مجله مهندسی مکانیک مدرس، دی 1394، دوره 15، شماره 10، ص ص 341-350

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

خطای محلی‌سازی در روش حجم محدود چند مقیاسی برای جریان تراکم ناپذیر در محیط‌های متخلخل

مهدی مشرف دهکردی[1]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

* اصفهان، صندوق پستی m.mosharaf@eng.ui.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 31 تیر 1394
پذیرش: 25 مرداد 1394
ارائه در سایت: 31 شهریور 1394

کلید واژگان:
محیط متخلخل
روش حجم محدود چند مقیاسی
محلی‌سازی
شبکه درشت
شبکه دوگانه

چکیده

در پژوهش حاضر، از روش حجم محدود چند مقیاسی برای حل معادله فشار حاکم بر جریان دو فازی تراکم‌ناپذیر آب-نفت در محیط‌های متخلخل به صورت دو بعدی استفاده شده است. روش حجم محدود چند مقیاسی پایه به همراه عامل اصلی تولید خطا در این روش به صورت ریاضی و فیزیکی تشریح شده است. با توجه به موقعیت مکانی شبکه‌های محاسباتی مورد استفاده در روش حجم محدود چند مقیاسی، یک سری میدان تراوایی مطلق دو مقیاسی همسانگرد طراحی شده‌اند. این میدان‌های تراوایی به گونه‌ای تولید شده‌اند که به نوعی عامل، میزان و محل‌های تولید خطا در میدان فشار روش چند مقیاسی را به تصویر بکشند. برای هر یک از این میدان‌های تراوایی مطلق، میدان فشار و سرعت حاصل از روش چند حجم محدود چند مقیاسی با نتایج روش حجم محدود استاندارد (به عنوان حل مبنا) مقایسه شده‌اند. نتایج عددی چنین نشان می‌دهند که روش حجم محدود چند مقیاسی با شرط مرزی متغیر نسبت به قرار گرفتن گوشه‌ها و مرزهای بلوک‌های دوگانه بر روی سلول‌های شبکه ریز با مقدار تراوایی کم حساسیت زیادی دارد. بیشترین خطا در میدان فشار و سرعت زمانی مشاهده می‌شود که گوشه‌های بلوک‌های دوگانه در مجاورت یا بر روی سلول‌های ریز با تراوایی بسیار کم قرار داشته باشند. علاوه بر این، با معرفی شرط مرزی تعدیل شده، تأثیر متوسط‌گیری مقادیر تراوایی مطلق بر روی مرزها و گوشه‌های بلوک‌های دوگانه بر روی میزان خطای روش حجم محدود چند مقیاسی نیز بررسی شده است.

The Localization Error in the Multi-scale Finite Volume Method for Incompressible flow in Porous media

Mehdi Mosharaf Dehkordi

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran.
1-* P.O.B. 81746-73441 Isfahan, Iran, m.mosharaf@eng.ui.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 22 July 2015
Accepted 16 August 2015
Available Online 22 September 2015

Keywords:
Porous media
Multi-scale Finite Volume (MsFV) method
Localization
Coarse grid
Dual grid

ABSTRACT

In the present study, the pressure equation associated with two-phase, incompressible and immiscible flow in porous media is solved by the multi-scale finite volume method (MsFV) for 2D problems. The MsFV method along with its main source of errors is mathematically and physically described. Associated with the computational grids used in the MsFV method, a set of two-scale isotropic permeability domains is designed. These permeability domains are produced to show how and where the errors are initiated in the pressure domain of the MsFV method. For each permeability domain, the pressure and velocity solutions obtained by the multi-scale method are compared with those of the standard finite volume method (as the reference solutions). The numerical results indicate that the MsFV method is sensitive to the fine cells with low permeability data located at the faces and corners of the dual grid blocks. Most errors are observed when the corners of the dual blocks are located on fine cells with low permeability value. In addition, by introducing the adjusted boundary condition, the effects of the permeability averaging for the edges and corners of the dual blocks on the MsFV errors are also investigated.

1- مقدمه

سنگ یک محیط متخلخل طبیعی (مانند یک مخزن نفتی) در حالت کلی دارای ساختاری ناهمگون[1] و شامل شکاف‌های گسسته[2]، حفره‌ها و لایه‌های نفوذناپذیر[3] است. در نتیجه وجود این ناهمگونی‌ها، برخی از خواص سنگ محیط متخلخل مانند تخلخل و تراوایی مطلق ساختاری بسیار اتفاقی دارند و نسبت به مکان تغییر می‌کنند. در یک ناحیه کوچک، مقدار تراوایی مطلق می‌تواند به میزان چند مرتبه بزرگی و به‌صورت غیرپیوسته تغییر کند. ناهمگونی‌های موجود در سنگ یک مخزن نفتی به گونه‌ای است که از مقیاس حفرات (از میکرومتر تا میلیمتر) تا مقیاس‌هایی با اندازه کل مخزن نفتی (در حدود کیلومتر) دیده می‌شود. ناهمگونی با مقیاس‌های بسیار کوچک در میدان تراوایی مطلق، تأثیر بسزایی بر روی رفتار جریان سیال در مقیاس‌های بزرگ‌تر دارد. این حقیقت باعث تولید و گسترش مدل‌های زمین‌شناسی برای

1- Heterogeneous structure
2- Discrete fractures
3- Shale layers

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Mosharaf Dehkordi, The Localization Error in the Multi-scale Finite Volume Method for Incompressible flow in Porous media, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 341-350, 2015 (In Persian)

توصیف و تخمین خواص سنگ مخازن نفتی با ریزترین جزئیات شده است [1]. با وجود اینکه توصیف ریز مقیاس (با بیشترین جزئیات) میدان تراوایی مطلق و تخلخل مخازن نفتی در دسترس است، امکان استفاده مستقیم از تمامی این جزئیات در طول فرآیند شبیه‌سازی جریان سیال در مخازن نفتی وجود ندارد. مدل‌های زمین‌شناسی اطلاعات ریز مقیاس میدان تراوایی مطلق و تخلخل یک مخزن را با یک شبکه حاوی 10^6 تا 10^9 سلول (درجه آزادی) بیان می‌کنند، این در حالی است که شبیه‌سازهای صنعتی موجود در حال حاضر توانایی حل مدل‌هایی با 10^4 تا 10^6 سلول محاسباتی (درجه آزادی) را دارند[1]. بنابراین، بین سطح جزئیات موجود در توصیف خواص سنگ مخازن نفتی و توانایی شبیه‌سازهای صنعتی فاصله زیادی وجود دارد. این فاصله زیاد بین سطح اطلاعات باعث می‌شود که در حالت کلی امکان شبیه‌سازی مستقیم جریان سیال در یک مخزن نفتی در مقیاس ریز وجود نداشته باشد. به عبارتی دیگر، به علت اندازه و حجم بسیار بالای محاسبات، حل معادلات حاکم بسیار پر هزینه و در مواردی حتی غیرممکن است. بنابراین ایجاد روش‌های پیشرفته دینامیک سیالات محاسباتی برای شبیه‌سازی جریان سیال چند فاز در مخازن نفتی یک نیاز اساسی محسوب می‌شود.

در زمینه شبیه‌سازی جریان سیال در مخازن نفتی معمولاً حجم محاسبات و اندازه دستگاه معادلات خطی را با استفاده از دیدگاه‌هایی مانند روش‌های افزایش مقیاس[1] یا روش‌های همگون‌سازی[2] کاهش می‌دهند. در این روش‌ها، با انجام یک سری عملیات متوسط‌گیری تعداد سلول‌های شبکه محاسباتی به میزان قابل توجهی کاهش داده شده و به اصطلاح مقیاس مسئله درشت می‌شود. مشخص است که با درشت شدن مقیاس مسئله، برخی از اطلاعات ریز مقیاس از بین می‌رود و بنابراین دقت شبیه‌سازی کاهش پیدا می‌کند. در این میان روش‌های نسبتاً جدیدتری به نام روش‌های چند مقیاسی[3] نیز معرفی شده‌اند که می‌توانند مسئله را در ریزترین مقیاس ولی با هزینه‌ای در حدود روش‌های افزایش مقیاس حل کنند [2].

در طی دو دهه اخیر به روش‌های چند مقیاسی به عنوان یک ابزار قدرتمند برای حل معادلات حاکم بر جریان سیال درون محیط‌های متخلخل به شدت ناهمگون توجه زیادی شده است. با اینکه ایده اصلی روش‌های چند مقیاسی بر پایه دیدگاه اجزاء محدود توسط هوو و وو [3] ارائه شد، یک دسته بزرگ از روش‌های چند مقیاسی بر پایه دیدگاه حجم محدود بنا شده‌اند. یکی از مزیت‌های بسیار مهم روش حجم محدود چند مقیاسی[4] این است که حتی با میدان فشار تقریبی (غیردقیق) نیز میدان سرعت پایستار تولید می‌کنند [4]. خاطر نشان می‌شود که پایستار بودن میدان سرعت برای حل معادلات انتقال (پیوستگی) یک نیاز ضروری است. روش حجم محدود چند مقیاسی توسط جنی و همکارانش [4] در سال 2003 برای حل معادله فشار مربوط به جریان تراکم‌ناپذیر و تک فاز در محیط‌های متخلخل معرفی شد. پس از آن روش حجم محدود چند مقیاسی به جریان‌های چند فاز به صورت تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر با در نظر گرفتن اثر عوامل مختلف مانند فشار موئینگی و گرانش توسعه پیدا نمود[5-10]. علاوه بر این، روش‌های حجم محدود چند مقیاسی با الگوریتم تکراری توسط محققین مختلفی مانند حاجی بیگی، لوناتی و همکارانشان معرفی و توسعه داده شد [2،11،12]. در این روش‌ها با انجام یکسری عملیات تکراری خطای موجود در میدان فشار و میدان سرعت روش چند مقیاسی کاهش داده می‌شود. حاجی بیگی و همکارانش در سال 2012 مقاله‌ای در زمینه تخمین و کنترل میزان خطای روش حجم محدود چند مقیاسی تکراری ارائه نمودند [13]. بیشتر روش‌های مذکور از یک سری شبکه محاسباتی پایه و پیشنهاد شده در نسخه اول روش حجم محدود چند مقیاسی در مرجع [4] استفاده می‌کنند. مشرف و منظری در مراجع [14،15] یک روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی برای کاهش خطاهای حاصل از محلی‌سازی در روش حجم محدود چند مقیاسی پایه را پیشنهاد نمودند. علاوه بر این، مشرف و منظری در [16] تأثیر نوع شبکه‌های محاسباتی بر روی عملکرد، دقت و هزینه محاسباتی روش حجم محدود چند مقیاسی را با معرفی شبکه محاسباتی جایگزین شده بررسی نمودند. در راستای توسعه روش حجم محدود چند مقیاسی، حاجی بیگی در سال 2014، این روش را برای فرمول‌بندی ترکیبی بکاربرد [17]. همچنین نوع جبری روش حجم چند مقیاسی توسط وانگ و همکارانش در [18] معرفی گردید.

کار حاضر به نحوی تکمیل کننده اطلاعات ارائه شده در مرجع [16] و در مورد اثر میدان تراوایی مطلق بر میزان و محل تولید خطا در میدان فشار بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی بر روی شبکه درشت جایگزین شده است. بر اساس شبکه‌های محاسباتی مورد استفاده در روش حجم محدود چند مقیاسی، یک سری میدان تراوایی مطلق به شدت ناهمگون به صورت همسانگرد[5] و دو مقیاسی طراحی شده است. این میدان‌ها می‌توانند میزان حساسیت روش چند مقیاسی به نحوه تغییرات مکانی تراوایی مطلق را نشان بدهند. برای تخمین کمّی میزان خطای نتایج روش حجم محدود چند مقیاسی، از نتایج روش حجم محدود استاندارد [19] در ریزترین مقیاس (به عنوان روش مبنا) استفاده شده است. در ادامه پس از معرفی معادلات حاکم و روش حجم محدود چند مقیاسی، با ارائه نتایج عددی در مورد حساسیت این روش به ناهمگونی میدان تراوایی مطلق بحث می‌شود.

2- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان دو فاز تراکم ناپذیر و مخلوط نشدنی آب-نفت در محیط‌های متخلخل شامل یک معادله بقای جرم و یک قانون دارسی برای هر فاز است. معادله بقای جرم برای هر فاز α به صورت (1) بیان می‌شود [5]:

$$\phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u}_\alpha = q_\alpha \ , \alpha = \mathrm{w}, \mathrm{o} \qquad (1)$$

در رابطه (1)، ϕ تخلخل محیط متخلخل، S_α درجه اشباع فاز α و q_α نرخ تزریق یا برداشت آن فاز در چاه‌ها می‌باشند.

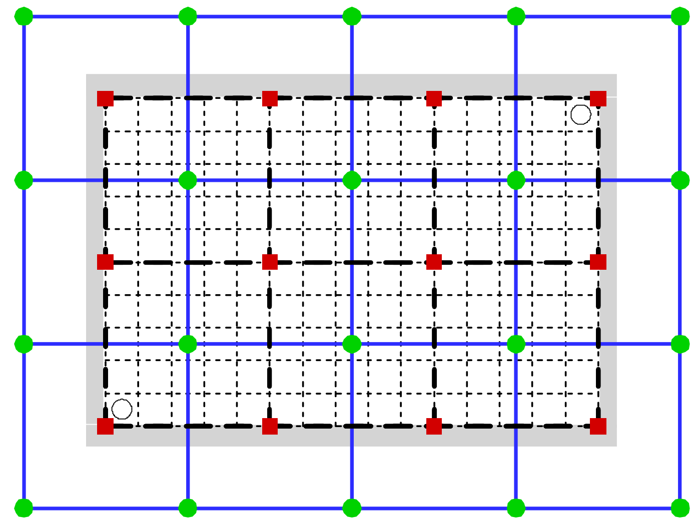
بر اساس قانون دارسی به صورت اصلاح شده برای جریان چند فازی، سرعت فاز α بر حسب تحرک‌پذیری و گرادیان فشار همان فاز بیان می‌شود[1]:

$$\vec{\mathrm{u}}_\alpha = - \frac{K\, k_{\mathrm{r}\alpha} S_\alpha}{\mu_\alpha} \cdot \nabla \mathrm{P}_\alpha = - \lambda_\alpha \cdot \nabla P_\alpha \qquad (2)$$

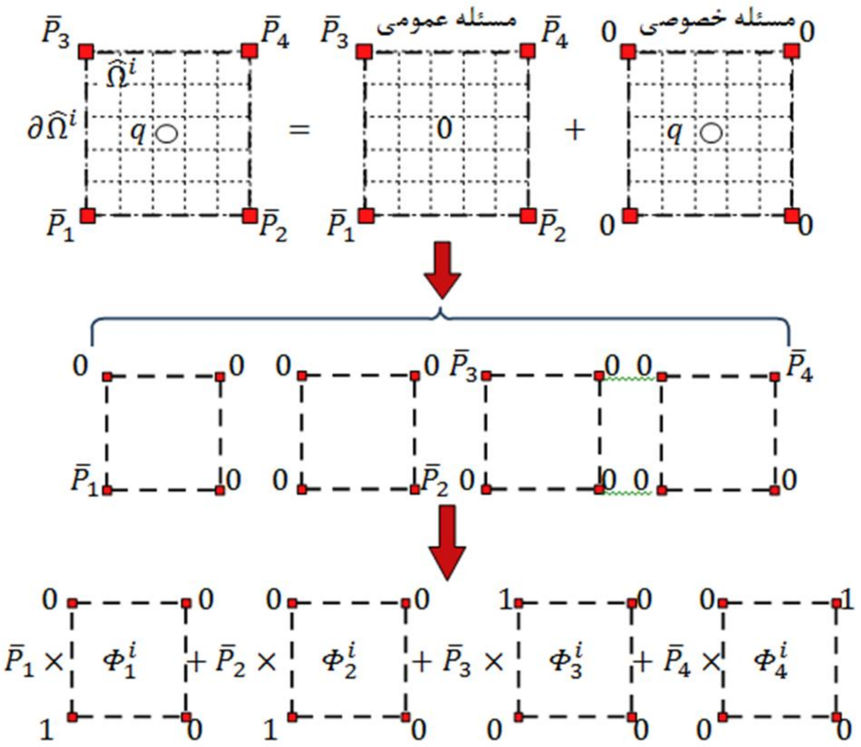
که در آن، P_α فشار، μ_α لزجت، $k_{\mathrm{r}\alpha}$ تراوایی نسبی، λ_α تحرک‌پذیری فاز α و K تانسور تراوایی مطلق سنگ محیط متخلخل است. در پژوهش حاضر، از تأثیرات گرانش و همچنین فشار موئینگی بین فازها صرفنظر شده و بنابراین فشار تمام فازها برابر P در نظر گرفته می‌شود.

علاوه بر معادلات بقای جرم و قانون دارسی، یک قید فیزیکی بر روی درجه اشباع فازها نیز وجود دارد. برای جریان دو فازی آب-نفت این قید بیان می‌کند که تمام فضای خالی محیط متخلخل توسط فازهای آب و نفت پر شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

1- Upscaling methods
2- Homogenization methods
3- Multi-scale methods
4- Multiscale Finite Volume Method (MsFV)
5- Isotropic



شکل 1 شبکه‌های محاسباتی درشت (خطوط توپر) و دوگانه (خط چین) بر روی یک شبکه محاسباتی ریز (نقطه چین)



شکل 2 استخراج توابع پایه‌ای و اصلاحی از مسئله محلی متناظر با یک بلوک دوگانه

$$\sum_{\alpha=w,o} S_\alpha = S_o + S_w = 1 \qquad (3)$$

با جایگزین نمودن مقدار سرعت هر فاز از قانون دارسی (3) در معادله بقای جرم هر فاز (4) و جمع نمودن دو معادله حاصل و استفاده از قید فیزیکی (3)، یک معادله فشار از نوع بیضوی به صورت زیر بدست می‌آید [۴،3]:

$$-\nabla\cdot(\lambda\cdot\nabla P) = q_o + q_w = q \quad \text{در} \quad \Omega \qquad (4)$$

در رابطه فوق، $\lambda = \sum_{\alpha=o,w} K k_{r\alpha}/\mu_\alpha$ تحرک‌پذیری کل فازها است. توجه شود که تانسور K حاوی ساختار ریز مقیاس میدان تراوایی مطلق است و تأثیر زیادی بر روی رفتار جریان سیال در محیط متخلخل دارد. معادله (4) را می‌توان با اعمال شرایط مرزی مناسب بر روی ناحیه Ω با روش‌های مختلفی حل نمود. در کار حاضر، معادله فشار (4) با استفاده از روش حجم محدود استاندارد در ریزترین مقیاس حل شده و جواب آن به عنوان حل مبنا برای تعیین خطای روش حجم محدود چند مقیاسی بکار برده شده است.

3- روش حجم محدود چند مقیاسی

در فرآیند شبیه‌سازی مخازن نفتی چنین فرض می‌شود که هندسه مسئله مورد نظر به همراه خواص فیزیکی سنگ محیط متخلخل توسط یک شبکه محاسباتی داده شده است. از آنجایی که این شبکه محاسباتی حاوی بیشترین اطلاعات در مورد تخلخل و تراوایی محیط متخلخل است از آن به عنوان شبکه ریز یاد می‌شود. یک ناحیه مستطیل شکل با یک شبکه محاسباتی با سازمان متناظر با آن به عنوان شبکه ریز را در نظر بگیرید (شکل 1). با انتخاب یک ضریب درشت نمایی در هر راستا (n_{cr})، بر روی این شبکه ریز، دو شبکه درشت مقیاس شامل یک شبکه درشت و یک شبکه درشت دوگانه[1] (یا شبکه دوگانه) ساخته می‌شود [۴،16]. تعداد بلوک‌های موجود در شبکه‌های محاسباتی درشت و دوگانه به ترتیب برابر N_c و N_d است. از شبکه درشت برای افزایش مقیاس مسئله (تشکیل یک معادله فشار درشت مقیاس) و از شبکه دوگانه برای محاسبه ضرایب ماتریس دستگاه معادله فشار درشت مقیاس و همچنین محاسبه مجهولات شبکه ریز استفاده می‌شود. در کار حاضر بر اساس موارد مطرح شده درمرجع [16]، ابتدا شبکه دوگانه با استفاده از ضریب درشت‌نمایی ساخته شده و سپس شبکه درشت از بهم متصل نمودن مراکز بلوک‌های دوگانه تولید می‌شود. شکل 1 نمونه‌ای از شبکه‌های درشت و دوگانه که با ضریب درشت نمایی $n_{cr} = 5$ بر روی یک شبکه ریز اولیه ساخته شده است را نمایش می‌دهد.

ایده اصلی روش‌های چند مقیاسی این است که جواب یک مسئله با اندازه بزرگ با استفاده از جواب یک سری مسائل کوچک و محلی با هزینه محاسباتی بسیار کمتری تخمین زده شود [2]. در حقیقت جواب مسائل کوچک محلی همانند جورچین در کنار یکدیگر قرار داده می‌شود تا تخمینی از جواب مسئله بزرگ بدست آید. برای انجام اینکار، از این نکته استفاده می‌شود که وقتی معادله فشار (4) برای ناحیه بزرگ Ω برقرار است، برای هر یک از زیر نواحی آن و از جمله هر یک از بلوک‌های دوگانه نیز صادق است. مطابق آنچه در شکل 2 نمایش داده شده است، یک بلوک دوگانه همراه با گوشه‌های آن (مراکز بلوک‌های درشت اطراف این بلوک دوگانه) را در نظر بگیرید. برای اینکه بتوان میدان فشار ریز مقیاس درون این بلوک دوگانه را بدست آورد، لازم است که معادله (4) با شرایط مرزی مناسب درون این بلوک دوگانه حل شود. با توجه به اینکه در حالت کلی و قبل از حل مسئله بزرگ اطلاعات خاصی بر روی مرزهای این بلوک وجود ندارد، لازم است که با استفاده از فرض مناسبی این شرایط مرزی به نحوی تخمین زده شوند. در چارچوب روش‌های چند مقیاسی دو نوع شرط مرزی دریکله بر روی مرزهای بلوک‌ها تجویز می‌شود که به شرط مرزی خطی و شرط مرزی متغیر (کاهش یافته)[2] معروف هستند. در شرط مرزی خطی، چنین فرض می‌شود که تغییرات فشار بر روی مرزهای بلوک دوگانه به صورت خطی است. برای اطلاعات بیشتر در مورد این نوع شرط مرزی به مرجع [10] مراجعه شود.

در شرط مرزی متغیر چنین فرض می‌شود که مقدار شار جریان در جهت عمود بر مرزهای بلوک دوگانه برابر صفر است [15]. با فرض صفر بودن مقدار شار عبوری در راستای عمود بر مرزهای مشترک بین بلوک‌های دوگانه در حقیقت دو کار انجام می‌شود: اول اینکه مسائل تعریف شده در بلوک‌های دوگانه مجاور از یکدیگر مستقل شده و می‌توانند به صورت جداگانه حل شوند (فرآیند محلی‌سازی). دومین مورد این است که معادله فشار دو بعدی تعریف شده برای بلوک دوگانه بر روی مرزهای آن به صورت یک بعدی کاهش پیدا می‌کند. به همین دلیل از این نوع شرط مرزی در تاریخچه با نام شرط مرزی کاهش یافته نیز یاد شده است. در حقیقت، جواب این معادلات کاهش یافته به حالت یک بعدی بر روی مرزهای بلوک‌های دوگانه شرایط مرزی دیرکله مورد نیاز برای مسئله‌های تعریف شده برای هر بلوک دوگانه را تولید می‌کنند [1]. توجه شود که در حالت کلی در مورد جریان دو بعدی مسئله بزرگ و با روش حجم محدود استاندارد مقدار شار عبوری از محل‌های فرضی مرزهای بلوک دوگانه صفر نیست. بنابراین، فرض اعمال شده بر روی مرزهای بلوک

1- Dual coarse grid
2- Variable (Reduced) boundary condition

دوگانه و استخراج مسائل یک بعدی یک تقریب است. با این وجود نتایج عددی ارائه شده در تاریخچه روش‌های چند مقیاسی چنین نشان می‌دهند که این شرایط مرزی برای حالت‌های زیادی می‌توانند نتایج قابل قبولی را ارایه کنند.

با استفاده از دیدگاه معادلات دیفرانسیل و مطابق آنچه در شکل 2 نشان داده شده است، میدان فشار ریز مقیاس درون هر یک از بلوک‌های دوگانه $\hat{P}^i$ با $i \in \{1, \cdots, N_\mathrm{d}\}$ را می‌توان به صورت مجموع جواب عمومی $\hat{P}_g^i$ و جواب خصوصی Ψ^i هر مسئله محلی و به صورت $\hat{P}^i = \hat{P}_g^i + \Psi^i$ نوشت [15]. در چارچوب روش‌های حجم محدود چند مقیاسی، به جواب خصوصی مسئله محلی تعریف شده در هر بلوک دوگانه Ψ^i تابع اصلاحی[1] گفته می‌شود. برای هر بلوک دوگانه، در حالت کلی یک تابع اصلاحی محاسبه می‌شود که بیان کننده تأثیر پارامترهایی نیز چاه‌های تزریق و برداشت، اثرات گرانش و غیره می‌باشد. همانطور که در شکل 2 نمایش داده شده است، جواب مسئله عمومی را می‌توان به صورت مجموع جواب چهار مسئله محلی نوشت. برای هر یک از این مسائل محلی مقدار فشار متناظر با یک گوشه خاص از بلوک دوگانه در نظر گرفته شده و مقدار فشار متناظر با سه گوشه دیگر صفر لحاظ شده است (شکل 2). هر یک از این چهار مسئله محلی را می‌توان به صورت حاصل ضرب مقدار فشار متناظر با یک گوشه مشخص از بلوک دوگانه (مرکز بلوک‌های درشت) در یک مسئله محلی جدید نوشت. برای این مسئله محلی جدید در یک گوشه از بلوک دوگانه مقدار واحد و برای سه گوشه دیگر مقدار صفر لحاظ می‌شود (شکل 2). به حل عددی هر یک از مسائل محلی جدید در چارچوب روش‌های چند مقیاسی، تابع پایه‌ای[2] گفته و با Φ_j^i نمایش داده می‌شود. واضح است که تعداد توابع پایه‌ای درون هر بلوک دوگانه برابر با تعداد گوشه‌های بلوک دوگانه می‌باشد. بنابراین، میدان فشار ریز مقیاس درون هر یک از بلوک‌های دوگانه $\hat{P}_g^i$ به صورت ترکیب خطی توابع پایه‌ای که با مقادیر فشار مراکز بلوک‌های درشت $\bar{P}_j$ وزن شده است نوشته می‌شود، یعنی $\hat{P}_g^i = \sum_{j=1}^4 \bar{P}_j \Phi_j^i$. طبق تعریف، مقادیر توابع پایه‌ای و اصلاحی برای نواحی بیرون از هر یک از بلوک‌های دوگانه صفر است. با توجه به این نکته، میدان فشار ریز مقیاس درون هر بلوک دوگانه $\hat{\Omega}^i, i \in \{1, \cdots, N_\mathrm{d}\}$ به صورت رابطه (5) بیان می‌شود [15]:

$$\hat{P}^i = \hat{P}_g^i + \Psi^i = \sum_{j=1}^{4} \bar{P}_j \Phi_j^i + \Psi^i = \sum_{j=1}^{N_c} \bar{P}_j \Phi_j^i + \Psi^i \tag{5}$$

درنهایت، میدان فشار چند مقیاسی P_ms با کنار هم قرار دادن جواب‌های مسائل محلی تعریف شده درون بلوک‌های دوگانه به صورت زیر نوشته می‌شود [1،2]:

$$P_\mathrm{f} \approx P_\mathrm{ms} = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{d}} \hat{P}^i = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{d}} \left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{c}} \Phi_j^i \, \bar{P}_j + \Psi^i \right) \tag{6}$$

تابع پایه‌ای Φ_j^i متناظر با گوشه jام از بلوک دوگانه $\hat{\Omega}^i, i \in \{1, \cdots, N_\mathrm{d}\}$ با حل نمودن مسئله همگن (سمت راست معادله صفر است) (7) محاسبه می‌شود [3-1]:

$$-\nabla \cdot \left(\lambda \cdot \nabla \Phi_j^i\right) = 0 \quad \text{در } \hat{\Omega}^i \qquad \text{(7-الف)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\lambda \cdot \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial \tau}\right) = 0 \quad \text{روی } \partial\hat{\Omega}^i \qquad \text{(7-ب)}$$

در اینجا، $\tau \in \{x, y\}$ نشان دهنده راستای مماس بر مرزهای بلوک‌های دوگانه $\partial\hat{\Omega}^i$ است. معادله (7-الف) با شرایط مرزی متغیر (7-ب) چهار بار متناظر با $j \in \{1,2,3,4\}$ به صورتی حل می‌شود که در گوشه jام مقدار واحد و برای بقیه گوشه‌های بلوک دوگانه مقدار صفر اعمال می‌شود. با انجام اینکار چهار تابع پایه‌ای درون هر بلوک دوگانه $\hat{\Omega}^i$ تعیین می‌شود (شکل 2).

برای محاسبه نمودن تابع اصلاحی Ψ^i، مسئله ناهمگن (8) حل می‌شود [1،2]:

$$-\nabla \cdot \left(\lambda \cdot \nabla \Psi^i\right) = q^i \quad \text{در } \hat{\Omega}^i \qquad \text{(8-الف)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\lambda \cdot \frac{\partial \Psi^i}{\partial \tau}\right) = q^i \quad \text{روی } \partial\hat{\Omega}^i \qquad \text{(8-ب)}$$

توجه شود که در اینجا مقدار صفر در هر چهار گوشه بلوک دوگانه اعمال و شرط مرزی مناسب برای معادله (8-الف) با حل نمودن معادله (8-ب) تولید می‌شود. q^i عبارت منبع است که برای مواردی مانند چاه تزریق و برداشت که درون بلوک دوگانه قرار داشته باشند در نظر گرفته می‌شود. مشخص است که برای جریان دو فاز تراکم ناپذیر در غیاب اثرات گرانش و فشار موئینگی، توابع اصلاحی فقط برای بلوک‌های دوگانه‌ای که شامل چاه هستند محاسبه می‌شوند.

به منظور بدست آوردن معادلات فشار درشت مقیاس، می‌توان ابتدا مقدار فشار چند مقیاسی P_ms را از رابطه (6) در رابطه (4) جایگذاری و سپس از معادله حاصل بر روی هر بلوک درشت $\bar{\Omega}_\mathbb{P}$ با $\mathbb{P} \in \{1, \cdots, N_c\}$ انتگرال‌گیری نمود [1،2]:

$$-\int_{\bar{\Omega}_\mathbb{P}} \nabla \cdot \left[\lambda \cdot \nabla \sum_{i=1}^{N_\mathrm{d}} \left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{c}} \Phi_j^i \, \bar{P}_j + \Psi^i \right)\right] \mathrm{d}\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}_\mathbb{P}} q \mathrm{d}\bar{\Omega} \tag{9}$$

با استفاده از قضیه دیورژانس، معادله (9) برای هر یک از بلوک‌های درشت $\bar{\Omega}_\mathbb{P}$ به صورت رابطه (10) نوشته می‌شود [9]:

$$\sum_{j=1}^{N_c} \bar{P}_j \overbrace{\sum_{i=1}^{N_\mathrm{d}} \int_{\partial\bar{\Omega}_\mathbb{P} \cap \hat{\Omega}^i} \left(-\lambda \cdot \nabla \Phi_j^i\right). \vec{\mathrm{n}} \mathrm{d}\Gamma}^{T_{\mathbb{P}j}} = \underbrace{\int_{\bar{\Omega}_\mathbb{P}} q \mathrm{d}\bar{\Omega} - \sum_{i=1}^{N_\mathrm{d}} \int_{\partial\bar{\Omega}_\mathbb{P} \cap \hat{\Omega}^i} \left(-\lambda \cdot \nabla \Psi^i\right). \vec{\mathrm{n}} \mathrm{d}\Gamma}_{b_\mathbb{P}} \tag{10}$$

در اینجا، $\vec{n}$ نشان دهنده بردار نرمال بر سطوح بلوک‌های درشت است که به سمت خارج بلوک‌ها می‌باشد. علاوه بر این، $b_\mathbb{P}$ درایه‌های بردار $\vec{b}$ و $T_{\mathbb{P}j}$ درایه‌های ماتریس انتقال‌پذیری T هستند. در اینجا، $\partial\bar{\Omega}_\mathbb{P} \cap \hat{\Omega}^i$ نشان دهنده قسمت‌هایی (نیم‌وجه‌هایی) از بلوک‌های درشت هستند که درون بلوک‌های دوگانه قرار دارند. مقادیر انتقال‌پذیری درشت مقیاس را می‌توان با استفاده از یک روش تخمین شار چند نقطه‌ای تعیین نمود (برای جزئیات مناسب به مراجع [6،14،15] رجوع شود). با استفاده از مقادیر انتقال‌پذیری، یک دستگاه معادلات فشار درشت مقیاس به صورت $T\bar{P} = \vec{b}$ ساخته می‌شود. جواب این دستگاه معادلات خطی، مقدار فشار در مرکز هر یک از بلوک‌های درشت $\bar{P}_j$ با $j \in \{1, \cdots, N_\mathrm{c}\}$ را مشخص می‌کند [1].

هنگامی که مقادیر فشار درشت مقیاس تعیین گردید، میدان فشار چند مقیاسی P_ms با استفاده از رابطه (6) به راحتی محاسبه می‌شود. میدان فشار چند مقیاسی در حقیقت یک میان‌یابی ریز مقیاس از مقادیر فشار درشت مقیاس درون بلوک‌های دوگانه است و میدان سرعتی را تولید می‌کند که بر روی مرزها و گوشه‌های بلوک‌های دوگانه پایستار نیست [1،2]. پایستار نبودن میدان سرعت بدین علت است که برای رسیدن به محلی‌سازی، شرایط مرزی مصنوعی و به صورت یک بعدی (با معادلات (7-ب) و(8-ب)) بر روی مرزهای بلوک‌های دوگانه اعمال شده است. از سویی دیگر، حل نمودن معادلات انتقال نیازمند به میدان سرعت پایستار در مقیاس ریز است. بنابراین، به یک مرحله بازسازی میدان فشار (پس پردازش) برای تولید یک میدان سرعت پایستار

1- Correction function
2- Basis function

نیاز است [2،15]. برای این منظور ابتدا یک مسئله محلی برای هر یک از بلوک‌های درشت $\bar{\Omega}_j$ با $j \in \{1, \cdots, N_c\}$ به صورت (11) تعریف می‌شود:

$$-\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla P_r) = 0 \quad \text{در} \ \bar{\Omega}_j \qquad (11)$$

در اینجا، P_r میدان فشار بازسازی شده است. برای کامل بودن مسئله محلی تعریف شده لازم است که شرایط مرزی مناسبی بر روی مرزهای هر یک از بلوک‌های درشت اعمال شود. این شرایط مرزی از نوع نیومن انتخاب شده و با استفاده از میدان فشار ریز مقیاس بدست آمده از روش چند مقیاسی و بر اساس قانون دارسی محاسبه می‌شوند. شرط مرزی نیومن پیوسته بودن شار بین بلوک‌های درشت را تضمین می‌نماید. با حل معادله (11) میدان فشار روش چند مقیاسی درون هر بلوک درشت بازسازی می‌شود. پس از آن میدان سرعت پایستار با استفاده از میدان فشار بازسازی شده و همچنین شرایط مرزی نیومن اعمال شده بر روی مرزهای بلوک دوگانه تولید می‌شود. برای جزئیات بیشتر در مورد نحوه بازسازی میدان فشار و تولید میدان سرعت پایستار بر اساس شبکه جایگزین شده به مرجع [16] مراجعه شود.

4- نتایج عددی

برای بررسی میزان خطای نتایج بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی (در مقایسه با روش حجم محدود استاندارد در مقیاس ریز) از مقادیر خطای نسبی میدان فشار E_p و خطای نسبی میدان سرعت E_u استفاده می‌شود. این خطاها به صورت رابطه (12) تعریف می‌شوند:

$$E_\mathrm{p} = \frac{|P_\mathrm{ms} - P_\mathrm{f}|_2}{|P_\mathrm{f}|_2} \qquad \text{(12-الف)}$$

$$E_\mathrm{u} = \frac{\left|\vec{u}_{x,\mathrm{ms}} - \vec{u}_{x,\mathrm{f}}\right|_2}{\left|\vec{u}_{x,\mathrm{f}}\right|_2} + \frac{\left|\vec{u}_{y,\mathrm{ms}} - \vec{u}_{y,\mathrm{f}}\right|_2}{\left|\vec{u}_{y,\mathrm{f}}\right|_2} \qquad \text{(12-ب)}$$

در روابط (12)، زیرنویس‌های ms و f به ترتیب برای روش‌های چند مقیاسی و روش ریز مقیاس استفاده می‌شود. علاوه بر این، $\vec{u}_\mathrm{x}$ و $\vec{u}_\mathrm{y}$ به ترتیب مولفه‌های سرعت در راستاهای x و y هستند. توجه شود که $|\vec{d}|_2$ نرم اقلیدسی[1] برای بردار $\vec{d}$ می‌باشد.

در تمامی مسائل چنین فرض می‌شود که ناحیه حل به شکل یک مربع با ضلع $L_\mathrm{x} = L_\mathrm{y} = 1\ m$ است که در ابتدا کاملاً توسط نفت پر شده است. برای ترسیم هندسه ناحیه حل از دو پارامتر بی‌بعد $X = x/L_\mathrm{x}$ و $Y = y/L_\mathrm{y}$ استفاده می‌شود. کلیه مرزهای ناحیه حل دارای شرط مرزی بدون جریان و میزان تخلخل محیط متخلخل $\phi = 0.2$ است. آب با نرخ واحد توسط یک چاه تزریق که در گوشه سمت چپ پایین ناحیه واقع شده است به درون مخزن تزریق و نفت از گوشه سمت راست-بالای ناحیه توسط یک چاه دیگر برداشت می‌شود. محل این چاها با دو دایره توخالی در شکل 1 نمایش داده شده است. به منظور تمرکز بر روی اثرات میدان تراوایی مطلق لزجت و چگالی فازهای نفت و آب یکسان در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، تراوایی نسبی هر فاز به صورت تابعی خطی از درجه اشباع آن فاز بدون مقادیر باقیمانده محاسبه می‌شود. میدان‌های تراوایی مطلق همسانگرد به صورت دو مقیاسی با نسبت تراوایی $K_\mathrm{max}/K_\mathrm{min} = 1000$ بر روی یک شبکه محاسباتی با اندازه 30×30 سلول (به عنوان شبکه ریز) داده شده است. ضریب درشت‌نمایی روش چند مقیاسی در هر راستا برابر $n_{cr} = 5$ انتخاب شده و شبکه‌های درشت و دوگانه بر روی شبکه اصلی ساخته شده‌اند. با توجه به محل قرارگیری مرزها و گوشه‌های بلوک‌های دوگانه نسبت به سلول‌های ریز با مقدار تراوایی مطلق زیاد یا کم (نسبت به مقدار تراوایی زمینه K_b) می‌توان برای هر میدان تراوایی مطلق یک نام انتخاب نمود. نام‌های انتخاب شده برای میدان‌های تراوایی مطلق به همراه توضیحات مربوط به آن‌ها در جدول 1 آورده شده است. توجه شود که نسبت تراوایی مطرح شده در جدول 1 به صورت مقدار تراوایی سلول‌های خاص به مقدار تراوایی مطلق سلول‌های زمینه تعریف می‌شود. به عنوان مثال میدانی که با نام LPFC معرفی شده است نشان دهنده سلول‌های ریز با مقدار تراوایی مطلق 0/001 مقدار تراوایی زمینه است که بر روی مرزهای (و نه گوشه‌های) بلوک درشت واقع شده‌اند. هر یک از این میدان‌های تراوایی مطلق مذکور، در شکل 3 به نحوی نمایش داده شده‌اند که مناطق با مقدار تراوایی مطلق کمتر رنگ تیره‌تری دارند. علاوه بر این، برای میدان تراوایی مطلق LPFC مرزهای بلوک‌های شبکه دوگانه با خطوط خط‌چین ضخیم در شکل 3-الف نمایش داده شده است.

معادله فشار (4) با روش حجم محدود چند مقیاسی همراه با شرط مرزی متغیر برای هر یک از میدان‌های تراوایی مطلق معرفی شده در جدول 1 حل شده و در هر مورد نتایج آن با حل مبنا (روش حجم محدود استاندارد در مقیاس ریز) مقایسه شده است. برای بی‌بعدسازی میدان‌های فشار بدست آمده، مقادیر فشار هر دو روش بر مقدار بیشینه فشار مربوط به روش مبنا تقسیم شده است. کانتور میدان فشار چند مقیاسی بی‌بعد شده (به صورت خط چین) در مقایسه با میدان فشار ریز مقیاس بی‌بعد شده (خطوط توپر) در شکل 4 نمایش داده شده است. در هر مورد، مقادیر خطاهای میدان‌های فشار و سرعت نیز در جدول 2 آورده شده است.

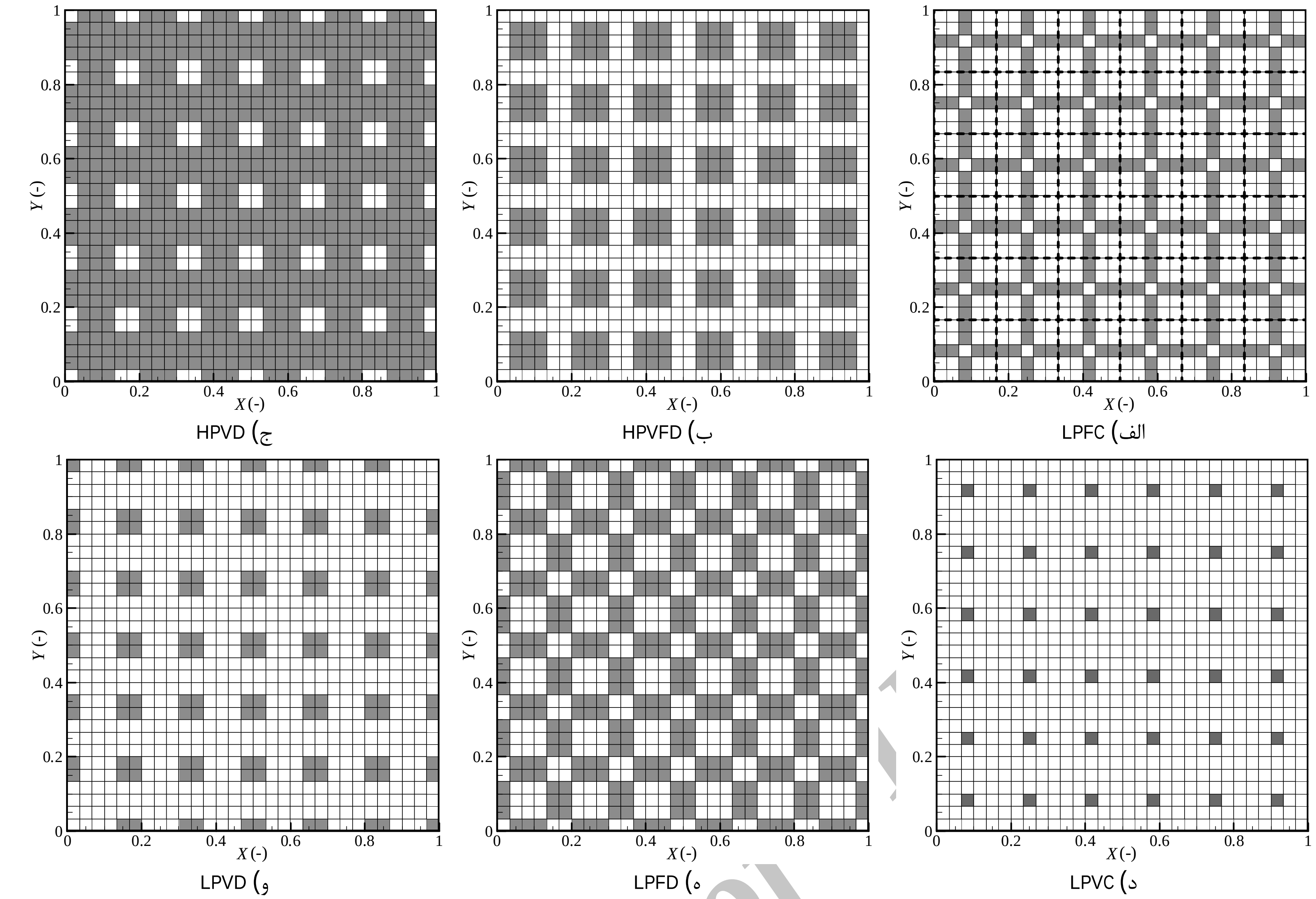
با توجه به کانتورهای فشار ترسیم شده در شکل 4 مشخص است که روش حجم محدود چند مقیاسی همراه با شرط مرزی متغیر توانسته است که نتایج بسیار خوبی را برای دو میدان تراوایی مطلق LPFC و HPVFD تولید کند (شکل‌های 4-الف و ب). بنابراین روش حجم محدود چند مقیاسی به کم بودن مقدار تراوایی مطلق سلول‌های محاسباتی که بر روی مرزهای بلوک درشت قرار دارند حساسیتی نشان نمی‌دهد. همین مطلب در مورد زیاد بودن مقدار تراوایی مطلق سلول‌های ریزی که بر روی مرزها و گوشه‌های بلوک‌های دوگانه واقع هستند نیز صادق است.

حال میدان‌های تراوایی مطلق HPVD و LPVC را در نظر بگیرد. کانتورهای فشار مربوط به این میدان‌های تراوایی در شکل 4-ج و د نمایش داده شده است. برای این دو میدان تراوایی مطلق خطای ایجاد شده در میدان فشار (در مقایسه با جواب مبنا) در کانتورهای ترسیم شده به راحتی قابل مشاهده است. با این وجود روش حجم محدود چند مقیاسی با شرط مرزی متغیر توانسته است نتایج قابل قبولی را ارائه کند. مقدارخطای ایجاد شده در میدان فشار و سرعت در جدول 2 آورده شده است. با توجه به این نتایج می‌توان گفت که زیاد بودن مقدار تراوایی مطلق سلول‌های ریز در گوشه‌های بلوک‌های دوگانه و همچنین کم بودن تراوایی سلول‌های ریز در گوشه‌های بلوک‌های درشت خطای قابل اغماضی (زیر 5 درصد) را در میدان فشار و سرعت روش حجم محدود چند مقیاسی با شرط مرزی متغیر وارد می‌کنند.

جدول 1 نام‌های انتخابی برای میدان‌های تراوایی مطلق و مشخصات مربوط به آن‌ها

نام میدان تراوایی مطلق	نسبت تراوایی $M = K/K_\mathrm{b}$	محل سلول‌های ریز با مقدار تراوایی خاص
LPFC	0/001	مرزهای هر بلوک درشت
HPVFD	1000	گوشه‌ها و مرزهای بلوک‌های دوگانه
HPVD	1000	گوشه‌های هر بلوک دوگانه
LPVC	0/001	گوشه‌های هر بلوک درشت
LPFD	0/001	مرزهای هر بلوک دوگانه
LPVD	0/001	گوشه‌های هر بلوک دوگانه

1- Euclidean norm



شکل 3 میدان‌های تراوایی مطلق دو مقیاسی (M = 1000) تولید شده بر اساس موقعیت مرزهای بلوک‌های درشت و دوگانه روش حجم محدود چند مقیاسی 5 = n_{cr}، مناطق با مقدار تراوایی مطلق کمتر با رنگ تیره‌تر نمایش داده شده‌اند.

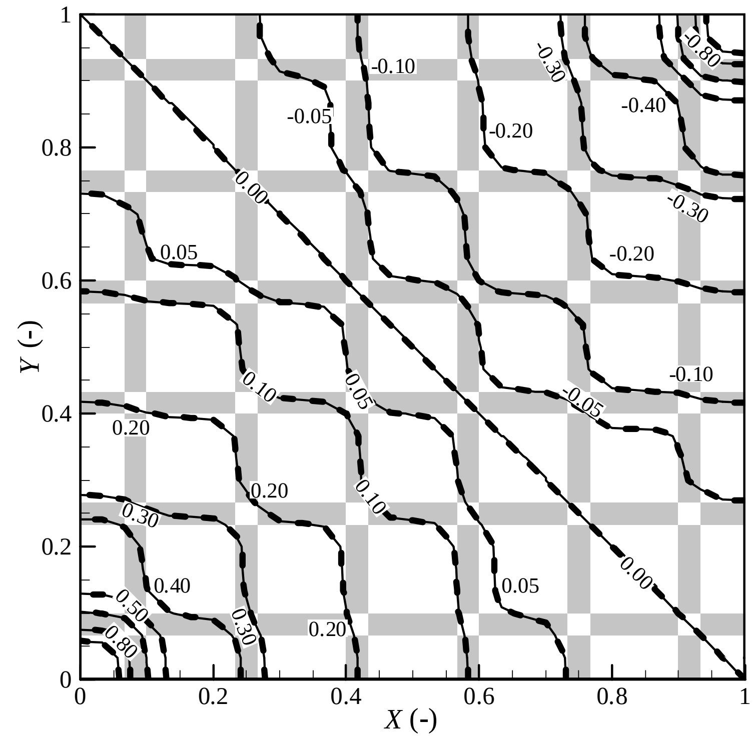
دو میدان تراوایی مطلق LPFD و LPVD که در آن‌ها سلول‌های ریز با مقدار تراوایی مطلق کم به ترتیب روی مرزها و در گوشه‌های بلوک‌های دوگانه قرار دارند را در نظر بگیرید (شکل 3-ه و 3-و)، همان‌گونه که در شکل 4-ه و 4-و نشان داده شده است، نتایج روش حجم محدود چند مقیاسی با شرط مرزی متغیر مقدار خطای زیادی دارد به گونه‌ای که برای دو میدان LPFD و LPVD میدان فشار بدست آمده از روش چند مقیاسی با میدان فشار روش ریز مقیاس اساساً متفاوت است. در حقیقت، برای این میدان‌های تراوایی مطلق شرایط مرزی متغیر مورد استفاده برای تعیین توابع پایه‌ای و اصلاحی (معادله‌های (7-ب) و (8-ب)) خطای زیادی را به روش چند مقیاسی تحمیل می‌کنند. علت این خطای زیاد را می‌توان در غیر فیزیکی بودن شرایط مرزی بدست آمده از معادله‌های (7-ب) و (8-ب) جستجو نمود؛ در یک میدان دو بعدی جریان سیال به نحوی می‌تواند از اطراف نواحی با مقدار تراوایی مطلق کم عبور نماید و به اصطلاح این نواحی را دور بزند. این در حالی است که شرط مرزی بر اساس معادله (7-ب) و (8-ب) به صورت کاملاً یک بعدی و بر روی مرزهای بلوک‌های دوگانه اعمال می‌شود. قرار گرفتن یک ناحیه با مقدار تراوایی مطلق کم بر روی مرز بلوک دوگانه منجر به بوجود آمدن گرادیان شدید فشار در راستای مربوط به مرز بلوک دوگانه می‌شود. این گرادیان فشار شدید به‌صورت تغییرات شدید توابع پایه‌ای و اصلاحی در روش حجم محدود چند مقیاسی ظهور پیدا می‌کند. این تغییرات شدید و یک بعدی با فیزیک متناظر با حالت جریان دو بعدی (یا سه بعدی) هماهنگی لازم را ندارد و منجر به ایجاد خطا در روش چند مقیاسی می‌شود.

برای روشن‌تر شدن این مطلب، می‌توان شرایط مرزی متغیر برای بدست آوردن توابع پایه‌ای و اصلاحی را به نحوی تغییر داد. در اینجا به جای استفاده مستقیم از مقادیر تراوایی مطلق سلول‌های ریز از مقادیر متوسط‌گیری شده آن‌ها با سلول‌های همسایه استفاده می‌شود. توجه شود که متوسط‌گیری میدان تراوایی مطلق فقط برای استخراج شرایط مرزی تولید کننده توابع پایه‌ای و اصلاحی و در راستای مرزهای هر بلوک دوگانه انجام می‌شود. در پژوهش حاضر، از انجام متوسط‌گیری حسابی مقادیر تراوایی مطلق روی مرزها و گوشه‌های بلوک دوگانه به منظور تولید توابع پایه‌ای و اصلاحی با نام شرط مرزی تعدیل شده یاد می‌شود.

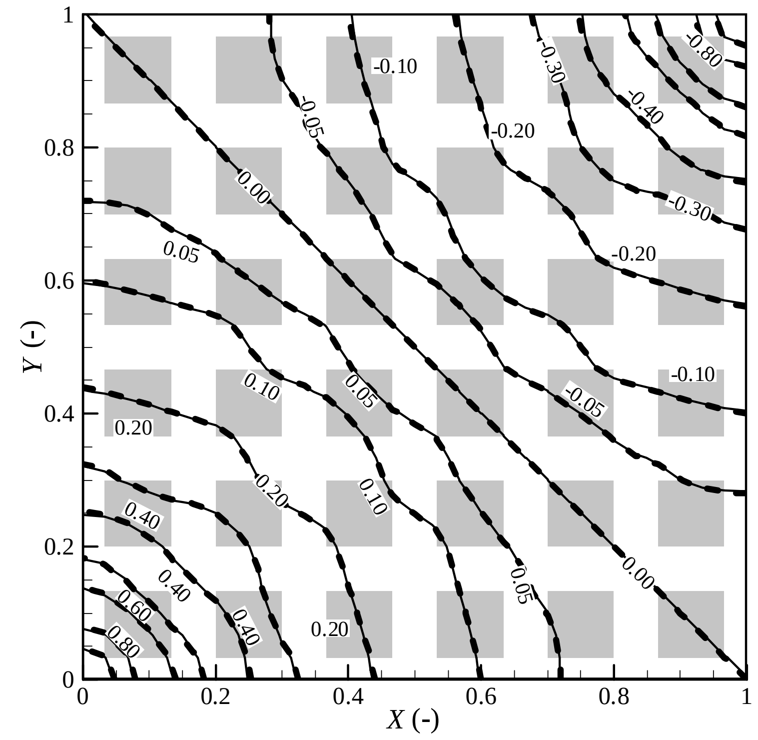
ابتدا میدان تراوایی مطلق LPVD را در نظر بگیرید (شکل 3-و). کانتور فشار مربوط به روش چند مقیاسی با شرط مرزی تعدیل شده برای میدان تراوایی مطلق LPVD در شکل 5-الف نمایش داده شده است. با مقایسه نمودن کانتورهای فشار ترسیم شده در شکل‌های 5-الف و 4-و می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از شرط مرزی تعدیل شده باعث بهبود قابل توجه نتایج روش حجم محدود چند مقیاسی شده است.

جدول2 خطاهای نتایج روش چند مقیاسی برای میدان‌های تراوایی مختلف

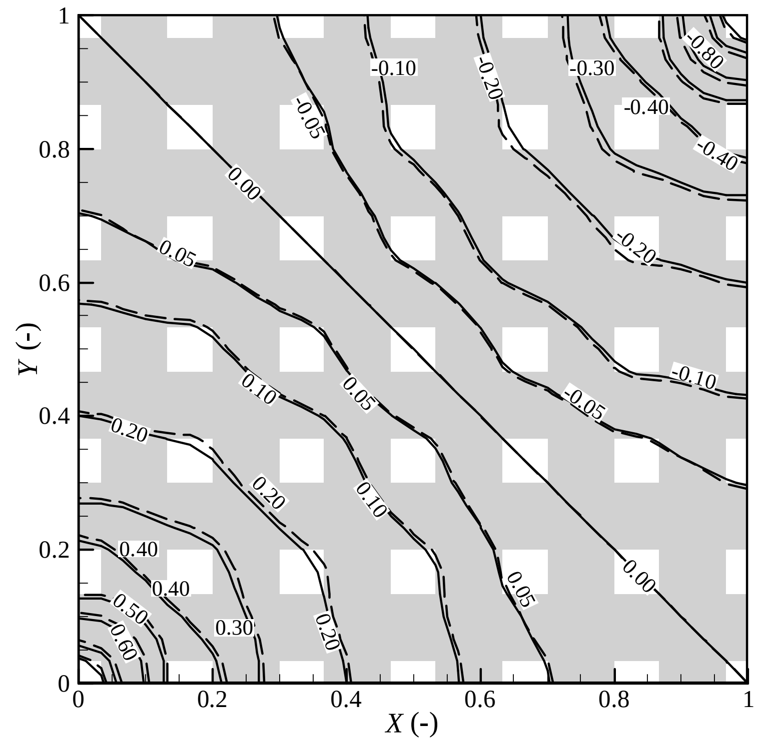
میدان تراوایی مطلق	شرط مرزی متغیر E_p	شرط مرزی متغیر E_u	شرط مرزی تعدیل شده E_p	شرط مرزی تعدیل شده E_u
LPFC	0/001	0/018	0/001	0/018
HPVFD	0/012	0/017	0/0895	0/0217
HPVD	0/02	0/034	0/0196	0/034
LPVC	0/031	0/049	0/031	0/049
LPFD	0/082	0/088	0/068	0/148
LPVD	0/288	0/933	0/126	0/116



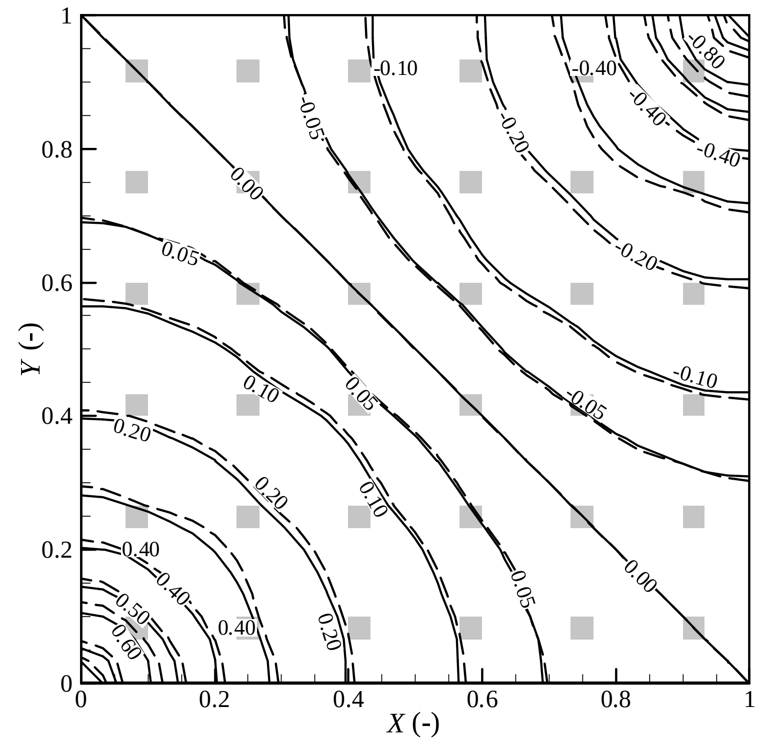
الف) میدان تراوایی LPFC



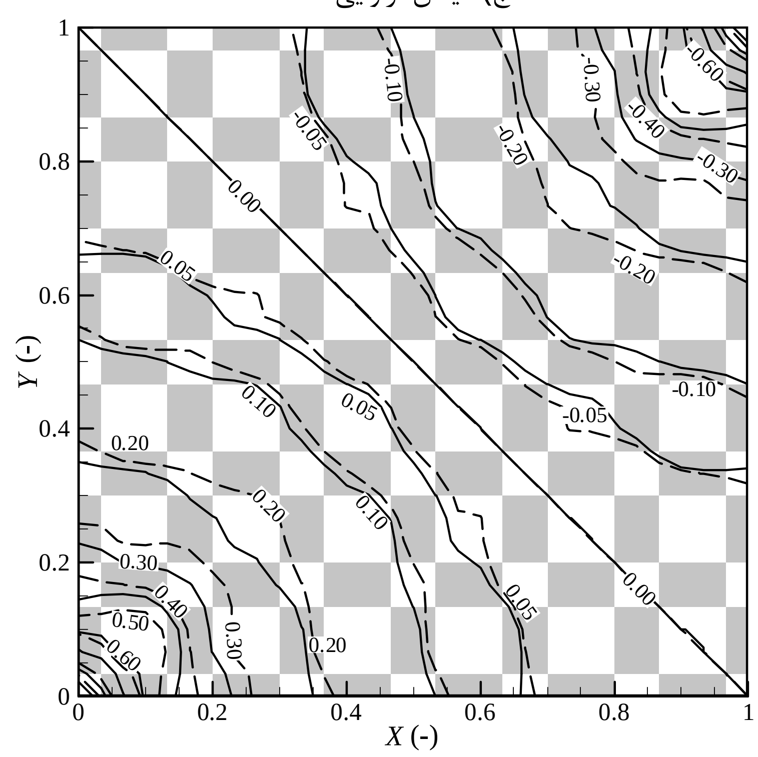
ب) میدان تراوایی HPVFD



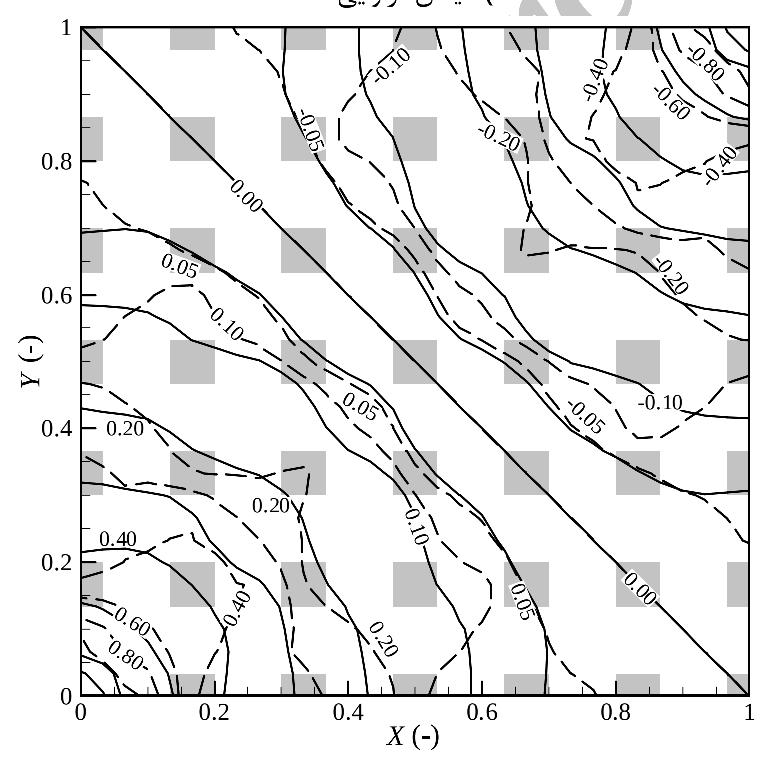
ج) میدان تراوایی HPVD



د) میدان تراوایی LPVC



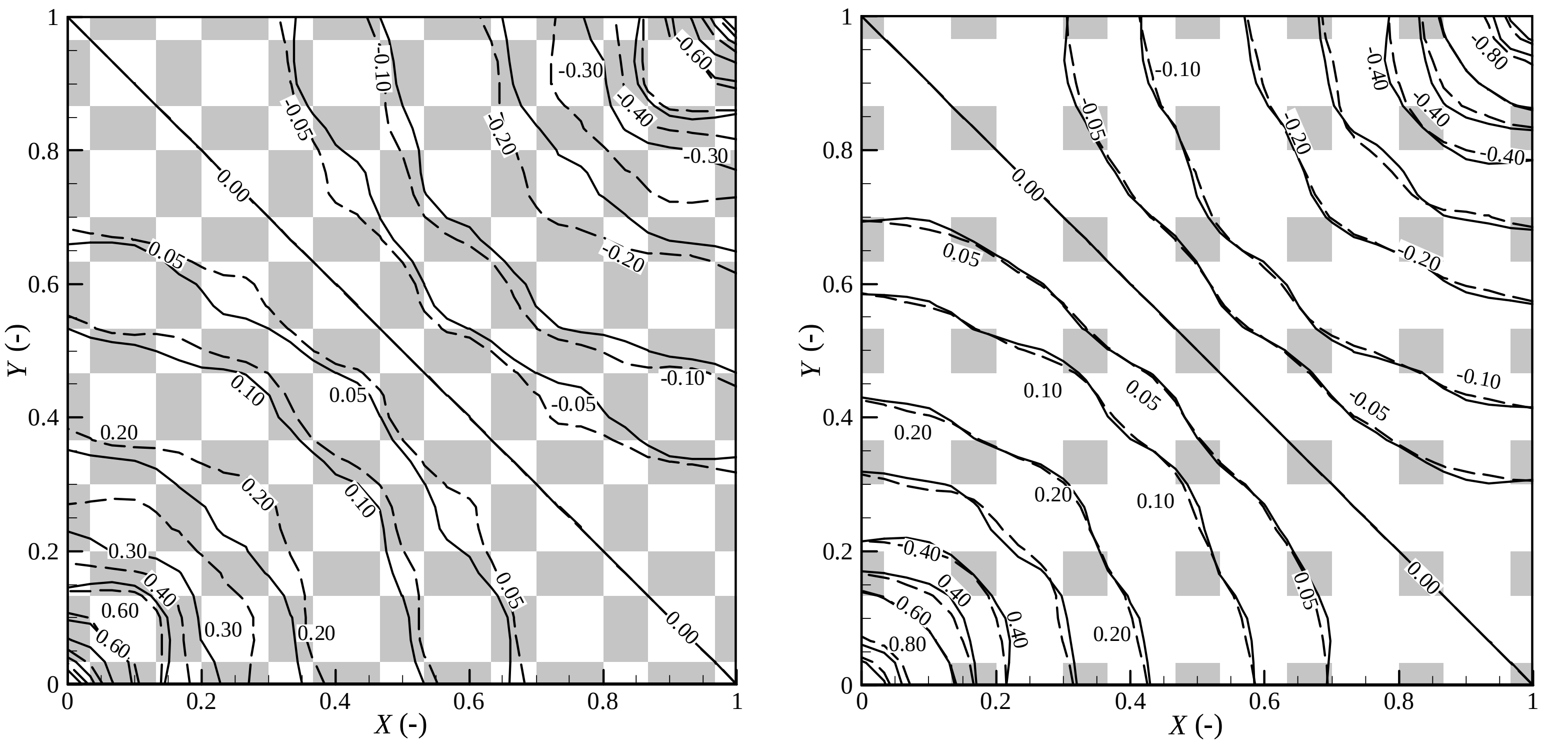
ه) میدان تراوایی LPFD



و) میدان تراوایی LPVD

شکل 4 مقایسه کانتورهای فشار مربوط به روش حجم محدود چند مقیاسی با شرط مرزی متغیر (خط چین) و روش حجم محدود استاندارد (خطوط تو پر)

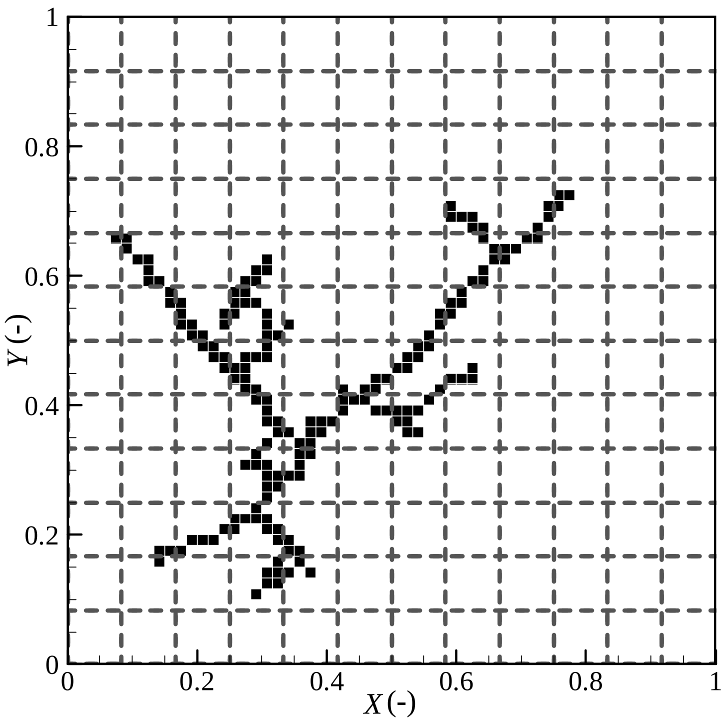
در حقیقت، با انجام متوسط‌گیری حسابی برای سلول‌های واقع شده در گوشه‌های بلوک‌های دوگانه با سلول همسایه آن‌ها (شرط مرزی تعدیل شده) مقدار تراوایی مؤثر افزایش پیدا کرده و بنابراین در حل مسئله یک بعدی از ایجاد گرادیان شدید در مجاورت گوشه‌های بلوک دوگانه جلوگیری می‌شود. با کاهش گرادیان تغییرات تابع پایه‌ای مجاورت گوشه‌های بلوک دوگانه از شدت یک بعدی بودن مسئله کاسته شده و مسئله به حالت دو بعدی نزدیک‌تر می‌شود.



الف) میدان تراوایی LPVD

ب) میدان تراوایی LPFD

شکل 5 مقایسه کانتورهای فشار مربوط به روش حجم محدود چند مقیاسی با شرط مرزی متغیر تعدیل شده (خط چین) و روش حجم محدود استاندارد (خطوط تو پر)



شکل 6 میدان تراوایی مطلق شامل لایه‌های نفوذناپذیر با نسبت تراوایی $M = 10^{-10}$

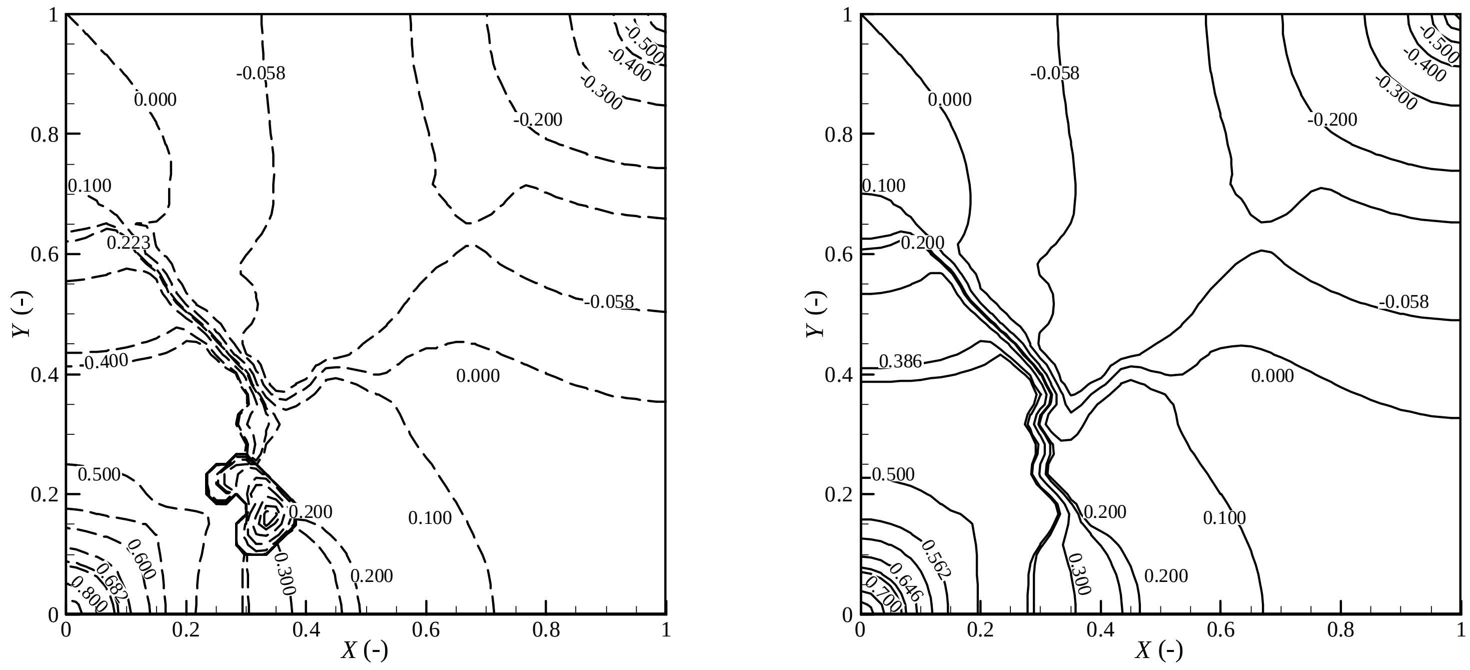
بنابراین میزان خطای میدان‌های فشار و سرعت روش چند مقیاسی مقداری کاهش پیدا کند (جدول 2). در مجموع می‌توان گفت که استفاده از شرط مرزی تعدیل شده برای میدان تراوایی LPVD باعث کاهش قابل توجه میزان خطای روش حجم محدود چند مقیاسی می‌شود.

میدان تراوایی مانند LPFD را در نظر بگیرید (شکل 3-ه). کانتورهای فشار مربوط به روش حجم محدود چند مقیاسی با شرط مرزی متغیر و شرط مرزی تعدیل شده به ترتیب در شکل‌های 4-ه و 5-ب نمایش داده شده است. با استفاده از شرط مرزی تعدیل شده، مقدار تراوایی مؤثر در سلول‌های مجاور رئوس بلوک دوگانه کاهش پیدا کرده و به تبع آن گرادیان تغییرات تابع پایه‌ای و اصلاحی در نواحی نزدیک به گوشه‌های بلوک دوگانه افزایش می‌یابد. با افزایش شدت تغییرات توابع پایه‌ای و اصلاحی روی مرز بلوک دوگانه، مسئله از حالت دو بعدی و واقعی خود مقداری فاصله می‌گیرد. در این حالت می‌توان انتظار داشت که با انجام متوسط‌گیری بر روی میدان تراوایی برای رسیدن به محلی‌سازی، خطای میدان فشار و میدان سرعت متناظر با میدان تراوایی LPFD مقداری افزایش پیدا کند. بنابراین استفاده از شرط مرزی تعدیل شده برای میدان تراوایی LPFD منجر به افزایش خطای روش حجم محدود چند مقیاسی می‌شود (بر عکس میدان LPVD).

یک میدان تراوایی مطلق دو مقیاسی نشان داده شده در شکل 6 را در نظر بگیرید. این میدان تراوایی با یک شبکه ریز شامل 60×60 سلول محاسباتی داده شده که شامل یک لایه تقریباً نفوذناپذیر با نسبت تراوایی $M = 10^{-10}$ است (نواحی تیره رنگ در شکل 6). توزیع فشارهای بدست آمده توسط روش حجم محدود استاندارد و همچنین روش چند مقیاسی با شرط مرزی متغیر به ترتیب در شکل‌های 7-الف و 7-ب نمایش داده شده است.

مشخص است که در برخی نواحی، میدان فشار روش چند مقیاسی دارای قله‌های فیزیکی با دامنه بسیار بزرگ است که به صورت پیچش‌هایی غیرعادی در کانتور فشار ظاهر می‌شوند. این در حالی است که در میدان فشار روش مبنا چنین قله‌های فشاری مشاهده نمی‌شود. برای این مسئله خاص نیز قرار گرفتن ناحیه با مقدار تراوایی بسیار کم در گوشه‌های بلوک‌های دوگانه (مراکز بلوک‌های درشت) منجر به ایجاد خطا در محلی‌سازی و در نتیجه در میدان فشار روش حجم محدود چند مقیاسی می‌شود. از نقطه نظر ریاضی، به وجود آمدن ضرایب غیر قطری مثبت در ماتریس ضرایب دستگاه معادله فشار درشت مقیاس (با درایه‌های قطری منفی) باعث می‌شود که به اصطلاح ماتریس ضرایب شرایط مربوط به M-ماتریس بودن را ارضا ننماید و در نتیجه میدان فشار درشت مقیاس به صورت نوسانی با قله‌های غیر فیزیکی (غیر یکنوا) باشد [15]. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مرجع [15] مراجعه شود.

با توجه به توضیح‌های مطرح شده، می‌توان نتیجه گرفت که وجود تغییرات شدید در مقادیر توابع پایه‌ای و اصلاحی بر روی مرزها و گوشه‌های بلوک‌های دوگانه می‌تواند منجر به ایجاد خطای زیادی در روش حجم محدود چند مقیاسی شود. بنابراین هر نوع اصلاحی که باعث شود شرایط مرزی تولید کننده توابع پایه‌ای و اصلاحی از حالت کاملاً یک بعدی خارج و به حالت دو بعدی نزدیک شود، می‌تواند خطای روش حجم محدود چند مقیاسی را کاهش دهد. بالعکس، هر تغییری که باعث ایجاد گرادیان شدید توابع پایه‌ای و اصلاحی در مجاورت گوشه‌های بلوک‌های دوگانه شود، می‌تواند خطای روش حجم محدود چند مقیاسی را افزایش دهد. با این وجود، قضاوت در مورد نحوه عملکرد کلی یک نوع مشخص از شرط مرزی (متغیر یا تعدیل شده) و تأثیر آن بر روی دقت روش چند مقیاسی برای مسائل مختلف کار بسیار دشواری است.



ب) روش حجم محدود چند مقیاسی

الف) روش حجم محدود استاندارد

شکل 7 کانتور فشار روش‌های مختلف برای میدان تراوایی شامل لایه‌های نفوذناپذیر

5- نتیجه‌گیری

اعمال شرط مرزی مورد استفاده برای تعیین توابع پایه‌ای و اصلاحی (به اصطلاح شرط محلی‌سازی)، تنها عامل خطای روش حجم محدود چند مقیاسی برای حل معادله فشار جریان سیال درون محیط متخلخل است [2]. در حقیقت فاصله گرفتن شرط مرزی اعمال شده بر روی مرزهای بلوک‌های دوگانه از حالت واقعی یا به عبارتی غیر فیزیکی بودن این شرایط مرزی منجر به ایجاد خطا در روش حجم محدود چند مقیاسی می‌شود. نتایج عددی ارائه شده در کار حاضر نشان داد که روش حجم محدود چند مقیاسی با شبکه جایگزین شده [16] زمانی بیشترین حساسیت و خطا را نشان می‌دهد که مرزها یا گوشه‌های بلوک‌های دوگانه بر روی سلول‌هایی با تراوایی مطلق کم واقع شده باشند. علاوه بر این، نشان داده شد که بیشترین مقدار خطا در کانتور فشار زمانی ایجاد می‌شود که گوشه‌های بلوک‌های دوگانه در مجاورت یا بر روی سلول‌هایی با تراوایی مطلق بسیار کم قرار داشته باشند. در حقیقت، وجود چنین حالتی منجر به ضعیف شدن (و یا در مواردی حتی قطع شدن) ارتباط بین مرکز این بلوک‌های درشت با سایر بلوک‌های همسایه آن‌ها می‌شود و در چنین حالتی خطای روش حجم محدود چند مقیاسی می‌تواند افزایش پیدا کند.

با معرفی شرط مرزی تعدیل شده، نشان داده شد که در مواردی که متوسط‌گیری میدان تراوایی مطلق باعث کاهش گرادیان توابع پایه‌ای و اصلاحی در مجاورت گوشه‌های بلوک‌های دوگانه شود، میزان خطای حجم محدود چند مقیاسی کاهش می‌یابد. این در حالی است که برای حالت‌هایی که با انجام متوسط‌گیری میدان تراوایی گرادیان توابع پایه‌ای و اصلاحی بر روی مرزهای بلوک دوگانه افزایش می‌یابد، استفاده از شرط مرزی تعدیل شده می‌تواند خطای روش چند مقیاسی را افزایش دهد. در مجموع می‌توان گفت که روش چند مقیاسی به شدت تغییرات مقادیر توابع پایه‌ای و اصلاحی روی مرزها و گوشه‌های بلوک دوگانه حساسیت زیادی دارد. علاوه بر این، به منظور جلوگیری از تولید خطای زیاد در روش‌های حجم محدود چند مقیاسی پایه باید تا حد امکان از قرار گرفتن مرزها و به خصوص گوشه‌های بلوک‌های دوگانه بر روی سلول‌هایی با تراوایی مطلق بسیار کم جلوگیری نمود. اینکار با انتخاب نوع شبکه‌های محاسباتی درشت و دوگانه همراه با ضریب درشت‌نمایی مناسب [16]، متوسط‌گیری میدان تراوایی مطلق به صورت محلی (شرط مرزی تعدیل شده)، انتخاب شبکه‌های محاسباتی چند درجه تفکیکی [15،14] تا حدودی امکان‌پذیر است.

6- فهرست علائم

N_{c} تعداد بلوک‌های درشت

N_{d} تعداد بلوک‌های دوگانه

k_{r} تراوایی نسبی

K تانسور تراوایی مطلق (mD)

P فشار (Pa)

$\bar{P}_j$ فشار درشت مقیاس در مرکز بلوک درشت j (Pa)

$\hat{P}^i$ فشار ریز مقیاس درون بلوک دوگانه i (Pa)

S درجه اشباع (-)

t زمان (s)

$\vec{u}$ بردار سرعت (ms^{-1})

علائم یونانی

ρ چگالی (kgm^{-3})

μ لزجت دینامیکی ($kgm^{-1}s^{-1}$)

λ تحرک‌پذیری ($mD\ Pa^{-1}s^{-1}$)

Φ تابع پایه‌ای (-)

Ψ تابع اصلاحی (-)

Ω ناحیه حل

$\hat{\Omega}^i$ بلوک دوگانه شماره iام

$\partial\hat{\Omega}^i$ مرزهای بلوک دوگانه شماره iام

$\bar{\Omega}_j$ بلوک درشت شماره jام

$\partial\bar{\Omega}_j$ مرزهای بلوک درشت شماره jام

بالانویس‌ها

i شمارنده مربوط به بلوک‌های دوگانه

زیرنویس‌ها

J شمارنده مربوط به بلوک‌های درشت

Max مقدار بیشینه

Min مقدار کمینه

O فاز نفت

W فاز آب

X راستای اصلی در دستگاه مختصات کارتزین

Y راستای اصلی در دستگاه مختصات کارتزین

Α فاز

7- مراجع

[1] I. Lunati, P. Jenny, Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media, *Journal of Computational Physics,* Vol. 216, No. 2, pp. 616-636, 2006.

[2] H. Hajibeygi, G. Bonfigli, M. A. Hesse, P. Jenny, Iterative multiscale finite-volume method, *Journal of Computational Physics,* Vol. 227, No. 19, pp. 8604-8621, 2008.

[3] T. Y. Hou, X. H. Wu, A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media, *Journal of computational physics,* Vol. 134, No. 1, pp. 169-180, 1997.

[4] P. Jenny, S. H. Lee, H. A. Tchelepi, Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation, *Journal of Computational Physics,* Vol. 187, No. 1, pp. 47-67, 2003.

[5] P. Jenny, S. H. Lee, H. A. Tchelepi, Adaptive fully implicit multi-scale finite-volume method for multi-phase flow and transport in heterogeneous porous media, *Journal of Computational Physics,* Vol. 217, No. 2, pp. 627-641, 2006.

[6] M. Hesse, B. Mallison, H. A. Tchelepi, Compact multiscale finite volume method for heterogeneous anisotropic elliptic equations, *Multiscale Modeling and Simulation,* Vol. 7, No. 2, pp. 934-962, 2008.

[7] H. Zhou, H. A. Tchelepi, Operator-based multiscale method for compressible flow, *SPE Journal,* 106254, Vol. 13, No. 2, pp. 267-273, 2008.

[8] I. Lunati, S. Lee, An operator formulation of the multiscale finite-volume method with correction function, *Multiscale Modeling and Simulation,* Vol. 8, No. 1, pp. 96-109, 2009.

[9] I. Lunati, P. Jenny, Multiscale finite-volume method for density-driven flow in porous media, *Computational Geosciences,* Vol. 12, No. 3, pp. 337-350, 2008.

[10] I. Lunati, P. Jenny, Treating highly anisotropic subsurface flow with the multiscale finite-volume method, *Multiscale Modeling & Simulation,* Vol. 6, No. 1, pp. 308-318, 2007.

[11] I. Lunati, M. Tyagi, S. Lee, An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution, *Journal of Computational Physics,* Vol. 230, No. 5, pp. 1849-1864, 2011.

[12] H. Hajibeygi, P. Jenny, Adaptive iterative multiscale finite volume method. *Journal of Computational Physics,* Vol. 230, No. 3, pp. 628-643, 2011.

[13] H. Hajibeygi, I. Lunati, S. H. Lee, Accurate and Efficient Simulation of Multiphase Flow in a Heterogeneous Reservoir With Error Estimate and Control in the Multiscale Finite-Volume Framework, *SPE Journal,* 141954-PA, Vol. 17, No. 4, pp. 1-10, 2012.

[14] M. Mosharaf Dehkordi, M. T. Manzari, A multi-resolution multiscale finite volume method for simulation of fluid flows in heterogeneous porous media, *Journal of Computational Physics,* Vol. 248, No. 1, pp. 339-362, 2013.

[15] M. Mosharaf Dehkordi, *mulit-resolution Multi-scale Finite volume method for Reservoir Simulation,* PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, 2013. (In Persian)

[16] M. Mosharaf Dehkordi, M. T. Manzari, Effects of using altered coarse grids on the implementation and computational cost of the multiscale finite volume method, *Advances in Water Resources,* Vol. 59, No. 1, pp. 221-237, 2013.

[17] H. Hajibeygi, H. A. Tchelepi, Compositional multiscale finite-volume formulation, SPE Journal, 163664-PA , Vol. 19, No. 2, pp. 316-326, 2014.

[18] Y. Wang, and H. Hajibeygi, H. A. Tchelepi, Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous porous media, *Journal of Computational Physics,* Vol. 259, No. 1, pp. 284-303, 2014.

[19] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *Finite volume methods,* in: Ciarlet, P.G. and Lions, J.L. (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis,* Vol. 7, pp. 713-1018, 2000.