسبی که دارد برای حل مسائل مکانیک شکست بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این روش با ترکیب روش‌های اجزاء محدود و المان مرزی دارای ویژگی‌های منحصر به فردی می‌باشد. در این روش مشابه المان مرزی فقط مرز مسئله گسسته‌سازی می‌گردد با این تفاوت که نیازی به حل اساسی ندارد [12-13]. روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده بسیاری از مشکلات موجود در روش اجزاء محدود، از جمله مش‌بندی بسیار ریز در اطراف نوک ترک و یا استفاده از المان‌های مخصوص تقویت شده در اطراف نوک ترک را حذف می‌نماید. سانگ و ولف نشان دادند که روش جدید اجزاء محدود مرزی مقیاس شده به راحتی می‌تواند ضریب شدت تنش را محاسبه کند. [14]. در ادامه، محققین دیگر، مسائل مختلف مکانیک شکست را در این روش مورد ارزیابی قرار دادند [15-18].

در مسائل مکانیک شکست، انتگرال J یکی از مفاهیم پایه‌ای و مهم می‌باشد. انتگرال J در محاسبه انرژی محیط ترک‌خورده، محاسبه ضریب شدت تنش، رشد ترک و مسائل مربوط به مکانیک شکست غیرخطی کاربرد دارد [5، 19-20]. از آنجایی که انتگرال J به‌صورت تحلیلی فقط برای مسائل محدودی قابل حل است، و به علت پیچیدگی موجود در روش‌های عددی محدودی توسعه یافته است [5، 19 و 21]؛ استخراج آن با کمک روش‌های جدیدتر امری ضروری می‌باشد. یکی از این روش‌های نسبتاً جدید، روش معادلات مجزا است که توسط خداکرمی و خاجی پیشنهاد شده است، که برای حل مسائل مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. از مهمترین دست‌آوردهای روش مزبور می‌توان به حل مسائل پتانسیل [22]، الاستواستاتیک [23،24]، الاستودینامیک [25،26] و انتشار امواج ارتجاعی [27] اشاره کرد. هدف از مقاله حاضر، توسعه روش معادلات مجزا برای میدان‌های ترک‌دار در حالت دوبعدی براساس مکانیک شکست ارتجاعی خطی است. برای این منظور، نحوه استخراج انتگرال J برای اولین بار در این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مقاله با پیشنهاد محل نقطه مرجع و فرم جدیدی از بردار نیروهای گره‌ای، شرایط مرزی محیط‌های ترک‌دار در مسئله اعمال می‌گردد، و با حل دو مثال عددی، دقت روش معادلات مجزا مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

2- مبانی روش معادلات مجزا

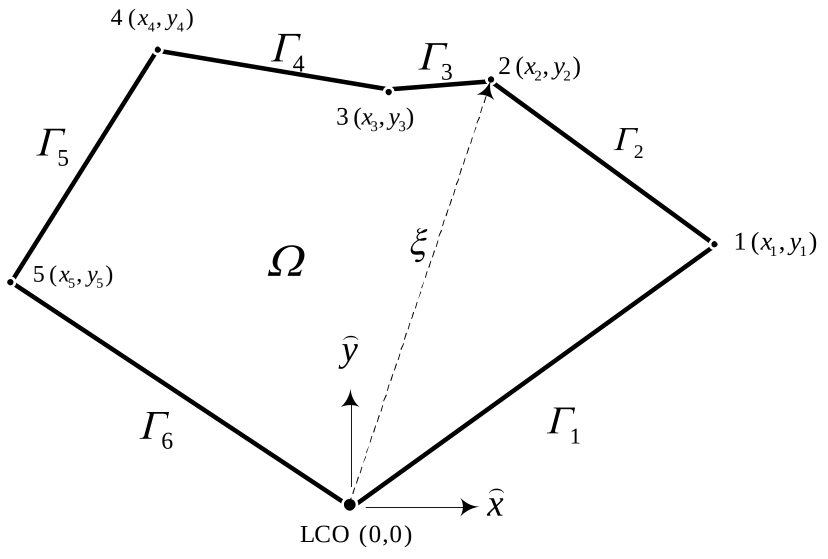
در روش معادلات مجزا از چهار ابزار کلیدی استفاده می‌شود تا ماتریس ضرایب معادلات حاکم قطری شده، و دستگاه معادلات حاکم به‌صورت مجزا و مستقل از هم نوشته شود. رسیدن به این هدف با استفاده از (1) توابع شکل مرتبه بالا، (2) توابع نگاشت چبیشف، (3) روش انتگرال‌گیری کلینشا-کورتیز، و (4) همچنین روند تولید فرم انتگرالی معادله حاکم بر مسئله مربوطه، مهیا شده است. به منظور مدل‌سازی هندسه و همچنین فیزیک مسئله در روش حاضر، ابتدا یک نقطه به‌عنوان مرجع مختصات محلی (LCO) انتخاب شده، و تمام خصوصیات هندسی و فیزیکی مسئله نسبت به این نقطه ارزیابی می‌گردد. در عین حال، فقط مرزهای مسئله با استفاده از المان‌هایی با یک بُعد کم‌تر از بُعد فضای مسئله المان‌بندی می‌گردند. مطابق شکل 1، مشخصات یک هندسه دلخواه در دستگاه مختصات اصلی و دستگاه مختصات مقیاس شده نشان داده شده است.

با توجه به انتخاب محورهای محلی، مرزهای مسئله به‌طور کلی به دو دسته تقسیم می‌گردند؛ مرزهایی که امتداد آن‌ها از LCO می‌گذرند و روی محور شعاعی ξ قرار می‌گیرند، و مرزهایی که امتداد آن‌ها از LCO نمی‌گذرند (مرزهایی که موازی η هستند). در این روش، فقط باید مرزهای نوع دوم را المان‌بندی نمود. محدوده تغییرات محور مماسی η به‌صورت $-1 \leq \eta \leq +1$ است. در مسائل محدود، تغییرات محور شعاعی ξ بین صفر (در LCO) و یک (بر روی مرزها) می‌باشد.

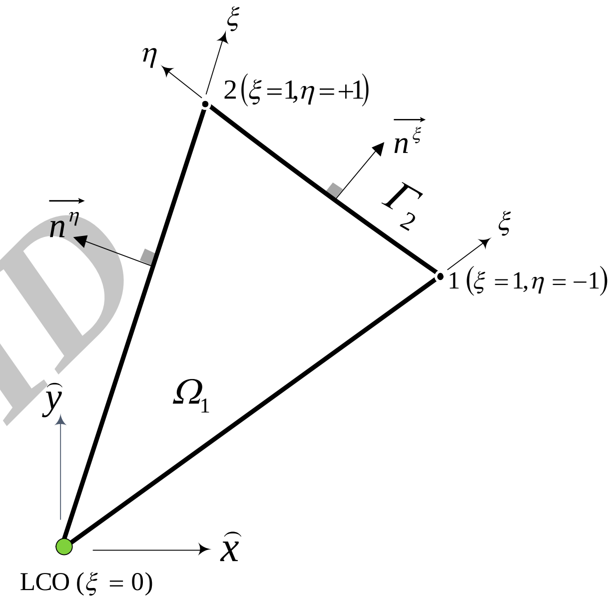
در روش حاضر، مختصات هر نقطه درون حوزه مسئله در مختصات کلی با $(\hat{x},\hat{y})$ مشخص می‌گردد، درحالی‌که مختصات هر نقطه از مرزهای مسئله نیز با (x,y) تعیین می‌گردد. به منظور انتقال هندسه مسئله از مختصات کلی $(\hat{x},\hat{y})$ به مختصات محلی (ξ,η)، از توابع نگاشت که از نوع چندجمله‌ای‌های مرتبه بالای چبیشف $[\phi(\eta)]$ می‌باشند، استفاده می‌گردد. بنابراین مختصات هر نقطه روی مرزهای مسئله با استفاده از توابع نگاشت به‌صورت رابطه‌های (1) و (2) قابل محاسبه خواهد بود:

$$x(\eta) = \sum_{i=1}^{n_\eta+1} \varphi_i(\eta) x_i \qquad (1)$$

$$y(\eta) = \sum_{i=1}^{n_\eta+1} \varphi_i(\eta) y_i \qquad (2)$$



(الف)



(ب)

شکل 1 نحوه مدل‌سازی مسائل دو بعدی؛ (الف) هندسه مسئله در مختصات کلی، (ب) هندسه مسئله دو بعدی در مختصات محلی [23]

که در روابط (1) و (2)، x و y مختصات نقاط روی مرز در دستگاه مختصات کلی می‌باشند و n_η عداد نقاط گره‌ای المان‌های روی مرز هستند. در این روش، مختصات هر نقطه درون حوزه مسئله با استفاده از روابط (3) و (4) محاسبه می‌گردد:

$$\hat{x}(\xi,\eta) = \xi x(\eta) = \xi \sum_{i=1}^{n_\eta+1} \varphi_i(\eta) x_i \quad (3)$$

$$\hat{y}(\xi,\eta) = \xi y(\eta) = \xi \sum_{i=1}^{n_\eta+1} \varphi_i(\eta) y_i \quad (4)$$

تابع نگاشت برای یک المان $n_\eta + 1$ گره‌ای، با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف به‌صورت رابطه (5) تعیین می‌گردد:

$$\varphi_i(\eta) = \frac{2}{n_\eta} \sum_{n=0}^{n_\eta} \frac{1}{c_{(i-1)} c_n} T_n(\eta_{i-1}) T_n(\eta) \quad (5)$$

که در آن، $T_n(\eta)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از مرتبه n می‌باشد. همچنین برای مقادیر $0 < n < n_\eta$ مقدار $c_n = 1$ بوده، و برای مقادیر $n = 0, n_\eta$ مقدار $c_n = 2$ می‌باشد. به این ترتیب، توابع نگاشت به دست آمده، دارای خاصیت دلتای کرونیکر در هر یک از گره‌ها می‌باشند، یعنی:

$$\varphi_\alpha(\eta_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (6)$$

نقاط گره‌ای η_n که در آن‌ها $n = 0, \dots, n_\eta$ است، نقاط چبیشفی هستند که با استفاده از رابطه (7) به‌دست می‌آیند:

$$\eta_n = -\cos\left(\frac{n\pi}{n_\eta}\right) \quad (7)$$

که در این رابطه، هر المان دارای $n_\eta + 1$ گره می‌باشد که با استفاده از آن‌ها چندجمله‌ای‌هایی از درجه n_η برای درون‌یابی هندسه تولید می‌گردند.

به منظور استخراج روابط حاکم در مختصات محلی، به برخی از روابط پایه نیاز است. جزء سطح المان در مختصات کلی $(d\hat{x}d\hat{y})$ با جزء سطح المان در مختصات محلی $(\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta)$ رابطه‌ای به‌صورت (8) دارد:

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\hat{x}d\hat{y} = \left|\hat{J}(\xi,\eta)\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \xi|J(\eta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (8)$$

که در آن $\hat{J}(\xi,\eta)$ ماتریس ژاکوبی انتقال می‌باشد:

$$\hat{J}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi}(\xi,\eta) & \hat{y}_{,\xi}(\xi,\eta) \\ \hat{x}_{,\eta}(\xi,\eta) & \hat{y}_{,\eta}(\xi,\eta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

ماتریس ژاکوبی روی مرزها نیز با استفاده از روابط (3) و (4) به‌صورت (10) محاسبه می‌گردد:

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

در مسائل دو بعدی ماتریس اپراتور مشتق $[L]$ به‌صورت (11) تعریف می‌شود:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (11)$$

بنابراین، رابطه مشتق‌های بردار مذکور در دو دستگاه مختصات کلی و محلی با استفاده از رابطه (12) قابل بیان می‌باشد:

$$[L] = [b^1(\eta)]\frac{\partial}{\partial \xi} + [b^2(\eta)]\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta} \quad (12)$$

که در آن،

$$[b^1(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & -x(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[b^2(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} -y(\eta) & 0 \\ 0 & x(\eta) \\ x(\eta) & -y(\eta) \end{bmatrix} \quad (14)$$

به منظور محاسبه ترکشن در هر امتداد، نیاز به دانستن بردار نرمال در آن امتداد می‌باشد. بردار نرمال عمود بر سطح $\{n\}$ بر روی مرزهای مسئله به صورت (15) تعریف می‌گردند:

$$\{n\} = \frac{1}{|\Delta\vec{x}|}\Delta\vec{x} \quad (15)$$

با استفاده از رابطه (3) و (4)، رابطه (15) برای دو امتداد ξ و η را می‌توان به‌صورت (16) و (17) نوشت:

$$[n^{\xi}(\eta)] = \frac{1}{\left|\begin{Bmatrix} y(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} \end{Bmatrix}\right|} \begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & -x(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[n^{\eta}(\eta)] = \frac{1}{\left|\begin{Bmatrix} -y(\eta) \\ x(\eta) \end{Bmatrix}\right|} \begin{bmatrix} -y(\eta) & 0 \\ 0 & x(\eta) \\ x(\eta) & -y(\eta) \end{bmatrix} \quad (17)$$

در این روش، از توابع شکل با ویژگی‌های خاصی استفاده می‌گردد که در حالت کلی با $[N(\eta)]$ نشان داده می‌شوند. درون‌یابی توابع بر روی مرزها با استفاده از این توابع شکل انجام می‌گیرد که دارای دو ویژگی مهم هستند؛ یکی اینکه در نقاط گره‌ای المان‌ها دارای خاصیت دلتای کرونیکر می‌باشند، و دیگری این‌که مشتق اول آن‌ها نسبت به محورهای محلی مماسی در تمام گره‌ها برابر صفر است:

$$N_\alpha(\eta_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \tag{18}$$
$$N_{\alpha,\beta}(\eta_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \tag{19}$$

توابع شکل پیشنهادی برای یک المان $n_\eta + 1$ گره‌ای، یک چندجمله‌ای از مرتبه $2n_\eta + 1$ به‌صورت رابطه (20) می‌باشد که دارای $2n_\eta$ پارامتر مجهول است.

$$N_i(\eta) = \sum_{m=0}^{2n_\eta+1} a_m\eta^m = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \cdots + a_{2n_\eta+1}\eta^{2n_\eta+1} \tag{20}$$

ضرایب ثابت فوق با اعمال شرایط رابطه‌های (18) و (19) تعیین می‌گردند. مؤلفه‌های تغییرمکان در هر نقطه از فضای مسئله به مختصات (ξ,η) که به‌صورت $\{u(\xi,\eta)\} = [u_x(\xi,\eta) \quad u_y(\xi,\eta)]^T$ تعریف می‌گردند، با استفاده از توابع شکل بر حسب تغییرمکان گره‌های واقع بر المان‌های روی مرز با استفاده از رابطه (21) قابل محاسبه هستند:

$$\{u(\xi,\eta)\} = [N(\eta)]\{u(\xi)\}[u_x(\xi) \quad u_y(\xi)]^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

با استفاده از روابط (13) و (14)، مولفه‌های کرنش در نقطه (ξ,η) در فضای مسئله به‌صورت (22) بیان می‌گردند:

$$\{\varepsilon(\xi,\eta)\} = [\varepsilon_x(\hat{x},\hat{y}) \quad \varepsilon_y(\hat{x},\hat{y}) \quad \varepsilon_{xy}(\hat{x},\hat{y})]^{\mathrm{T}} = [B^1(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}[B^2(\eta)]\{u(\xi)\} \tag{22}$$

که در آن

$$[B^1(\eta)] = [b^1(\eta)][N(\eta)] \tag{23}$$
$$[B^2(\eta)] = [b^2(\eta)][N(\eta)]_{,\eta} \tag{24}$$

همچنین با استفاده از قانون هوک، در مورد مؤلفه‌های تنش در هر نقطه به مختصات (ξ,η) می‌توان گفت:

$$\{\sigma(\xi,\eta)\} = [D]\{\varepsilon(\xi,\eta)\} \tag{25}$$
$$\{\sigma(\xi,\eta)\} = [D]\left(\left[b^1(\eta)\right][N(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}\left[b^2(\eta)\right][N(\eta)]_{,\eta}\{u(\xi)\}\right) \tag{26}$$

که در رابطه‌های (25) و (26)، $[D]$ بیان‌گر ماتریس خواص مصالح می‌باشد.

معادله تعادل حاکم بر مسائل الاستواستاتیک دو بعدی به‌صورت (27) بیان می‌گردد:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{27}$$

که در رابطه (27) σ_{ij} بیان‌گر اجزاء تانسور تنش دوبعدی بوده و f_i نیز مؤلفه‌های نیروهای حجمی اعمال شده بر فضای مسئله هستند. لازم به تذکر است که در حالت دو بعدی مسائل الاستواستاتیک، $i = \hat{x},\hat{y}$ و $j = \hat{x},\hat{y}$ می‌باشند. معادله حاکم (27) را می‌توان به فرم قوی و با استفاده از روش‌های تحلیلی، یا به فرم باقیمانده وزن‌دار و به صورت عددی حل نمود. مبنای روش ارائه شده برای حل مسائل، روش باقیمانده‌های وزن‌دار می‌باشد، بنابراین

$$\int_\Omega w(\sigma_{ij,j} + f_i)\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{28}$$

با حل انتگرال فوق با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار معادله تعادل در روش معادلات مجزا به‌صورت رابطه (29) استخراج می‌گردد [21].

$$\xi[D^0]\{u(\xi)\}_{,\xi\xi} + [D^1]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \xi\{F^b(\xi)\} = 0 \tag{29}$$

که ماتریس‌های ضرایب و بردار موجود در رابطه بالا، به‌صورت روابط (30) تا (32) تعریف می‌گردند:

$$[D^0] = \int_{-1}^{+1}[B^1(\eta)]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][B^1(\eta)]|J(\eta)|\,\mathrm{d}\eta \tag{30}$$

$$[D^1] = \int_{-1}^{+1}[B^2(\eta)]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][B^1(\eta)]_{,\eta}|J(\eta)|\,\mathrm{d}\eta \tag{31}$$

$$\{F^b(\xi)\} = \int_{-1}^{+1}[N(\eta)]^{\mathrm{T}}\{f^b(\xi)\}|J(\eta)|\,\mathrm{d}\eta \tag{32}$$

که در رابطه (32)، $\{F^b(\xi)\} = \left[F_x^b \quad F_y^b\right]^{\mathrm{T}}$ بردار نیروهای حجمی در گره‌ها می‌باشد. در معادله دیفرانسیل (29) ماتریس‌های ضرایب ثابت با استفاده از روش انتگرال‌گیری کلنشا-کورتیس محاسبه گردیده است. استفاده از این روش انتگرال‌گیری به همراه توابع شکل و نگاشت ویژه معرفی شده سبب تولید ماتریس‌های ضرایب قطری می‌گردد [21-26]؛ یعنی:

$$D_{ij}^0 = 2\delta_{ij}[B^1(\eta_i)]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][B^1(\eta_i)]|J(\eta_i)| \tag{33}$$
$$D_{ij}^0 = 2\delta_{ij}[B^2(\eta_i)]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}][B^1(\eta_i)]_{,\eta}|J(\eta_i)| \tag{34}$$

که در رابطه‌های (33) و (34)، δ_{ij} دلتای کرونیکر می‌باشد. بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه (29) را می‌توان به‌صورت (35) به ازای هر درجه آزادی i نوشت:

$$\xi D_{ii}^0 u(\xi)_{i,\xi\xi} + D_{ii}^1 u(\xi)_{i,\xi} + \xi F_i^b(\xi) = 0 \tag{35}$$

در گام نخست این روش، رابطه (35) فقط برای گره‌هایی که تحت بارگذاری قرار دارند محاسبه می‌شود. در گام دوم، تغییرات تنش برای هریک از درجات آزادی فوق‌الذکر در امتداد محور ξ با استفاده از رابطه (26) تعیین می‌گردد. سپس، با استفاده از روابط تعادل، مقدار مؤلفه‌های نیروهای داخلی متمرکز مرتبط با هر گره در امتداد محور ξ و همچنین میزان تنش داخلی در نقطه LCO بر اساس رابطه (36) محاسبه می‌شود:

$$\{\sigma_{\mathrm{LCO}}\} = \sum_{i=1}^{n}\{\sigma_{\mathrm{LCO}i}\} \tag{36}$$

که در آن سهم هریک از گره‌ها با توجه به بازپخش این تنش داخلی در LCO برابر می‌شود با:

$$\{\sigma_{\mathrm{LCO}i}\} = \frac{D_{ii}^0}{\sum_{j=1}^{n} D_{jj}^0}\{\sigma_{\mathrm{LCO}}\} \tag{37}$$

در گام بعدی، بار دیگر معادله حاکم، با در نظر گرفتن نیروی داخلی حجمی محاسبه شده بر اساس تنش داخلی LCO به‌عنوان بار حجمی در امتداد ξ (رابطه (38))، به ازای هر درجه آزادی حل شده، و مؤلفه‌های تغییرمکان مربوط به هر گره در امتداد محور ξ محاسبه می‌گردد:

$$\{f_i^b(\xi)\} = [n^\eta]^{\mathrm{T}}\{\sigma_i(\xi)\} \tag{38}$$

در گام پایانی، و با مشخص شدن تابع مؤلفه‌های تغییرمکان برای هر گره در امتداد محور ξ، پاسخ برای سایر نقاط، با استفاده از توابع شکل درون‌یابی می‌شود. همچنین میزان تنش در هر نقطه از حوزه مسئله نیز با استفاده از رابطه (26) تعیین می‌گردد.

3- توسعه روش معادلات مجزا در مکانیک شکست

طبق مطالب ارائه شده در بخش 2، برای توسعه روش معادلات مجزا برای هر مسئله‌ای لازم است که هندسه و فیزیک مسئله مربوطه در روش معادلات مجزا استخراج گردد. برای همین منظور در ادامه این دو بخش برای مسائل مکانیک شکست ارائه می‌گردد.

3-1- مدل‌سازی هندسه ترک

با توجه به مطالعات انجام شده برای بیان مسئله ترک براساس مبانی روش معادلات مجزا و مفاهیم مکانیک شکست از سه فرض جهت بیان ترک در هندسه مسئله به‌صورت زیر استفاده شده است:

- مدل‌سازی هندسه ترک در حوزه مسئله: مشابه روش‌های اجزاء محدود، المان مرزی، و اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده، هندسه ترک در حوزه مسئله به‌صورت فضای خالی بسیار کوچکی مدل‌سازی می‌گردد.
- در نظر گرفتن نقطه مرجع در نوک ترک: در روش معادلات مجزا، تمامی خصوصیات هندسی و فیزیکی مسئله در یک دستگاه مختصات مرجع بیان می‌شود. با توجه به ضوابط تعریف این نقطه برای تعریف مسئله ترک، نوک ترک در محل نقطه LCO در نظر گرفته شده است. یکی از مهمترین دلایل انجام این کار آن است که در مکانیک شکست، همه خصوصیات فیزیکی ترک با استفاده از نوک ترک بیان می‌شود، و از آنجایی که در روش معادلات مجزا نقطه LCO نیز همین نقش را دارد، بنابراین برای ایجاد ارتباط بین روش معادلات مجزا و نظریه مکانیک شکست، از این فرض استفاده شده است.
- استخراج رابطه بین دستگاه مختصات مقیاس‌شده و مختصات قطبی: از آنجایی که مسئله ترک در مختصات قطبی بیان می‌شود، لازم است که معادلاتی که در روش معادلات مجزا استخراج می‌شوند، نیز در نهایت در مختصات قطبی بیان شوند.

با توجه به شکل 2، رابطه بین مختصات قطبی و دستگاه مختصات مقیاس‌شده در روش معادلات مجزا به‌صورت رابطه (39) نوشته می‌شود:

$$r^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \tag{39}$$

با توجه به تعریف مختصات مقیاس‌شده در روش معادلات مجزا (روابط (3) و (4)) و جایگذاری آن‌ها در رابطه (39)، رابطه (40) مطابق زیر به‌دست می‌آید

$$r^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 = [\xi x(\eta)]^2 + [\xi y(\eta)]^2 = \xi^2[x(\eta)^2 + y(\eta)^2] = \xi^2 r_\eta^2(\eta) \tag{40}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$r = \xi r_\eta(\eta) \tag{41}$$

از طرفی دیگر طبق شکل 2 رابطه (42) مطابق زیر به‌دست می‌آید

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y(\eta)}{x(\eta)}\right) \tag{42}$$

همان‌طور که قبلاً ذکر گردید، جابه‌جایی و تنش در روش معادلات مجزا بر حسب (ξ,η) و در مکانیک شکست بر حسب (r,θ) بیان می‌شوند. بنابراین با استفاده از رابطه‌های (41) و (42) به راحتی می‌توان این پارامترها را در دستگاه مختصات قطبی و محلی به همدیگر تبدیل کرد.

3-2- مدل‌سازی فیزیک ترک

در محیط‌های ترک‌دار به‌علت وجود تنش بی‌نهایت در نوک ترک، می‌توان میدان تنش و جابه‌جایی را با استفاده از بسط سری ویلیامز در مختصات قطبی و یا مختصات دکارتی نوشت [5 ، 19]. در سری ویلیامز، ضرایب سری طوری محاسبه می‌شوند که تکینگی نوک ترک به‌صورت تحلیلی قابل بیان باشد. بنابراین برای توسعه فیزیک ترک در روش معادلات مجزا، از یک فرم جدید از بردار گره‌ای نیروهای حجمی استفاده شده است. لازم به ذکر است که در مسائل الاستواستاتیک، تابع نیروهای حجمی برای هر گره $f_i^b(\xi)$ به صورت خطی از $\xi = 0$ تا $\xi = 1$ تغییر می‌کند $(f_i^b(\xi) = a_i\xi + b_i)$. برای به‌دست آوردن دو مجهول a_i و b_i از شرایط مرزی ترکشن در $\xi = 0$ و $\xi = 1$ استفاده می‌شود. از آنجایی که در مسائل مکانیک شکست، تنش در نوک ترک برابر بی‌نهایت است، برای بیان فیزیک مسئله ترک با روش معادلات مجزا، یک فرم جدید از $f_i^b(\xi)$ مطابق زیر ارائه می‌گردد:

$$f_i^b(\xi) = \frac{a_i}{\sqrt{\xi}} + \frac{b_i}{\xi\sqrt{\xi}} \tag{43}$$

در روش معادلات مجزا، با ارائه این فرم جدید از بردار نیروها، تکینگی در نوک ترک به‌صورت فیزیکی ارضاء می‌گردد. مشابه مسائل دیگر، با اعمال شرایط مرزی مسئله (شکل 3) ضرایب a_i و b_i از شرایط مرزی تراکشن (T_b, T) در $\xi = 0$ و $\xi = 1$ محاسبه می‌گردد.

حال می‌توان معادله دیفرانسیل برای جابه‌جایی نهایی هر گره در روش معادلات مجزا، مطابق رابطه (35)، را برای میدان‌های ترک‌دار مطابق رابطه (44) بازنویسی کرد:

$$\xi D_{ii}^0 u(\xi)_{i,\xi\xi} + D_{ii}^1 u(\xi)_{i,\xi} + a_i\sqrt{\xi} + \frac{b_i}{\sqrt{\xi}} = 0 \tag{44}$$

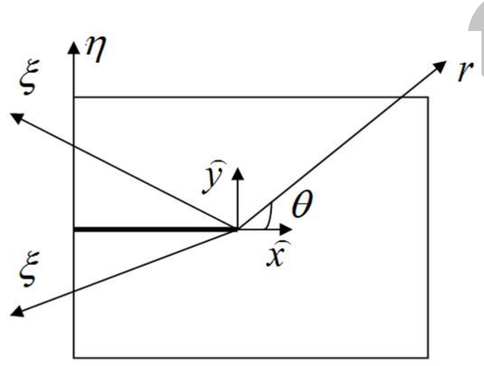
با حل این معادله دیفرانسیل، پاسخ مربوط به هر درجه آزادی i مطابق (45) خواهد بود:

$$u_i(\xi) = A_i\xi^{\left(\frac{D_{ii}^0 - D_{ii}^1}{D_{ii}^0}\right)} + \frac{B_i}{D_{ii}^0 - D_{ii}^1} - \frac{4a_i}{D_{ii}^0 - 2D_{ii}^1}\sqrt{\xi} - \frac{4b_i}{3\left(D_{ii}^0 + 2D_{ii}^1\right)}\xi\sqrt{\xi} \tag{45}$$

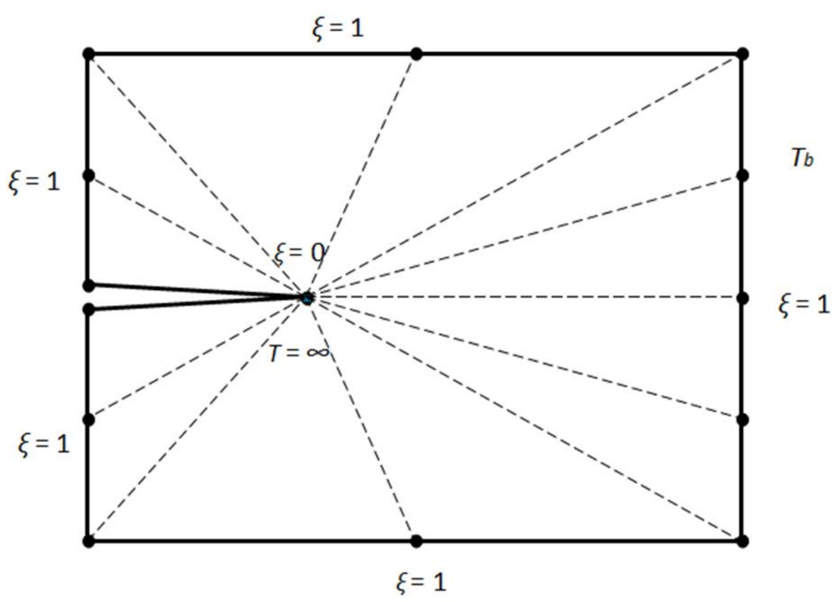
که در آن A_i و B_i از شرایط مرزی مسئله (جابه‌جایی در نوک ترک و بارگذاری در گره‌ها) برای هر درجه آزادی محاسبه می‌شوند.

3-3- انتگرال J

در سال 1957، اشلبی با تعریف کانتورهای انتگرال برای مسائل الاستواستاتیک متوجه شد که انرژی میدان مستقل از انتخاب مسیر است. در ادامه، در سال 1968، رایس همین مفهوم را برای مسائل مکانیک شکست به‌کار برد. وی متوجه شد که انتگرال J می‌تواند یک معیار برای تعریف رشد ترک باشد. انتگرال J مشابه مفهوم کار انجام شده است، و بنابراین برای



شکل 2 رابطه بین دستگاه مختصات مقیاس‌شده و مختصات قطبی



شکل 3 بیان مسئله ترک در روش معادلات مجزا

محیط‌های بسته مقدار آن برابر صفر و برای محیط‌های باز غیرصفر است (شکل 3) [28]. رایس نشان داده است که برای محیط ارتجاعی اطراف نوک ترک، انتگرال J برابر انرژی پتانسیل است. با استفاده از حل میدان تنش ارتجاعی، می‌توان انتگرال J را به‌صورت زیر محاسبه کرد [5]:

$$J_k = \int_{\Gamma} \left(W n_k - \{T\}\{u\}_{,\hat{x}_k}\right) \mathrm{d}\Gamma \tag{46}$$

که در رابطه (46)، W چگالی انرژی کرنشی میدان، $\{T\}$ بردار ترکشن در سطح کانتور دلخواه، $\{u\}$ بردار جابه‌جایی، و n_k بردار نرمال در جهت k می‌باشد. در مسائل دوبعدی می‌توان انتگرال J را به صورت ساده‌تری برای مودهای خالص به‌صورت رابطه (47) و (48) نوشت [5]:

$$J_I = \int_{\Gamma} W \mathrm{d}\hat{y} - \int_{\Gamma} \{T\}\{u\}_{,\hat{x}} \mathrm{d}\Gamma \tag{47}$$

$$J_{II} = \int_{\Gamma} W d\hat{x} - \int_{\Gamma} \{T\}\{u\}_{,\hat{y}} \mathrm{d}\Gamma \tag{48}$$

3-4- استخراج انتگرال J در روش معادلات مجزا

بر اساس بررسی‌های انجام‌شده، استخراج انتگرال J با استفاده از روش معادلات مجزا تاکنون در هیچ مرجعی گزارش نشده است. برای محاسبه انتگرال J، مطابق رابطه (46)، باید همه عبارت‌های این رابطه در دستگاه مختصات مقیاس‌شده استخراج گردد. در گام نخست برای محاسبه انتگرال J باید تابع کانتور دلخواه مشخص گردد. معمولاً برای کاهش هزینه‌های محاسباتی در روش‌های عددی، بایستی به دنبال سهل‌ترین راه برای تشکیل معادلات حاکم گشت. رابطه (46) برای هر کانتوری قابل محاسبه است؛ با وجود این، از آنجایی‌که در کانتور دایره‌ای، شعاع دایره ثابت است، بنابراین تنها پارامتر مستقل θ می‌باشد. از سوی دیگر، مطابق رابطه (41)، کانتور دایره‌ای سبب می‌گردد که تنها پارامتر مستقل در دستگاه مختصات مقیاس‌شده، η باشد، که این موضوع نیز سبب کاهش هزینه‌های محاسباتی و ساده‌تر شدن روابط حاکم می‌گردد. بنابراین، در این مقاله از کانتور دایره‌ای جهت محاسبه انتگرال J برای هر یک از مودهای خالص استفاده می‌شود. برای کانتور دایره‌ای می‌توان نوشت:

$$\hat{y} = r\sin\theta\,, \qquad \hat{x} = r\cos\theta \tag{49}$$

$$d\hat{y} = r\cos\theta\,, \qquad d\hat{x} = -r\sin\theta \tag{50}$$

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = \sqrt{\left(\left(\frac{d\hat{x}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\hat{y}}{d\theta}\right)^2\right)} \tag{51}$$

با جایگذاری روابط (49) و (50) در روابط (47) و (48) داریم

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = r \tag{52}$$

$$\begin{aligned} J_I &= \int_{\Gamma} W r\cos\theta \,\mathrm{d}\theta - \int_{\Gamma} \{T\}\{u\}_{,\hat{x}} r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \left(W\cos\theta - \{T\}\{u\}_{,\hat{x}}\right) r d\theta \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} J_{II} &= -\int_{\Gamma} W r\sin\theta \,\mathrm{d}\theta - \int_{\Gamma} \{T\}\{u\}_{,\hat{y}} r\mathrm{d}\theta \\ &= -\int_{-\pi}^{+\pi} \left(W\sin\theta + \{T\}\{u\}_{,\hat{y}}\right) r d\theta \end{aligned} \tag{54}$$

که در رابطه‌های بالا،

$$W = \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon\} \tag{55}$$

$$\{T\} = [n]^{\mathrm{T}}\{\sigma\} \tag{56}$$

$$\{u\} = [u_x \quad u_y]^{\mathrm{T}} \tag{57}$$

همه پارامترهای روابط (55) تا (57) در مسائل الاستواستاتیک توسعه داده شده‌اند. پارامترهای دیگر در روابط (53) و (54) در مسائل مکانیک شکست به‌صورت (58) و (59) توسعه داده می‌شود.

$$\{u\}_{,\hat{x}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial \hat{x}} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial \hat{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \tag{58}$$

$$\{u\}_{,\hat{y}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial \hat{y}} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial \hat{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \hat{y}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \tag{59}$$

که برای ساده‌نویسی روابط (58) و (59)، می‌توان ماتریس‌های اپراتور مشتق در انتگرال J را به‌صورت (60) تعریف کرد:

$$[L^{J_I}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix}, \qquad [L^{J_{II}}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \hat{y}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} \tag{60}$$

که طبق رابطه (8) به‌صورت (61) و (62) قابل بیان هستند:

$$[L^{J_I}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix} = [b^{1J_I}(\eta)]\frac{\partial}{\partial \xi} + [b^{2J_I}(\eta)]\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{61}$$

$$[L^{J_{II}}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \hat{y}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} = [b^{1J_{II}}(\eta)]\frac{\partial}{\partial \xi} + [b^{2J_{II}}(\eta)]\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{62}$$

که در آن،

$$[b^{1J_I}(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|}\begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \tag{63}$$

$$[b^{2J_I}(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|}\begin{bmatrix} -y(\eta) & 0 \\ 0 & -y(\eta) \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$[b^{1J_{II}}(\eta)] = \begin{bmatrix} x(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & x(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \tag{65}$$

$$[b^{2J_{II}}(\eta)] = \begin{bmatrix} x(\eta) & 0 \\ 0 & x(\eta) \end{bmatrix} \tag{66}$$

با جایگذاری روابط (63) تا (66) در رابطه‌های (58) و (59) داریم:

$$\{u\}_{,\hat{x}} = [B^{1J_I}(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}[B^{2J_I}(\eta)]\{u(\xi)\} \tag{67}$$

$$\{u\}_{,\hat{y}} = [B^{1J_{II}}(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}[B^{2J_{II}}(\eta)]\{u(\xi)\} \tag{68}$$

$$[B^{1J_I}(\eta)] = [b^{1J_I}(\eta)][N(\eta)] \tag{69}$$

$$[B^{2J_I}(\eta)] = [b^{2J_I}(\eta)][N(\eta)]_{,\eta} \tag{70}$$

$$[B^{1J_{II}}(\eta)] = [b^{1J_{II}}(\eta)][N(\eta)] \tag{71}$$

$$[B^{2J_{II}}(\eta)] = [b^{2J_{II}}(\eta)][N(\eta)]_{,\eta} \tag{72}$$

با توجه به رابطه (42)، برای به‌دست آوردن $\mathrm{d}\theta$ در روش معادلات مجزا خواهیم داشت

$$(1 + \tan^2\theta)\mathrm{d}\theta = \left(\frac{y(\eta)_{,\eta}x(\eta) - x(\eta)_{,\eta}y(\eta)}{x^2(\eta)}\right)\mathrm{d}\eta \tag{73}$$

بنابراین می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta &= \left(\frac{y(\eta)_{,\eta}x(\eta) - x(\eta)_{,\eta}y(\eta)}{x^2(\eta) + y^2(\eta)}\right)\mathrm{d}\eta \\ &= \left(\frac{y(\eta)_{,\eta}x(\eta) - x(\eta)_{,\eta}y(\eta)}{r_\eta^2(\eta)}\right)\mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{74}$$

یا

$$\mathrm{d}\theta = h_\eta(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{75}$$

که در آن

$$h_\eta(\eta)=\left(\frac{y(\eta)_{,\eta}x(\eta)-x(\eta)_{,\eta}y(\eta)}{r_\eta^2(\eta)}\right) \quad (76)$$

در رابطه انتگرال J (روابط (53) و (54)) کافی است به جای $\cos\theta$ و $\sin\theta$ از رابطه (76) استفاده گردد:

$$\sin\theta=\frac{y(\eta)}{r_\eta(\eta)}\,,\qquad \cos\theta=\frac{x(\eta)}{r_\eta(\eta)} \quad (77)$$

بنابراین برای یک المان انتگرال J برای مودهای خالص اول و دوم برابر است با:

$$J_I^e=\int_{-1}^{+1}\left[\frac{1}{2}\{\sigma(\xi,\eta)\}^T\{\varepsilon(\xi,\eta)\}\frac{x(\eta)}{r_\eta(\eta)}-\left[n^\xi(\eta)\right]^{\mathrm{T}}\{\sigma(\xi,\eta)\}\left(\left[B^{1J_I}(\eta)\right]\{u(\xi)\}_{,\xi}+\frac{1}{\xi}\left[B^{2J_I}(\eta)\right]\{u(\xi)\}\right)\right]\xi r_\eta(\eta)h_\eta(\eta) \quad (78)$$

$$J_{II}^e=-\int_{-1}^{+1}\left[\frac{1}{2}\{\sigma(\xi,\eta)\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon(\xi,\eta)\}\frac{y(\eta)}{r_\eta(\eta)}+\left[n^\xi(\eta)\right]^{\mathrm{T}}\{\sigma(\xi,\eta)\}\left(\left[B^{1J_{II}}(\eta)\right]\{u(\xi)\}_{,\xi}+\frac{1}{\xi}\left[B^{2J_{II}}(\eta)\right]\{u(\xi)\}\right)\right]\xi r_\eta(\eta)h_\eta(\eta) \quad (79)$$

در این مقاله برای حل انتگرال از روش انتگرال‌گیری کلینشا-کورتیز استفاده می‌گردد. روابط (77) و (78) مقادیر انتگرال J برای یک المان بر روی یک کانتور دلخواه برای مودهای خالص می‌باشند. لازم به ذکر است که کانتور دلخواه مورد بررسی در این مقاله در فضای فیزیکی به‌صورت دایره تعریف شده است که در فضای نگاشت‌شده طبق رابطه (41) دایره باقی نخواهد ماند. مطابق شکل 4، برای محاسبه انتگرال J در روش معادلات مجزا، ابتدا انتگرال J برای هر المان محاسبه می‌شود، و سپس همه مقادیر به‌دست آمده با همدیگر جمع می‌شوند. بنابراین انتگرال J در کانتور دایره‌ای برای هر یک از مودهای خالص برابر است با:

$$J_I(\eta)=\sum_{i=1}^{n}\left(J_I^e\right)_i\,,\qquad J_{II}(\eta)=\sum_{i=1}^{n}\left(J_{II}^e\right)_i \quad (80)$$

4- اعتبارسنجی روش معادلات مجزا

جهت محاسبه انتگرال J با استفاده از رابطه (80) از محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار متلب استفاده شده است. به‌همین منظور سه مثال آزمون جهت اعتبارسنجی روش معادلات مجزا در حل انتگرال J مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج آن با سایر مراجع موجود مقایسه شده است.

4-1- ورق محدود با ترک مرکزی

مثال اول مربوط به ورقی محدود با ابعاد 8 × 8 واحد با ترک مرکزی مطابق شکل (5 الف) می‌باشد. بارگذاری در جهت قائم و مقدار آن برابر σ، مدول ارتجاعی $E = 1$، و ضریب پواسون $\upsilon = 0.3$ است. با در نظر گرفتن رفتار تنش مسطح در این مثال، به‌علت تقارن فقط یک چهارم ورق با 24 المان سه‌گره‌ای و در مجموع با 98 درجه آزادی مطابق شکل (5 ب و ج) مدل‌سازی گردیده است.

برای صحت‌سنجی روش معادلات مجزا از نتایج عددی و آزمایشگاهی سایر مراجع استفاده گردیده است. در نتایج آزمایشگاهی، از مطالعات تادا و همکارانش [29] استفاده شده است که در آن، $J=\frac{a\pi\sigma^2}{E}[F(a/b)]^2$ می‌باشد. همچنین $F(a/b)$ برابر است با:

$$F\left(\frac{a}{b}\right)=1+0.128\left(\frac{a}{b}\right)-0.288\left(\frac{a}{b}\right)^2+1.525\left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad (81)$$

در نتایج عددی از دو روش اجزاء محدود [30] به‌عنوان متداول‌ترین روش عددی در حل مسائل مکانیک شکست، و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده [15] استفاده شده است. لازم به ذکر است که در روش اجزاء محدود مورد بررسی در این مقاله، از 5512 گره (11024 درجه آزادی)، و در روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده، از 15 گره (30 درجه آزادی) استفاده شده است. نکته قابل توجه این است که، از آنجایی‌که انتگرال J در روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده، تاکنون توسعه داده نشده است، از رابطه $J=\frac{K_I^2}{E}$ جهت محاسبه غیرمستقیم انتگرال J استفاده گردیده است که در آن، K_I ضریب شدت تنش است [5].

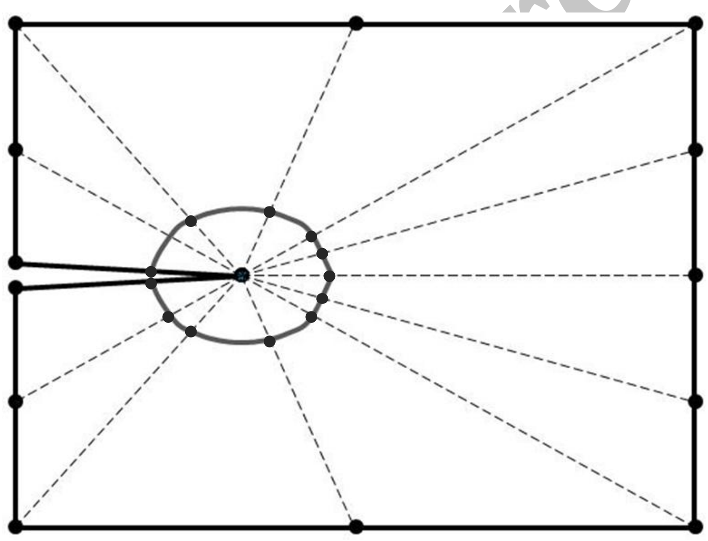
نتایج حاصل از روش معادلات مجزا همراه با نتایج آزمایشگاهی و عددی برای نسبت‌های مختلف (a/b) در جدول 1، نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است نتایج در مقایسه با سایر نتایج از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

همان‌طور که ذکر گردید، یکی از مزایای محاسبه انتگرال J، محاسبه ضریب شدت تنش به‌صورت غیرمستقیم است. در این مثال، طبق رابطه $K_I=\sqrt{JE}$، ضریب شدت تنش مطابق جدول 2 برای نسبت‌های مختلف (a/b) محاسبه شده است. همان‌طور که از جدول 2 مشخص است ضریب شدت تنش از دقت بسیار مناسبی برخوردار است.

4-2- ورق محدود با ترک لبه‌ای

مثال دوم مربوط به ورقی محدود با ابعاد $b \times 2h$ واحد با ترک کناری مطابق شکل (6 الف) می‌باشد. بارگذاری و مشخصات مصالح در مثال دوم مشابه مثال اول درنظر گرفته شده است. با درنظرگرفتن رفتار تنش مسطح در این مثال، به‌علت تقارن فقط نصف ورق با 60 المان سه‌گره‌ای (242 درجه آزادی) مطابق شکل (6 ب و ج) مدلسازی گردیده است.

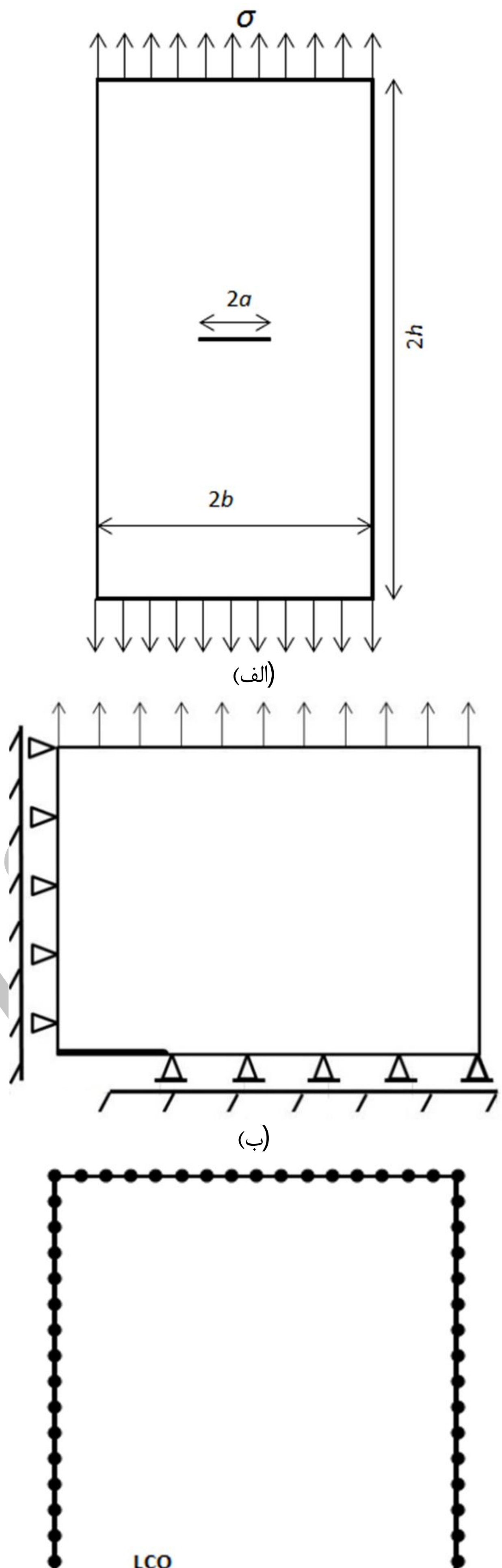
مشابه مثال اول، برای صحت‌سنجی روش مورد بررسی از نتایج عددی و آزمایشگاهی سایر مراجع استفاده گردیده است. در نتایج آزمایشگاهی از مطالعات تادا و همکارانش [29] استفاده شده است که برای این مثال،



شکل 4 نحوه محاسبه انتگرال J در روش معادلات مجزا

جدول 1 محاسبه انتگرال J در روش معادلات مجزا به ازای پارامترهای مختلف در مثال اول

بار اعمالی	$\left(\frac{a}{b}\right)$	مرجع [30]	مرجع [29]	مرجع [15]	روش حاضر	میانگین خطا (%)
$\sigma = 1$	0/25	3/397	3/384	3/437	3/371	0/99
	0/5	8/870	8/788	---	9/001	-1/95
$\sigma = 2$	0/25	13/588	13/536	---	13/484	0/58
	0/5	17/740	17/575	---	18/003	-1/96



شکل 5 مسئله دو بعدی مورد بررسی در مثال اول. الف) ورق محدود با ترک مرکزی، ب) مدل‌سازی یک چهارم ورق به علت تقارن، ج) المان‌بندی ورق در روش معادلات مجزا برای $a/b = 0.25$

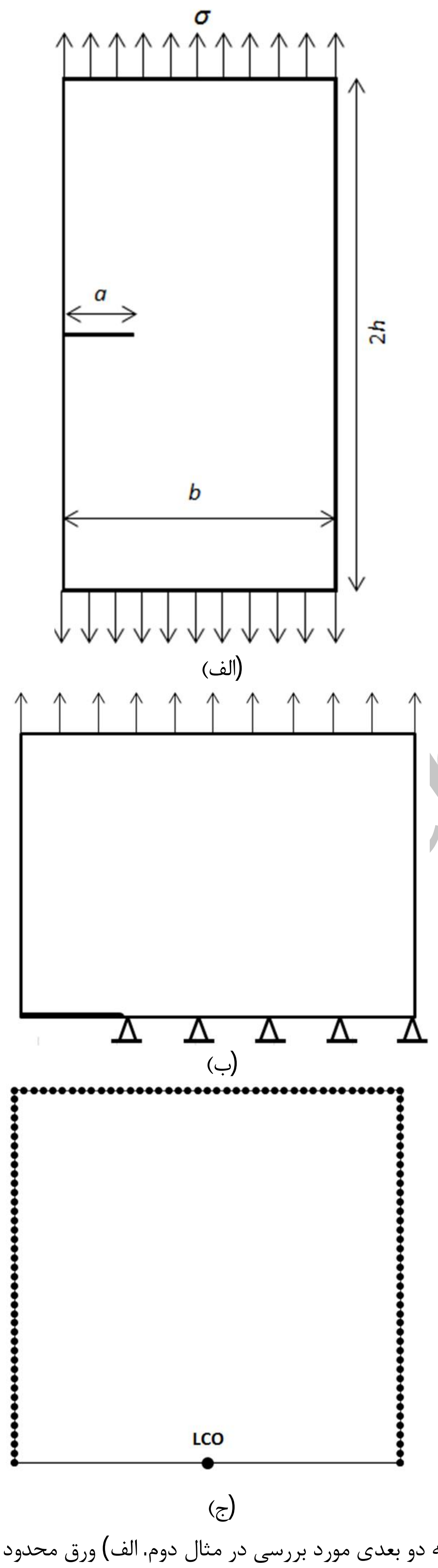
$F(a/b)$ برابر است با:

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1.122 - 0.231\left(\frac{a}{b}\right) + 10.550\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.710\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.382\left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (82)$$

در نتایج عددی از دو روش اجزاء محدود [30] و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده [15] استفاده شده است. لازم به ذکر است که المان‌بندی عیناً مشابه مثال اول در نظر گرفته شده است.

جدول 2 محاسبه غیرمستقیم ضریب شدت تنش با استفاده از انتگرال J در روش معادلات مجزا به ازای پارامترهای مختلف در مثال اول

بار اعمالی	$\left(\frac{a}{b}\right)$	K_I روش حاضر	K_I مرجع [29]	$\partial K_I/\partial a$ روش حاضر	$\partial K_I/\partial a$ مرجع [29]
$\sigma = 1$	0/25	1/836	1/839	0/918	0/920
	0/5	3/000	2/964	0/75	0/737
$\sigma = 2$	0/25	3/672	3/679	1/836	1/840
	0/5	4/243	4/192	1/061	1/048



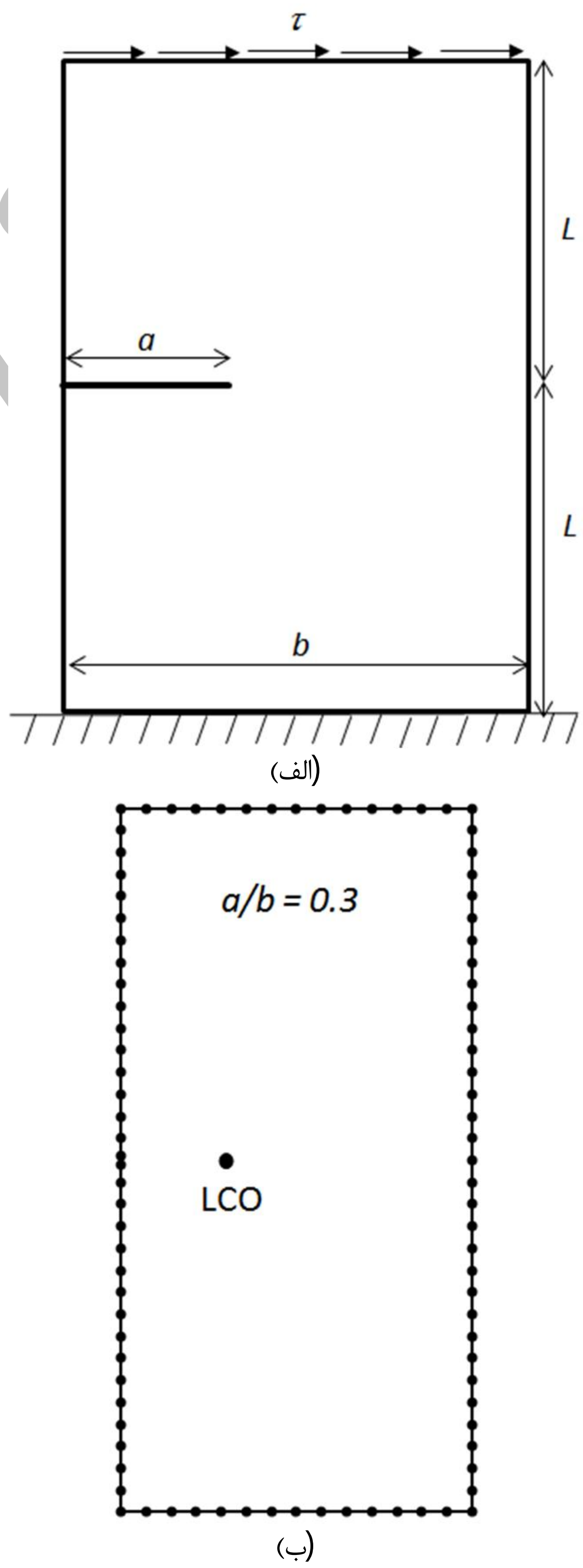
شکل 6 مسئله دو بعدی مورد بررسی در مثال دوم. الف) ورق محدود با ترک لبه‌ای ب) مدل‌سازی یک چهارم ورق به علت تقارن ج) المان‌بندی ورق در روش معادلات مجزا برای $a/b = 0.5$

نتایج حاصل از روش معادلات مجزا همراه با نتایج روش آزمایشگاهی و عددی برای نسبت‌های مختلف (a/b) در جدول 3، نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج روش حاضر در مقایسه با سایر نتایج از دقت خوبی برخوردار است.

4-3- ورق محدود تحت بار برشی

مثال سوم مربوط به ورقی محدود با ابعاد $b \times 2L$ واحد با ترک لبه‌ای مطابق شکل (7 الف) می‌باشد. بارگذاری در جهت افقی و مقدار آن برابر τ است. همچنین مدول ارتجاعی $E = 30$ واحد، و ضریب پواسون $\upsilon = 0.25$ است. با درنظرگرفتن رفتار تنش مسطح در این مثال، ورق با 46 المان سه‌گره‌ای (186 درجه آزادی) مطابق شکل (7 ب) مدل‌سازی گردیده است.

برای صحت‌سنجی روش معادلات مجزا از نتایج عددی دو روش بدون المان [31] و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده [15] استفاده شده است. نتایج حاصل از روش معادلات مجزا همراه با نتایج دو روش عددی دیگر، برای نسبت $a/b = 0.3$ در جدول 4، نشان داده شده است. همان‌طور که



شکل 7 مسئله دو بعدی مورد بررسی در مثال سوم، الف) ورق محدود با ترک کناری ب) المان‌بندی ورق در روش معادلات مجزا برای $a/b = 0.3$

جدول 3 محاسبه انتگرال J در روش معادلات مجزا به ازای پارامترهای مختلف در مثال دوم

بار اعمالی	$\left(\frac{a}{b}\right)$	مرجع [30]	مرجع [29]	مرجع [15]	روش حاضر	میانگین خطا (%)
$\sigma = 1$	0/25	6/394	7/098	7/038	6/828	0/24
	0/5	---	50/290	---	52/334	-4/06
$\sigma = 2$	0/25	12/789	14/195	---	13/561	-0/51
	0/5	---	100/581	---	104/666	-4/06

جدول 4 محاسبه انتگرال J در روش معادلات مجزا در مثال سوم

J	مرجع [31]	مرجع [15]	روش حاضر	میانگین خطا (%)
J_I	13/158	13/273	13/093	0/93
J_{II}	-3/285	-3/247	-3/085	5/54

مشخص است نتایج حاصل در مقایسه با سایر نتایج از دقت مناسبی برخوردار است.

5- نتیجه‌گیری

انتگرال J در نظریه مکانیک شکست به‌علت کاربرد در محاسبه ضریب شدت تنش، پیش‌بینی رشد ترک، محاسبه انرژی محیط ترک‌دار و مکانیک شکست غیرخطی دارای اهمیت فراوانی است. اخیراً روش جدیدی به نام روش معادلات مجزا برای حل مسائل پتانسیل، الاستواستاتیک و الاستودینامیک توسعه داده شده است. در این مقاله، با پیشنهاد قرار گرفتن نقطه مرجع در نوک ترک، مدل‌سازی هندسه ترک و فرم جدیدی از نیروهای گره‌ای حجمی، مسئله مکانیک شکست در روش معادلات مجزا تعریف گردید. در ادامه، انتگرال J در مسائل دو بعدی برای مودهای خالص توسعه داده شد. در نهایت با حل دو مثال عددی که در آن پارامترهای متنوعی مورد بررسی قرار گرفت، روش پیشنهادی مورد صحت‌سنجی قرار گرفت. نتایج حاکی از آن است که روش معادلات مجزا دارای دقت مناسبی برای محاسبه انتگرال J می‌باشد.

6- مراجع

[1] R. D. Henshell, K. G. Shaw, Crack tip finite elements are unnecessary, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 9, No. 3, pp. 495-507, 1975.

[2] R. S. Barsoum, On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 10, No. 1, pp. 25-37, 1976.

[3] G. R. Liu, S. S, Quek, *The finite element method: a practical course*: Butterworth-Heinemann, 2003.

[4] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 45, No. 5, pp. 601-620, 1999.

[5] S. Mohammadi, *Extended finite element method: for fracture analysis of structures*: John Wiley & Sons, 2008.

[6] A. Ghasemi Ghalebahman, S. Salavati, Utilizing the extended finite element method for determining crack stress intensity factors and higher order terms coefficients, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 2, pp. 135-146, 2015. (In Persian)

[7] L. Wrobel, M. Aliabadi, The Boundary Element Method, Vol1: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics, Vol2: Applications in Solids and Structures, Wiley, 2002.

[8] T. A. Cruse, W. Vanburen, Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, *International Journal of Fracture Mechanics,* Vol. 7, No. 1, pp. 1-15, 1971.

[9] T. A. Cruse, Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method, *Surface Crack, Physical Problems and Computational Solutions, ASME New York,* pp. 153-170, 1972.

[10] A. Portela, M. H. Aliabadi, D. P. Rooke, Efficient boundary element analysis of sharp notched plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 32, No. 3, pp. 445-470, 1991.

[11] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.

[22] N. Khaji, M. I. Khodakarami, A new semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for potential problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 35, No. 6, pp. 845-854, 2011.
[23] M. I. Khodakarami, N. Khaji, Analysis of elastostatic problems using a semi-analytical method with diagonal coefficient matrices, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 35, No. 12, pp. 1288-1296, 2011.
[24] N. Khaji, M. I. Khodakarami, A semi-analytical method with a system of decoupled ordinary differential equations for three-dimensional elastostatic problems, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 49, No. 18, pp. 2528-2546, 2012.
[25] M. I. Khodakarami, N. Khaji, M. T. Ahmadi, Modeling transient elastodynamic problems using a novel semi-analytical method yielding decoupled partial differential equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 213–216, No. 0, pp. 183-195, 2012.
[26] N. Khaji, M. Mirzajani, Frequency domain analysis of elastic bounded domains using a new semi-analytical method, *Acta Mechanica,* Vol. 224, No. 7, pp. 1555-1570, 2013.
[27] M. I. Khodakarami, N. Khaji, Wave propagation in semi-infinite media with topographical irregularities using Decoupled Equations Method, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering,* Vol. 65, pp. 102-112, 2014.
[28] J. R. Rice, A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 65, pp. 379-386. 1968.
[29] H. Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin *The stress analysis of cracks handbook*: Professional engineering publishing, 2000.
[30] ANSYS, Commercial finite element package.
[31] B. N. Rao, S. Rahman, Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods - Part I: Rates of stress intensity factors, *Computational Mechanics,* Vol. 28, No. 5, pp. 351-364, 2002.
[12] J. P. Wolf, C. Song, Scaled boundary finite-element method - a primer: Derivations, *Computers and Structures,* Vol. 78, No. 1, pp. 191-210, 2000.
[13] C. Song, J. P. Wolf, Scaled boundary finite-element method - a primer: Solution procedures, *Computers and Structures,* Vol. 78, No. 1, pp. 211-225, 2000.
[14] C. Song, J. P. Wolf, Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method, *Computers and Structures,* Vol. 80, No. 2, pp. 183-197, 2002.
[15] [15] S. R. Chidgzey, A. J. Deeks, Determination of coefficients of crack tip asymptotic fields using the scaled boundary finite element method, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 72, No. 13, pp. 2019-2036, 2005.
[16] Z. Yang, Fully automatic modelling of mixed-mode crack propagation using scaled boundary finite element method, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 73, No. 12, pp. 1711-1731, 2006.
[17] Z. Yang, Application of scaled boundary finite element method in static and dynamic fracture problems, *Acta Mechanica Sinica,* Vol. 22, No. 3, pp. 243-256, 2006.
[18] C. Song, Z. Vrcelj, Evaluation of dynamic stress intensity factors and T-stress using the scaled boundary finite-element method, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 75, No. 8, pp. 1960-1980, 2008.
[19] T. L. Anderson, *fracture mechanics fundamental and applications*: Taylor & Francis, 2005.
[20] N. Choupani, M. Soltanpour Khamneh, Investigation on mixed mode elastic-plastic fracture behavior of ABS polymeric material, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 4, pp. 272-280, 2015. (In Persian)
[21] A. Portela, M. H. Aliabadi, D. P. Rooke, Dual boundary element method. Effective implementation for crack problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 33, No. 6, pp. 1269-1287, 1992.