



## تولید شبکه بی‌سازمان چند مقیاسی برای شبیه‌سازی مخازن نفتی

سید سعید بحرینیان<sup>1\*</sup>، زهرا مهردوست<sup>2</sup>، رضا باهوش کازرونی<sup>3</sup>

- 1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز  
 2- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز  
 3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز  
 \* اهواز، صندوق پستی 61357-83151، bahrainian@scu.ac.ir

## چکیده

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 05 خرداد 1394  
 پذیرش: 12 مرداد 1394  
 ارائه در سایت: 27 مرداد 1394  
 کلید واژگان:

روش حجم محدود چند مقیاسی  
 شبکه‌های بی‌سازمان  
 محیط متخلخل  
 شبیه‌سازی مخزن

در این مقاله دو الگوریتم اتوماتیک و کارآمد برای تولید شبکه‌های بی‌سازمان، مناسب برای اعمال روش حجم محدود چند مقیاسی در مخازن نفتی ارائه شده است. روش حجم محدود چند مقیاسی یک روش عددی کارآمد برای شبیه‌سازی جریان در محیط‌های متخلخل است. روش حجم محدود چند مقیاسی بیشتر بر روی شبکه‌های با سازمان مورد مطالعه قرار گرفته و در این پژوهش به تعمیم آن به شبکه‌های بی‌سازمان پرداخته شده است. توسعه روش حجم محدود چند مقیاسی به شبکه‌های بی‌سازمان امکان استفاده از مزیت‌های انعطاف‌پذیری و تطابق بهتر با ساختارهای زمین‌شناسی را فراهم می‌سازد. در این روش انجام محاسبات بر روی سه شبکه ریز، شبکه درشت اولیه و شبکه درشت دوگانه صورت می‌گیرد. یکی از مشکلات اساسی در تعمیم روش حجم محدود چند مقیاسی به شبکه‌های بی‌سازمان، تولید شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه است. در این مقاله یک الگوریتم برای تقسیم‌بندی شبکه بی‌سازمان به منظور تولید شبکه درشت اولیه پیشنهاد شده است. همچنین برای تولید شبکه درشت دوگانه بر روی شبکه درشت اولیه، یک الگوریتم جدید ارائه شده است. در نهایت الگوریتم‌های پیشنهاد شده برای تولید شبکه‌های بی‌سازمان چند مقیاسی، برای شبیه‌سازی جریان در محیط متخلخل به کار گرفته شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد روش حجم محدود چند مقیاسی به کار گرفته شده با شبکه‌های بی‌سازمان چند مقیاسی تولید شده در این پژوهش، حل ریزمقیاس را با دقت بالایی پیش‌بینی می‌کند.

## Multiscale unstructured grid generation for reservoir simulation

Seyed Saied Bahrainian\*, Zahra Mehrdoost, Reza Bahoosh Kazerooni

Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran.

\*P.O.B. 61357-83151 Ahvaz, Iran, bahrainian@scu.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 26 May 2015  
 Accepted 03 August 2015  
 Available Online 18 August 2015

## Keywords:

Multiscale finite volume method  
 Unstructured grids  
 Porous media  
 Reservoir simulation

## ABSTRACT

In this paper two automated and robust algorithms for generation of unstructured grids suitable for multiscale finite volume method in oil reservoirs are presented. The multiscale finite volume method is an efficient numerical method for flow simulation in porous media. The multiscale finite volume method has been extensively studied on structured grids. In this research multiscale finite volume method is extended to unstructured grids. Development of the MSFV method to unstructured grids provides advantages of flexibility and compatibility with geological structures. In this method calculations are carried out on three grids, fine grid, primal coarse grid and dual coarse grid. One of the main challenges to extend the multiscale finite volume method to unstructured grids is to generate primal and dual coarse grids. In this paper an algorithm for partitioning of unstructured grid and generating primal coarse grid is proposed. Also, a new algorithm for generating dual coarse grid is presented. Finally, the proposed algorithms for generating multiscale unstructured grids are employed for flow simulations in porous media. Numerical results show that the multiscale finite volume method with generated multiscale unstructured grids of this research can accurately predict the fine scale solution.

## 1- مقدمه

عنوان روش‌های عددی کارآمد برای شبیه‌سازی جریان سیال در محیط‌های متخلخل ناهمگن ارائه شده‌اند.

در روش‌های چند مقیاسی کاهش هزینه محاسباتی با تقسیم یک مسئله بزرگ به چندین مسئله محلی کوچک صورت می‌گیرد. روش‌های چند مقیاسی به سه گروه روش المان محدود چند مقیاسی<sup>1</sup>، [2، 1]، روش المان

جریان سیال در محیط‌های متخلخل مانند مخازن نفت و گاز، یک پدیده چند مقیاسی است. دلیل اصلی رفتار چند مقیاسی جریان سیال وجود ناهمگنی در سنگ مخزن است که در تمامی مقیاس‌های طولی، از میکرومتر (اندازه حفره‌ها) تا کیلومتر (ابعاد مخزن) دیده می‌شود بنابراین برای شبیه‌سازی مخازن یک نگرش چند مقیاسی ضروری است. روش‌های چند مقیاسی به

1- Multiscale Finite Element (MSFE)

Please cite this article using:

S. S. Bahrainian, Z. Mehrdoost, R. Bahoosh Kazerooni, Multiscale unstructured grid generation for reservoir simulation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 333-340, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

بخش بعد، روش حجم محدود چند مقیاسی برای حل معادله فشار تشریح شده است.

### 3- روش حجم محدود چند مقیاسی

در روش حجم محدود چند مقیاسی یک مسئله بزرگ به چندین مسئله محلی کوچک تبدیل و میدان حل در مقیاس‌های ریز به صورت محلی حل می‌شود. از حل مسائل محلی برای محاسبه عملگر درشت مقیاس و همچنین ایجاد ارتباط بین حل درشت مقیاس و حل ریز مقیاس استفاده می‌شود.

در روش حجم محدود چند مقیاسی سه نوع شبکه محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرد: شبکه ریز<sup>8</sup>، شبکه درشت اولیه<sup>9</sup> و شبکه درشت دوگانه<sup>10</sup>. شبکه ریز مقیاس اطلاعات زمین‌شناسی را در بر دارد و خواص فیزیکی شامل تخلخل<sup>11</sup> و نفوذپذیری مطلق<sup>12</sup> متناظر با هر یک از سلول‌های این شبکه تعیین می‌شود. شبکه درشت اولیه با هدف افزایش مقیاس<sup>13</sup> مسئله (کاهش هزینه محاسباتی) و شبکه درشت دوگانه برای بدست آوردن کمیت‌های مجهول بر روی شبکه‌های درشت و ریز مقیاس استفاده می‌شود. در شکل 1 شبکه درشت اولیه (خطوط توپر) و دوگانه (خطوط خط چین) تولید شده بر روی یک شبکه ریز با سازمان نمایش داده شده است. شبکه درشت اولیه  $\Omega^C$  از تقسیم بندی شبکه ریز به سلول‌های درشت بدست می‌آید و از  $N_C$  سلول درشت تشکیل شده است. شبکه درشت اولیه به صورت  $\Omega_i^C$ ،  $i \in \{1, \dots, N_C\}$  تعریف می‌شود. سلول‌های درشت دوگانه از اتصال مراکز هندسی سلول‌های درشت اولیه تولید می‌شوند. شبکه درشت دوگانه از  $N_D$  سلول درشت  $\Omega_j^D$ ،  $j \in \{1, \dots, N_D\}$  تشکیل شده است. با توجه به شکل 1 درون هر سلول درشت اولیه یکی از گره‌های شبکه درشت دوگانه قرار گرفته است. همچنین مرز سلول‌های درشت اولیه بر مرز سلول‌های ریز منطبق می‌باشد.

در روش حجم محدود چند مقیاسی برای بدست آوردن تقریبی از میدان فشار ریز مقیاس، ابتدا میدان فشار در مقیاس درشت محاسبه می‌شود. برای تشکیل دستگاه معادلات خطی درشت مقیاس و تعیین مقادیر فشار در مراکز سلول‌های درشت اولیه، ضرایب انتقال‌پذیری بین این سلول‌ها محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از مقادیر فشار درشت مقیاس، تخمینی از میدان فشار ریز مقیاس بدست می‌آید.

ضرایب انتقال‌پذیری با استفاده از توابع پایه محاسبه می‌شوند. توابع پایه از حل محلی قسمت همگن معادله حاکم بر مسئله درون هر یک از سلول‌های درشت دوگانه بدست می‌آیند. برای محاسبه تابع پایه  $\Phi_j^i$  متناظر با گره  $i$  در یک سلول دوگانه  $\Omega_j^D$ ،  $j \in \{1, \dots, N_D\}$  مجموعه معادلات همگن (2) حل می‌شوند [1].

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla \Phi_j^i) = 0 & \text{in } \Omega_j^D \\ -\nabla_{\tau} \cdot (\lambda \cdot \nabla \Phi_j^i)_{\tau} = 0 & \text{on } \partial \Omega_j^D \\ \Phi_j^i(x_k) = \delta_{ik} & \forall x_k \in \{1, \dots, N_C\} \end{cases} \quad (2)$$

در روابط فوق  $\tau$  بیان‌کننده راستای مماس بر وجوه سلول درشت دوگانه  $\partial \Omega_j^D$  است. بالانویس  $i$  شماره گره‌های سلول دوگانه را مشخص می‌کند. برای این مسئله، در گره  $i$  مقدار واحد و برای بقیه گره‌ها مقدار صفر اعمال می‌شود. بنابراین معادله (2) چهار بار متناظر با  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  حل می‌شود تا توابع

محدود ترکیبی چند مقیاسی<sup>1</sup> [3,4] و روش حجم محدود چند مقیاسی<sup>2</sup> [5] دسته‌بندی می‌شوند. از میان روش‌های چند مقیاسی پیشنهاد شده، روش المان محدود ترکیبی چند مقیاسی و روش حجم محدود چند مقیاسی، میدان سرعت پایستار تولید می‌کنند که برای حل معادله انتقال حائز اهمیت است.

روش حجم محدود چند مقیاسی اولین بار توسط جنی<sup>3</sup> و همکاران برای حل جریان تراکم‌ناپذیر در محیط متخلخل ناهمگن<sup>4</sup> ارائه شد [5]. سپس این روش به جریان‌های چند فازی همراه با در نظر گرفتن اثر تراکم‌پذیری، فشار موئینگی و گرانش توسعه داده شد [6-8]. همچنین برای بهبود کیفیت حل و همگرا شدن جواب‌های ناشی از حل چند مقیاسی به پاسخ ناشی از حل ریز مقیاس، روش‌های حجم محدود چند مقیاسی تکراری<sup>5</sup> ارائه شدند [9-11]. فرمولاسیون اپراتوری (جبری) روش حجم محدود چند مقیاسی برای سهولت اعمال بر روی نرم‌افزارهای شبیه‌ساز موجود معرفی شده است [12، 14-14]. روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی برای افزایش دقت این روش ارائه شده است [15]. یک چالش باقیمانده برای روش حجم محدود چند مقیاسی، به کارگیری آن با شبکه‌های بی‌سازمان است. در پژوهش‌های پیشین، روش حجم محدود چند مقیاسی بیشتر بر روی شبکه‌های با سازمان به کار گرفته شده است. اگرچه شبکه‌های با سازمان در شبیه‌سازی مخازن کاربرد گسترده‌ای دارند، ساختار انعطاف‌ناپذیر این نوع شبکه، مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده مانند ساختارهای زمین‌شناسی را مشکل می‌سازد. شبکه‌های بی‌سازمان به دلیل انعطاف‌پذیری و کنترل بیشتر بر شکل و اندازه المان‌ها و تطابق بهتر با ساختارهای هندسی پیچیده، کارآمدتر می‌باشند. بنابراین توسعه روش حجم محدود چند مقیاسی به شبکه‌های بی‌سازمان از اهمیت زیادی برخوردار است.

یکی از مشکلات اساسی در تعمیم روش حجم محدود چند مقیاسی به شبکه‌های بی‌سازمان، تولید شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه است. در این مقاله الگوریتم‌های اتوماتیک و کارآمد برای تولید شبکه‌های بی‌سازمان اولیه و دوگانه پیشنهاد شده است. شبکه درشت اولیه بر اساس یک الگوریتم جستجوی ممنوع چند سطحی<sup>6</sup> تولید می‌شود. تولید شبکه درشت دوگانه بر اساس الگوریتم مسیریابی دایکسترا<sup>7</sup> صورت می‌گیرد. در نهایت الگوریتم‌های پیشنهاد شده برای تولید شبکه‌های بی‌سازمان چند مقیاسی، به منظور شبیه‌سازی جریان در محیط متخلخل به کار گرفته شده‌اند.

### 2- معادلات حاکم

برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر در محیط متخلخل و در غیاب اثر جاذبه و فشار موئینگی، معادله فشار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$-\nabla \cdot (\lambda K \cdot \nabla p) = q \quad (1)$$

در رابطه فوق  $p$  فشار،  $\lambda$  ضریب تحرک کل سیال و  $K$  تانسور نفوذپذیری مطلق محیط متخلخل است. همچنین  $q$  بیانگر جمله‌های چشمه یا چاه حاصل از نرخ‌های تزریق یا برداشت در چاه است. برای بدست آوردن میدان فشار درون یک ناحیه مانند  $\Omega$ ، معادله (1) همراه با شرایط مرزی مشخص (نیومن یا دریکله) بر روی مرزهای ناحیه محاسباتی  $\partial \Omega$  حل می‌شود. در

1- Mixed Multiscale Finite Element (MMFE)  
2- Multiscale Finite Volume (MSFV)  
3- Jenny  
4- Heterogeneous porous media  
5- Iterative Multiscale Finite Volume (iMSFV)  
6- Multilevel tabu search algorithm  
7- Dijkstra

8- Fine grid  
9- Primal coarse grid  
10- Dual coarse grid  
11- Porosity  
12- Permeability  
13- Upscaling

قضیه دیورژانس و تبدیل انتگرال روی حجم به انتگرال روی سطح، دستگاه معادلات خطی فشار درشت مقیاس در نهایت به صورت زیر بیان می‌شود [9]:

$$T_{Pi} p_C^i = b_P \quad (5)$$

که در آن

$$T_{Pi} = \sum_{j=1}^{N_D} \int (-\lambda \cdot \nabla \Phi_j^i) \cdot n d\Gamma \quad (6)$$

$$b_P = \int q d\Omega^C - \sum_{j=1}^{N_D} \int (-\lambda \cdot \nabla \psi_j) \cdot n d\Gamma \quad (7)$$

در روابط فوق،  $\Pi$  بردار یکه عمود بر وجوه سلول درشت اولیه  $\partial\Omega_P^C$  است که جهت مثبت آن به سمت بیرون از سلول تعریف می‌شود. پس از محاسبه فشار در مراکز سلول‌های درشت اولیه، میدان فشار چند مقیاسی  $p_{ms}$  با استفاده از رابطه (4) محاسبه می‌شود.

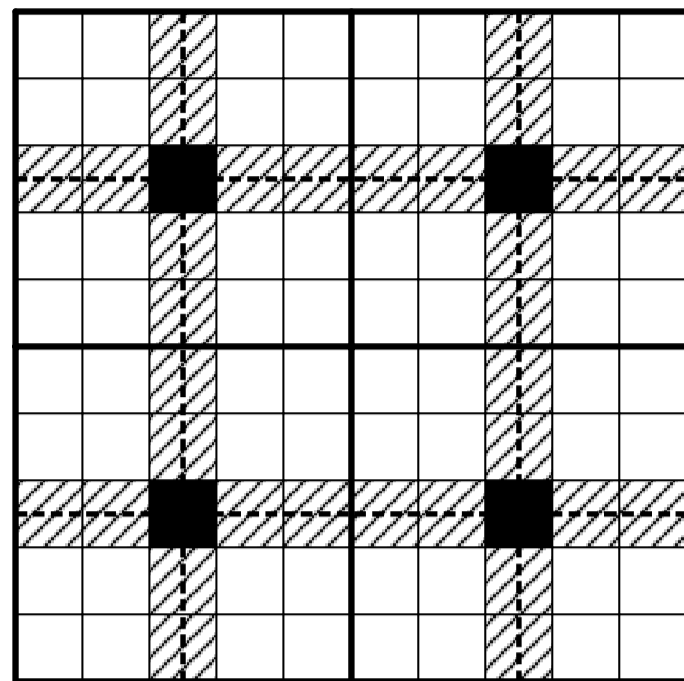
#### 4- تولید شبکه‌های درشت بی‌سازمان

همانطور که در بخش قبل اشاره شد، روش حجم محدود چند مقیاسی از دو نوع شبکه کمکی در مقیاس درشت استفاده می‌کند: 1- شبکه درشت اولیه که در آن دستگاه معادلات درشت مقیاس تشکیل می‌شود، 2- شبکه درشت دوگانه که در آن توابع پایه محاسبه می‌شوند. تقسیم شبکه‌های باسازمان به چندین بخش و تولید شبکه درشت اولیه یک فرآیند ساده و آسان است. همچنین شبکه درشت دوگانه از اتصال مراکز هندسی سلول‌های درشت اولیه به آسانی تولید می‌شود. درحالی‌که تقسیم‌بندی شبکه‌های بی‌سازمان و به خصوص تولید شبکه‌های درشت دوگانه بسیار مشکل و پیچیده است. در این بخش الگوریتم‌های جدید برای تولید شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه بی‌سازمان ارائه می‌شود.

##### 4-1- تولید شبکه درشت اولیه

شبکه درشت اولیه شامل مجموعه‌هایی از سلول‌های ریز مقیاس است که یک تقسیم‌بندی درشت از دامنه محاسباتی را ایجاد می‌کنند. مسئله تقسیم‌بندی شبکه را می‌توان به عنوان یک مسئله تقسیم‌بندی گراف در نظر گرفت که در آن گره‌ها و اضلاع گراف به ترتیب متناظر با سلول‌های شبکه و اتصال بین آن‌ها می‌باشند (شکل 2). مسئله تقسیم‌بندی گراف عبارت است از تقسیم کردن گره‌های یک گراف به تعداد مشخصی از زیرمجموعه‌های مستقل، به نحوی که دو شرط را ارضا کنند: 1- تعداد گره‌ها در زیرمجموعه‌ها در حد امکان مساوی باشد، 2- تعداد اضلاع مشترک بین زیرمجموعه‌ها حداقل باشد. الگوریتم‌های تصادفی مختلفی بر اساس زندگی اجتماعی موجودات در طبیعت و قوانین زیستی برای تقسیم‌بندی گراف ارائه شده است. به عنوان مثال می‌توان به الگوریتم ژنتیک<sup>1</sup> [16]، الگوریتم کلونی مورچه‌ها<sup>2</sup> [17] و الگوریتم الهام گرفته از حباب<sup>3</sup> [18] اشاره نمود.

برای تقسیم‌بندی گراف‌ها در مقیاس بزرگ، الگوریتم‌های چند سطحی تقسیم‌بندی گراف ارائه شده‌اند [20,19]. در الگوریتم‌های چند سطحی با ترکیب گره‌ها، گراف اصلی به صورت بازگشتی به گراف‌های کوچکتر تبدیل می‌شود. پس از تقسیم‌بندی کوچکترین گراف، مجدداً گراف به حالت اولیه بازمی‌گردد تا تقسیم‌بندی گراف اصلی ایجاد شود. در هر مرحله بازسازی گراف، از یک الگوریتم ابتکاری برای بهبود تقسیم‌بندی استفاده می‌شود.



سلول گره   سلول ضلع   سلول داخلی

شکل 1 شبکه درشت اولیه (خطوط توپر) و دوگانه (خطوط خط چین). شبکه درشت دوگانه سلول‌های ریز مقیاس را به سه دسته تقسیم می‌کند: سلول‌های داخلی، سلول‌های ضلع و سلول‌های گره

پایه متناظر با گره‌های سلول دوگانه  $\Omega_j^D$  محاسبه شوند.

در مواردی که مسئله مورد بررسی شامل اثرات خارجی مانند چاه تزریق یا برداشت باشد و همچنین اثرات گرانش و فشار موئینگی صرف نظر نشوند، توابع پایه به درستی نمی‌توانند تأثیر این پارامترها را در برگیرند. در این صورت توابع تصحیح که در برگرفته تأثیر قسمت ناهمگن معادله حاکم بر مسئله است، به کار گرفته می‌شوند. مسئله محلی ناهمگن و شرایط مرزی مربوط به آن برای تعیین تابع تصحیح  $\psi_j$  متناظر با سلول درشت دوگانه  $\Omega_j^D$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla \psi_j) = q_j & \text{in } \Omega_j^D \\ -\nabla_{\tau} \cdot (\lambda \cdot \nabla \psi_j)_{\tau} = q_j & \text{on } \partial\Omega_j^D \\ \psi_j(x_k) = 0 & \forall x_k \in \{1, \dots, N_C\} \end{cases} \quad (3)$$

در رابطه فوق  $q_j$  عبارت منبع برای بیان اثرات خارجی مانند چاه‌های تزریق و برداشت است. همچنین مقادیر تابع تصحیح در گوشه‌های سلول درشت دوگانه برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در یک شبکه باسازمان دوبعدی، تعداد پنج مسئله محلی در هر یک از سلول‌های درشت دوگانه تعریف و حل می‌شود که شامل چهار مسئله برای تعیین توابع پایه مرتبط با هر گره و یک مسئله برای تعیین تابع تصحیح است.

میدان فشار چند مقیاسی  $p_{ms}$  به عنوان تخمینی از حل ریز مقیاس  $p_f$  به صورت زیر نوشته می‌شود [9]:

$$p_f \approx p_{ms} = \sum_{j=1}^{N_D} \left( \sum_{i=1}^{N_C} \Phi_j^i p_C^i + \psi_j \right) \quad (4)$$

در رابطه فوق  $p_C^i$  فشار درشت مقیاس در مرکز سلول درشت اولیه است. مسائل تعریف شده برای بدست آوردن توابع پایه و تصحیح با استفاده از روش حجم محدود حل می‌شوند. پس از محاسبه تمامی توابع پایه و تصحیح، از معادله (4) برای استخراج دستگاه معادلات خطی فشار درشت مقیاس استفاده می‌شود.

برای بدست آوردن معادله فشار در مقیاس درشت، فشار ریز مقیاس تخمین زده شده از معادله (4) در معادله فشار (1) جایگزین شده و از معادله حاصل بر روی سلول‌های درشت اولیه  $\Omega_i^C$  انتگرال گیری می‌شود. با استفاده از

1- Genetic algorithm  
2- Ant-colony algorithm  
3- Bubble-inspired algorithm

از انتقال گره 6 به زیرمجموعه 2، مقدار برش از چهار به سه کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که انتخاب گره برای انتقال، تحت تأثیر لیست ممنوع قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، گره‌ای برای انتقال انتخاب می‌شود که در لیست ممنوع نباشد. تعداد تکرارهایی که حرکت به یک جواب در لیست ممنوع قرار می‌گیرد توسط زمان ممنوع<sup>3</sup> تعیین می‌شود. زمان ممنوع در هر تکرار بر حسب تعداد گره‌های موجود در مرز هر زیرمجموعه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_n = BV \times \tau \quad (8)$$

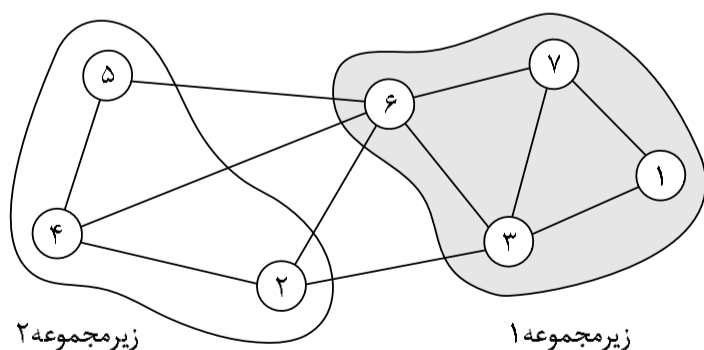
در رابطه فوق  $BV$  تعداد گره‌های مرزی هر زیرمجموعه است.  $\tau$  بر اساس رابطه تجربی زیر محاسبه می‌شود:

$$\tau = 0.2 \times \sqrt{k} \quad (9)$$

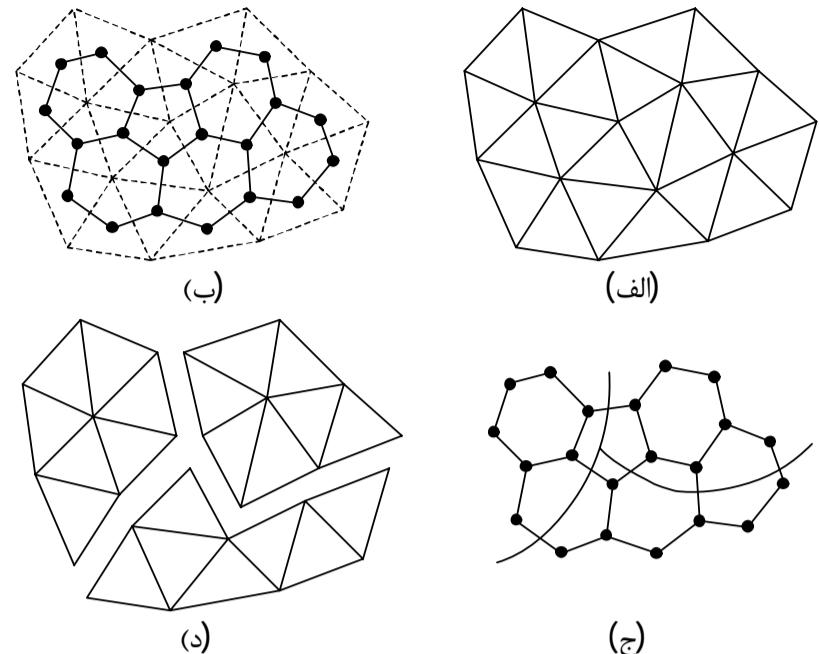
در رابطه فوق  $k$  تعداد زیرمجموعه‌ها است. در الگوریتم ارائه شده با توجه به اینکه انتقال گره‌ها از زیرمجموعه سنگین‌تر (تعداد گره‌های بیشتر) به زیرمجموعه سبک‌تر (تعداد گره‌های کمتر) محدود شده است، در انتهای سیکل گره‌ها بین زیرمجموعه‌ها به‌طور مساوی تقسیم می‌شوند. در مرحله تقسیم‌بندی کوچکترین گراف، قید جهت انتقال گره‌ها از زیرمجموعه سنگین‌تر به سبک‌تر آزاد می‌شود. اگر بعد از تعداد مشخصی از تکرار کیفیت تقسیم‌بندی گراف بهبود پیدا نکند، الگوریتم امکان جابجایی گره‌ها را از زیرمجموعه سبک‌تر به سنگین‌تر فراهم می‌سازد. روش فوق در تقسیم‌بندی گراف اولیه، تأثیر قابل توجهی در جلوگیری از تولید زیرمجموعه‌های منفصل دارد. فلوجارت الگوریتم جستجوی ممنوع برای تقسیم‌بندی گراف در شکل 4 نمایش داده شده است.

#### 4-2- تولید شبکه درشت دوگانه

شبکه درشت دوگانه، سلول‌های ریزمقیاس را به سه دسته سلول‌های داخلی<sup>4</sup>، سلول‌های ضلع<sup>5</sup> و سلول‌های گره<sup>6</sup> تقسیم می‌کند. شکل 1 دسته‌بندی سلول‌های ریزمقیاس را برای یک شبکه با سازمان دو بعدی نشان می‌دهد. سلول‌های داخلی سلول‌هایی هستند که درون سلول‌های دوگانه قرار می‌گیرند. سلول‌های ضلع، مرزهای سلول‌های دوگانه می‌باشند. سلول‌های گره، گوشه‌های سلول‌های دوگانه و در واقع گره‌های شبکه درشت اولیه هستند. شبکه درشت دوگانه از اتصال مراکز هندسی سلول‌های درشت اولیه به نحوی تولید می‌شود که مرزهای سلول‌های درشت دوگانه از مرکز سلول‌های ریز عبور کند. در شبکه‌های با سازمان تولید شبکه درشت دوگانه با این روش یک فرآیند ساده و آسان است. در حقیقت شبکه درشت دوگانه از انتقال شبکه درشت اولیه در امتداد محورهای مختصات بدست می‌آید. در



شکل 3 نمایش دو زیرمجموعه همسایه با برش برابر با چهار



شکل 2 (الف) یک شبکه نمونه، (ب) گراف معادل شبکه، (ج) تقسیم‌بندی گراف، (د) شبکه تقسیم‌بندی شده

در این مقاله برای تقسیم‌بندی شبکه ریز مقیاس و تولید شبکه درشت اولیه، از یک الگوریتم جستجوی ممنوع چند سطحی استفاده شده است.

در مرحله تقسیم‌بندی کوچکترین گراف، گره‌ها به‌طور تصادفی به زیرمجموعه‌ها اختصاص داده می‌شوند، به طوری که تعداد گره‌ها در زیرمجموعه‌ها تقریباً مساوی باشد. سپس، تقسیم‌بندی اولیه بر اساس الگوریتم جستجوی ممنوع تکرار شونده بهبود می‌یابد.

الگوریتم جستجوی ممنوع یک الگوریتم فرا ابتکاری بر اساس جستجوی هوشمند فضای حل است [21]. این الگوریتم از یک حافظه انعطاف‌پذیر استفاده می‌کند که در آن اطلاعات مربوط به تاریخچه جستجو ذخیره می‌شود. برای جلوگیری از ایجاد سیکل و قرار گرفتن در جواب‌های بهینه محلی، از مفهومی به نام فهرست ممنوع<sup>1</sup> استفاده می‌شود. فهرست ممنوع شامل مجموعه‌ای از جواب‌های مسئله است که در هر مرحله تکرار، حرکت به آن‌ها ممنوع است.

الگوریتم جستجوی ممنوع پیشنهاد شده برای بهبود تقسیم‌بندی در هر مرحله، از مفهوم بهره<sup>2</sup> استفاده می‌کند. وقتی یک گره از گراف مورد نظر به یکی از زیرمجموعه‌های همسایه حرکت کند، میزان کاهش در برش (تعداد اضلاع مشترک بین زیرمجموعه‌ها) به عنوان بهره آن گره تعریف می‌شود. در هر مرحله تکرار از الگوریتم، زیرمجموعه‌ای که بیشترین تعداد گره را دارد انتخاب می‌شود. سپس، گره‌ای که بیشترین بهره را در آن زیرمجموعه دارد برای انتقال به زیرمجموعه همسایه انتخاب می‌شود. شکل 3 مفهوم بهره و برش را برای یک گراف نمونه نشان می‌دهد. یکی از گره‌های زیرمجموعه 1 که تعداد گره‌های بیشتری نسبت به زیرمجموعه 2 دارد، برای انتقال انتخاب می‌شود. در این حالت برش (تعداد اضلاع مشترک بین زیرمجموعه‌ها) برابر با چهار است. گره‌های 3 و 6، گره‌های مرزی زیرمجموعه 1 و قابل انتقال به زیرمجموعه 2 می‌باشند. گره 3، سه همسایه داخلی در زیرمجموعه 1 و یک همسایه خارجی در زیرمجموعه 2 دارد. بنابراین بهره گره 3 ناشی از انتقال به زیرمجموعه 2 برابر با 2- است. گره 6، دو همسایه داخلی در زیرمجموعه 1 و سه همسایه خارجی در زیرمجموعه 2 دارد. بنابراین بهره گره 6 ناشی از انتقال به زیرمجموعه 2 برابر با 1+ است. با توجه به اینکه گره مرزی 6 بالاترین مقدار بهره را دارد، برای انتقال به زیرمجموعه 2 انتخاب می‌شود. پس

3- Tabu tenure  
4- Interior cells  
5- Edge cells  
6- Vertex cells

1- Tabu list  
2- Gain

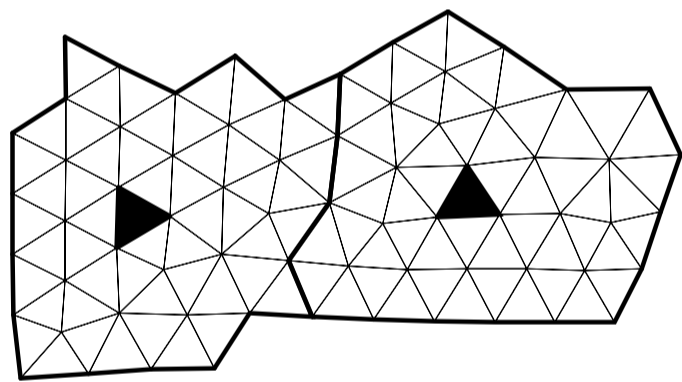
همسایه‌های گره  $i$  که پیش از این مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، در نظر گرفته می‌شوند. برای هر همسایه  $i$  از گره  $i$ ، چنانچه مجموع برجسب گره  $i$  و فاصله گره  $i$  تا از برجسب گره  $j$  کوچکتر باشد، مقدار برجسب گره  $j$  با آن مجموع جایگزین می‌شود. همچنین گره  $i$  به عنوان گره ماقبل گره  $j$  ثبت می‌شود ( $Parent(j)=i$ ). این فرآیند تا جایی ادامه می‌یابد که گره  $i$  برابر با گره مقصد باشد. در آخرین مرحله از الگوریتم برای مشخص کردن کوتاهترین مسیر، از گره مقصد شروع به حرکت کرده و گره ماقبل آن در کوتاهترین مسیر بین مبدأ و مقصد ثبت می‌شود. این فرآیند تا جایی ادامه می‌یابد که گره ماقبل آخرین گره در مسیر، برابر با گره مبدأ باشد. شکل 5-ج مسیر سلول‌های نوع ضلع را بین دو سلول درشت همسایه نشان می‌دهد. فلوجارت الگوریتم کوتاهترین مسیر بین گره‌های مبدأ و مقصد در شکل 6 نشان داده شده است.

### 5- نتایج شبیه‌سازی عددی

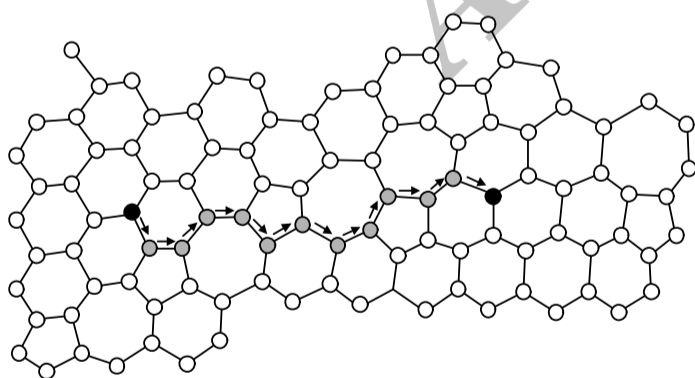
در این بخش نتایج بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی بر شبکه‌های بی‌سازمان ارائه شده و با نتایج بدست آمده از روش ریز مقیاس مقایسه می‌شود. خطای نسبی میدان فشار  $e_p$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_p = \frac{\|p_{ms} - p_f\|_2}{\|p_f\|_2} \quad (10)$$

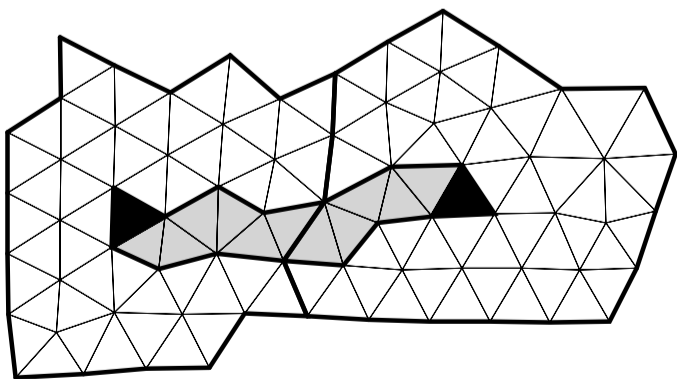
در رابطه فوق زیر نویس‌های  $ms$  و  $f$  به ترتیب برای روش حجم محدود چند مقیاسی و روش ریز مقیاس استفاده می‌شود. جریان سیال به صورت تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده است. هندسه مخزن به صورت یک ناحیه مربع شکل است که دیواره‌های آن نفوذناپذیر می‌باشند. مقدار فشار در گوشه‌های



(الف)

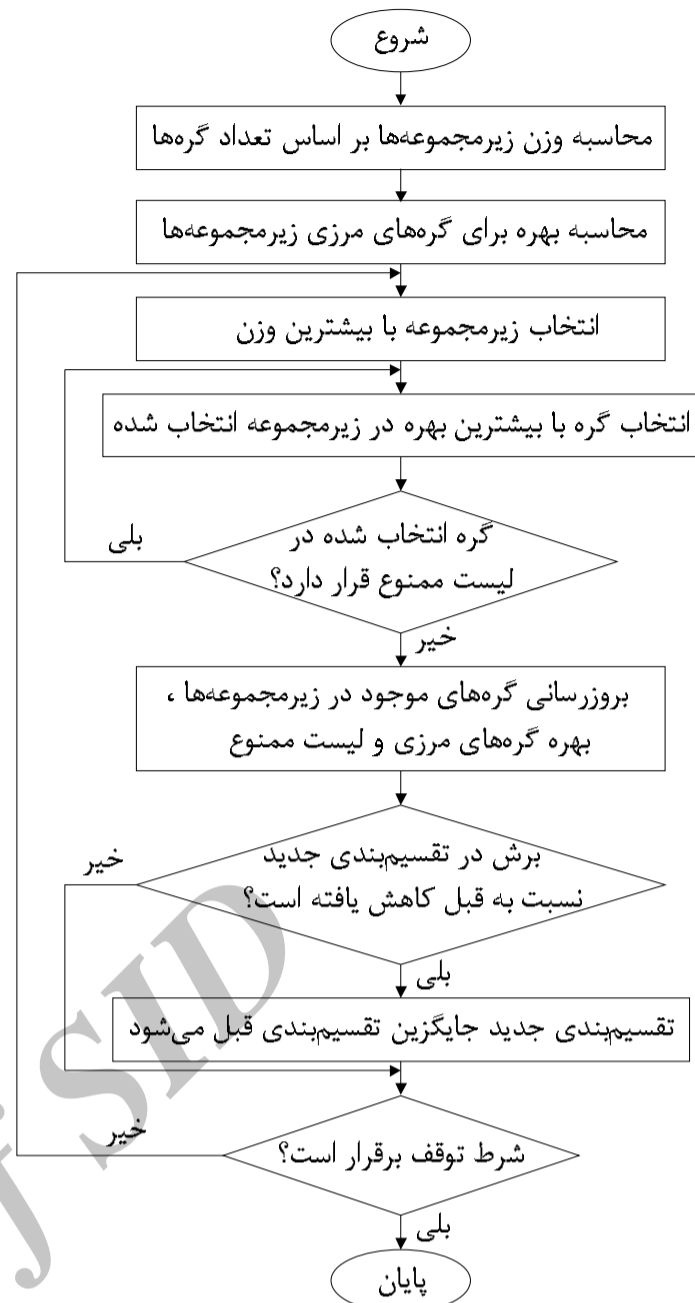


(ب)



(ج)

شکل 5 فرآیند تعیین سلول‌های نوع ضلع بین دو زیرمجموعه همسایه



شکل 4 فلوجارت الگوریتم جستجوی ممنوع برای تقسیم‌بندی گراف

مقابل، تولید شبکه درشت دوگانه با استفاده از این روش در شبکه‌های بی‌سازمان قابل اجرا نیست. زیرا سلول‌های درشت اولیه در شبکه‌های بی‌سازمان مرزهای نامنظم دارند. در این بخش یک الگوریتم برای تولید شبکه درشت دوگانه بی‌سازمان بر اساس الگوریتم مسیریاب دایکسترا ارائه می‌شود. الگوریتم دایکسترا یک الگوریتم حریصانه برای پیدا کردن کوتاهترین مسیر بین دو گره از یک گراف است [22].

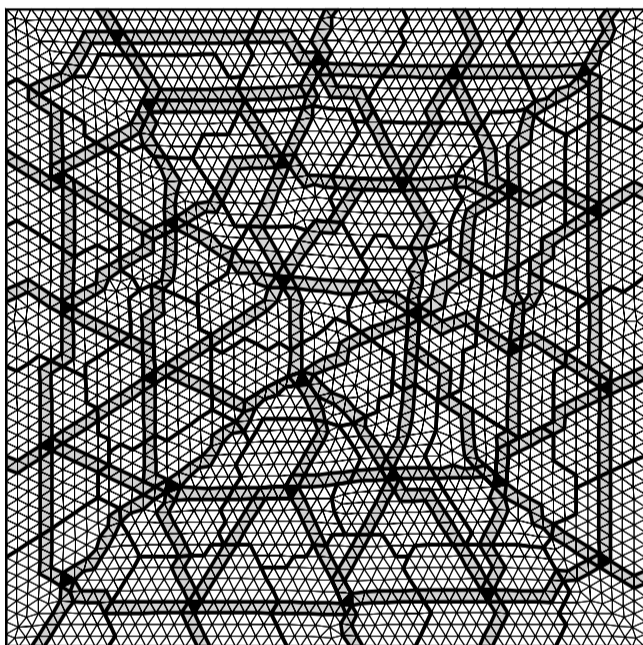
الگوریتم ارائه شده برای تولید شبکه درشت دوگانه با تعیین سلول‌های نوع گره آغاز می‌شود. در هر سلول درشت اولیه، سلول ریز مقیاسی که مرکز آن به میانگین مرکز هندسی تمام سلول‌های درون زیرمجموعه نزدیک‌تر است به عنوان سلول گره مشخص می‌شود (شکل 5-الف). سپس، سلول‌های نوع ضلع تعیین می‌شوند. برای هر دو زیرمجموعه همسایه، گراف معادل سلول‌های ریز مقیاس درون آن‌ها مشخص می‌شود (شکل 5-ب). در این گراف سلول‌های نوع گره به عنوان گره‌های مبدأ و مقصد در نظر گرفته می‌شوند. سپس کوتاهترین مسیر بین این دو گره تعیین می‌شود.

ابتدا فاصله بین هر دو گره در گراف  $weight(i,j)$  محاسبه می‌شود. سپس برای هر گره برجسبی در نظر گرفته می‌شود که فاصله آن گره را تا گره مبدأ نشان می‌دهد ( $dist(i)$ ). در ابتدا همه برجسب‌ها بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شوند. سپس فاصله گره مبدأ تا گره‌های همسایه‌اش در برجسب گره‌های همسایه ذخیره می‌شود. همچنین گره مبدأ به عنوان گره ماقبل هر یک از گره‌های همسایه ثبت می‌شود. الگوریتم با انتخاب نزدیک‌ترین گره به گره مبدأ آغاز می‌شود. فرض می‌شود نزدیکترین گره  $i$  باشد. در مرحله بعد

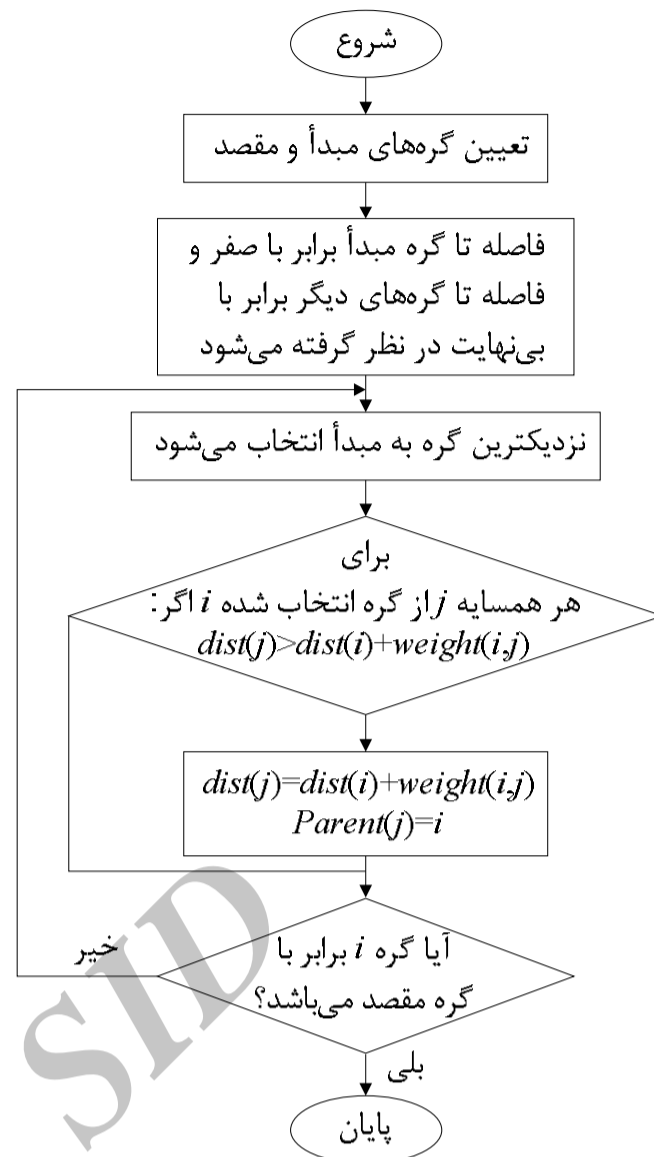
دومین مسئله که مورد بررسی قرار گرفته است شامل میدان نفوذپذیری ناهمگن است. میدان نفوذپذیری از بالاترین لایه مسئله SPE10 مستخرج شده است [23]. هندسه مسئله مورد بررسی و شرایط مرزی مشابه مسئله اول است. لگاریتم طبیعی میدان نفوذپذیری در شکل 10 نمایش داده شده است. میدان فشار چند مقیاسی بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی (خطوط خط چین) در مقایسه با فشار بدست آمده از روش ریز مقیاس (خطوط توپر) در شکل 11 نشان داده شده است. برای این مسئله ناهمگن، روش حجم محدود چند مقیاسی توزیع فشار را با خطای نسبی  $\epsilon_p = 4/45 \times 10^{-2}$  محاسبه می‌کند. مشابه مسئله قبل، روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری برای بهبود نتایج حل به کار گرفته می‌شود. پس از 80 تکرار خطای نسبی فشار به  $\epsilon_p = 2/12 \times 10^{-6}$  کاهش می‌یابد. میدان فشار حاصل از روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری (خطوط خط-نقطه چین) در شکل 11 نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که توزیع فشار بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری منطبق بر فشار ریز مقیاس است. تاریخچه همگرایی برای این مسئله ناهمگن در شکل 12 نشان داده شده است.

### 6- نتیجه‌گیری

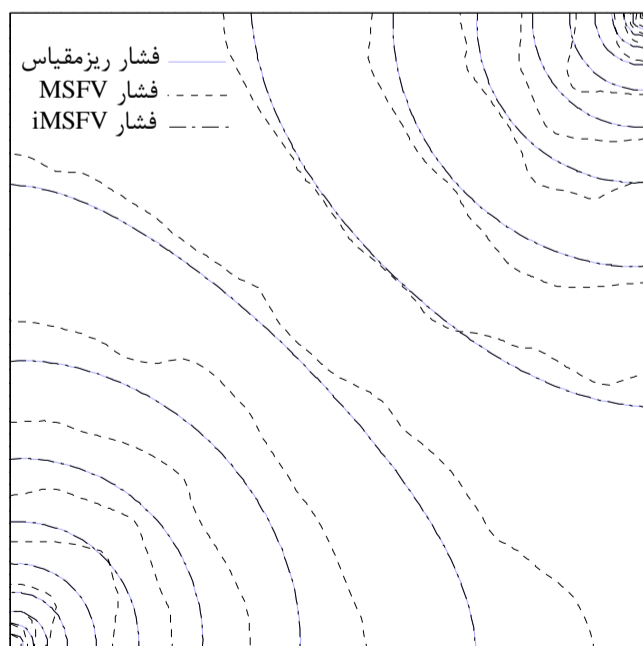
در این مقاله الگوریتم‌های اتوماتیک و کارآمد برای تولید شبکه‌های درشت



شکل 6 فلوجارت الگوریتم کوتاهترین مسیر برای تولید شبکه درشت دوگانه



شکل 7 شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه تولید شده بر روی شبکه ریز مقیاس



شکل 8 میدان فشار بدست آمده از روش ریز مقیاس (خطوط توپر)، روش حجم محدود چند مقیاسی (خطوط خط چین) و روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری (خطوط خط-نقطه چین)

پایین-چپ و بالا-راست به ترتیب برابر با 1 و صفر در نظر گرفته شده است. شبکه محاسباتی شامل 5628 سلول ریز مقیاس است و به 28 سلول درشت اولیه تقسیم شده است. شکل 7 شبکه ریز مقیاس به همراه شبکه درشت اولیه و دوگانه تولید شده بر روی آن را نمایش می‌دهد.

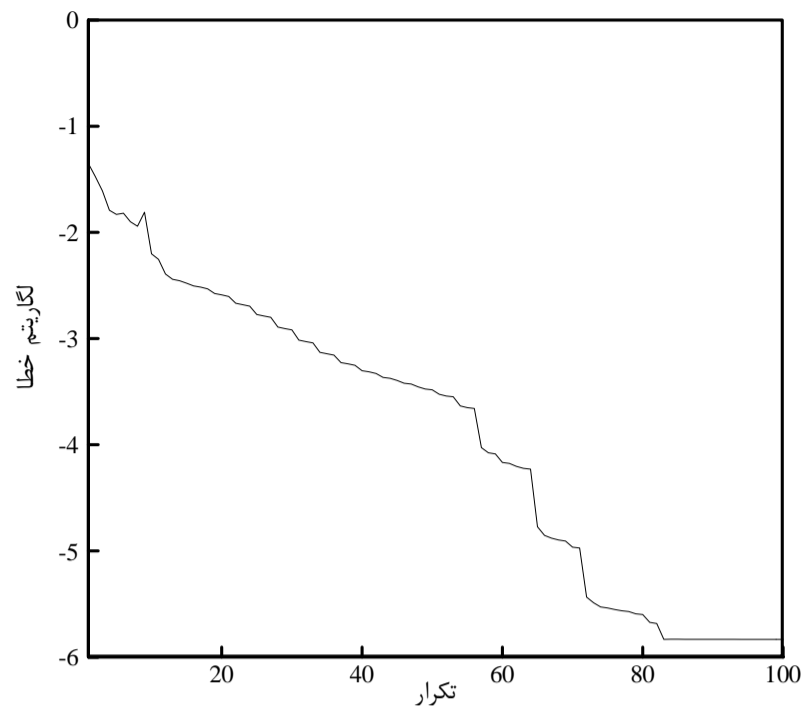
ابتدا فرض می‌شود میدان نفوذپذیری همگن است ( $K=1$ ). میدان فشار چند مقیاسی بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی (خطوط خط چین) در مقایسه با فشار بدست آمده از روش ریز مقیاس (خطوط توپر) در شکل 8 نمایش داده شده است. روش حجم محدود چند مقیاسی میدان فشار را با خطای نسبی  $\epsilon_p = 2/89 \times 10^{-2}$  پیش‌بینی می‌کند. برای بهبود نتایج حل، عملگر حجم محدود چند مقیاسی به عنوان پیش‌شرط<sup>1</sup> در روش تکراری ریچاردسون<sup>2</sup> به کار گرفته می‌شود. فرآیند تکرار برای بهبود فشار چند مقیاسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$p_f^{v+1} = p_f^v + \omega^v M_{ms}^{-1} (q - A p_f^v) \quad (11)$$

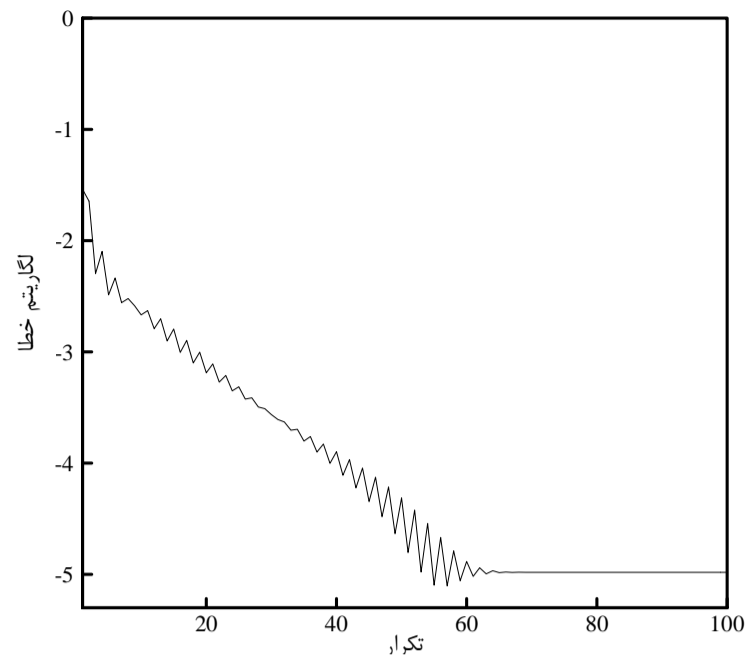
در رابطه فوق  $v$  تعداد تکرار،  $\omega^v$  پارامتر تخفیف،  $M_{ms}^{-1}$  عملگر حجم محدود چند مقیاسی و  $A$  ماتریس ضرایب است. با توجه به رابطه (11)، خطای باقیمانده  $(q - A p_f^v)$  در هر تکرار برای بهبود حل اضافه می‌شود.

شکل 9 تاریخچه همگرایی را نشان می‌دهد. لگاریتم خطای فشار بر حسب تکرارهای حجم محدود چند مقیاسی ارائه شده است. پس از 80 تکرار خطای نسبی فشار به  $\epsilon_p = 1/04 \times 10^{-5}$  کاهش یافته است. میدان فشار حاصل از روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری (خطوط خط-نقطه چین) در شکل 8 نمایش داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری میدان فشار را با دقت بالایی پیش‌بینی می‌کند.

1- Preconditioner  
2- Richardson iterative scheme



شکل 12 تاریخچه همگرایی روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری برای مسئله ناهمگن



شکل 9 تاریخچه همگرایی روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری برای مسئله همگن

محدود چند مقیاسی به شبکه‌های بی‌سازمان، تولید شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه است.

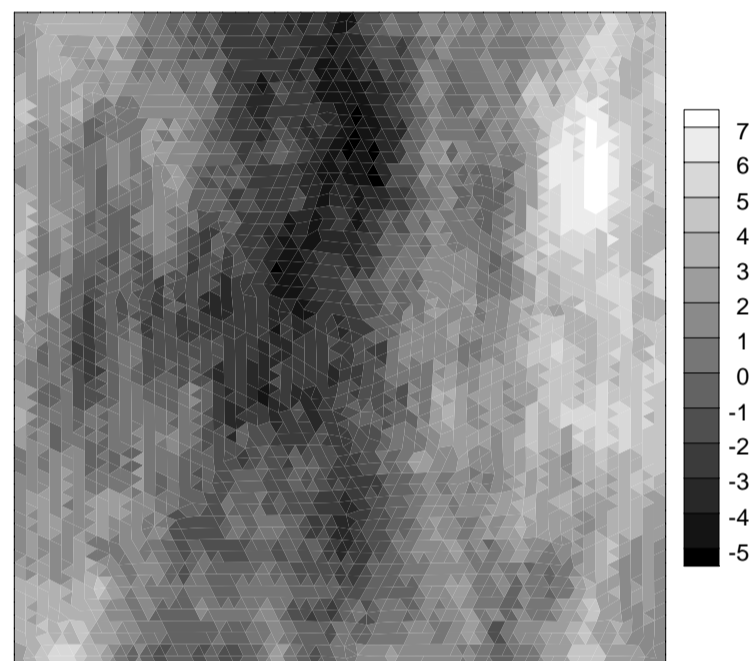
در این مقاله یک الگوریتم جستجوی ممنوع چند سطحی برای تقسیم‌بندی شبکه بی‌سازمان و تولید شبکه درشت اولیه پیشنهاد شده است. همچنین یک الگوریتم برای تولید شبکه درشت دوگانه بر اساس الگوریتم مسیریابی دایکسترا ارائه شده است. الگوریتم ارائه شده برای تولید شبکه درشت دوگانه سلول‌های نوع ضلع را به گونه‌ای تعیین می‌کند که پیوستگی مسیر ایجاد شده با سلول‌های ریز مقیاس تضمین شود. پیوستگی سلول‌های نوع ضلع در مرزهای سلول‌های درشت دوگانه برای محاسبه توابع پایه از اهمیت زیادی برخوردار است.

الگوریتم‌های پیشنهاد شده برای تولید شبکه‌های بی‌سازمان چند مقیاسی، به منظور شبیه‌سازی جریان در محیط متخلخل به کار گرفته شده‌اند. دو مسئله با میدان نفوذپذیری همگن و ناهمگن مورد بررسی قرار گرفته است. روش حجم محدود چند مقیاسی میدان فشار را برای مسئله همگن با خطای نسبی  $\epsilon_p = 2/89 \times 10^{-2}$  و برای مسئله ناهمگن با خطای نسبی  $\epsilon_p = 4/45 \times 10^{-2}$  پیش‌بینی کرده است. برای بهبود نتایج حل، عملگر حجم محدود چند مقیاسی به عنوان پیش‌شرط در روش تکراری ریچاردسون به کار گرفته شده است. پس از 80 تکرار خطای نسبی فشار برای مسئله همگن به  $\epsilon_p = 1/04 \times 10^{-5}$  و برای مسئله ناهمگن به  $\epsilon_p = 2/12 \times 10^{-6}$  کاهش یافته است.

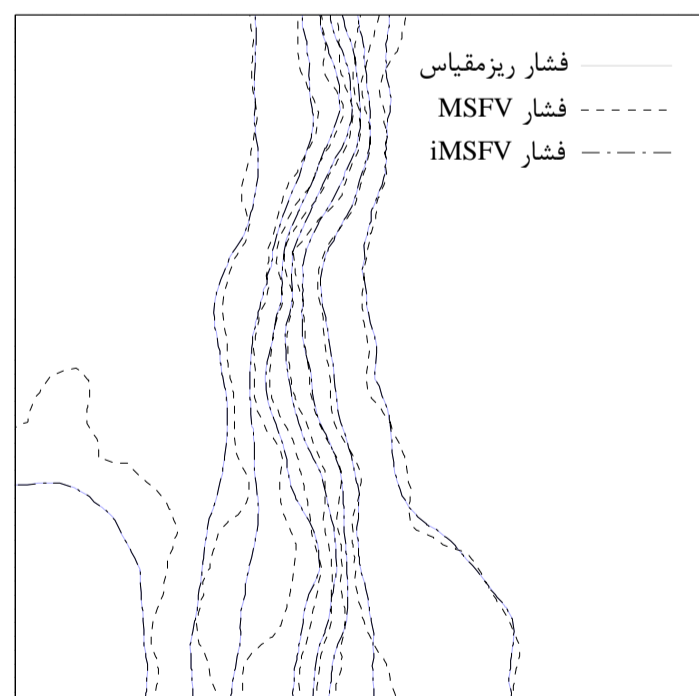
نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری با شبکه‌های بی‌سازمان چند مقیاسی تولید شده، میدان فشار ریز مقیاس را با دقت بالایی پیش‌بینی می‌کند.

#### 7- فهرست علائم

ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی	$A$
تعداد گره‌های مرزی	$BV$
خطای نسبی میدان فشار	$\epsilon_p$
تانسور نفوذپذیری مطلق	$K$
تعداد زیرمجموعه‌ها	$k$
عملگر حجم محدود چند مقیاسی	$M_{ms}^{-1}$



شکل 10 لگاریتم طبیعی میدان نفوذپذیری



شکل 11 میدان فشار بدست آمده از روش ریز مقیاس (خطوط توپر)، روش حجم محدود چند مقیاسی (خطوط خط چین) و روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری (خطوط خط-نقطه چین)

اولیه و دوگانه بی‌سازمان، مناسب برای اعمال روش حجم محدود چند مقیاسی ارائه شده است. یکی از چالش‌های اساسی در تعمیم روش حجم

- multiphase flow in porous media, *J. Comput. Phys.* Vol. 216, No. 2, pp. 616–636, 2006.
- [7] H. Zhou, H.A. Tchelepi, Operator-based multiscale method for compressible flow, *SPE J.* Vol. 13, pp. 267–273, 2008.
- [8] H. Hajibeygi, P. Jenny, Multiscale finite-volume method for parabolic problems arising from compressible multiphase flow in porous media, *J. Comput. Phys.* Vol. 228, pp. 5129–5147, 2009.
- [9] H. Hajibeygi, G. Bonfigli, M.A. Hesse, P. Jenny, Iterative multiscale finite-volume method, *J. Comput. Phys.* Vol. 227, pp. 8604–8621, 2008.
- [10] I. Lunati, M. Tyagi, S.H. Lee, An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution, *J. Comput. Phys.* Vol. 230, pp. 1849–1864, 2011.
- [11] H. Hajibeygi, P. Jenny, Adaptive iterative multiscale finite volume method, *J. Comput. Phys.* Vol. 230, pp. 628–643, 2011.
- [12] I. Lunati, S.H. Lee, An operator formulation of the multiscale finite-volume method with correction function, *Multiscale Model Simul.* Vol. 8, No. 1, pp. 96–109, 2009.
- [13] H. Zhou, H.A. Tchelepi, Two-stage algebraic multiscale linear solver for highly heterogeneous reservoir models, *SPE J.* Vol. 17, pp. 523–539, 2012.
- [14] Y. Wang, H. Hajibeygi, H.A. Tchelepi, Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous porous media, *J. Comput. Phys.* Vol. 259, pp. 284–303, 2014.
- [15] M. Mosharaf Dehkordi, M. Taghizadeh Manzari, A multi-resolution multiscale finite volume method for simulation of fluid flows in heterogeneous porous media, *J. Comput. Phys.* Vol. 248, pp. 339–362, 2013.
- [16] A.P. Giotis, K.C. Giannakoglou, An unstructured grid partitioning method based on genetic algorithms, *Adv. Eng. Softw.* Vol. 29, No. 2, pp. 129–138, 1998.
- [17] P. Korosec, J. Silc, B. Robic, Solving the mesh-partitioning problem with an ant-colony algorithm, *Parallel Computing.* Vol. 30, No. 5/6, pp. 785–801, 2004.
- [18] P. Liu, C. Wang, A bubble-inspired algorithm for finite element mesh partitioning, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 93, No. 7, pp. 770–794, 2013.
- [19] C. Walshaw, M. Cross, Mesh partitioning: a multilevel balancing and refinement algorithm. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 22, pp. 63–80, 2000.
- [20] B. Hendrickson, R. Leland, A multilevel algorithm for partitioning graphs. *Proceedings of the 1995 ACM/IEEE conference on supercomputing*, New York, 1995.
- [21] F. Glover, M. Laguna, Tabu Search. *Kluwer Academic Publishers*: Boston, 1997.
- [22] E.W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, Vol. 1, pp. 269–271, 1959.
- [23] M. Christie, M. Blunt, Tenth SPE comparative solution project: a comparison of upscaling techniques, *SPE Reserv. Evaluat. Eng.* Vol. 4, No. 4, pp. 308–317, 2001.

بردار یکه عمود بر وجوه سلول	$n$
فشار	$p$
نرخ تزریق یا برداشت	$q$
زمان ممنوع	$T_n$

## علائم یونانی

ضریب تحرک کل	$\lambda$
تابع پایه	$\Phi$
تابع تصحیح	$\psi$
سلول درشت اولیه	$\Omega^C$
سلول درشت دوگانه	$\Omega^D$
پارامتر تخفیف	$\omega$

## بالانویس‌ها

تعداد تکرار	$V$
-------------	-----

## زیرنویس‌ها

مقیاس ریز	$f$
چند مقیاسی	$ms$

## 8- مراجع

- [1] T.Y. Hou, X.H. Wu, A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media, *J. Comput. Phys.* Vol. 134, pp. 169–189, 1997.
- [2] Y. Efendiev, T.Y. Hou, *Multiscale Finite Element Methods. Theory and Applications*, Springer New York, New York, NY, 2009.
- [3] Z.M. Chen, T.Y. Hou, A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients, *Math. Comput.* Vol. 72, pp. 541–576, 2003.
- [4] J.E. Aarnes, V. Kippe, K.A. Lie, Mixed multiscale finite elements and streamline methods for reservoir simulation of large geomodels, *Adv Water Res.* Vol. 28, No. 3, pp. 257–271, 2005.
- [5] P. Jenny, S.H. Lee, H.A. Tchelepi, Multiscale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation, *J. Comput. Phys.* Vol. 187, pp. 47–67, 2003.
- [6] I. Lunati, P. Jenny, Multiscale finite-volume method for compressible