



## پیش بینی شکست شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی تحت بارگذاری مرکب کششی - برشی با استفاده از معیار چگالی انرژی کرنشی

علیرضا ترابی<sup>1\*</sup>، شهاب امینی نژاد<sup>2</sup>، فیلیپو برتو<sup>3</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران  
 2- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران  
 3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه پادوا، ویچنزا، ایتالیا  
 \* تهران، صندوق پستی 13741-4395، a\_torabi@ut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 07 تیر 1394  
 پذیرش: 13 مرداد 1394  
 ارائه در سایت: 31 مرداد 1394  
 کلید واژگان:  
 شیار V شکل با سوراخ انتهایی  
 شکست ترد  
 چگالی انرژی کرنشی  
 دیسک برزیلی  
 بارگذاری مد ترکیبی I/II

### چکیده

شیارها یکی از ناپیوستگی‌های معمول در سازه‌های مهندسی می‌باشند که به جهت اهداف طراحی ایجاد می‌گردند. در رابطه با شیارهای V شکل موجود در قطعات از جنس ترد، به علت تمرکز تنش بالا در همسایگی نوک شیار، ترک‌های ایجاد شده در این ناحیه باید رفع و تعمیر گردند تا از شکست ترد جلوگیری به عمل آید. یکی از معمول‌ترین روش‌های تعمیراتی، ایجاد یک سوراخ دایره‌ای در نوک شیار V شکل است. این سوراخ، ترک را رفع نموده و هندسه شیار اولیه را به یک شیار V شکل با سوراخ انتهایی تغییر می‌دهد. به علت تغییر هندسه، ظرفیت تحمل بار شیار جدید با شیار اولیه تفاوت خواهد داشت. لذا، برای تضمین ایمنی سازه تعمیر شده، بررسی شکست شیار جدید در برابر بارهای وارده امری ضروری است. در تحقیق حاضر، ابتدا، نمونه آزمایشگاهی جدیدی با نام دیسک برزیلی دارای شیار مرکزی V شکل با سوراخ انتهایی و از جنس پلکسی گلاس جهت انجام آزمایش‌های شکست در دمای اتاق مد نظر قرار می‌گیرد. بارهای شکست تجربی ثبت شده و تعدادی داده جدید آزمایشگاهی در رابطه با شکست ترد شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی تحت بارگذاری مرکب فراهم می‌شود. سپس، برای پیش بینی بارهای شکست تجربی، معیار چگالی انرژی کرنشی مد نظر قرار می‌گیرد. از نتایج به دست آمده مشخص می‌شود که معیار چگالی انرژی کرنشی توانایی پیش بینی موفقیت‌آمیز استحکام استاتیکی در نمونه‌های دیسک برزیلی شیاردار دارای زوایای مختلف دهانه شیار و شعاع‌های گوناگون نوک شیار را داراست.

## Fracture prediction of V-notches with end holes under combined tension-shear loading using the strain energy density criterion

Ali Reza Torabi<sup>1\*</sup>, Shahab Amininejad<sup>1</sup>, Filippo Berto<sup>2</sup>

1- Faculty of New Science and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran  
 2- Department of Management and Engineering, University of Padua, Vicenza, Italy  
 \* P.O.B. 13741-4395, Tehran, Iran, a\_torabi@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 28 June 2015  
 Accepted 04 August 2015  
 Available Online 22 August 2015

#### Keywords:

V-notch with end hole  
 Brittle fracture  
 Strain energy density  
 Brazilian disk  
 Mixed mode I/II loading

### ABSTRACT

Notches are one of the most common discontinuities in engineering structures that are created for engineering design purposes. Dealing with V-notches in components made of brittle materials, because of the presence of high stress concentration near the notch tip, detected cracks in this region should be removed and repaired to avoid brittle fracture. The most usual repair method is to drill a circular hole at the V-notch tip. Clearly, this hole removes the crack and changes the initial notch geometry to a V-notch with end hole. Because of changing the initial notch feature, the load-carrying capacity of the new notch would be different from the initial one. Therefore, in order to assure the safety of the repaired structure, fracture assessment of the new notch is necessary. In the present research, first, a new test specimen, called Brazilian disk containing central V-notch with end hole made of PMMA is considered for conducting fracture tests at room temperature and the experimental fracture loads are recorded. Some new test results are provided concerning brittle fracture in V-notches with end holes under mixed mode I/II loading. Then, to predict the experimental fracture loads, the strain energy density criterion is utilized. From the obtained results, it is shown that the strain energy density criterion could successfully predict the static strength of notched Brazilian disk specimens for different notch angles and various notch radii.

Please cite this article using:

A. R. Torabi, Sh. Amininejad, F. Berto, Fracture prediction of V-notches with end holes under combined tension-shear loading using the strain energy density criterion, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 389-395, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

## 1- مقدمه

شیارهای V شکل نوک تیز انجام گرفته است. تا اینجا، عمده تحقیقات انجام شده در رابطه با انواع شیارها و نمونه‌های آزمایشگاهی مورد استفاده، بیان گردید. اما، از جدیدترین حوزه‌های مکانیک شکست شیار که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است، بررسی تئوری و تجربی شکست در شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی است. در رابطه با علت شکل‌گیری یک شیار V شکل با سوراخ انتهایی، بایستی به یکی از معمول‌ترین روش‌های تعمیر قطعات ترک‌دار اشاره نمود که در شکل 1 این فرآیند تعمیراتی به صورت شماتیک آمده است.

در توضیح شکل باید 1 گفت که نواحی نوک تیز دارای تمرکز تنش بوده و مستعد ایجاد ترک می‌باشند. یکی از این نواحی دارای تمرکز تنش شدید، نوک شیارهای V شکل بوده که معمولاً ترک‌هایی در نوک شیار ایجاد می‌گردد. جهت تعمیر ترک ایجاد شده، برای ترک‌هایی با طول کوتاه، معمولاً سوراخی به مرکزیت نوک شیار ایجاد گشته که ضمن رفع ترک، شیار V شکل اولیه را به صورت یک شیار V شکل با سوراخ انتهایی تغییر می‌دهد. از آنجایی که هندسه شیار اولیه تغییر کرده، ظرفیت تحمل بار قطعه شیاردار نیز تغییر خواهد کرد و لذا، بررسی مجدد ظرفیت تحمل بار هندسه جدید ضروری است. در رابطه با این نوع شیارها تحقیقاتی به صورت تئوری و تجربی انجام گرفته است که از آن جمله می‌توان به پژوهش انجام گرفته توسط زاپالورتو و لازارین [20] اشاره نمود. در پژوهش مذکور، میدان تنش در اطراف شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی در حالت‌های مد I، مد II و مد III بارگذاری ارائه گردیده و دقت روابط ارائه شده به کمک تحلیل اجزاء محدود بررسی شده است. در پژوهش دیگری که توسط لازارین و همکاران [21] انجام گرفت، ضرایب شدت تنش توسعه یافته برای شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی در مد II خالص بررسی شد. دیگر تحقیق در این حوزه توسط برتو و زاپالورتو انجام شده است. در این پژوهش، محققین با در نظر گرفتن توزیع تنش در اطراف شیار V شکل با سوراخ انتهایی، مفهوم روش شعاع شیار مجازی<sup>6</sup> را جهت پیش بینی شکست در این نوع شیارها توسعه دادند [22]. از جمله دیگر پژوهش‌ها می‌توان به تحقیق لازارین و همکاران [23] نیز اشاره نمود. در این تحقیق، شکست ترد شیارهای کلیدی شکل که حالت خاصی از شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی می‌باشند (زاویه دهانه شیار برابر صفر می‌گردد)، مورد بررسی تئوری و تجربی قرار گرفت. در پژوهش مرجع [23]، ابتدا آزمایش‌های شکست ترد بر روی نمونه‌های دارای شیار کلیدی شکل و از جنس گرافیت، تحت بارگذاری مد ترکیبی انجام و بار شکست و زاویه شروع شکست نمونه‌ها ثبت شد. سپس، به کمک معیار چگالی انرژی کرنشی، نتایج تجربی پیش بینی و به تحلیل نتایج پرداخته شد. از دیگر پژوهش‌های انجام شده در این حوزه می‌توان به مرجع [24] اشاره نمود که در آن دو رابطه جهت تعیین چقرمگی شکست در مد I، برای شیارهای کلیدی شکل و بر اساس معیارهای تنش نقطه‌ای و تنش متوسط ارائه گردید. دقت روابط ارائه شده در تخمین چقرمگی شکست شیار، با یک سری از داده‌های تجربی گزارش شده در مرجع [23] مقایسه گردید. این داده‌ها مربوط به شکست ترد در نمونه‌های مستطیل شکل، دارای شیار مرکزی کلیدی شکل و از جنس گرافیت ایزواستاتیک بودند که در هندسه‌های مختلف شیار، تحت بارگذاری مد I خالص آزمایش شده بودند. از مقایسه بین نتایج تئوری و داده‌های تجربی، مشخص گردید که دقت هر کدام از دو معیار، بسته به شعاع نوک شیار، تفاوت می‌کند. اما در مجموع، متوسط دقت معیارهای ارائه شده در

در حدود دو قرن پیش، شاخه جدیدی از علم مکانیک شکست با نام مکانیک شکست شیار<sup>1</sup> پایه‌گذاری گردید که شکست قطعات شیاردار را بررسی می‌نماید. غالب بررسی‌ها در حوزه مکانیک شکست شیار متمرکز بر شرایط بارگذاری یکنواخت و استاتیکی است. مدهای بارگذاری در قطعات شیاردار عیناً مشابه عضوهای ترک‌دار بوده که شامل مد I (بازشدگی خالص دهانه شیار)، مد II (مد برشی داخل صفحه‌ای)، مد III (مد برشی خارج از صفحه) و هر ترکیبی از مدهای ذکر شده است. مفاهیم پایه‌ای در مکانیک شکست شیار، مشابه مفاهیم موجود در مکانیک شکست کلاسیک بوده که به عنوان نمونه، معیارهای مدل ناحیه چسبناک [1]، حداکثر تنش محیطی و تنش متوسط [5-2]، انتگرال J [6]، مکانیک شکست محدود<sup>2</sup> [7]، تئوری فواصل بحرانی<sup>3</sup> [8] و چگالی انرژی کرنشی<sup>4</sup> [9-12] از این دست می‌باشند.

## 2- مروری بر پژوهش‌های موجود و علت شکل‌گیری شیار V شکل با سوراخ انتهایی

اغلب تحقیقات موجود در زمینه مکانیک شکست شیار تحت مد I خالص و در دو دیدگاه تئوری و تجربی انجام گرفته است. اما اخیراً تحقیقات در مد ترکیبی بارگذاری در شیارها افزایش یافته و مورد توجه محققین قرار گرفته است. علت آن نیز کاربرد وسیع تر مدهای بارگذاری ترکیبی در مسائل عملی مهندسی است. بررسی چقرمگی شکست در شیارها، عموماً به دو روش تئوری و تجربی انجام می‌پذیرد. در رابطه با روش تجربی، عموماً از نمونه‌های آزمایشگاهی مانند خمش سه نقطه‌ای، خمش چهار نقطه‌ای، نیم دیسک برزیلی و دیسک برزیلی و ... استفاده گردیده که هر یک دارای معایب و مزایای مخصوص به خود می‌باشند. برای مثال، آیت الهی و ترابی [13] چقرمگی شکست در مد I را به کمک نمونه‌های آزمایشگاهی خمش سه نقطه‌ای بررسی نمودند. در بخش تئوری نیز، بررسی‌ها عموماً در دو دیدگاه انرژی پایه و تنش پایه انجام گرفته است. در رابطه با دسته انرژی پایه، به عنوان مثال در مرجع [14] ظرفیت تحمل بار در نمونه‌های از جنس گرافیت با دقت قابل قبولی توسط معیار چگالی انرژی کرنشی پیش‌بینی شده است. همچنین، نتایج تجربی موجود در مرجع [15] در رابطه با شکست قطعات شیاردار و از جنس پلکسی گلاس در دمای اتاق و تحت شرایط مد III خالص به طور موفقیت‌آمیزی به کمک معیار چگالی انرژی کرنشی پیش بینی شد. در مرجع [16] به منظور جلوگیری از اثرات پلاستیسیته بر نتایج موجود، آزمایش‌های مرجع [15] در دمای 60- درجه سانتیگراد تکرار گردیده و مجدداً دقت قابل قبول معیار چگالی انرژی کرنشی در پیش بینی نتایج تجربی اثبات گردیده است. از دیگر تحقیقات موجود بر پایه انرژی در حوزه شیارها می‌توان به مرجع [17] اشاره نمود که معیار چگالی انرژی کرنشی تحت شرایط بارگذاری مد ترکیبی I/III مورد آزمون قرار گرفت. در رابطه با دسته معیارهای بر پایه تنش نیز تحقیقات وسیعی گزارش شده است. برای نمونه، آیت الهی و ترابی در مرجع [18] به کمک معیار حداکثر تنش محیطی شیار<sup>5</sup>، چقرمگی شکست در نمونه‌های دیسک برزیلی دارای شیار V شکل نوک گرد و از جنس پلکسی گلاس را در دمای اتاق با موفقیت پیش بینی نمودند. بررسی‌های تئوری و تجربی مشابهی نیز در مرجع [19] برای

1- Notch fracture mechanics

2- Finite fracture mechanics

3- Theory of critical distances

4- Strain energy density (SED)

5- Round-tip V-notch maximum tangential stress (RV-MTS)

6- Fictitious notch radius (FNR)

با سوراخ انتهایی، انجام آزمایش‌های شکست بر روی نمونه‌های آزمایشگاهی مد نظر قرار گرفت و تعداد زیادی آزمایش با جزئیات زیر انجام گردید.

### 3-1- جنس مورد استفاده

جنس مورد استفاده در ساخت نمونه‌های آزمایشگاهی، پلیمر پلکسی گلاس بود که در دمای اتاق رفتار شبه ترد از خود نشان می‌دهد. خواص مکانیکی ماده مورد مطالعه در این تحقیق در جدول 1 آمده است.

### 3-2- نمونه آزمایشگاهی

در این پژوهش، نمونه آزمایشگاهی به شکل دیسک برزیلی دارای شیار مرکزی V شکل با سوراخ انتهایی (شیار VO شکل) مد نظر قرار گرفت. (نمونه آزمایشگاهی وی-او-بی-دی<sup>1</sup>). علت انتخاب این نمونه، قابلیت اعمال انواع مدهای بارگذاری ترکیبی بر روی آن بود که بدون نیاز به هیچ‌گونه نگهدارنده خاص، این امکان را فراهم می‌نمود. نمایی از نمونه آزمایشگاهی انتخاب شده و پارامترهای ابعادی آن در شکل 2 ارائه شده است.

در رابطه با ابعاد استفاده شده برای دیسک برزیلی مورد آزمایش، قطر  $D$  برابر 80 میلی متر، طول سر به سر شیار مرکزی ( $d$ ) برابر 40 میلی متر و ضخامت  $t$  برابر 10 میلی متر انتخاب شد. به لحاظ ابعاد شیار موجود در مرکز دیسک برزیلی، زوایای 30، 60 و 90 درجه برای زاویه V شکل دهانه شیار ( $2\alpha$ ) و شعاع‌های 0.5، 1، 2 و 4 میلی متر برای سوراخ انتهایی ( $\rho$ ) انتخاب گردید. لذا، در مجموع 4 هندسه مختلف شیار بر روی نمونه‌های آزمایش ایجاد شد. اما، در نمونه آزمایشگاهی انتخاب شده به منظور ایجاد مدهای مختلف بارگذاری بر روی نمونه‌های آزمایش، می‌توان بر طبق شکل 3، زاویه بین راستای اعمال نیرو توسط دستگاه و خط نیمساز شیار (زاویه  $\beta$ ) را تغییر داد و مقادیر مختلف ترکیب مد را ایجاد نمود. به عنوان مثال، با قرار دادن زاویه  $\beta$  برابر با صفر، شرایط مد I خالص یا کشش خالص در شیار ایجاد گشته که با افزایش این زاویه در جهت دوران نشان داده شده در شکل 3، شرایط مد ترکیبی I/II یا ترکیب کشش/برش ایجاد شده و نهایتاً، با قرار گرفتن نمونه وی-او-بی-دی تحت زاویه‌ای خاص به نام  $\beta_{II}$ ، شرایط مد برشی خالص یا مد II خالص ایجاد می‌گردد. در رابطه با زاویه‌های بارگذاری  $\beta$  انتخاب شده در آزمایش‌های شکست، هر یک از 4 هندسه نمونه‌های وی-او-بی-دی تحت 2 زاویه  $\beta$  مد ترکیبی آزمایش شدند. با توجه به 4 هندسه در نظر گرفته شده برای شیار، 2 مقدار زاویه بارگذاری مختلف برای هر هندسه شیار و انجام 3 آزمایش شکست برای بررسی تکرارپذیری نتایج هر آزمایش، در مجموع 72 آزمایش شکست انجام گردید.

در شکل‌های 4 و 5، نمونه‌های وی-او-بی-دی در حین انجام آزمایش شکست و بعد از شکست نشان داده شده‌اند.

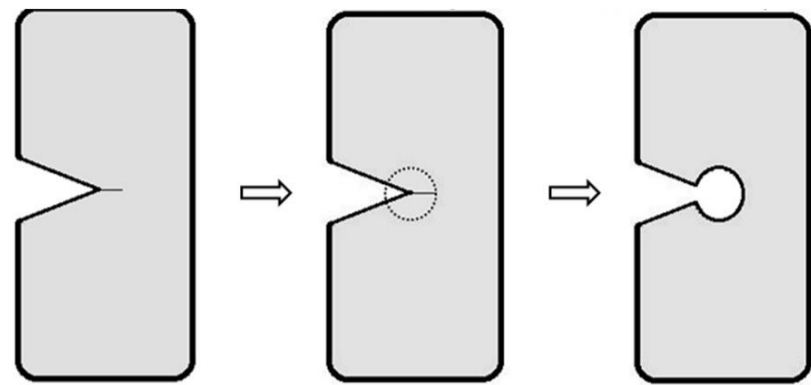
### 3-3- نتایج آزمایش

مقادیر بار شکست برای هر یک از سه آزمایش انجام شده برای نمونه وی-او-بی-دی به همراه متوسط آن‌ها در جدول 2 ارائه شده است. قابل ذکر است

جدول 1 خواص مکانیکی پلکسی گلاس [13]

GPa2/96	مدول یانگ	$E$
0/38	ضریب پواسون	$\nu$
MPa 70/5	استحکام کششی	$\sigma_u$
<sup>05</sup> MPam1/96	چقرمگی شکست کرنش صفحه‌ای	$K_{Ic}$

1- Brazilian disk weakened by a V-notch with end hole (VO-BD)



شکل 1 شیار V شکل با سوراخ انتهایی ایجاد شده در فرآیند تعمیر ترک

حدود 93% بود. علاوه بر آن، در مرجع [25]، ترابی و پیرهادی دو معیار حداکثر تنش محیطی شیار و تنش متوسط شیار را برای شیارهای کلیدی شکل، در حالت مد ترکیبی فرمول‌بندی نمودند. ایشان، نتایج حاصل از این معیارها را به صورت منحنی‌های شکست و زاویه شروع شکست به دست آوردند. سپس به منظور بررسی دقت معیارهای ارائه شده، داده‌های تجربی موجود در مرجع [23] را مد نظر قرار دادند. از مقایسه نتایج تئوری و تجربی مشخص گردید که دقت کلی هر دو معیار قابل قبول است، ولیکن برای شعاع‌های کوچک نوک شیار، معیار حداکثر تنش محیطی شیار پیش‌بینی‌های بهتری را ارائه می‌دهد. بالعکس، برای شعاع‌های بزرگ نوک شیار، معیار تنش متوسط شیار بهتر عمل می‌کند. در رابطه با زاویه شروع شکست نیز هر دو معیار، مقادیر تجربی را با دقت بالایی پیش‌بینی می‌نمایند. اما از جدیدترین کارهای انجام شده در رابطه با بررسی شکست ترد شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی می‌توان به پژوهش ترابی و امینی نژاد اشاره نمود [26]. در این پژوهش، نخست 48 آزمایش شکست ترد بر روی نمونه‌های دیسک برزیلی دارای شیار مرکزی V شکل با سوراخ انتهایی و از جنس پلکسی گلاس، در حالت مد I خالص (کشش خالص) انجام و بارهای شکست و زوایای شروع شکست ثبت گردید. سپس با در نظر گرفتن میدان تنش در اطراف شیار V شکل با سوراخ انتهایی در حالت مد I خالص و به کمک دو معیار شکست ترد تنش نقطه‌ای و تنش متوسط، چقرمگی شکست و زاویه شروع شکست برای این نوع شیارها پیش‌بینی شد. از مقایسه نتایج تئوری و تجربی در پیش‌بینی بار شکست و زاویه شروع شکست دقت مناسب هر دو معیار مشخص گردید.

در انتهای بخش مرور منابع، لازم به ذکر است که علاوه بر معیارهای تنش پایه و انرژی پایه، معیارهایی نیز توسط محققین ارائه شده است که در آنها از تنش و انرژی در تعامل با یکدیگر برای پیش‌بینی شکست ترد در شیارها، تحت مدهای بارگذاری مختلف استفاده شده است. به عنوان مثال‌هایی در این حوزه می‌توان به مراجع [27-30] اشاره نمود. بعلاوه، معیارهایی نیز بر مبنای ریز ساختار ماده ارائه شده است که در هر دو حوزه مد I خالص و مد ترکیبی I/II کاربرد دارند [31,32].

اما، در پژوهش حاضر، نخست به کمک نمونه‌های آزمایشگاهی دیسک برزیلی دارای شیار V شکل با سوراخ انتهایی و از جنس پلکسی گلاس، بار استاتیکی لازم جهت شکست نمونه‌های آزمایشگاهی در مد ترکیبی I/II اندازه‌گیری شد. سپس، بارهای شکست تجربی ثبت شده به کمک معیار چگالی انرژی کرنشی پیش‌بینی گردید. نهایتاً، از مقایسه بین نتایج تئوری و تجربی مشاهده گردید که بارهای شکست تجربی با دقت خوبی به کمک معیار چگالی انرژی کرنشی پیش‌بینی می‌گردند.

### 3- بخش تجربی

جهت بررسی تجربی بار شکست در قطعات ترد تضعیف شده با شیار V شکل

جدول 2 بارهای تجربی شکست در نمونه‌های وی- او- بی- دی تحت بارگذاری مد

شاخص هندسه	ترکیبی			بار شکست متوسط (نیوتن)
	بار شکست 1 (نیوتن)	بار شکست 2 (نیوتن)	بار شکست 3 (نیوتن)	
30-0/5-10	4754	4332	4707	4597/6
30-0/5-15	4395	4650	5203	4749/3
30-1-10	4395	5505	4651	4580/3
30-1-15	4127	4533	4949	4536/3
30-2-10	6699	6082	6427	6402/6
30-2-15	5203	4815	5308	5108/6
30-4-10	6261	6156	6208	6208/3
30-4-15	5742	5456	6156	5784/6
60-0/5-10	3857	3834	3620	3770/3
60-0/5-20	3734	3935	3834	3834/3
60-1-10	4395	3834	4280	4169/6
60-1-20	4357	4318	4280	4318/3
60-2-10	4874	4993	4844	4903/6
60-2-20	4228	4561	4693	4494
60-4-10	5758	5305	5686	5583
60-4-20	5399	5686	5488	5524/3
90-0/5-10	2371	2353	2609	2444/3
90-0/5-20	2738	3013	2886	2879
90-1-10	2722	2915	2907	2848
90-1-20	3279	3279	2969	3175/6
90-2-10	3359	2862	2916	3045/6
90-2-20	3319	3439	3445	3041
90-4-10	3700	3911	3947	3852/6
90-4-20	3745	4071	3900	3905/3

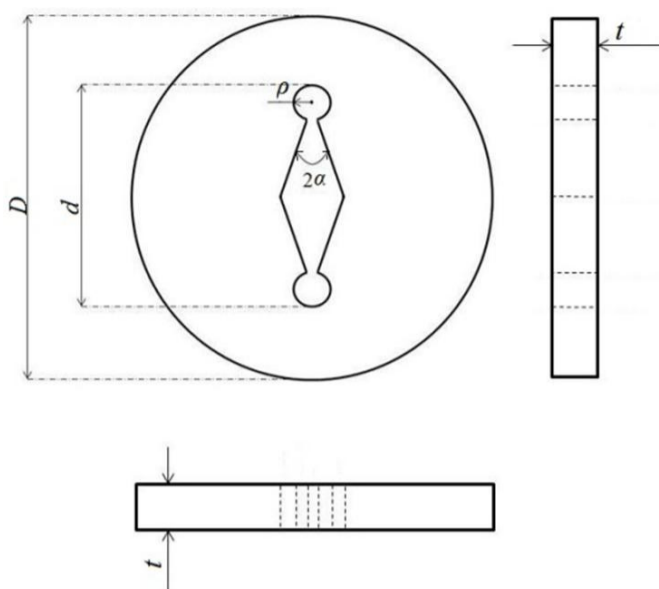
که در ستون اول، سه رقم موجود در شاخص هندسه به ترتیب بیانگر زاویه دهانه شیار، شعاع سوراخ انتهایی و زاویه بارگذاری می‌باشند. در بخش بعد، بارهای شکست ارائه شده در جدول 2، به کمک معیار چگالی انرژی کرنشی پیش بینی می‌گردند.

#### 4- بخش تئوری

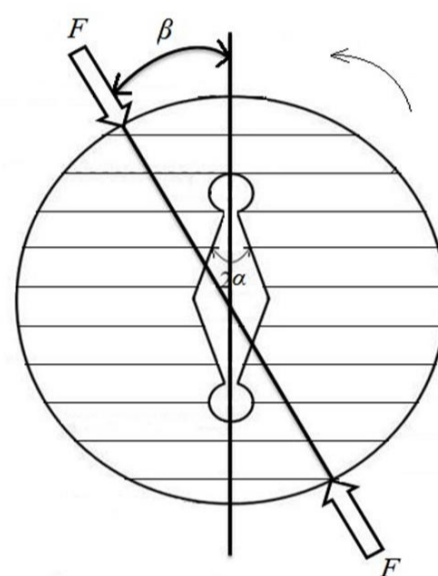
##### 4-1- معیار چگالی انرژی کرنشی

در پژوهش حاضر، معیار چگالی انرژی کرنشی محلی جهت پیش بینی بار شکست مورد استفاده قرار می‌گیرد. این معیار پیش از این جهت بررسی شکست در قطعات ترک‌دار مورد استفاده قرار گرفته بود که در پژوهش حاضر به حوزه شیارها بسط داده شده است. بر طبق این معیار، شکست ترد زمانی رخ می‌دهد که متوسط چگالی انرژی کرنشی در سراسر یک حجم کنترل مشخص به مقدار بحرانی خود یعنی  $W_c$  برسد که این مقدار بحرانی جزء خواص ماده است و به هندسه شیار بستگی ندارد. برای حالت شیار V شکل با سوراخ انتهایی، حجم کنترل مورد نظر در شکل 6 آمده است.

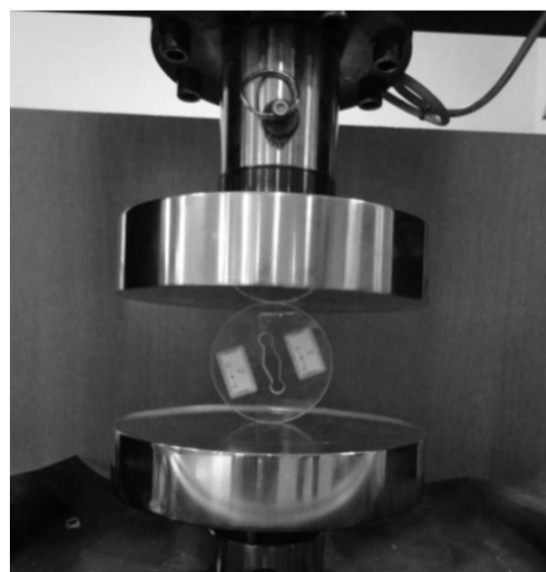
حجم ناحیه بحرانی به عنوان تابعی از استحکام کششی ( $\sigma_t$ ) و چقرمگی شکست ( $K_{Ic}$ ) در نظر گرفته می‌شود. این روش، پیش از این برای قطعات دارای شیار V شکل تحت مد I و مد II بارگذاری مد نظر قرار گرفته است [9]. در اجزای ترک‌دار، این حجم کنترل به صورت یک ناحیه هلالی در نوک



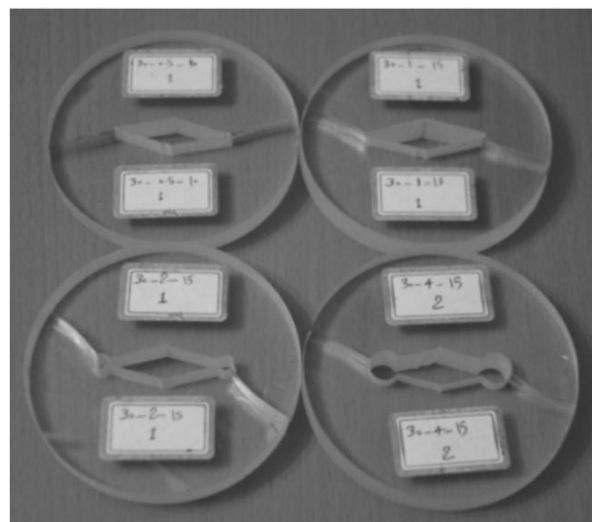
شکل 2 سه نمای نمونه آزمایشگاهی دیسک برزیلی دارای شیار مرکزی V شکل با سوراخ انتهایی



شکل 3 طریقه ایجاد مدهای مختلف بارگذاری در نمونه وی- او- بی- دی



شکل 4 نمونه آزمایشگاهی وی- او- بی- دی در حین آزمایش شکست مد ترکیبی

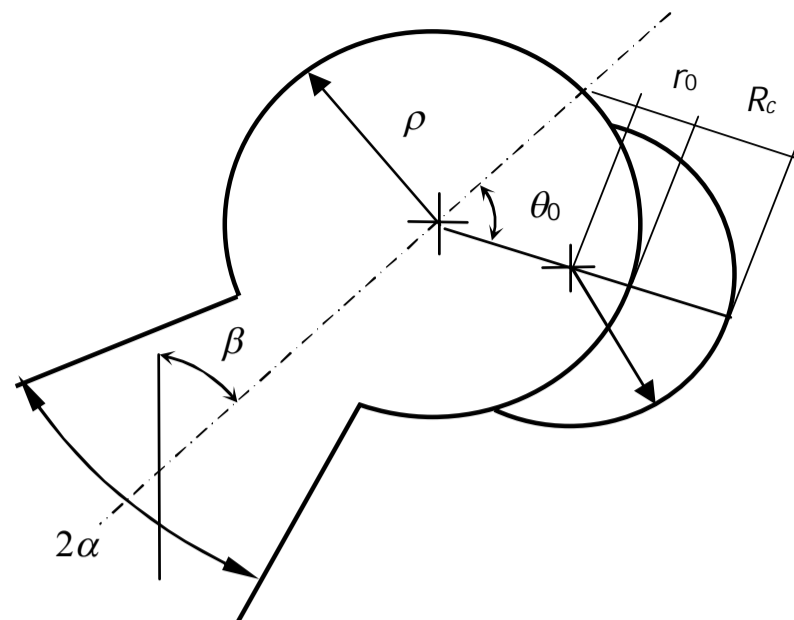


شکل 5 نمونه‌های آزمایشگاهی وی- او- بی- دی بعد از آزمایش شکست

کرنشی به این ترتیب است که ابتدا یک مدل اجزای محدود برای نمونه آزمایشگاهی ایجاد شده و بار واحدی به نمونه (بار  $F$  در شکل 3) اعمال می‌شود. شعاع حجم کنترل بحرانی مطابق رابطه 1 برای ماده مورد مطالعه محاسبه شده و حجم کنترل مورد نظر مطابق شکل 6 در مدل اجزای محدود علامت‌گذاری می‌شود. سپس، به عنوان یک خروجی متداول از تحلیل‌های اجزای محدود، متوسط چگالی انرژی کرنشی در حجم کنترل به ازای بار واحد اعمال شده به مدل محاسبه می‌گردد. در نهایت، بار اعمالی به مدل افزایش می‌یابد تا آنجا که مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی در حجم کنترل نیز افزایش یافته و به مقدار بحرانی خود یعنی  $W_c$  برسد. بار متناظر شرایط  $W_c = \bar{W}$  برابر با بار شکست پیش‌بینی شده توسط معیار چگالی انرژی کرنشی خواهد بود. لازم به ذکر است که فرض شده این تساوی در شرایط مد II و مد ترکیبی I/II برقرار است، که این موضوع به طور گسترده در تحقیقات گذشته مورد بررسی قرار گرفته است [34].

با توجه به جدول 1 و خواص داده شده برای ماده پلکسی گلاس، می‌توان مقدار چگالی انرژی کرنشی بحرانی را بر طبق رابطه 4 محاسبه نمود که برابر با 0.839 مگاژول بر متر مکعب می‌شود، درحالی‌که شعاع حجم کنترل بر طبق رابطه 1 برابر با 0/166 میلی‌متر خواهد شد. مقادیر چگالی انرژی کرنشی متوسط در حجم کنترل، با استفاده از تحلیل‌های الاستیک خطی و به کمک نرم‌افزار اجزای محدود انسیس و برای هر هندسه مورد نظر محاسبه گردید. برای تمامی نمونه‌های مدل‌سازی شده، المان‌های 8 گره ای مرتبه دوم در شرایط کرنش صفحه‌ای استفاده شد. به منظور بررسی تأثیر تعداد المان‌های مدل بر روی نتایج تحلیل (مقدار چگالی انرژی کرنشی)، تعداد المان‌ها به طور متناوب افزایش یافت و نتایج با یکدیگر مقایسه شد. مشاهده شد، درحالی‌که مقادیر تنش، کرنش و تغییر مکان‌ها در همسایگی شیار به شدت به تعداد المان‌ها حساس است، مقدار چگالی انرژی کرنشی تابع تعداد المان‌ها نبوده و می‌توان حتی با 10 المان در داخل حجم کنترل به همگرایی رسید. این نتیجه پیشتر نیز در تحقیقات سایر محققین گزارش شده است [33]. شرایط مرزی و نحوه بارگذاری بر روی مدل اجزای محدود نمونه‌ها به این صورت است که پایین‌ترین نقطه نمونه (محل تماس فک پایینی دستگاه با نمونه) کاملاً بسته شده و نقطه متناظر آن در بالاترین نقطه نمونه طوری مقید می‌شود که فقط در راستای بارگذاری اجازه حرکت داشته باشد. بار فشاری بر روی نمونه نیز به صورت متمرکز و بر روی بالاترین نقطه نمونه (محل تماس فک بالایی دستگاه با نمونه) اعمال می‌شود. نهایتاً، بر اساس روش شرح داده شده، بار شکست بر اساس چگالی انرژی کرنشی محاسبه شد. در جدول 3، بار شکست تجربی متوسط به ازای سه آزمایش انجام شده به همراه مقدار تئوری پیش‌بینی شده بر اساس معیار چگالی انرژی کرنشی برای هر هندسه شیار آمده است. در ستون چهارم (از سمت چپ) جدول 3 نیز، درصد اختلاف بین پیش‌بینی‌های تئوری و مقادیر تجربی آمده است. بعلاوه، ستون آخر جدول 3 بیانگر ریشه متوسط مربعات خطا است که به صورت درصدی بیان شده است. در واقع مقادیر ارائه شده بیانگر درصد ریشه متوسط مربعات خطا در قیاس با مقدار متوسط بار شکست تجربی است.

جهت درک بهتر نتایجی که در جدول 3 ارائه شده‌اند، می‌توان آن‌ها را به صورت گرافیکی نیز نمایش داد. به عنوان نمونه در شکل 7، منحنی بار شکست پیش‌بینی شده بر اساس تئوری در برابر شعاع سوراخ انتهایی، به همراه نتایج تجربی (دایره‌های تو خالی) برای زاویه دهانه شیار برابر 30 درجه، و به تفکیک زوایای بارگذاری مد ترکیبی آمده است. چنانکه به صورت گرافیکی نیز قابل مشاهده است، عموماً نتایج تئوری در تطابق خوبی با



شکل 6 حجم کنترل مورد نظر برای یک شیار V شکل با سوراخ انتهایی تحت بارگذاری مد ترکیبی

ترک و با شعاع  $R_c$  در نظر گرفته می‌شود [9]. در شکل 6، زاویه  $\theta_0$  بیانگر زاویه نقطه‌ای است که در آن تنش‌های اصلی به حداکثر مقدار ممکن می‌رسند که نسبت به خط نیمساز شیار سنجش می‌گردد. در حالت کرنش صفحه‌ای، اندازه حجم کنترل بحرانی را می‌توان به کمک رابطه 1 محاسبه نمود [9].

$$R_c = \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_t}\right)^2 \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \quad (1)$$

در رابطه 1،  $K_{Ic}$  چقرمگی شکست ماده مورد نظر،  $\nu$  ضریب پواسون و  $\sigma_t$  استحکام کششی ماده می‌باشند. در شکل 6، شعاع بیرونی حجم کنترل برابر با  $R_c + r_0$  است.  $r_0$  نیز تابعی از زاویه دهانه شیار و شعاع سوراخ انتهایی بوده که با رابطه 2 مشخص می‌گردد.

$$r_0 = \rho \frac{q-1}{1} \quad (2)$$

که در آن:

$$q = \frac{2\pi - 2\alpha}{\pi} \quad (3)$$

توجه گردد که در شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی، حجم کنترل در محلی قرار گرفته که حداکثر تنش اصلی در مرز شیار رخ می‌دهد. ذکر این نکته ضروری است که مزیت معیارهای بر پایه انرژی نسبت به معیارهای تنش پایه این است که به مش‌های خیلی ریز در اطراف نواحی تمرکز تنش نیازی نیست [33].

#### 2-4- معیار چگالی انرژی کرنشی برای شکست نمونه‌های پلکسی

##### گلاس دارای شیار V شکل با سوراخ انتهایی

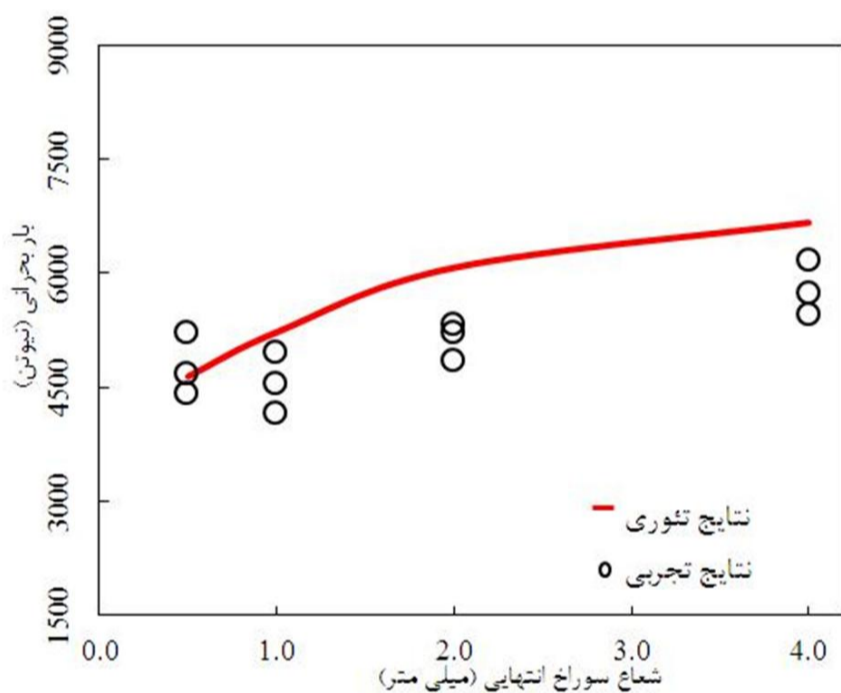
در این قسمت، معیار چگالی انرژی کرنشی شرح داده شده در بخش قبل، جهت بررسی شکست شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی و از جنس پلکسی گلاس مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقادیر چگالی انرژی کرنشی، به کمک مدل اجزای محدود ایجاد شده برای هر نمونه آزمایش قابل محاسبه است. بر طبق معیار چگالی انرژی کرنشی، شکست زمانی رخ می‌دهد که متوسط چگالی انرژی کرنشی در یک حجم کنترل بحرانی ( $\bar{W}$ ) به مقدار بحرانی خود، یعنی  $W_c$  برسد. این مقدار بحرانی می‌تواند براساس رابطه بلترامی به شرح زیر محاسبه گردد:

$$W_c = \frac{\sigma_t^2}{2E} \quad (4)$$

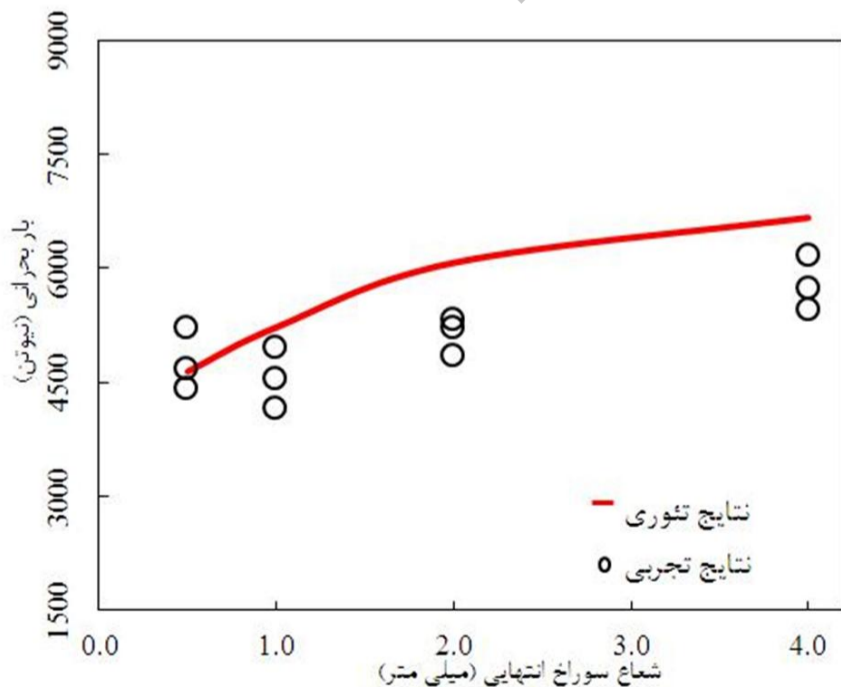
نحوه محاسبه بارهای شکست نمونه‌ها به کمک معیار چگالی انرژی

کنترل کننده شکست در نظر گرفته می شود و نه مقدار این پارامتر در حجم کنترل در همسایگی شیار. بدیهی است، چنانچه مقادیر چگالی انرژی کرنشی علاوه بر نوک شیار در تعداد نقاط قابل توجهی از همسایگی شیار (نقاط موجود در حجم کنترل) نیز در نظر گرفته شده و متوسط مقادیر یادشده به عنوان پارامتر تعیین کننده شکست در نظر گرفته شوند (مثل آنچه در این تحقیق صورت گرفته است)، مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی در حجم کنترل از مقدار آن در نوک شیار کمتر بوده و لذا بار بیشتری برای رسیدن چگالی انرژی کرنشی به مقدار بحرانی خود مورد نیاز است بنابراین، بار بحرانی بیشتری برای شکست نمونه های شیاردار پیش بینی می شود (این موضوع برای شعاع شیار 4 میلی متر با اختلاف 27% به وضوح مشخص است). در تأیید این توجیه اختلاف ها، همچنین می توان به نتایج مربوط به شعاع شیار 0.5 میلی متر اشاره کرد. این شعاع در تحقیق حاضر کمترین فاصله را با حالت نوک تیز (صفر) داشته و لذا به دلیل وجود گرادیان تنش بالا در همسایگی شیار، استفاده از معیار چگالی انرژی کرنشی در حجم کنترل اطراف شیار منجر به پیش بینی های تئوری با دقت بالا شده است.

همان طور که در بخش مرور پژوهش های پیشین نیز گفته شد، آخرین تحقیق انجام شده بر روی شکست شیار V شکل با سوراخ انتهایی، کار ترابی



(الف)



(ب)

شکل 7 منحنی بار شکست بر حسب شعاع سوراخ انتهایی برای زاویه دهانه شیار برابر 30 درجه، الف) برای  $\beta = 10$  درجه ب) برای  $\beta = 15$  درجه

جدول 3 مقایسه بین بارهای شکست پیش بینی شده بر اساس تئوری و مقادیر تجربی به همراه درصد اختلاف بین نتایج

شاخص هندسه	بار شکست متوسط تجربی (نیوتن)	بار شکست تئوری (نیوتن)	درصد اختلاف	ریشه متوسط مربعات خطا (درصد)
30-0/5-10	4597/6	4893	6/5	7/6
30-0/5-15	4749/3	4645	-2/2	7/4
30-1-10	4580/3	5501	13/5	17/6
30-1-15	4536/3	5227	15/2	16/9
30-2-10	6402/6	6355	-0/8	4
30-2-15	5108/6	6075	19	19/4
30-4-10	6208/3	7050	13/5	13/6
30-4-15	5784/6	6668	15/2	16
60-0/5-10	3770/3	3651	-3/2	4/2
60-0/5-20	3834/3	3840	0/15	2/2
60-1-10	4169/6	4222	1/3	6
60-1-20	4318/3	4215	-2/4	2/5
60-2-10	4903/6	4999	2	2/4
60-2-20	4494	4953	10/2	11/1
60-4-10	5583	5978	7/1	8
60-4-20	5524/3	6163	11/6	11/8
90-0/5-10	2444/3	2348	-4	6/2
90-0/5-20	2879	3003	4/3	5/8
90-1-10	2848	2763	-3	4/3
90-1-20	3175/6	3207	1	4/7
90-2-10	3045/6	3559	16/9	18/4
90-2-20	3041	3835	12/8	14/4
90-4-10	3852/6	4904	27/3	27/4
90-4-20	3905/3	4969	27/2	27/4

داده های تجربی می باشند. با نگاهی به شکل 7 ملاحظه می شود که به طور کلی با افزایش شعاع سوراخ انتهایی، دقت معیار چگالی انرژی کرنشی کاهش می یابد. این نکته به خصوص برای شعاع شیار 4 میلی متر بسیار مشهود است (مطابق جدول 3، مقدار اختلاف نتایج تئوری و تجربی برای این شعاع شیار به 27% نیز رسیده است). توجه به این نکته مهم ضروری است که حوزه مکانیک شکست شیار تنها شعاع های شیار را بررسی می کند که تا حد امکان به حالت نوک تیز (شعاع صفر) نزدیک باشند.

در پژوهش های گسترده ای که در این حوزه توسط محققین مختلف انجام شده است [26,12]، نشان داده شده است که برای شعاع های شیار بزرگتر یا مساوی حدود 4 میلی متر، نیازی به استفاده از معیارهای شکست حوزه مکانیک شکست شیار نبوده و می توان با معیارهای ساده بر مبنای ضریب تمرکز تنش، شکست را پیش بینی نمود. دلیل این موضوع نیز این است که با افزایش شعاع شیار، گرادیان تنش در همسایگی نزدیک شیار کاهش یافته و برای مقادیر بزرگتر از 4 میلی متر، تقریباً ناچیز است. بنابراین، در این حالت مقدار چگالی انرژی کرنشی در نوک شیار به عنوان پارامتر

- components under mode I loadings, *Int. J. Fract.*, Vol. 123, pp. 107-125, 2003.
- [7] A. Sapora, P. Cornetti, A. Carpinteri, A Finite Fracture Mechanics approach to V-notched elements subjected to mixed-mode loading, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 97, pp. 216-226, 2013.
- [8] L. Susmel, D. Taylor, The Theory of Critical Distances to estimate lifetime of notched components subjected to variable amplitude uniaxial fatigue loading, *Int. J. Fatigue*, Vol. 33, pp. 900-911, 2011.
- [9] P. Lazzarin, R. Zambardi, A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches, *Int. J. Fract.*, Vol. 112, pp. 275-298, 2001.
- [10] P. Lazzarin, F. Berto, M. Ellices, J. Gomez, Brittle failures from U- and V-notches in mode I and mixed, I + II, mode: A synthesis based on the strain energy density averaged on finite-size volumes, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, Vol. 32, pp. 671-684, 2009.
- [11] F. Berto, P. Lazzarin, M. R. Ayatollahi, Brittle fracture of sharp and blunt V-notches in isostatic graphite under torsion loading, *Carbon*, Vol. 50, pp. 1942-1952, 2012.
- [12] A. R. Torabi, A. Campagnolo, F. Berto, Mode II brittle fracture assessment of key-hole notches by means of the local energy, *J. Test. Eval.*, Accepted manuscript, 2015.
- [13] M. R. Ayatollahi, A. R. Torabi, Failure assessment of notched polycrystalline graphite under tensile-shear loading, *Mater. Sci. Eng. A*, Vol. 528, pp. 5685-5695, 2011.
- [14] A. R. Torabi, M. Fakoor, M. A. Darbani, Pure shear fracture study in a brittle graphite material containing a U-notch, *Int. J. Damage Mech.*, Vol. 23, pp. 839-854, 2014.
- [15] F. Berto, M. Ellices, P. Lazzarin, M. Zappalorto, Fracture behaviour of notched round bars made of PMMA subjected to torsion at room temperature, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 90, pp. 143-160, 2012.
- [16] F. Berto, D. A. Cendon, P. Lazzarin, M. Ellices, Fracture behaviour of notched round bars made of PMMA subjected to torsion at  $-60^{\circ}\text{C}$ , *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 102, pp. 271-287, 2013.
- [17] L. Susmel, D. Taylor, The theory of critical distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 75, pp. 534-550, 2008.
- [18] M. R. Ayatollahi, A. R. Torabi, Investigation of mixed mode brittle fracture in rounded-tip V-notched components, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 77, pp. 3087-3104, 2010.
- [19] M. R. Ayatollahi, A. R. Torabi, P. Azizi, Experimental and theoretical assessment of brittle fracture in engineering components containing a sharp V-notch, *Exp. Mech.*, Vol. 51, pp. 919-932, 2010.
- [20] M. Zappalorto, P. Lazzarin, In-plane and out-of-plane stress field solutions for V-notches with end holes, *Int. J. Fract.*, Vol. 168, pp. 167-180, 2011.
- [21] P. Lazzarin, M. Zappalorto, F. Berto, Generalised stress intensity factors for rounded notches in plates under in-plane shear loading, *Int. J. Fract.*, Vol. 170, pp. 123-144, 2011.
- [22] F. Berto, M. Zappalorto, Fictitious notch rounding concept applied to V-notches with end holes under mode I loading, *Int. J. Fract.*, Vol. 171, pp. 91-98, 2011.
- [23] P. Lazzarin, F. Berto, M. R. Ayatollahi, Brittle failure of inclined key-hole notches in isostatic graphite under in-plane mixed mode loading, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, Vol. 00, pp. 1-14, 2013.
- [24] A. R. Torabi, Closed-form expressions of mode I apparent notch fracture toughness for key-hole notches, *J. Strain. Anal. Eng. Design*, Vol. 49(8), pp. 583-591, 2014.
- [25] A. R. Torabi, E. Pirhadi, Stress-based criteria for brittle fracture in key-hole notches under mixed mode loading, *European. J. Mech A/ Solids*, Vol. 49, pp. 1-12, 2015.
- [26] A. R. Torabi, S. H. Amininejad, Brittle fracture in V-notches with end holes, *Int. J. DamagMech*, DOI: 10.1177/1056789514538293, Article in press, 2014.
- [27] Z. Yosibash, A. Bussiba, I. Gilad, Failure criteria for brittle elastic materials, *Int. J. Fract.*, Vol. 125, pp. 307-333, 2004.
- [28] Z. Yosibash, E. Priel, D. Leguillon, A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading, *Int. J. Fract.*, Vol. 141, pp. 291-312, 2006.
- [29] E. Priel, A. Bussiba, I. Gilad, Z. Yosibash, Mixed mode failure criteria for brittle elastic V-notched structures, *Int. J. Fract.*, Vol. 144, pp. 247-265, 2007.
- [30] D. Leguillon, Z. Yosibash, Crack onset at a V-notch. Influence of the notch tip radius, *Int. J. Fract.*, Vol. 122, pp. 1-21, 2003.
- [31] A. Seweryn, Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 47, pp. 673-681, 1994.
- [32] A. Seweryn, A. Lukaszewicz, Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 69, pp. 1487-1510, 2002.
- [33] P. Lazzarin, F. Berto, M. Zappalorto, Rapid calculations of notch stress intensity factors based on averaged strain energy density from coarse meshes: Theoretical bases and applications, *Int. J. Fatigue*, Vol. 32, pp. 1559-1567, 2010.
- [34] F. Berto, P. Lazzarin, Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches, *Mat. Sci. Eng. R.*, Vol. 75, pp. 1-48, 2014.

و امینی نژاد [26] بوده است. در تحقیق ایشان [26]، شکست نمونه‌های شیاردار دیسک - شکل از جنس پلکسی گلاس تحت بارگذاری مد I خالص مورد بررسی تئوری و تجربی قرار گرفته است لیکن، در پژوهش حاضر، نویسندگان مقاله در ادامه تحقیق گزارش شده در مرجع [26]، برای اولین بار، شکست نمونه‌های پلکسی گلاس را تحت بارگذاری ترکیبی کشش - برش به صورت تجربی و تئوری مورد بررسی قرار داده و معیار چگالی انرژی کرنشی را برای پیش بینی بار شکست نمونه‌های آزمایشگاهی ارائه نمودند. نتایج حاصل از این پژوهش می‌تواند در طراحی قطعات ترد و شبه ترد حاوی شیار V شکل با سوراخ انتهایی مورد استفاده قرار گیرد. به علاوه، توجه شود که اهمیت اصلی این پژوهش در حوزه تعمیر و نگهداری قطعات شیاردار است. بدین ترتیب که به کمک معیار شکست ارائه شده در این تحقیق برای شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی، می‌توان ظرفیت باربری یک قطعه یا سازه ترد یا شبه ترد حاوی شیار V شکل با سوراخ انتهایی (به‌جامانده از تعمیر شیار V شکل حاوی ترک یا آسیب کوچک در همسایگی شیار) را تعیین نموده و با توجه به وظیفه قطعه در باربری، محدوده اعتبار روش تعمیراتی برای شیار (روش برداشت ترک با سوراخ) را برای کاربران و بهره‌برداران سازه مشخص نمود.

## 5- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، تعدادی داده تجربی جدید در رابطه با شکست ترد در شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی تحت بارگذاری مد ترکیبی ارائه شد. در بخش تجربی، نمونه جدید آزمایشگاهی با نام دیسک برزلی دارای شیار مرکزی V شکل با سوراخ انتهایی و از جنس پلکسی گلاس در دمای اتاق و تحت بارگذاری مد ترکیبی آزمایش گردید و بار شکست تجربی برای هر هندسه آزمایش شده ثبت شد. در مرحله بعد، معیار چگالی انرژی کرنشی که پیشتر جهت تخمین شکست قطعات ترک‌دار استفاده شده بود، به حوزه شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی بسط داده شد و بار شکست در شیار، براساس این معیار محاسبه گردید. مشاهده گردید که معیار چگالی انرژی کرنشی به خوبی قابلیت پیش بینی بار شکست قطعات دارای شیار V شکل با سوراخ انتهایی، تحت بارگذاری مد ترکیبی را دارد. علاوه بر آن، مشاهده گردید که دقت پیش‌بینی‌های انجام شده بر اساس معیار چگالی انرژی کرنشی غالباً کمتر از 20% خطا دارد که بیانگر موفق بودن این معیار در حوزه شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی است. از فرضیات مربوط به معیار چگالی انرژی کرنشی استنباط می‌شود که در نظر گرفتن فرم هلالی شکل برای حجم کنترل ماده پلکسی گلاس، تحت شرایط مد ترکیبی بارگذاری، انتخابی مناسب است. همچنین، هر دو پارامتر چگالی انرژی کرنشی بحرانی ( $W_c$ ) و اندازه حجم کنترل ( $R_c$ )، مستقل از هندسه شیار بوده و پارامتر ثابت وابسته به جنس می‌باشند.

## 6- مراجع

- [1] F. J. Gómez, M. Ellices, A fracture criterion for sharp V-notched samples, *Int. J. Fract.*, Vol. 23, pp. 163-175, 2003.
- [2] M. R. Ayatollahi, A. R. Torabi, Tensile fracture in notched polycrystalline graphite specimens, *Carbon*, Vol. 48, pp. 2255-2265, 2010.
- [3] A. R. Torabi, Fracture Assessment of U-Notched Graphite Plates Under Tension, *Int. J. Fract.*, Vol. 181, pp. 285-292, 2013.
- [4] A. R. Torabi, M. Fakoor, E. Pirhadi, Tensile fracture in coarse-grained polycrystalline graphite weakened by a U-shaped notch, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 111, pp. 77-85, 2013.
- [5] A. R. Torabi, Estimation of tensile load-bearing capacity of ductile metallic materials weakened by a V-notch: The equivalent material concept, *Mater. Sci. Eng. A*, Vol. 536, pp. 249-255, 2012.
- [6] P. Livieri, A new path independent integral applied to notched