



## تحلیل دینامیک حاکم بر رفتار تیر برداشت گر انرژی الکترومکانیکی با ساختار پیزوالکتریک

علی قدسی قاراب<sup>1</sup>، حمید جعفری<sup>1</sup>، محمدرضا قضاوی<sup>2\*</sup>، صابر عزیزی<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

\*تهران، صندوق پستی 111-14115، ghazavim@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 خرداد 1394

پذیرش: 24 مرداد 1394

ارائه در سایت: 18 شهریور 1394

کلید واژگان:

برداشت گر انرژی

پیزوالکتریک

ارتعاشات آزاد

ارتعاشات اجباری

### چکیده

در این مقاله رفتار دینامیکی حاکم بر تیر الکترومکانیکی برداشت گر انرژی با استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک که در سراسر تیر به هسته آلومینیومی چسبیده است، مورد بررسی قرار گرفته است. دو پیکربندی مرسوم سری و موازی در نحوه اتصال لایه‌های پیزوالکتریک در نظر گرفته و معادله حاکم بر سیستم برای هر دو پیکربندی به دست آمده است. پس از جداسازی معادله حرکت تیر و استخراج معادله الکتریکی، معادلات به دو رابطه کوپل شده منجر شده و در نهایت در دو فاز ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری حل شده است. قانون بقای انرژی برای برداشت گر بررسی شده است. فرکانس‌های رزونانس به دست آمده و میزان ولتاژ، جریان و در نهایت توان برداشت شده در بازه‌ی فرکانسی محاسبه گردیده است. رفتار سیستم برای مقاومت‌های متفاوت بررسی و مشاهده شد که با وجود حذف ضرایب میرایی، سیستم همچنان حرکت مستهلک شونده دارد و این نشان دهنده برداشت انرژی از سیستم می‌باشد و با افزایش مقدار مقاومت الکتریکی خارجی تا یک مقدار خاص، سرعت میرا شدن سیستم و سطح ولتاژ برداشت شده افزایش و مقدار جریان برداشت شده کاهش یافت درحالی‌که برای مقادیر بیشتر از آن این روند معکوس گردید. مقدار توان در حالت‌های سری و موازی برای یک مقدار مقاومت خاص بهینه شد. نشان داده که به ازای تعدادی از مقاومت‌ها ولتاژ برداشت شده از حالت سری در مقایسه با حالت موازی بیشتر است، در حالی‌که شدت جریان کمتر از حالت موازی می‌باشد.

## Analysis of the dynamics of an electro mechanical energy harvester beam based on piezoelectricity

Ali Ghodsi Gharab<sup>1</sup>, Hamid Jafari<sup>1</sup>, Mohammad Reza Ghazavi<sup>1\*</sup>, Saber Azizi<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

\* P.O.B. 14115-111 Tehran, Iran, ghazavim@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 08 June 2015  
Accepted 15 August 2015  
Available Online 09 September 2015

#### Keywords:

Micro energy harvester  
Piezoelectric  
free vibration  
forced vibration

### ABSTRACT

Dynamics of an electromechanical energy harvesting cantilever beam deposited by two piezoelectric layers throughout the entire length have been studied. Two different output circuit configurations including parallel and series connections have been investigated. The free and forced vibration problems are studied by discretizing the motion equation and numerically solving the resultant along with the governing electrical equation. The energy conservation law for the proposed electromechanical energy harvesting device has been examined and accordingly verified. The behavior of the energy harvester subjected to various external load resistances was studied and it was concluded that in the absence of mechanical viscous damping, the system exhibited damped response which was attributed to the energy consumption throughout the output circuit. It was proved that as the external load resistance increases, until the special load resistance the attenuation rate of the response amplitude and accordingly the harvested voltage also increase, and for higher load resistance it was reverse. The amount of harvested power for both parallel and series output circuit configurations were examined and it was indicated that in some load resistances in series configuration the harvested voltage compared with that of the parallel connection is considerably higher; however, the harvested current was lower than that of the parallel connection.

### 1- مقدمه

یک ماشین حساب جیبی کوچک، ایده ساخت ادوات الکترونیکی که بتوانند انرژی موردنیاز خود را از راهی غیر از بکارگیری باتری‌هایی که عمر محدود دارند تأمین کند، می‌تواند بسیار کارآمد باشد از این‌رو در دهه اخیر توجه زیادی به برداشت انرژی از محیط اطراف در مقیاس‌های کوچک شده است. به ادواتی که انرژی محیط اطراف را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کنند

دسترسی به انرژی پاک و پایدار همواره از مسائلی بوده که توجه پژوهشگران و محققین را به خود جلب کرده است، این امر به روش‌های مختلفی می‌تواند صورت گیرد، از تولید نیروی الکتریکی در پشت سدها گرفته تا استفاده از توربین‌های بادی و حتی بهره بردن از سلول‌های خورشیدی برای نیروی دهی به

Please cite this article using:

A. Ghodsi Gharab, H. Jafari, M. R. Ghazavi, S. Azizi, Analysis of the dynamics of an electro mechanical energy harvester beam based on piezoelectricity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 128-136, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

شده، مهمتر از همه رفتار سیستم برای حالت‌های سری و موازی با یکدیگر مقایسه شده و تفاوت‌های هر یک نسبت به دیگری مورد مطالعه قرار گرفته، به عنوان راهی برای صحت سنجی نتایج به بررسی قانون پایستگی انرژی پرداخته شده است.

## 2- استخراج روابط

برای مدل سه‌بعدی برداشت گر انرژی پیزوالکتریک در شکل 1 ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود زیر لایه‌ی آلومینیومی تیر توسط دو لایه پیزوالکتریک در بالا و پایین ساندویچ شده است. شکل 1 (الف) و 1 (ب) به ترتیب نشان دهنده‌ی پیکربندی سری و موازی می‌باشد.

در شکل 1 (الف و ب)  $L$  طول تیر و  $W_b(x, t)$  جابجایی جانبی تکیه‌گاه می‌باشد. در شکل 1 (ت) که سطح مقطع تیر در صفحه  $z - y$  نشان داده شده است،  $b$  عرض تیر،  $h_{Al}$  و  $h_p$  به ترتیب ضخامت زیرلایه آلومینیومی و هر کدام از لایه‌های پیزوالکتریک می‌باشد.

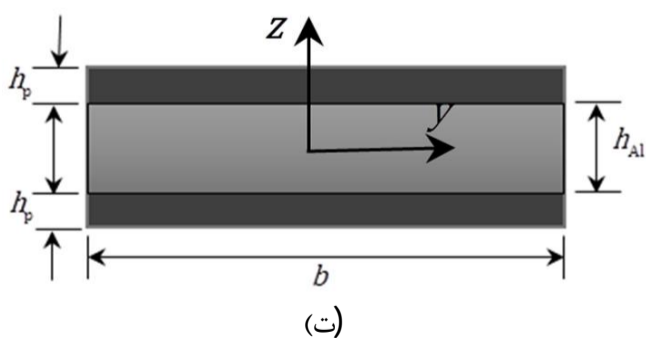
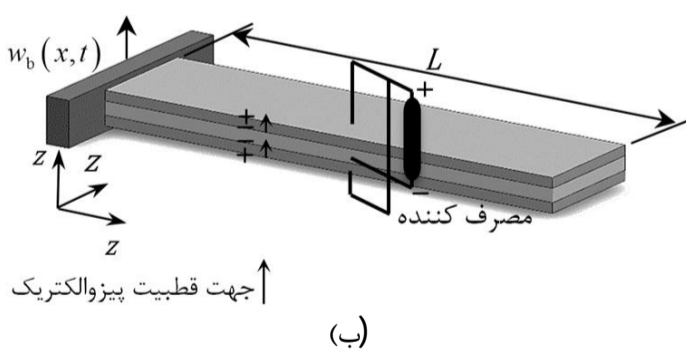
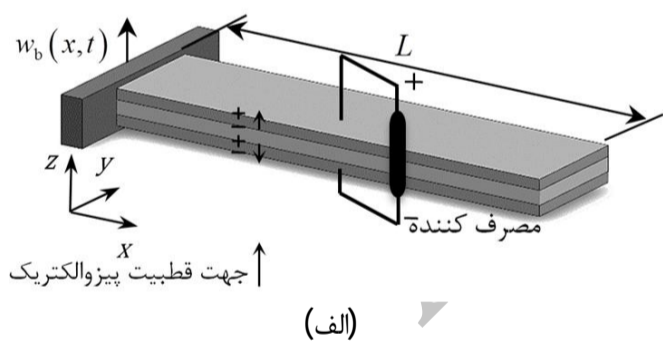
با توجه به ابعاد مدل مورد مطالعه با در نظر گرفتن فرض تئوری تیر اولر-برنولی و عدم لغزش بین سطح تماس تیر و لایه‌های پیزوالکتریک و با اعمال جابجایی جانبی به تکیه‌گاه، تغییر مکان جانبی مطلق هر نقطه از تیر،  $W(x, t)$  از رابطه (1) قابل محاسبه است:

$$W(x, t) = W_b(x, t) + W_{rel}(x, t) \quad (1)$$

که در این رابطه،  $W_b(x, t)$  تغییر مکان جانبی تکیه‌گاه و  $W_{rel}(x, t)$  تغییر مکان تیر نسبت به تکیه‌گاه می‌باشد.

معادله دیفرانسیل جزئی مربوط به ارتعاشات اجباری تیر یکسر گیردار تحت تحریک تکیه‌گاهی به صورت رابطه (2) می‌باشد [18]:

$$-\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 W_{rel}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial W_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 W_{rel}(x, t)}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 W_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$



شکل 1 مدل سه‌بعدی برداشت گر انرژی پیزوالکتریک (الف) حالت سری (ب) حالت موازی (ت) سطح مقطع تیر

برداشت گر انرژی گویند. برداشت‌گرهای انرژی را می‌توان به‌طور کلی به دو دسته محرک و غیرمحرک دسته‌بندی کرد. در دسته‌بندی محرک، غالباً ارتعاشات محیط اطراف، منبع انرژی است و معمولاً اجزاء این ادوات مرتعش هستند. سه مکانیسم برداشت در این دسته‌بندی مرسوم است: پیزوالکتریک، الکترومغناطیس و الکترواستاتیک [2,1]. در این راستا می‌توان به دو مورد از مقالات مروری که بیشتر تحقیقات تجربی صورت گرفته روی این سه روش برداشت را پوشش داده‌اند بی بی [3] و کوک چنالت [4] اشاره کرد. مواد پیزوالکتریک موادی هستند که تحت کرنش مکانیکی شار الکتریکی تولید می‌کنند مزیت برداشت‌گرهای انرژی از طریق پیزوالکتریک نسبت به سایر روش‌های ذکر شده در چگالی توان بالای پیزوالکتریک و راحتی استفاده از این مواد است [5]. به‌عنوان مثال پژوهشگران آزمایشگاه سملب<sup>1</sup> دانشگاه ای پی اف ال<sup>2</sup> [6] موفق به ساخت یک برداشت گر پیزوالکتریک با حجم مؤثر  $47/82 \text{ (mm}^3\text{)}$  با چگالی توانی  $(\frac{\mu\text{W}}{\text{g}^2\text{cm}^2})$   $11/8$  شدند این کار توانایی برداشت گر پیزوالکتریک در تولید انرژی با بازده بالا را نشان می‌دهد.

بیشتر برداشت‌گرهای انرژی به‌صورت تیرهای یکسر گیردار در نظر گرفته می‌شوند [7-11] البته سایر سازه‌ها نیز به‌منظور برداشت انرژی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، برای مثال کیمورا [12] یک صفحه ارتعاشی پیزوالکتریک را به‌منظور نیروی دهی به فرستنده رادیویی نصب شده روی پرندگان مهاجر جهت ارسال اطلاعات مکانی به ثبت رساند. کاسیاب [13] مدل گسسته برای ارائه رفتار دینامیکی برداشت گر انرژی در دامنه انرژی‌های متفاوت ارائه کرد لی [10] بهبود تبدیل انرژی ارتعاشی به انرژی الکتریکی را مورد بررسی قرار داد. وی مدل‌سازی تیر یکسر گیردار که لایه‌های پیزوالکتریک روی آن نصب شده را بهبود بخشید و نتایج را از طریق مقایسه با نتایج تجربی و روش المان محدود اعتبارسنجی نمود. ابوالفتح [14] یک دستگاه جاذب انرژی تحت تحریک تکیه‌گاهی را که دارای خاصیت خود تنظیمی فرکانس طبیعی سیستم با فرکانس تحریک تکیه‌گاهی است ساخت. این دستگاه از یک تیر یکسر گیردار که یک مغناطیس دائم در انتهای آن نصب است و یک مغناطیس دیگر با قطب مخالف اولی روبروی آن قرار گرفته تشکیل شده است. با تغییر فاصله این دو آهن‌ربا، فرکانس طبیعی و فرکانس تحریک تکیه‌گاهی بر یکدیگر منطبق می‌گردند. جونپور و همکارانش [15] یک مدل صفحه‌ای کوپل الکترومکانیکی اجزا محدود را برای تخمین توان الکتریکی خروجی صفحات پیزوالکتریک برداشت کننده انرژی ارائه دادند. عبدالکافی و همکارانش [16] استفاده از یک تیر یکسر گیردار دارای یک لایه پیزوالکتریک که تحت ارتعاشات پیچشی و خمشی است را به‌عنوان یک طرح پیزوالکتریک برداشت شده انرژی جدید پیشنهاد کردند. آندو و همکارانش [17] یک استراتژی جدید برای توسعه مدل باند گسترده و دو جهته برداشت کننده انرژی ارتعاشی ارائه نمودند.

در اکثر کارهای انجام شده پدیده تشدید بررسی نشده و از بیان معادله حرکت به‌صورت مدال چشم‌پوشی شده است. همچنین از تحریک تکیه‌گاهی صرف نظر شده و با در نظر گرفتن درهم‌تنیدگی پیزوالکتریک به‌عنوان دمپر لزجی در سیستم یک درجه آزادی جرم، فنر و دمپر، معادله بیش از حد ساده شده است. از طرفی در این حیطة کمتر به بررسی مفاهیم بنیادین علم مکانیک پرداخته شده است. در مقاله حاضر رفتار تیر در فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی شد و بهینه‌ترین مقاومت خارجی برای برداشت بیشترین توان به دست آمده و تاثیر مقاومت بر روی پارامترهای ولتاژ و شدت جریان بررسی

1- SAMLAB (The Sensors, Actuators and Microsystems Laboratory)

2- EPFL (École Polytechnique Fédérale de Lausanne)

تکیه‌گاه و تغییر مکان تیر نسبت به تکیه‌گاه به صورت رابطه (14) به دست می‌آید:

$$YI_{eq} \frac{\partial^4 W_{rel}^s(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 W_{rel}^s(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial W_{rel}^s(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 W_{rel}^s(x, t)}{\partial t^2} - \vartheta^s v^s(t) \left[ \frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] = -m \frac{\partial^2 W_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (14)$$

که  $\frac{d\delta(x)}{dx}$  از دوبار مشتق گیری تابع پله نسبت به  $(x)$  بدست آمده و به طور مشابه با قرار دادن رابطه (10) در رابطه (2)، معادله حالت موازی به دست می‌آید:

$$YI_{eq} \frac{\partial^4 W_{rel}^p(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 W_{rel}^p(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial W_{rel}^p(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 W_{rel}^p(x, t)}{\partial t^2} - \vartheta^p v^p(t) \left[ \frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] = -m \frac{\partial^2 W_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (15)$$

می‌توان تغییر مکان تیر نسبت به تکیه‌گاه را به صورت رابطه (16) نوشت.

$$W_{rel}^s(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r^s(t) \quad W_{rel}^p(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r^p(t) \quad (16)$$

که  $\phi_r(x)$  تابع ویژه و  $q_r^s(t)$  و  $q_r^p(t)$  پاسخ زمانی ارتعاش جانبی تیر مربوط به مد  $r$ ام برای حالات سری و موازی می‌باشند.

با در نظر گرفتن رابطه (16) می‌توان از رابطه (14) و (15) برای حالات سری و موازی به ترتیب روابط (17) و (18) را به دست آورد:

$$\frac{d^2 q_r^s(t)}{dt^2} + 2\xi_r \omega_r \frac{dq_r^s(t)}{dt} + \omega_r^2 q_r^s(t) - \chi_r^s v^s(t) = f_r(t) \quad (17)$$

$$\frac{d^2 q_r^p(t)}{dt^2} + 2\xi_r \omega_r \frac{dq_r^p(t)}{dt} + \omega_r^2 q_r^p(t) - \chi_r^p v^p(t) = f_r(t) \quad (18)$$

که ضرایب درهم‌تنیدگی الکترومکانیکی ( $\chi_r$ ) و فرکانس طبیعی به ترتیب با استفاده از روابط (19) و (20) محاسبه می‌شود.

$$\chi_r^s = \vartheta^s \frac{d\phi_r(x)}{dx} \Big|_{x=L} \quad \chi_r^p = \vartheta^p \frac{d\phi_r(x)}{dx} \Big|_{x=L} \quad (19)$$

$$\omega_r = \lambda_r^2 \sqrt{\frac{YI_{eq}}{mL^4}} \quad (20)$$

که مقدار ویژه مربوط به مد  $r$ ام است و می‌توان تابع نیروی مکانیکی بر حسب زمان ( $f_r(t)$ ) به صورت رابطه (21) نوشت:

$$f_r(t) = -m \left[ \frac{\partial^2 W_b(x, t)}{\partial t^2} \int_0^L \phi_r(x) dx \right] \quad (21)$$

با در نظر گرفتن مدار معادل برای پیکربندی سری (شکل 2) و با استفاده از قانون کیرشهف داریم:

$$\frac{C_p}{2} \frac{dv^s(t)}{dt} + \frac{v^s(t)}{R_1} - i_p^s(t) = 0 \quad (22)$$

که ظرفیت داخلی ( $C_p$ ) و شدت جریان وابسته برای حالت سری با اعمال فرم انتگرالی قانون گاوس بر مولفه سوم بردار تغییر مکان الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک ( $D_3$ ) از روابط (23) و (24) به دست می‌آیند [5]:

$$C_p = \frac{e_{33}^s b L}{h_p} \quad (23)$$

$$i_p^s(t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{dq_r^s(t)}{dt} \quad (24)$$

که  $\kappa_r$  ضریب درهم‌تنیدگی پیشرو می‌باشد و از رابطه (25) محاسبه می‌گردد.

$$\kappa_r = \frac{e_{31}(h_p + h_{Al})b}{2} \frac{d\phi_r(x)}{dx} \Big|_{x=L} \quad (25)$$

به طور مشابه برای حالت موازی نیز با در نظر گرفتن مدار معادل (شکل 3)

در رابطه (2)  $c_a$  ضریب میرایی لزجی هوا،  $c_s I$  ضریب استهلاک نرخ کرنشی مجموع زیرلایه و پیزوالکتریک،  $m$  جرم بر واحد طول تیر و  $M(x, t)$  ممان خمشی داخلی تیر می‌باشند که ضرایب  $m$  و  $M(x, t)$  به ترتیب با استفاده از روابط (3) و (4) به دست می‌آیند:

$$m = b(\rho_{Al} h_{Al} + 2\rho_p h_p) \quad (3)$$

که  $\rho_p$  و  $\rho_{Al}$  به ترتیب چگالی جرمی زیرلایه آلومینیومی و پیزوالکتریک می‌باشند.

$$M(x, t) = b \left[ \int_{-h_p/2}^{-h_{Al}/2} T_p z dz + \int_{-h_{Al}/2}^{h_{Al}/2} T_{Al} z dz + \int_{h_{Al}/2}^{h_{Al}/2+h_p} T_p z dz \right] \quad (4)$$

که  $T_p$  و  $T_{Al}$  به ترتیب مؤلفه تنش مربوط به پیزوالکتریک و زیرلایه آلومینیومی می‌باشند.

$$T_{Al} = Y_{Al} S_{Al} \quad T_p = c_{11}^E S_p - e_{31} E_3 \quad (5)$$

$Y_{Al}$  مدول الاستیسیته آلومینیوم،  $c_{11}^E$  مدول الاستیسیته پیزوالکتریک در میدان الکتریکی ثابت،  $e_{31}$  ثابت تنش مؤثر پیزوالکتریک،  $E_3$  مؤلفه میدان الکتریکی در جهت  $z$  و  $S$  کرنش محوری تیر می‌باشند که کرنش محوری با استفاده از رابطه (6) به دست می‌آید.

$$S(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 W_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

با توجه به قطبیت نشان داده شده در پیکربندی سری مؤلفه‌ی میدان الکتریکی ( $E_3$ )، در هر دولایه‌ی بالایی و پایینی برابر بوده و از رابطه (7) به دست می‌آید اما در پیکربندی موازی مؤلفه‌ی میدان الکتریکی ( $E_3$ )، در لایه‌ی بالایی از رابطه (8) محاسبه می‌گردد که در لایه‌ی پایینی مقدار آن قرینه لایه بالایی است [19]:

$$E_3(t) = -\frac{V_s(t)}{2h_p} \quad (7)$$

$$E_3(t) = -\frac{V_p(t)}{h_p} \quad (8)$$

با جای گذاری روابط (5) تا (8) در رابطه (3) معادله ممان خمشی داخلی برای دو حالت سری و موازی به دست می‌آید.

$$M^s(x, t) = -YI_{eq} \frac{\partial^2 W_{rel}^s(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta^s v^s(t) [H(x) - H(x-L)] \quad (9)$$

$$M^p(x, t) = -YI_{eq} \frac{\partial^2 W_{rel}^p(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta^p v^p(t) [H(x) - H(x-L)] \quad (10)$$

که  $H$  تابع پله و  $YI_{eq}$  ضریب سفتی خمشی معادل کل تیر به صورت رابطه (11) می‌باشد.

$$YI_{eq} = \frac{2b}{3} \left[ Y_{Al} \frac{h_{Al}^3}{8} + c_{11}^E \left\{ \left[ h_p + \frac{h_{Al}}{2} \right]^3 - \frac{h_{Al}^3}{8} \right\} \right] \quad (11)$$

و  $\vartheta^s$  و  $\vartheta^p$  ضریب درهم‌تنیدگی پیشرو برای حالات سری و موازی به ترتیب از روابط (12) و (13) به دست می‌آید.

$$\vartheta^s = \frac{e_{31} b}{2h_p} \left[ \left[ h_p + \frac{h_{Al}}{2} \right]^2 - \frac{h_{Al}^2}{4} \right] \quad (12)$$

$$\vartheta^p = 2\vartheta^s = \frac{e_{31} b}{h_p} \left[ \left[ h_p + \frac{h_{Al}}{2} \right]^2 - \frac{h_{Al}^2}{4} \right] \quad (13)$$

با جای گذاری رابطه (9) در رابطه (2) معادله دیفرانسیل جزئی مربوط به ارتعاشات اجباری تیر در حالت سری به صورت تابعی از تغییر مکان جانبی

خود نشان می‌دهد و دلیل این امر برداشت انرژی از سیستم است. سرعت میرا شدن سیستم نیز وابسته به اندازه‌ی مقاومت الکتریکی خارجی است. با افزایش مقدار مقاومت، تا یک مقاومت خاص تیر سریع‌تر میرا می‌شود. برای مقاومت‌های بیشتر از این مقدار با افزایش مقاومت الکتریکی از سرعت میرا شدن تیر کاسته می‌شود، که این موضوع را می‌توان از شکل 16 نیز استدلال کرد.

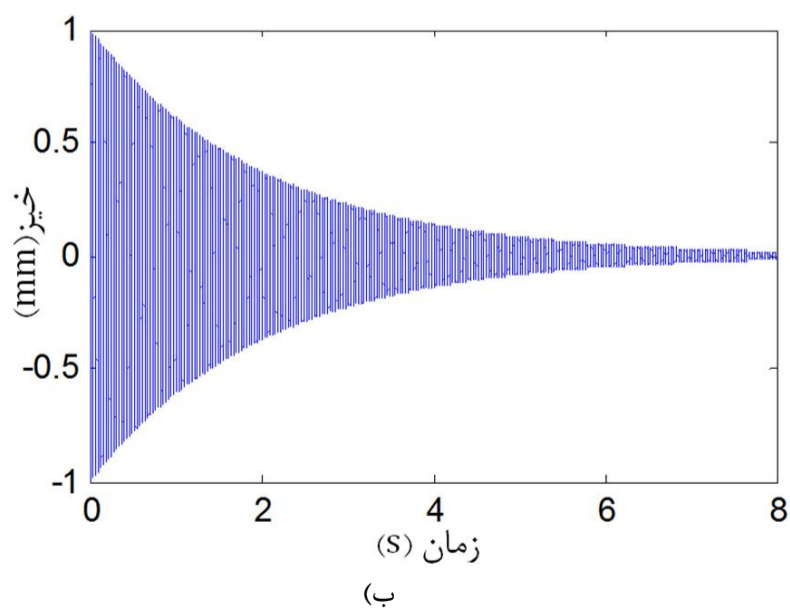
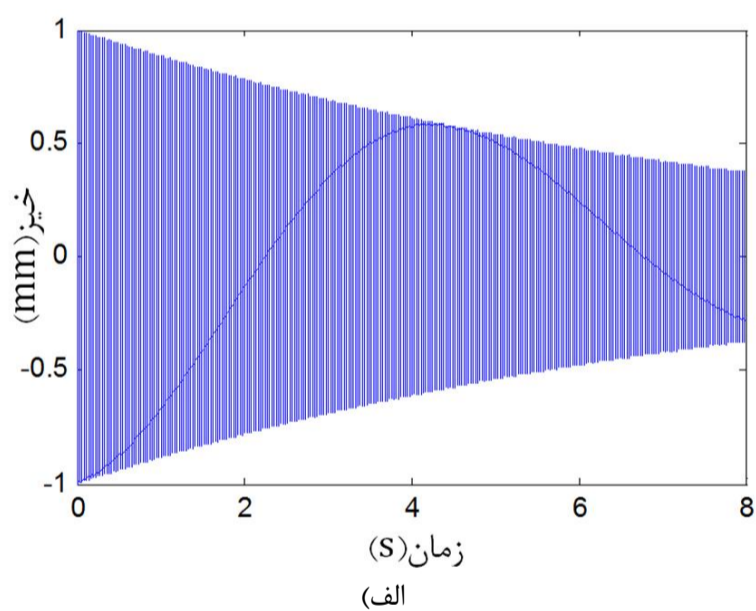
از بین پیکربندی سری و موازی، مشاهده می‌شود که در یک مقاومت خاص سرعت میرا شدن برای هر دو آرایش یکسان است با افزایش مقدار مقاومت الکتریکی سرعت میرا شدن در حالت سری بیشتر از موازی خواهد شد و برای مقاومت‌های الکتریکی کمتر از آن مقدار سرعت میرا شدن در حالت موازی بیشتر از سری است.

جدول 1 مشخصات جنس تیر یکسر گیردار [18]

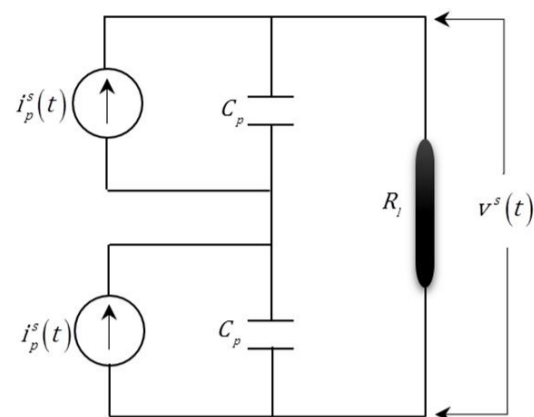
خواص مادی	پیزوالکتریک	زیرلایه
جنس	PZT-5A	آلومینیوم
مدول الاستیسیته (GPa)	61	70
چگالی جرمی (kg/m <sup>3</sup> )	7750	2700
ثابت پیزوالکتریک (C/m <sup>2</sup> )	-10/4	-
ثابت گذردهی (nf/m)	13/3	-

جدول 2 مشخصات هندسی تیر یکسر گیردار

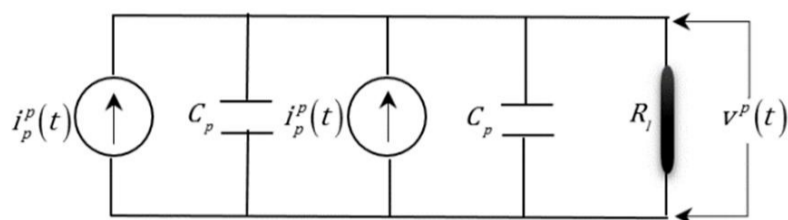
هندسه	پیزوالکتریک	زیرلایه
طول (mm)	30	30
عرض (mm)	5	5
ضخامت (mm)	0/15 (هرکدام)	0/05



شکل 4 جابجایی در برحسب زمان برای مقاومت  $400 \Omega$  (الف) حالت سری (ب) موازی



شکل 2 مدار الکتریکی معادل حالت سری



شکل 3 مدار الکتریکی معادل حالت موازی

رابطه (26) دست می‌آید.

$$C_p \frac{dv^p(t)}{dt} + \frac{v^p(t)}{2R_l} - i_p^p(t) = 0 \quad (26)$$

که شدت جریان وابسته برای حالت موازی از رابطه (27) به دست می‌آید [5]:

$$i_p^p(t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{dq_r^p(t)}{dt} \quad (27)$$

که ضرایب ضریب درهم‌تنیدگی پیشرو ( $\kappa_r$ ) و ظرفیت داخلی ( $C_p$ ) از روابط (23) و (25) قابل محاسبه می‌باشند.

### 3- نتایج و بحث

جنس تیر و مشخصات هندسی به ترتیب در جداول 1 و 2 آمده است و با استفاده از این پارامترها ضرایب روابط (17)، (18)، (22) و (26) به دست آمده و همان‌طور که قابل مشاهده است این دو معادله در متغیرهای  $q_r(t)$ ،  $v(t)$  و  $i(t)$  کوپل شده‌اند. در هر دو حالت سری و موازی برای حل این دو معادله کوپل شده معادلات به فضای فاز برده شده و دستگاه معادله دیفرانسیلی به روش عددی حل شده است.

لازم به ذکر است که معادلات در دو حالت ارتعاشات آزاد و اجباری مورد بررسی قرار گرفت.

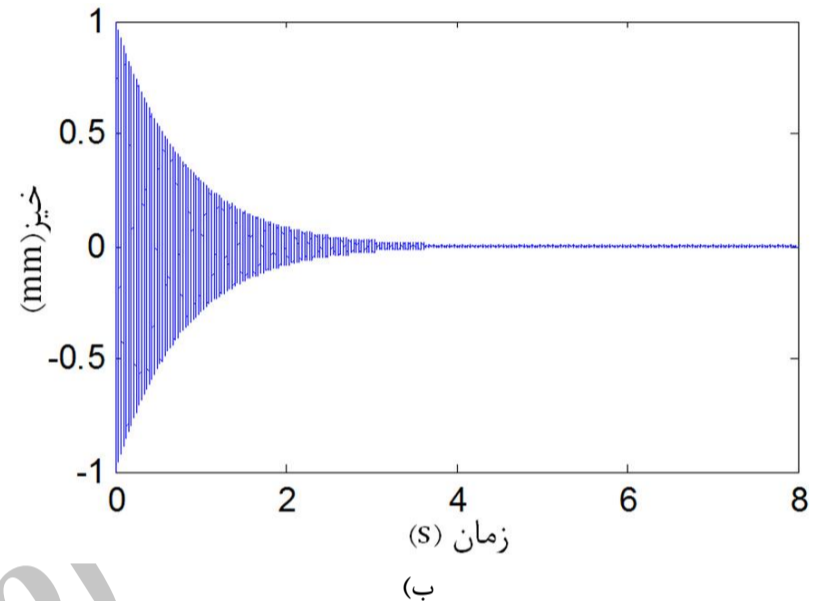
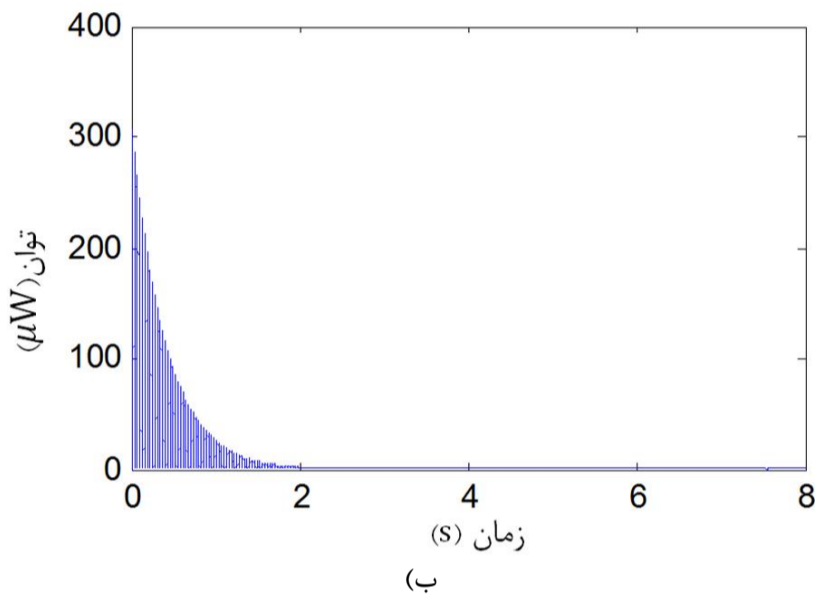
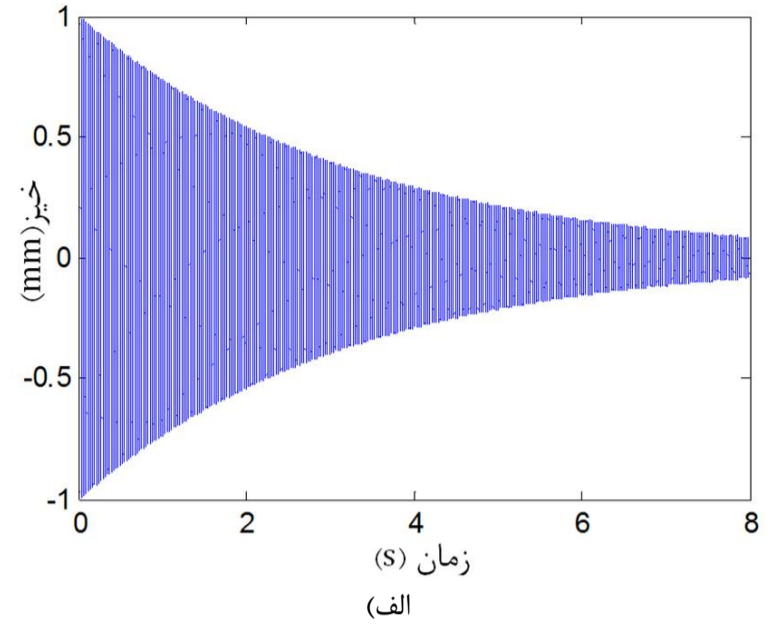
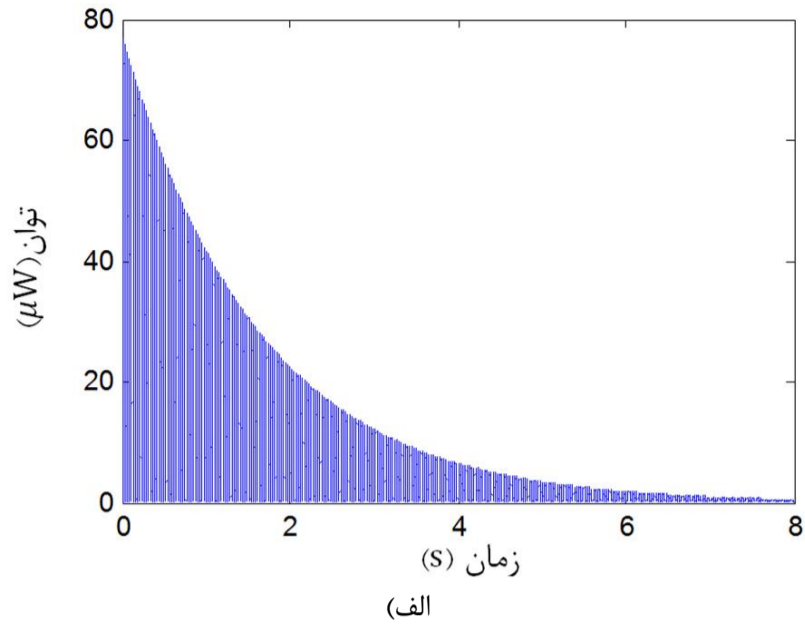
#### 3-1-1- ارتعاشات آزاد

در این قسمت جهت بررسی ارتعاشات آزاد تیر، تحریک خارجی تکیه‌گاه برابر صفر قرار داده شده است و به منظور بررسی تأثیر میرایی مقاومت الکتریکی خارجی بر ارتعاش تیر و بررسی پایستگی انرژی، از ضرایب استهلاک در رابطه (17) و (18) صرف‌نظر شده است.

#### 3-1-1- بررسی اثر میرایی مقاومت

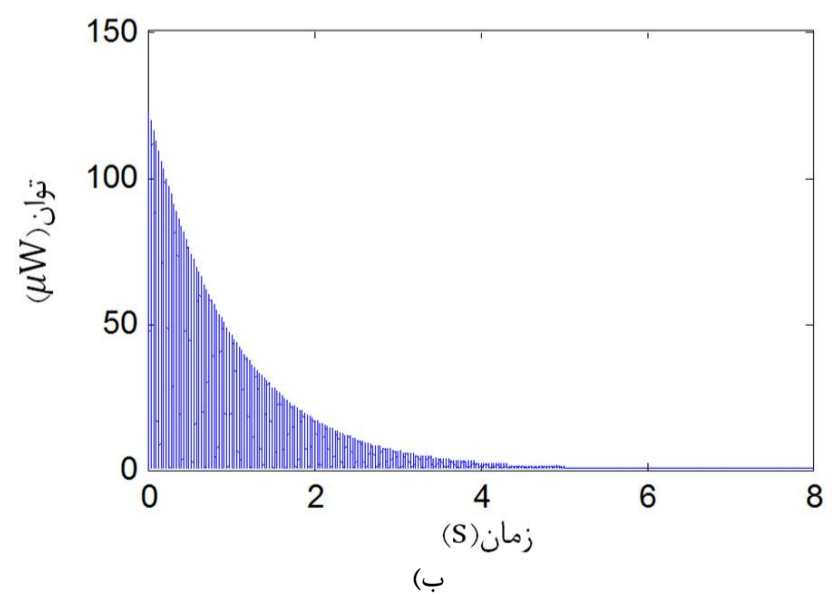
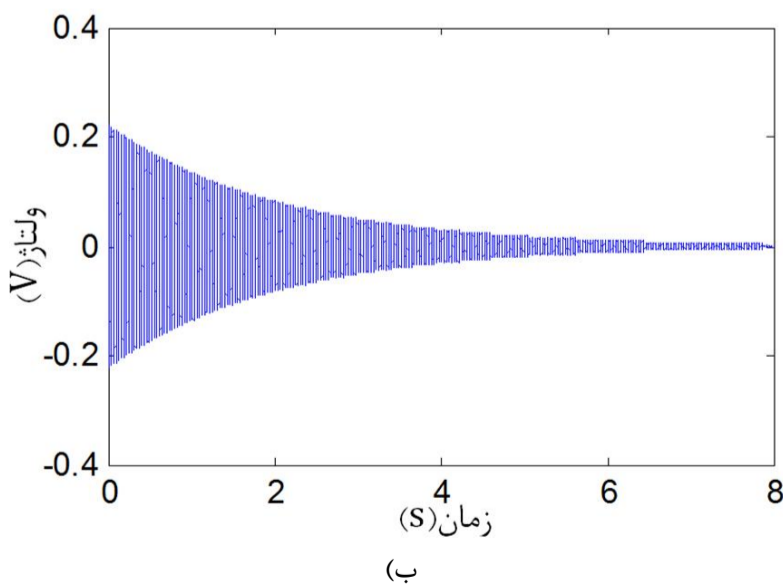
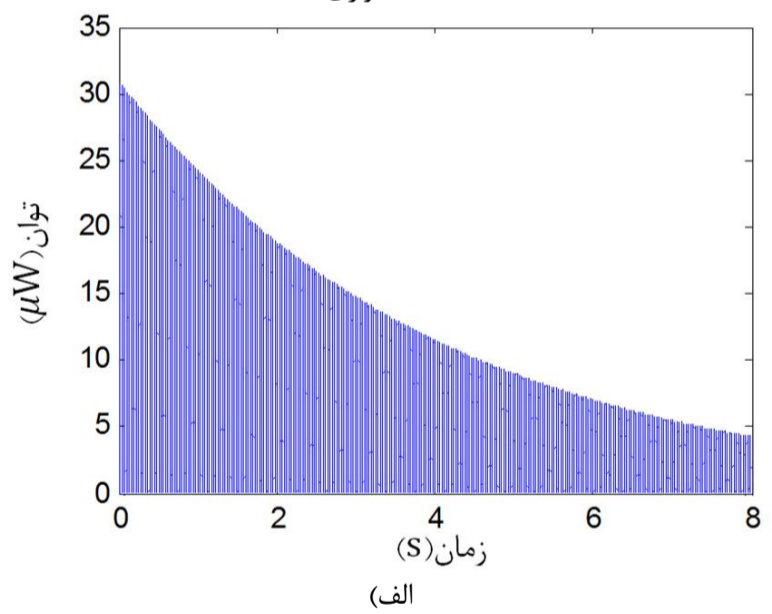
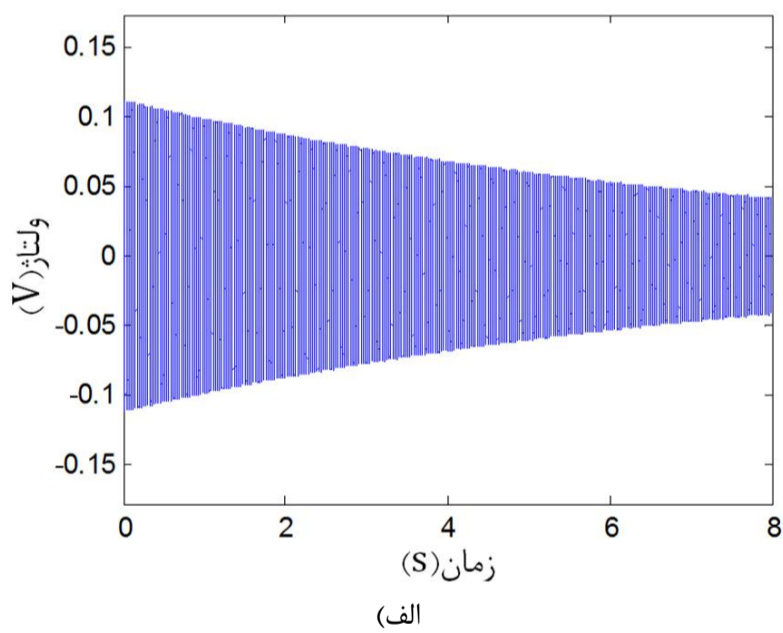
برای به ارتعاش درآوردن تیر تغییر مکانی کوچک به انتهای آزاد آن اعمال شده و مقادیر جابجایی ولتاژ و توان ناشی از ارتعاش برای مقاومت‌های الکتریکی متفاوت به دست آمده است. که چند شبیه‌سازی با مقاومت‌های مختلف در شکل‌های 4 تا 9 نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل‌های 4 و 5 مشاهده می‌شود با وجود این که ضرایب استهلاک  $c_a$  و  $c_s$  برابر صفر قرار داده شده اما تیر رفتاری مستهلک شونده از



شکل 7 توان برحسب زمان برای مقاومت  $1000 \Omega$  (الف) حالت سری (ب) حالت موازی

شکل 5 جابجایی در برحسب زمان برای مقاومت  $1000 \Omega$  (الف) حالت سری (ب) حالت موازی



شکل 8 ولتاژ برحسب زمان برای مقاومت  $400 \Omega$  (الف) حالت سری (ب) حالت موازی

شکل 6 توان برحسب زمان برای مقاومت  $400 \Omega$  (الف) حالت سری (ب) حالت موازی

جدول 3 نتایج شبیه سازی با تغییر مکان اولیه در انتهای تیر

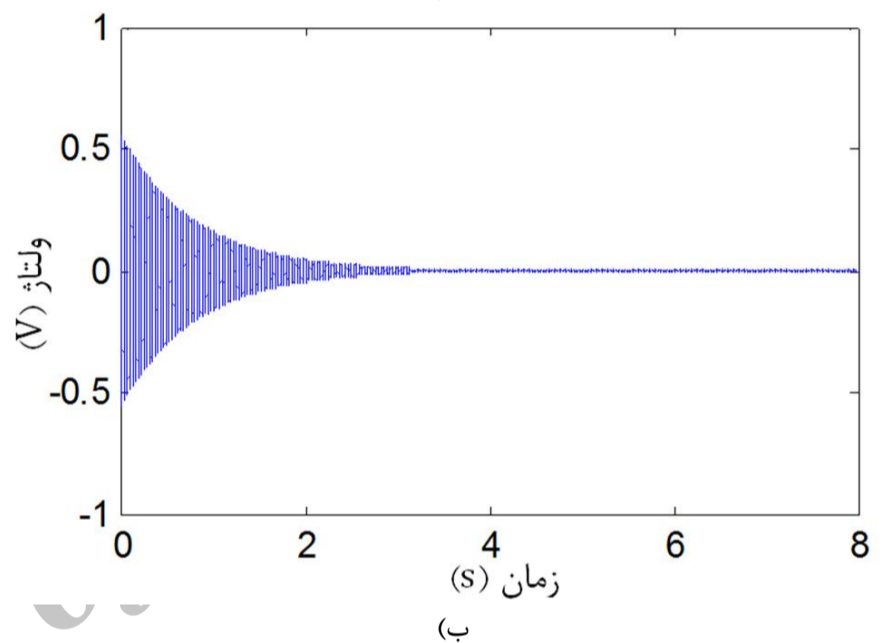
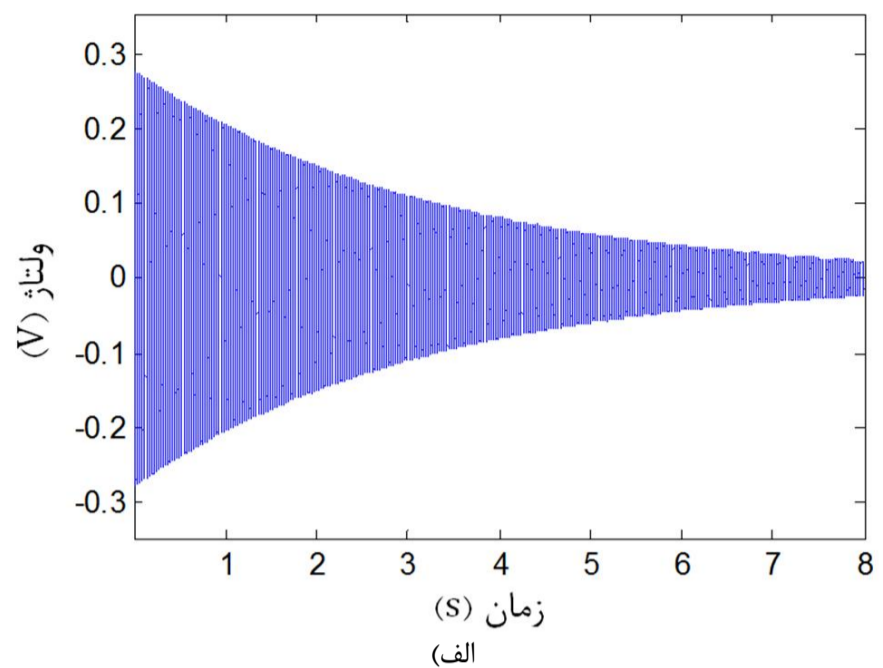
ردیف	حالت	مقاومت الکتریکی مدار ( $\Omega$ )	انرژی الکتریکی برداشت شده (mJ)	اختلاف (%)	زمان استهلاک (s)
1	موازی	100	0/0537363	13/87	-
2	سری	100	0/0243119	61/03	-
3	موازی	400	0/0623730	0/0003	8
4	سری	400	0/0537363	13/87	-
5	موازی	1000	0/0623962	0/0003	5
6	سری	1000	0/0619484	0/23	8
7	موازی	10000	0/0622969	0/15	1
8	سری	10000	0/0623971	0/0015	2
9	موازی	100000	0/0622843	0/17	0/2
10	سری	100000	0/0622798	0/18	0/5

کوپل شده (17) و (22) برای حالت سری و دو رابطه (18) و (26) برای حالت موازی حل شده است. بیشینه پاسخ ولتاژ در حالت پایدار به دست آمده و این کار در بازه فرکانس تحریک 100 هرتز تا 3500 هرتز و با در نظر گرفتن 3 مد تکرار شده است (شکل 10 و 11). همان طور که در شکل 10 و 11 قابل مشاهده است بیشترین ولتاژ مربوط به فرکانس مد اول است و با افزایش فرکانس تحریک، ولتاژ تولیدی در مد دوم بیشتر از مد سوم می باشد. شکل های 10 تا 15 به دو منظور ارائه شده است، اول آن که محدوده کمی برای بازه فرکانسی مناسب به منظور برداشت بیشترین ولتاژ، جریان و توان مشخص شود و دوم آن که نشان می دهد که بشتین ولتاژ، جریان و توان در مد اول قابل دستیابی است. جهت بررسی اثر مقاومت تمام مراحل قبلی برای مقاومت الکتریکی خارجی متفاوت انجام شده است. به منظور صحت گذاری، ولتاژ تولیدی در یک مقاومت خاص تحت تحریک خاص با مقدار معادل در مرجع [5] مقایسه شده است، نتایج مقایسه را می توان در جدول 4 مشاهده کرد.

با توجه به شکل های 10 و 11 می توان مشاهده کرد که با افزایش مقاومت خارجی سطح ولتاژ بالاتر می رود و در نهایت ثابت باقی می ماند که همین امر در شکل 17 بهتر دیده می شود این رفتار را می توان این گونه تفسیر کرد که به ازای مقاومت های پایین (اتصال کوتاه) شدت جریان تقریباً ثابت است و با توجه به رابطه  $V = R.I$  با افزایش مقاومت ولتاژ نیز افزایش می یابد و این در حالی است که با توجه به شکل های 12 و 13 این کار برای مقاومت های بزرگ (مدار باز) برای رژیم جریان اثری معکوس دارد به این صورت که سطح ولتاژ در مقاومت های بزرگ (مدار باز) تقریباً ثابت است و با توجه به رابطه  $V = R.I$  با افزایش مقاومت از شدت جریان کاسته می شود که

جدول 4 مقایسه نتایج بدست آمده از روش های عددی و مقادیر معادل در مرجع [5]

حالت	مقاومت ( $\Omega$ )	فرکانس (Hz)	ولتاژ مرجع	ولتاژ محاسبه شده
موازی	1000	1962	0/0018	0/0018
سری	1000	1962	0/0009	0/0009
موازی	1000	818/5	0/0041	0/0041
سری	10000	818/5	0/0021	0/0021
موازی	10000	1962	0/0095	0/0095
سری	10000	1962	0/0084	0/0084
موازی	10000	818/5	0/0332	0/0332
سری	10000	818/5	0/0202	0/0202

شکل 9 ولتاژ بر حسب زمان برای مقاومت  $1000 \Omega$  (الف) حالت سری (ب) حالت موازی

### 3-1-2- بررسی پایداری انرژی

در راستای بررسی صحت نتایج به دست آمده، سیستم از نظر پایداری انرژی مورد بررسی قرار گرفته است. برای دستیابی به این هدف از نمودار توان تولیدی، در بازه زمان انتگرال گرفته شده است تا مجموع انرژی الکتریکی برداشت شده از سیستم به دست آید. این انرژی بایستی برابر انرژی مکانیکی اولیه باشد که از طریق تغییر شکل انتهای آزاد تیر به سیستم داده شده است. با اعمال انرژی مکانیکی اولیه ( $w_{mech} = 0/0623961 \text{ mJ}$ )، مجموع انرژی الکتریکی برداشت شده به همراه درصد اختلاف در بازه زمانی 8 ثانیه به ازای مقاومت های الکتریکی متفاوت در جدول 3 آمده است.

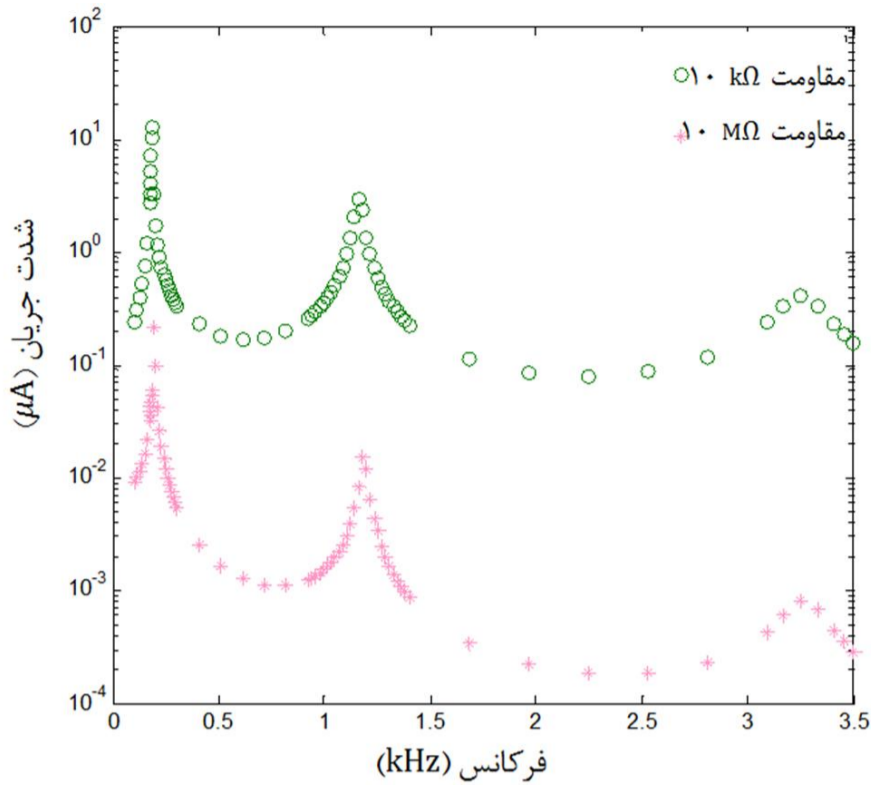
همان طور که مشاهده می شود در حالت هایی که انرژی الکتریکی برداشت شده در زمان هایی بزرگ تر از زمان میرا شدن محاسبه شده است درصد اختلاف در اغلب موارد خیلی کمتر از 0/3 درصد است و این به این معنی است که تمامی انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی تبدیل شده و اصل پایداری انرژی برقرار است برای حالت هایی که زمان انتگرال گیری کمتر از مدت زمان میرایی تیر است مقدار انرژی الکتریکی برداشت شده کمتر از انرژی مکانیکی اولیه است. زیرا مقداری از انرژی مکانیکی در تیر باقی مانده است.

### 3-2- ارتعاشات اجباری

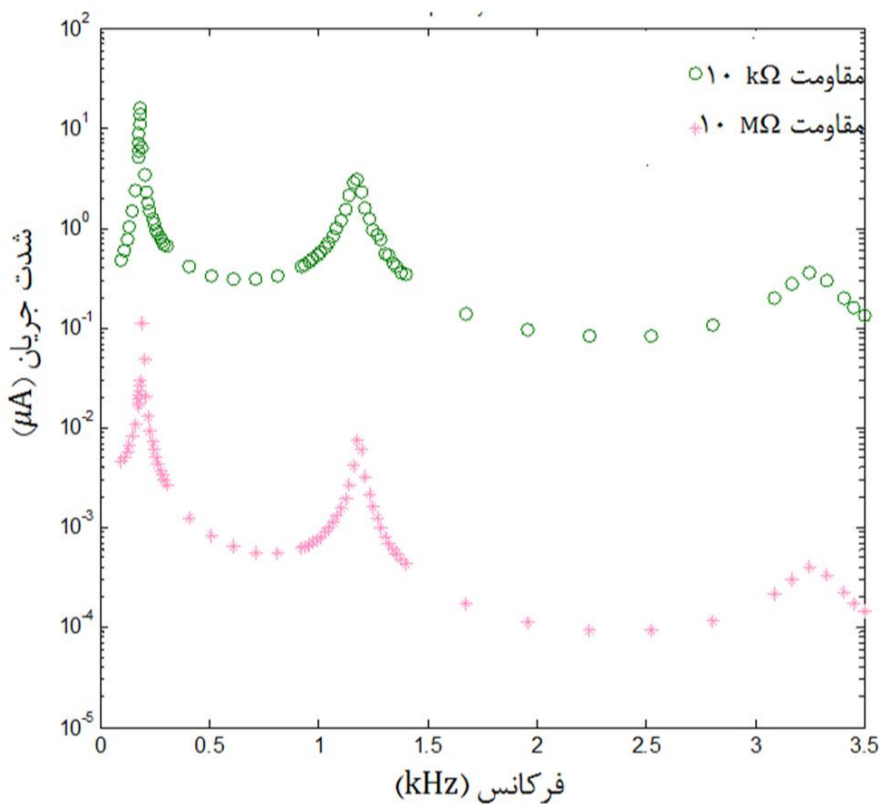
در این بخش تیر تحت تحریک هارمونیک قرار گرفته است سپس دو معادله

این امر در شکل 18 بهتر مشاهده می شود. در شکل های 10 و 11 می توان مشاهده کرد که سطح ولتاژ برای مقادیر خاصی از فرکانس تحریک به بیشترین حد خود رسیده که این فرکانس ها مبین فرکانس های طبیعی سیستم اند و پدیده تشدید در این نقاط اتفاق می افتد که می تواند از نظر کمی فرکانس مطلوب جهت طراحی برداشت گر انرژی را فراهم کند.

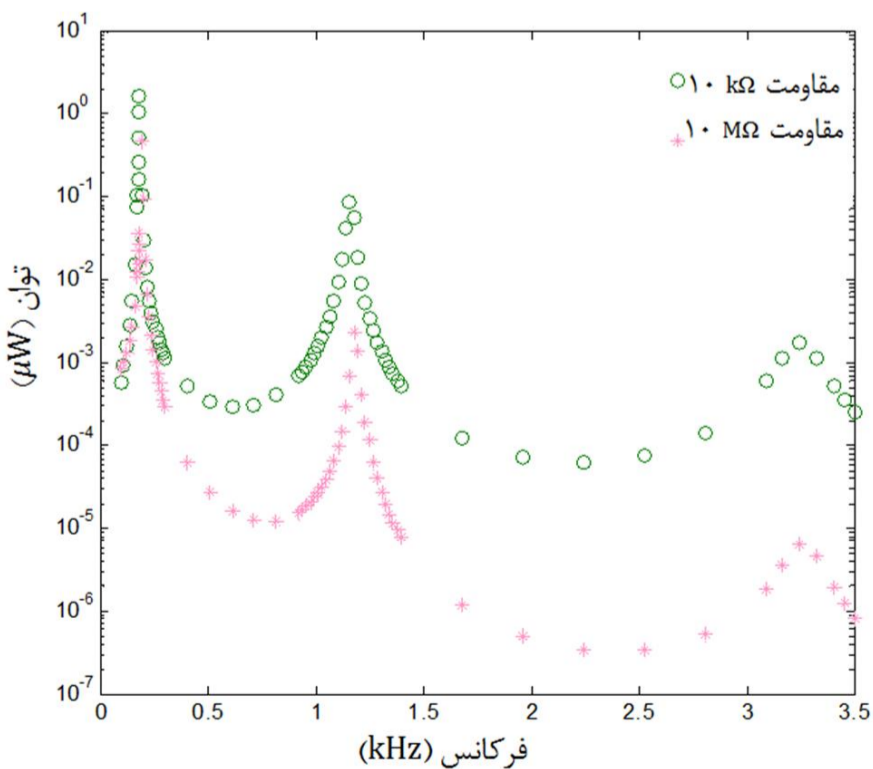
در مورد توان، با توجه به نمودار شکل 16 می توان مشاهده کرد که با افزایش مقاومت الکتریکی ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد که این رفتار به رفتار لرزی مشهور است. در پدیده هایی که از خود رفتار لرزی نشان می دهند معمولاً تا مقدار خاصی، وزن تاثیر پارامتری که باعث صعودی شدن نمودار می شود بیشتر است و پس از گذشت از این مقدار خاص، وزن تاثیر پارامتری که باعث نزولی شدن نمودار می شود بیشتر می گردد در اینجا نیز توان که خود وابسته به شدت جریان و ولتاژ است در ابتدا به دلیل ثابت بودن شدت جریان و صعودی بودن ولتاژ (شکل 17 و 18) صعودی است و پس از یک مقاومت خاص توان سیر نزولی پیدا می کند که به دلیل نزولی بودن شدت جریان و ثابت ماندن ولتاژ است. این رفتار توان را در حالت ارتعاش آزاد تیر نیز می توان مشاهده کرد. لازم به ذکر است که در مقاومتی که میزان برداشت توان بیشینه است لزوماً سرعت میرا شدن نیز بیشینه خواهد بود چرا که میرا شدن تیر در این جا به مفهوم برداشت انرژی و تولید توان است و هر چه که سرعت میرا شدن بیشتر باشد توان تولیدی نیز بیشتر است و بالعکس.



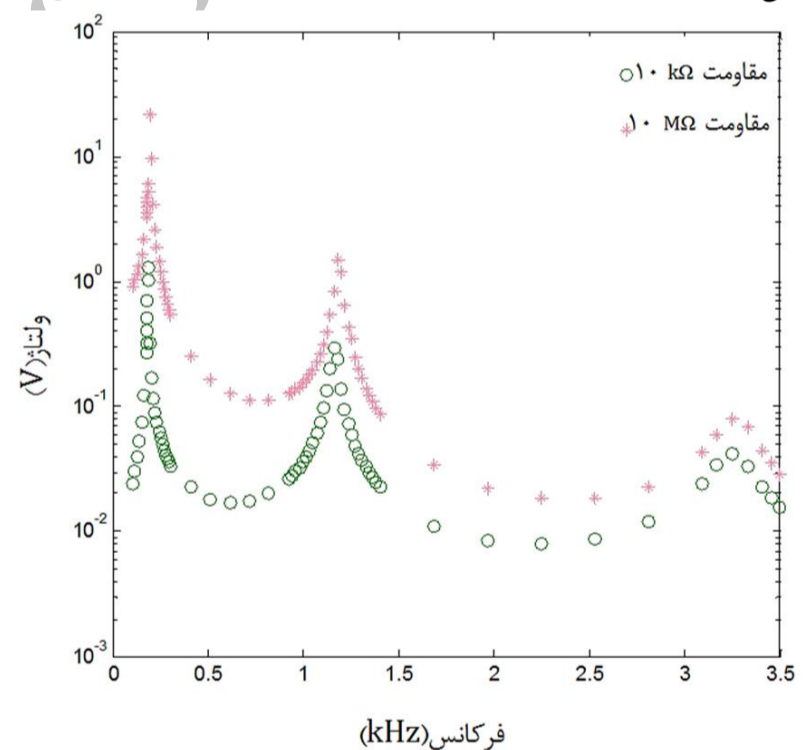
شکل 12 شدت جریان بر حسب فرکانس برای حالت سری



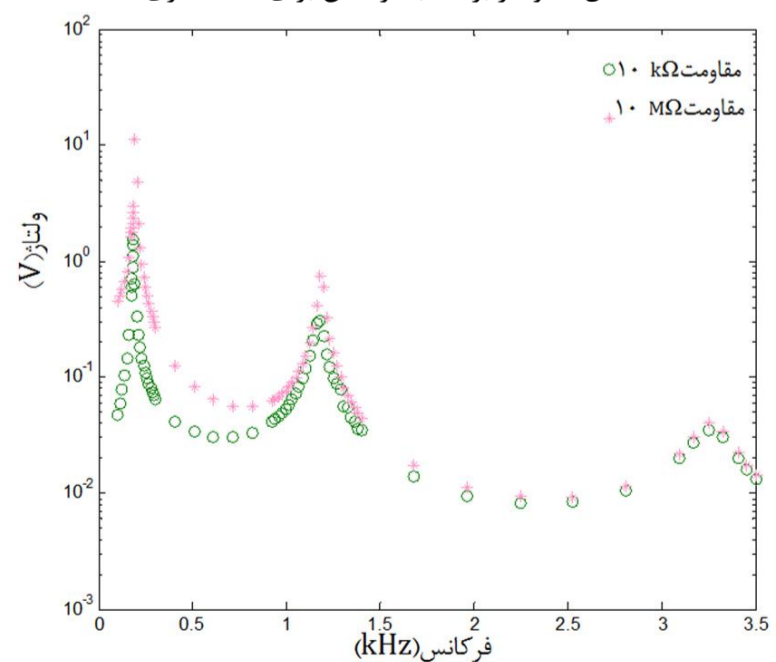
شکل 13 شدت جریان بر حسب فرکانس برای حالت موازی



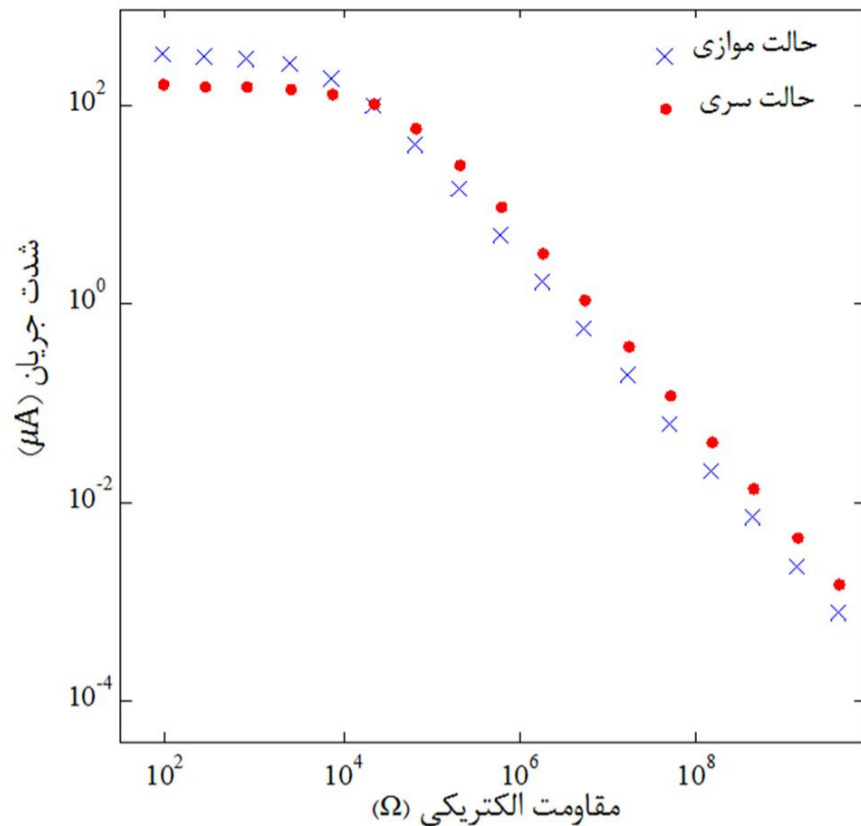
شکل 14 توان بر حسب فرکانس برای حالت سری



شکل 10 ولتاژ بر حسب فرکانس برای حالت سری



شکل 11 ولتاژ بر حسب فرکانس برای حالت موازی



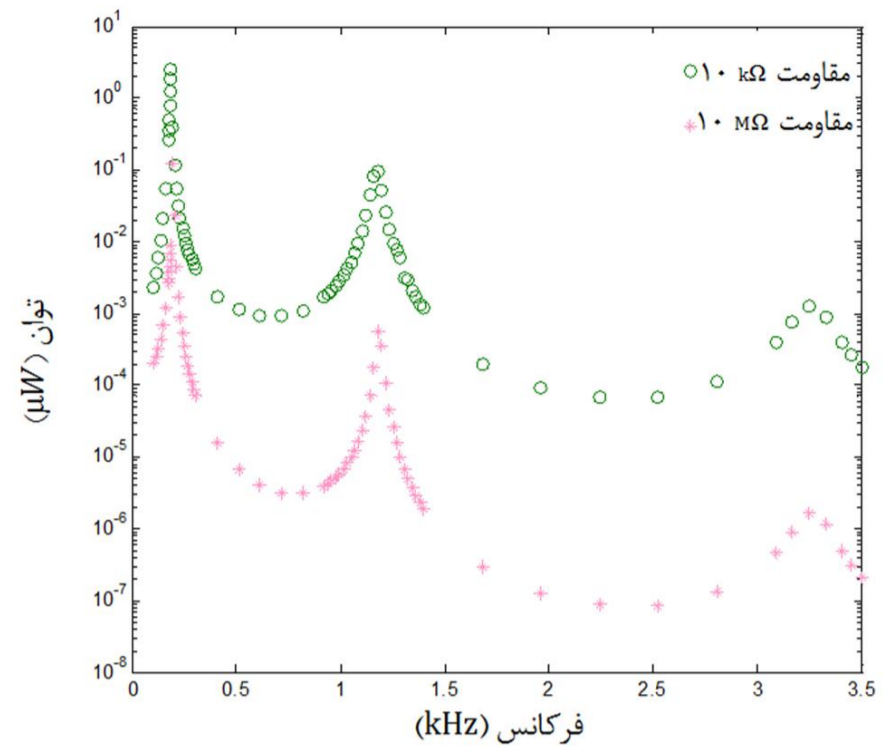
شکل 18 شدت جریان بر حسب مقاومت الکتریکی در فرکانس طبیعی اول

#### 4- جمع بندی

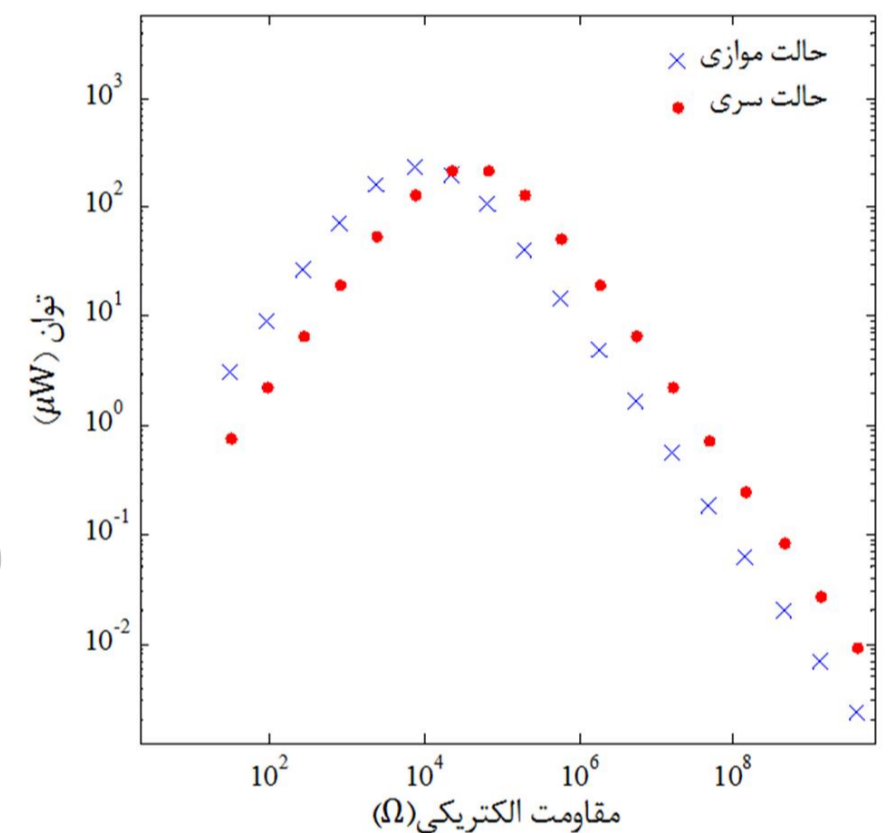
در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی تیر برداشت گر انرژی که توسط لایه های پیزوالکتریک ساندویچ شده است پرداخته شد و نشان داده شد که با حذف میرایی ها سیستم همچنان حرکت مستهلک شونده دارد که این به معنی برداشت انرژی از سیستم است میزان برداشته شدن انرژی با میزان انرژی مکانیکی ورودی نیز متناسب است که این امر با استفاده از قانون بقای انرژی بررسی شد، سرعت میرا شدن این سیستم در پیکربندی سری و موازی باهم تفاوت دارد و این تفاوت وابسته به مقدار مقاومت الکتریکی است. مشاهده شد که در تعدادی از مقاومت ها در پیکربندی سری ولتاژ بیشتری نسبت به حالت موازی تولید می شود و در حالت موازی جریان تولیدی بیشتر از حالت سری است. انتخاب نحوه پیکر بندی منوط به هدف و کاربرد سازنده است. این گونه به نظر می رسد که اگر مقصود از ساختن برداشت گر شارژ کردن باتری باشد استفاده از حالت موازی بهتر است چرا که در مقاومت های پایین شدت جریان بیشتری تولید می کند و این امر مدت زمان شارژ شدن باتری را کاهش می دهد. با افزایش مقاومت میزان ولتاژ تولیدی در هر دو پیکربندی افزایش می یابد و از جریان تولیدی کاسته می شود. مشاهده شد که در فرکانس های متناظر با فرکانس های تشدید بیشترین ولتاژ را می توان برداشت کرد.

در کل توصیه های طراحی زیر برای استفاده بهینه از برداشت گر انرژی قابل بیان است:

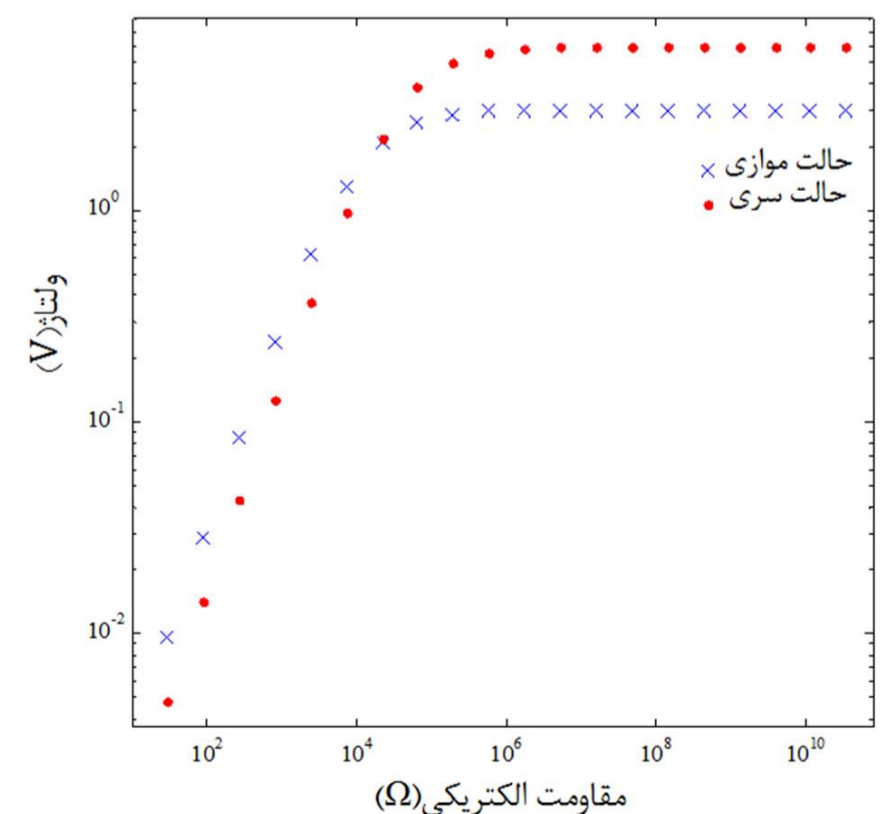
- شناخت پارامترهای ارتعاشی محیط: بیشترین توان زمانی حاصل می شود که برداشت گر انرژی در فرکانس طبیعی مد اول تحریک شود.
- تعیین اهمیت جریانی یا ولتاژی مصرف کننده: بسته به نیاز مصرف کننده که به سطح ولتاژ یا جریان بالاتر نیازمند است می توان از پیکربندی سری یا موازی در ساخت برداشت گر بهره برد.
- تعیین مقاومت خارجی مصرف کننده: توان تولیدی به ازای مقاومت خاص به بیشترین مقدار خود می رسد بنابراین مشخص کردن مقاومت بهینه برای برداشت بیشترین توان مفید است.



شکل 15 توان بر حسب فرکانس برای حالت موازی



شکل 16 توان بر حسب مقاومت الکتریکی در فرکانس طبیعی اول



شکل 17 ولتاژ بر حسب مقاومت الکتریکی در فرکانس طبیعی اول



5- فهرست علائم

$A_T$	ثابت دامنه
$b$	عرض
$C_p$	ظرفیت داخلی
$c_a$	ضریب میرایی لزجی هوا
$c_s I$	ضریب استهلاک نرخ کرنش
$c_{11}^E$	مدول الاستیسیته پیزوالکتریک در میدان الکتریکی ثابت
$E_3$	مؤلفه میدان الکتریکی در جهت $z$
$e_{31}$	ثابت تنش مؤثر پیزوالکتریک
$f_T$	تابع نیروی مکانیکی
$H$	تابع پله
$h_p$	ضخامت هر لایه پیزوالکتریک
$h_{Al}$	ضخامت زیرلایه آلومینیومی
$i_p(t)$	شدت جریان
$L$	طول
$M$	گشتاور خمشی داخلی
$m$	جرم بر واحد طول معادل
$q_T$	پاسخ ارتعاش جانبی
$S_p$	کرنش محوری پیزوالکتریک
$S_{Al}$	کرنش محوری زیرلایه آلومینیومی
$T_p$	تنش محوری پیزوالکتریک
$T_{Al}$	تنش محوری زیرلایه آلومینیومی
$t$	زمان
$v(t)$	اختلاف پتانسیل
$w$	جابجایی جانبی تیر
$w_b$	جابجایی جانبی تکیه‌گاه
$w_{rel}$	جابجایی جانبی تیر نسبت به تکیه‌گاه
$\gamma_{Al}$	مدول الاستیسیته زیرلایه آلومینیومی
$\gamma_I$	سفتی خمشی معادل

علائم یونانی

$\rho_p$	چگالی پیزوالکتریک
$\rho_{Al}$	چگالی زیرلایه آلومینیومی
$\delta$	تابع دلتای کرونیکا
$\vartheta$	ضریب درهم‌تنیدگی پسر
$\phi_T$	تابع شکل
$\lambda_T$	مقدار ویژه
$\kappa_T$	ضریب درهم‌تنیدگی پیشرو
$\chi_T$	ضریب درهم‌تنیدگی الکترومکانیکی
$\xi$	ضریب استهلاک
$\omega_T$	فرکانس طبیعی

بالانویس‌ها

$E$	به ازای میدان الکتریکی ثابت
$p$	حالت موازی
$s$	حالت سری

زیرنویس‌ها

$Al$	زیرلایه آلومینیومی
$b$	تکیه‌گاه
$p$	پیزوالکتریک
$r$	شماره مد
$rel$	نسبی

6- مراجع

- [1] S. Priya, D. J. Inman, *Energy harvesting technologies*: Springer, 2009 .
- [2] C. Williams, R. B. Yates, Analysis of a micro-electric generator for microsystems, *sensors and actuators A: Physical*, Vol. 52, No. 1, pp. 8-11, 1996 .
- [3] S. P. Beeby, M. J. Tudor, N. White, Energy harvesting vibration sources for microsystems applications, *Measurement science and technology*, Vol. 17, No. 12, pp. R175, 2006 .
- [4] K. Cook-Chennault, N. Thambi, A. Sastry, Powering MEMS portable devices—a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with special emphasis on piezoelectric energy harvesting systems, *Smart Materials and Structures*, Vol. 17, No. 4, pp. 043001, 2008 .
- [5] D. J. I. Alper Erturk, *PIEZOELECTRIC ENERGY HARVESTING*: John Wiley & Sons, 2011.
- [6] D. Isarakorn, D. Briand, P. Janphuang, A. Sambri, S. Gariglio, J. Triscone, F. Guy, J. Reiner, C. Ahn, N. De Rooij, The realization and performance of vibration energy harvesting MEMS devices based on an epitaxial piezoelectric thin film, *Smart Materials and Structures*, Vol. 20, No. 2, pp. 025015, 2011 .
- [7] W. Choi, Y. Jeon, J.-H. Jeong, R. Sood, S.-G. Kim, Energy harvesting MEMS device based on thin film piezoelectric cantilevers, *Journal of Electroceramics*, Vol. 17, No. 2-4, pp. 543-548, 2006 .
- [8] C. Eichhorn, F. Goldschmidtboeing, P. Woias, A frequency tunable piezoelectric energy converter based on a cantilever beam, *Proceedings of PowerMEMS*, Vol. 9, No. 12, pp. 309-312, 2008 .
- [9] J.-T. Lin, B. Lee, B. Alphenaar, The magnetic coupling of a piezoelectric cantilever for enhanced energy harvesting efficiency, *Smart materials and Structures*, Vol. 19, No. 4, pp. 045012, 2010 .
- [10] R. Ly, M. Rguiti, S. D'Astorg, A. Hajjaji, C. Courtois, A. Leriche, Modeling and characterization of piezoelectric cantilever bending sensor for energy harvesting, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 168, No. 1, pp. 95-100, 2011 .
- [11] D. Shen, J.-H. Park, J. Ajitsaria, S.-Y. Choe, H. C. Wickle III, D.-J. Kim, The design, fabrication and evaluation of a MEMS PZT cantilever with an integrated Si proof mass for vibration energy harvesting, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 18, No. 5, pp. 055017, 2008 .
- [12] M. Kimura, Piezoelectric generation device, *US Patent*, Vol. 5, 1998 .
- [13] A. Kasyap, J. Lim, D. Johnson, S. Horowitz, T. Nishida, K. Ngo, M. Sheplak, L. Cattafesta, Energy reclamation from a vibrating piezoceramic composite beam, in *Proceeding of*, 36-43 .
- [14] N. A. Aboufotouh, M. H. Arafa, S. M. Megahed, A self-tuning resonator for vibration energy harvesting, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 201, pp. 328-334, 2013 .
- [15] C. De Marqui Junior, A. Erturk, D. J. Inman, An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 327, No. 1, pp. 9-25, 2009 .
- [16] A. Abdelkefi, F. Najjar, A. Nayfeh, S. B. Ayed, An energy harvester using piezoelectric cantilever beams undergoing coupled bending–torsion vibrations, *Smart Materials and Structures*, Vol. 20, No. 11, pp. 115007, 2011 .
- [17] B. Andò, S. Baglio, F. Maiorca, C. Trigona, Analysis of two dimensional, wide-band, bistable vibration energy harvester, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 202, pp. 176-182, 2013 .
- [18] I. h. w. e. c. m. p. m. Engineering Fundamentals. Accessed .
- [19] H. A. Sodano, G. Park, D. Inman, Estimation of electric charge output for piezoelectric energy harvesting, *Strain*, Vol. 40, No. 2, pp. 49-58, 2004 .