مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دوره 15، شماره 11، ص‌ص 97-104

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل رفتار تیر الاستوپلاستیک تحت بار دینامیکی محوری با استفاده از معادلات انتقال

حبیب رمضان نژاد آزاربنی[1]، منصور درویزه[2*]، ابوالفضل درویزه[3]، رضا انصاری[4]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت
3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرانزلی، ایران
4- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت
*رشت، صندوق پستی 3756-41635، darvizeh@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 09 مرداد 1394
پذیرش: 25 شهریور 1394
ارائه در سایت: 14 مهر 1394

کلید واژگان:
معادلات انتقال
موج ضربه‌ای
حجم کنترلی
تغییر فاز
الاستیک - پلاستیک

چکیده

هرگاه بار دینامیکی به‌صورت موج ضربه‌ای به یک حجم کنترلی از ماده برخورد کند، گذر این موج از حجم کنترلی می‌تواند باعث ایجاد فازهای مختلفی مانند فاز الاستیک، پلاستیک شود. از دیدگاه میکروسکوپی هنگام تغییر فاز، جریان مادی در حجم‌های کنترلی صورت گرفته و این جریان با انتقال جرم، حرارت، انرژی و مومنتوم همراه خواهد بود. تغییر فاز در ماده باعث تولید ناپیوستگی مادی در حجم کنترلی می‌شود. حین فرآیند تغییر فاز انتقال جرم، انتقال حرارت، انتقال انرژی، انتقال مومنتوم و ... صورت گرفته و معادلات حاکم بر این دسته از پدیده‌ها را معادلات انتقال می‌نامند. در این مقاله برای نخستین بار با به‌کارگیری معادلات انتقال شامل معادلات انتقال جرم، انرژی و مومنتوم، معادلات انتقال حاکم بر رفتار الاستو پلاستیک تیر تحت بار دینامیکی استخراج‌شده است. به‌کارگیری معادلات انتقال به همراه متغیرهای غیرفیزیکی در فرم انتگرالی باعث اعمال شرایط ناپیوستگی در معادلات حاکم به فرم منبع انرژی داخلی شده و باعث حذف شرایط ناپیوستگی می‌شود. این معادلات در مدل کردن پیوسته رفتار الاستوپلاستیک تیر تحت بار دینامیکی بکار گرفته‌شده و مدل پیوسته‌ای از رفتار الاستوپلاستیک تیر تحت بار دینامیکی لحظه‌ای ارائه‌شده است. برای حل این معادلات با پارامترهای غیرفیزیکی از روش المان محدود استفاده شده است. تاریخچه زمانی انتشار موج تنش،کرنش و سرعت در امتداد تیر در دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک ارائه شده است.

Analysis of elastoplastic behavior of beam subjected to axial dynamic loading using transport equations

Habib Ramezannezhad Azarboni[1], Mansoor Darvizeh[1*], Aboolfazl Darvizeh[2], Reza Ansari[3]

1- Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran.
2- Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran.
3- Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran.
*P.O.B.41635-3756 Rasht, Iran, darvizeh@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 31 July 2015
Accepted 16 September 2015
Available Online 06 October 2015

Keywords:
Transport Equation
Shock Wave
Control Volume
Phase Change
Elastoplastic

ABSTRACT

When a dynamic load passes a control volume of material as a shock wave, passing this wave through the control volume could cause different phases such as elastic and plastic. From the microscopic view, during phase change material flow would be taken in control volume which includes mass, heat, energy, and momentum transport. Phase change in material causes a material discontinuity in the control volume. During the phase change process, mass, heat, energy, momentum transport, etc will occur and the equations governing these phenomena are called transport equations. In this article, for the first time, the governing equations of elastoplastic behavior of beam under dynamic load are extracted using mass, energy and momentum transport equations. Using transport equations with non-physical variables in integral form will cause employing discontinuity conditions in governing equations and eliminate the discontinuity condition. These equations are also used in continuous modeling of beam elastoplastic behavior under dynamic loading and a continuous model is presented. Finite element method is used to solve the transport equation with non-physical variable. Finally, the time history of stress, strain and velocity wave propagation along beam are presented in elastic and elastoplastic phases.

1- مقدمه

هرگاه موج انرژی ناشی از بار دینامیکیاز یک حجم کنترلی از جسم دارای رفتار الاستیک– پلاستیک عبور کند، اثرات انتقال انرژی از حجم کنترلی به‌صورت انرژی کرنشی و جنبشی در نظر گرفته می‌شود. عبور این موج انرژی از حجم کنترلی را می‌توان به‌صورت یک بارگذاری فشاری مدل کرد. با توجه به انتقال انرژی صورت گرفته در این فرایند، می‌توان از مفهوم معادلات انتقال برای مدل کردن رفتار یک جسم در این فرایند بهره گرفت. به‌کارگیری معادلات انتقال درزمینه‌ی مدل کردن انتقال حرارت در حضور و عدم حضور ناپیوستگی مرزی و مادی صورت گرفته است [1-7].

دیوی و روسیندل در سال 1999 از روش ظرفیت حجم کنترلی برای حل

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
H. Ramezannezhad Azarboni, M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, Analysis of elastoplastic behavior of beam subjected to axial dynamic loading using transport equations, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 97-104, 2015 (In Persian)

مسائل انجماد با استفاده از روش المان محدود استفاده کردند [1]. عملکرد روش ظرفیت کنترلی بر مسائل همرفت-انجماد توسط دیوی و رودریگرز در سال2002 مورد بررسی قرار گرفت. اعمال میدان گرمایی روی یک المان سه‌بعدی در فرآیند انجماد هم‌دما بدون همرفت، انتقال حرارت همرفت روی یک جسم نیمه بی‌نهایت بدون انجماد، انجماد هم‌دما روی یک جسم نیمه بی‌نهایت با و بدون همرفت، انجماد هم‌دما روی یک جسم نیمه بی‌نهایت در محدوده‌ی خمیری شکل مطالعات صورت گرفته در این مقاله بوده است [2]. در سال 2002 دیوی و رودریگز با استفاده از روش ظرفیت حجم کنترلی و به‌کارگیری معادلات انتقال جرم فرایند انجماد را مدل نمودند[3].

رودریگز و همکاران در سال 2007 برای حل معادلات انتقال حاکم بر معادلات نفوذ- همرفت از روش تفاضل محدود استفاده کردند و اصلاحاتی روی روش ظرفیت حجم کنترلی استاندارد انجام دادند [4]. حل عددی بر روی مسائل همرفت – نفوذ ناپایدار انتقال حرارت با استفاده از معادلات انتقال به روش حجم کنترلی هیبریدی توسط رودریگز و همکاران در سال 2009 انجام شد [5]. در مقاله‌ی ارائه شده در سال 2010 توسط دیوی و موندراگون، تمرکز اصلی روی مسائل انجماد هم‌دمایی است که در آن‌ها ترم منبع به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که با به‌کارگیری آن ناپیوستگی در معادلات انتقال حذف می‌شود [6]. برای این منظور از توابع شکل پیوسته در سرتاسر المان بهره‌گیری شده است.

نگرش جدید ارائه شده توسط دیوی امکان هم‌زمان را برای ظرفیت و منبع فراهم می‌کند که کلیه‌ی ناپیوستگی‌ها را حذف کند و این عملیات هم‌زمانی در روش‌های دیگر وجود ندارد. به‌کارگیری متغیرهای غیرفیزیکی در پدیده انجماد با بیش از یک ناپیوستگی در حجم کنترلی توسط موندراگون و دیوی در سال 2011 مورد تحقیق قرار گرفت [7]. استفاده از متغیرهای غیرفیزیکی باعث حذف ناپیوستگی موجود در حجم کنترلی شده و مدلی پیوسته از آن ارائه می‌دهد. همان‌طور که بیان شد مطالعات دیوی در به‌کارگیری معادلات انتقال بیشتر مربوط به مدل کردن مسائل انتقال حرارتی است. به‌کارگیری معادلات انتقال در زمینه‌ی مدل کردن رفتار الاستیک-پلاستیک موضوعی است که کم‌تر به آن پرداخته شده است.

بررسی رفتار الاستیک-پلاستیک با در نظر گرفتن انتشار موج تنش الاستیک و پلاستیک سازه‌های مختلف با ویژگی‌های مکانیکی متفاوت مورد تحقیق دانشمندان بوده است. تحلیل دینامیکی الاستوپلاستیک تیر در شرایط مرزی مختلف توسط لپیک صورت گرفته است [8-12]. به‌کارگیری روش گالرکین به منظور تحلیل رفتار دینامیکی یک تیر گیردار تحت بار ایمپالس توسط لپیک در سال 1994 صورت گرفت [8]. لپیک در سال 1995با به کارگیری پارامترهای بی‌بعد و استفاده از روش هامیلتون معادلات الاستوپلاستیک تیر را استخراج کرده و به تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک تیر الاستوپلاستیک تحت بار دینامیکی محوری پرداخت [9].

لپیک در سال 1998 چگونگی انتشار امواج الاستیکوپلاستیک و تأثیرآن بر رفتار ارتعاشی و انتشار موج تنش محوری و سرعت به‌صورت تحلیلی به منظور ایجاد دوشاخه‌ای شدن در رفتار الاستوپلاستیک تیر مورد مطالعه قرارداد [9]. در ادامه در سال 2000 لپیک کمانش دینامیکی تیر الاستوپلاستیک را مورد تحلیل قرار داد. برای این منظور و استخراج مقادیر سرعت در دو حوزه‌ی الاستیکوپلاستیک از معادلات مشخصه‌ی سرعت در هر حوزه و حل گام‌به‌گام و استفاده از نتایج هر حوزه به عنوان شرایط اولیه برای حوزه بعدی استفاده شده است. در سال 2002 لپیک با در نظر گرفتن اثر انتشار موج تنش محوری به بررسی رفتار دینامیکی تیر الاستوپلاستیک تحت بار محوری پرداخت [12] که توسعه تحقیق صورت گرفته در مرجع [11] بوده است.

انتشار موج الاستیک در تیرهای مارپیچ به منظور تحلیل رفتار تیر با پارامترهای هندسی و مکانیکی تیر توسط فریخا و همکاران انجام شده است [13]. در این تحقیق اثر بار دینامیکی با فرکانس پایین، متوسط و بالا مورد تحلیل قرار گرفته است.

در این مقاله برای نخستین بار رفتار الاستیک- پلاستیک حجم کنترلی مشخص تحت بار دینامیکی لحظه‌ای که باعث ایجاد موج ضربه‌ای در آن می‌شود با رویکرد به‌کارگیری معادلات انتقال مدل شده است. در هنگام گذر موج ضربه‌ای از این حجم کنترلی فرض شده است که دو فاز الاستیک و پلاستیک با یک مرز ناپیوستگی تشکیل شود. با به‌کارگیری معادلات انتقال انرژی،جرم و مومنتوم به‌طور همزمان رفتار الاستیک-پلاستیک حجم کنترلی تعریف‌شده با حضور و عدم حضور شرایط ناپیوستگی مدل شده است.

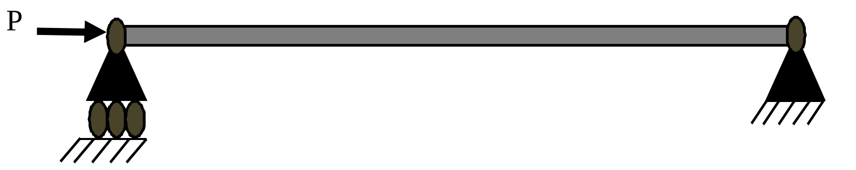
نوآوری انجام شده در این مقاله در به‌کارگیری معادلات انتقال برای تیر اویلر برنولی با تکیه‌گاه آزاد در محل اعمال بارگذاری ضربه و تکیه‌گاه گیردار در انتهای دیگر و استفاده از متغیرهای غیرفیزیکی برای حذف غیرپیوستگی مادی موجود می‌باشد. با استفاده از متغیرهای غیرفیزیکی ناپیوستگی مادی موجود به خاطر تغییر رفتار ماده از الاستیک به پلاستیک، به صورت منبع انرژی داخلی مدل شده و باعث حذف آن در حجم کنترلی مورد مطالعه می‌شود. با به‌کارگیری این روش پاسخ دینامیکی تیر به صورت تاریخچه تنش، کرنش و سرعت محوری ذرات تیر در مدت‌زمان بارگذاری در دو رژیم الاستیک و الاستوپلاستیک مورد تحلیل قرار گرفته است. به منظور راستی آزمایی و اعتبارسنجی روش به‌کار گرفته شده در این مقاله ابتدا نتایج مرجع [12] استخراج و در ادامه نتایج جدید ارائه شده است.

2- به‌کارگیری معادلات انتقال در رفتار الاستوپلاستیک تیر با در نظر گرفتن انتشار موج

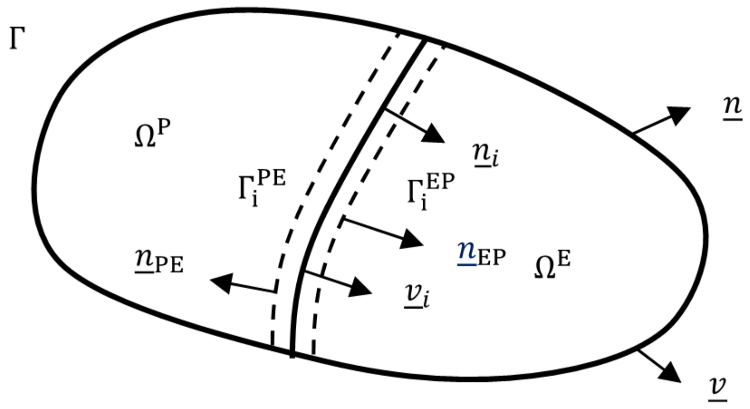
میله‌ای مطابق شکل 1 را در نظر بگیرید که روی تکیه‌گاه ساده قرار داشته و بار دینامیکی P در یک انتها به آن وارد می‌شود.

رفتار الاستوپلاستیک تیر به‌صورت الاستیک با سخت‌شوندگی خطی فرض می‌شود. بار دینامیکی در مدت‌زمان مشخص به آن وارد می‌شود. با اعمال این بار دینامیکی انتشار موج تنش الاستیک و پلاستیک در آن صورت می‌گیرد. انعکاس موج تنش از انتهای تیر به شرایط مرزی آن بستگی دارد. برای انتهای گیردار با توجه به این‌که تغییر مکان صفر است هنگامی‌که موج به انتهای گیردار می‌رسد تنش دوبرابر شده و جابجایی صفر است. به‌عبارت‌دیگر موج تنش کششی پس از رسیدن به انتهای گیردار به‌صورت کششی و موج تنش فشاری نیز به‌صورت فشاری انعکاس می‌یابد [15,14].

همچنین برای انتهای ساده نیز موج تنش کششی اعمال‌شده برای برآورده شدن شرط مرزی می‌بایست به‌صورت موج تنش فشاری و موج تنش فشاری می‌بایست به‌صورت موج تنش کششی پس از رسیدن به انتهای ساده منعکس شود. همچنین در موج‌های تنش فشاری صرف‌نظر از ضریب پواسون جهت حرکت ذرات و جهت حرکت موج تنش در یک راستا بوده ولی در موج-های کششی این دو در خلاف جهت هم خواهند بود. باید توجه داشت که سرعت ذرات جسم و سرعت انتشار موج تنش در جسم با یکدیگر متفاوت خواهند بود. سرعت موج تنش الاستیک به مدول الاستیسیته و چگالی جنس ماده و سرعت موج تنش پلاستیک به مدول پلاستیسیته و چگالی جنس ماده بستگی دارد و به‌صورت رابطه‌ی (1) به دست می‌آیند [15,14].



شکل 1 تیر تحت بار دینامیکی



شکل 2 حجم کنترلی از تیر تحت بار دینامیکی

$$C_E=\sqrt{\frac{E}{\rho}},\ C_P=\sqrt{\frac{E_t}{\rho}} \tag{1}$$

در رابطه‌ی (1)، E مدول الاستیسیته و E_t مدول مماسی می‌باشد. با توجه به روابط بالا می‌توان فهمید که با توجه به این‌که $E_t \ll E$ است همواره سرعت موج الاستیک از سرعت موج پلاستیک بیش‌تر است. تولید و انتشار موج الاستیک و پلاستیک به مقدار بارگذاری بستگی دارد، هرگاه در بارگذاری مقدار کرنش ایجاد شده از نصف کرنش تسلیم کمتر باشد، با اعمال بارگذاری در این محدوده از کرنش در تیر موج تنش تولید شده در تیر الاستیک می‌باشد با پیشروی و انتشار موج الاستیک تولیدی و رسیدن آن به انتهای گیردار تیر، موج برگشتی دارای تنشی با مقدار دو برابر مقدار تنش اولیه تولیدی شده که با کوچک‌تر بودن کرنش اولیه از نصف کرنش تسلیم کرنش برگشتی از حد الاستیک تجاوز نکرده و موج برگشتی به‌صورت موج الاستیک انعکاس پیدا می‌کند [15,14].

در حالتی که کرنش اولیه ایجاد شده بیشتر از نصف کرنش تسلیم و کمتر از کرنش تسلیم باشد، $0.5\varepsilon_y < |\varepsilon_0| < \varepsilon_y$، با اعمال بارگذاری در این محدوده از کرنش ابتدا موج الاستیک در تیر ایجاد شده و تغییر شکل الاستیک در تیر تولید می‌شود اما هنگامی‌که موج الاستیک اولیه به انتهای گیردار تیر می‌رسد با دو برابر شده مقدار تنش و کرنش، موج تنش الاستیک اولیه به‌صورت دو موج تنش الاستیک و موج تنش پلاستیک منعکس می‌شود. و در حالتی که مقدار کرنش اولیه از کرنش تسلیم بیشتر باشد، $\varepsilon_y < |\varepsilon_0|$، با اعمال بارگذاری در این محدوده از کرنش در ابتدا دو موج تنش الاستیک و پلاستیک هم‌زمان با سرعت‌های C_P , C_E تولید می‌شوند [12].

با توجه به مقدار بار وارد شده حالت‌های مختلفی ممکن است رخ دهد. در حالت کلاسیک برای استخراج تنش، کرنش و سرعت تیر در هر یک از حالت‌های بالا معادلات الاستیک و پلاستیک تیر در هر محدوده به‌طور مجزا در نظر گرفته می‌شود. در شکل 2 فضای Ω به دو زیر فضای Ω^P, Ω^E تقسیم می‌شود، به‌طوری‌که $\Omega = \Omega^P \cup \Omega^E$ که به ترتیب معرف حوزه‌های الاستیک و پلاستیک است. در این تحلیل فرض شده است که یک حجم کنترلی مشخصی از جسم در حین گذر موج ایجاد شده انرژی ناشی از یک منبع تولید دارای دو فاز مختلف بیان شده باشد.

فرم استاندارد اویلری با تعریف $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\underline{v}\cdot\nabla$ به دست می‌آید. به‌منظور مستقل‌سازی حرکت حجم کنترلی در سیستم مرجع محاسباتی فرمولاسیون اویلر لاگرانژی دلخواهی ارائه شده است. سیستم مرجع مادی، سیستم مرجع فضایی و سیستم مرجع محاسباتی، با علائم $\mathbf{X}$ ، $\mathbf{x}$ و x^* نمایش داده می‌شود. مشتق مادی $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\big|_{X}$ و مشتق حجم کنترلی $\frac{D^*}{D^*t}=\frac{\partial}{\partial t}\big|_{x^*}$ با مشتق فضایی توسط معادلات (1) و (2) ارتباط پیدا می‌کند.

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{x}+\underline{v}\cdot\nabla \tag{2}$$

$$\frac{D^*}{D^*t}=\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{x}+\underline{v}^*\cdot\nabla \tag{3}$$

که $\underline{v}=\frac{Dx}{Dt}$ و $\underline{v}^*=\frac{D^*x}{D^*t}$. در روش کلاسیک با حل هر یک از حوزه‌ها به‌طور مجزا و اعمال شرایط گذار از حالت الاستیک به حالت پلاستیک پارامترهای مطلوب استخراج می‌شود. با استفاده از معادلات انتقال این مشکل مرتفع شده و با به‌کارگیری این معادلات می‌توان ناپیوستگی‌های موجود را در فرم انتگرالی به‌صورت یک منبع انرژی مدل نموده و به‌صورت پیوسته رفتار الاستوپلاستیک تیر را مدل نمود. برای این منظور ابتدا حجم کنترلی مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. معادلات انتقال جرم، انرژی و مومنتوم برای دو حوزه‌ی الاستیک و پلاستیک روابط (4) تا (9) بیان می‌شوند.

$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega^P}\rho dV+\int_{\Gamma^P}\rho(\underline{v}-\underline{v}^*)\underline{n}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{PE}}\rho(\underline{v}-\underline{v}_{PE})\underline{n}_{PE}d\Gamma=0 \tag{4}$$

$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega^E}\rho dV+\int_{\Gamma^E}\rho(\underline{v}-\underline{v}^*)\underline{n}d\Gamma+\int_{\Gamma_i^{EP}}\rho(\underline{v}-\underline{v}_{EP})\underline{n}_{EP}d\Gamma=0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega^P}\rho e dV+\int_{\Gamma^P}\rho e(\underline{v}-\underline{v}^*).\underline{n}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{PE}}\rho e(\underline{v}-\underline{v}_{PE}).\underline{n}_{PE}d\Gamma\\&=\int_{\Gamma^P}\underline{v}\cdot\sigma\cdot\mathrm{n}d\Gamma-\int_{\Gamma^P}q\cdot\mathrm{n}d\Gamma+\int_{\Gamma_i^{PE}}q\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma+\int_{\Omega^P}\rho Q dV\\&+\int_{\Omega^P}\rho\underline{v}\cdot b dV\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega^E}\rho e dV+\int_{\Gamma^E}\rho e(\underline{v}-\underline{v}^*).\underline{n}d\Gamma+\int_{\Gamma_i^{EP}}\rho e(\underline{v}-\underline{v}_{EP}).\underline{n}_{EP}d\Gamma\\&=\int_{\Gamma^E}\underline{v}\cdot\sigma\cdot\mathrm{n}d\Gamma-\int_{\Gamma^E}q\cdot\mathrm{n}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{EP}}q\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma+\int_{\Omega^E}\rho Q dV\\&+\int_{\Omega^E}\rho\underline{v}\cdot b dV\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega^P}\rho\underline{v}dV+\int_{\Gamma^P}\rho\underline{v}(\underline{v}-\underline{v}^*).\underline{n}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{PE}}\rho\underline{v}(\underline{v}-\underline{v}_{PE}).\underline{n}_{PE}d\Gamma\\&=\int_{\Gamma^P}\sigma\cdot\mathrm{n}d\Gamma+\int_{\Gamma_i^{PE}}\sigma\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma+\int_{\Omega^P}\rho b dV\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega^E}\rho\underline{v}dV+\int_{\Gamma^E}\rho\underline{v}(\underline{v}-\underline{v}^*).\underline{n}d\Gamma+\int_{\Gamma_i^{EP}}\rho\underline{v}(\underline{v}-\underline{v}_{EP}).\underline{n}_{EP}d\Gamma\\&=\int_{\Gamma^E}\sigma\cdot\mathrm{n}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{EP}}\sigma\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma+\int_{\Omega^E}\rho b dV\end{aligned} \tag{9}$$

همچنین شرایط مرزی گذار برای فصل مشترک بین دو حوزه‌ی الاستیک و پلاستیک نیز برای معادلات انتقال جرم، انرژی و مومنتوم به‌صورت روابط (10) تا (12) قابل‌استخراج است.

$$\int_{\Gamma^{EP}}\rho(\underline{v}-\underline{v}_{EP})\cdot\underline{n}_{EP}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{PE}}\rho(\underline{v}-\underline{v}_{PE})\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma=0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_i^{EP}}\rho e(\underline{v}-\underline{v}_{EP})\cdot\underline{n}_{EP}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{PE}}\rho e(\underline{v}-\underline{v}_{PE})\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma\\&=\int_{\Gamma_i^{PE}}q\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{EP}}q\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_i^{EP}}\rho\underline{v}(\underline{v}-\underline{v}_{EP})\cdot\underline{n}_{EP}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{PE}}\rho\underline{v}(\underline{v}-\underline{v}_{PE})\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma\\&=\int_{\Gamma_i^{PE}}\sigma\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma-\int_{\Gamma_i^{EP}}\sigma\cdot\underline{n}_{PE}d\Gamma\end{aligned} \tag{12}$$

3- به‌کارگیری متغیرهای غیرفیزیکی

برای حل معادلات انتقال از متغیرهایی بنام متغیرهای غیرفیزیکی استفاده می-

شود. کلمه غیرفیزیکی به یک مفهوم ریاضیاتی ارجاع داده می‌شود که در حالت فیزیکی مفهوم خاصی را در بر ندارند. با تعریف معادلات انتقال در فرم انتگرالی توسط متغیرهای غیرفیزیکی امکان حذف ناپیوستگی و تبدیل آن به یک ترمی از منبع انرژی فراهم می‌شود. در این روش مدل‌سازی یک میدان فیزیکی ناپیوسته به یک میدان غیرفیزیکی پیوسته تبدیل می‌شود. برای یک حجم کنترلی Ω با مرز Γ یک میدان فیزیکی تعریف شده مانند ψ توسط معادلات انتقال به‌صورت رابطه‌ی (13) با یک متغیر غیرفیزیکی $\hat{\psi}$ مرتبط می‌شوند.

$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega}\hat{\psi}dV = \frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega}\rho\psi dV + \int_{\Gamma}\rho\psi(\underline{v}-\underline{v}^*)\cdot\underline{n}d\Gamma = -\int_{\Gamma}\underline{J}\cdot\underline{n}d\Gamma + \int_{\Omega}\rho\underline{b}dV \qquad (13)$$

با به‌کارگیری هم‌زمان تئوری انتقال رینولدز و دیورژانس در غیاب ناپیوستگی معادله انتگرالی بالا به فرم دیفرانسیلی (14) تبدیل می‌شود. این رابطه برای معادلات انتقال جرم، مومنتوم و انرژی صادق است.

$$\frac{D^*\hat{\psi}}{D^*t} + \hat{\psi}\,\mathrm{div}\underline{v}^* = \rho\frac{D^*\psi}{D^*t} + \rho(\underline{v}-\underline{v}^*)\cdot\nabla\psi = -\mathrm{div}\left(\underline{J}\right) + \rho\underline{b} \qquad (14)$$

ناپیوستگی موجود در یک المان را می‌توان با اعمال یک منبع انرژی $\hat{\psi}'$ به محدوده‌ی ناپیوستگی در فرم انتگرالی به‌صورت معادله‌ی (15) مدل نمود.

$$\frac{D^+}{D^+t}\int_{\Gamma_i}\hat{\psi}'dV + \int_{\Sigma_i}\hat{\psi}'(\underline{v}^*-\underline{v}^+)\cdot\underline{n}^+d\Gamma = -\int_{\Gamma_i}\underline{J}\cdot\underline{n}d\Gamma - \int_{\Sigma_i}\underline{J}\cdot\underline{n}d\Gamma \qquad (15)$$

در رابطه‌ی (15)، $\underline{n}^+$ بردار نرمال بر مرز $\Sigma_i = \Gamma_i \cap \Gamma$ که حجم کنترلی موردنظر را احاطه کرده است. معادلات انتقال معادل با به‌کارگیری متغیرهای غیرفیزیکی برای انتقال جرم، انرژی و مومنتوم به فرم رابطه‌ی (16) تا (21) بیان می‌شوند.

$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e/\Gamma_i}N_i\hat{\rho}dV = 0 \qquad (16)$$

$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e/\Gamma_i}\hat{\rho}dV = \frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e}\rho dV + \int_{\Gamma_e}\rho(\underline{v}-\underline{v}^*)\mathrm{e}_1.\underline{n}d\Gamma \qquad (17)$$

$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e/\Gamma_i}N_i\hat{e}dV = -\int_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial x}\hat{\underline{v}}\sigma_x dV + \int_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial x}q dV + \int_{\Gamma_e}N_i\underline{v}\sigma_x\mathrm{e}_1.\underline{n}d\Gamma - \int_{\Gamma_e}N_i q\mathrm{e}_1.\underline{n}d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+}N_i\left[\left[\underline{v}\sigma_x\right]\right]d\Gamma + \int_{\Gamma_i^+}N_i[[q]]d\Gamma \qquad (18)$$

$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e/\Gamma_i}\hat{e}dV = \frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e}\rho e dV + \int_{\Gamma_e}\rho e(\underline{v}-\underline{v}^*)\mathrm{e}_1.\underline{n}d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+}\left[\left[\rho(\underline{v}-\underline{v}_i)\mathrm{e}_1.\underline{n}e\right]\right]d\Gamma \qquad (19)$$

$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e/\Gamma_i}N_i\hat{\underline{v}}dV = -\int_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial x}\sigma_x\mathrm{e}_1.\underline{n}dV + \int_{\Gamma_e}N_i\sigma_x\mathrm{e}_1.\underline{n}d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+}N_i\left[\left[\sigma_x\mathrm{e}_1.\underline{n}\right]\right]d\Gamma \qquad (20)$$

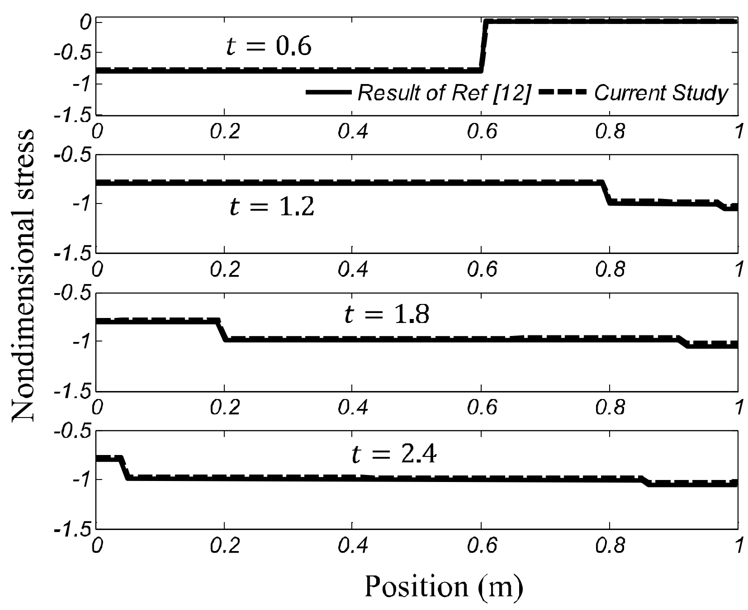
$$\frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e/\Gamma_i}\hat{\underline{v}}dV = \frac{D^*}{D^*t}\int_{\Omega_e}\rho\underline{v}dV + \int_{\Gamma_e}\rho\underline{v}(\underline{v}-\underline{v}^*)\mathrm{e}_1.\underline{n}d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+}\left[\left[\rho(\underline{v}-\underline{v}_i)\mathrm{e}_1.\underline{n}\underline{v}\right]\right]d\Gamma \qquad (21)$$

که $\hat{\rho}$، $\hat{\underline{v}}$ و $\hat{e}$ به ترتیب چگالی غیرفیزیکی، سرعت غیرفیزیکی و انرژی غیرفیزیکی هستند. همچنین $e = u + \frac{1}{2}v^2$ شامل انرژی پتانسیل و جنبشی واحد جرم می‌باشند. روابط (16)، (18) و (20) معادلات معادل پیوسته جرم، انرژی و مومنتوم می‌باشند. همچنین معادلات (17)، (19) و (21) به ترتیب معادلاتی پیوندی بین متغیرهای غیرفیزیکی و فیزیکی هستند. مقادیر نقطه‌ای پارامترهای مورد بررسی برای تیر با استفاده از دستگاه معادلات معادل پیوسته ارائه شده برای سرعت و انرژی استفاده شده و با به‌کارگیری روابط پایه‌ای تنش-کرنش برای تیر با رفتار الاستوپلاستیک محوری مقادیر تاریخچه سرعت، کرنش و تنش برای هر نقطه از تیر به روش المان محدود با توابع کلاسیک خطی محاسبه شده است.

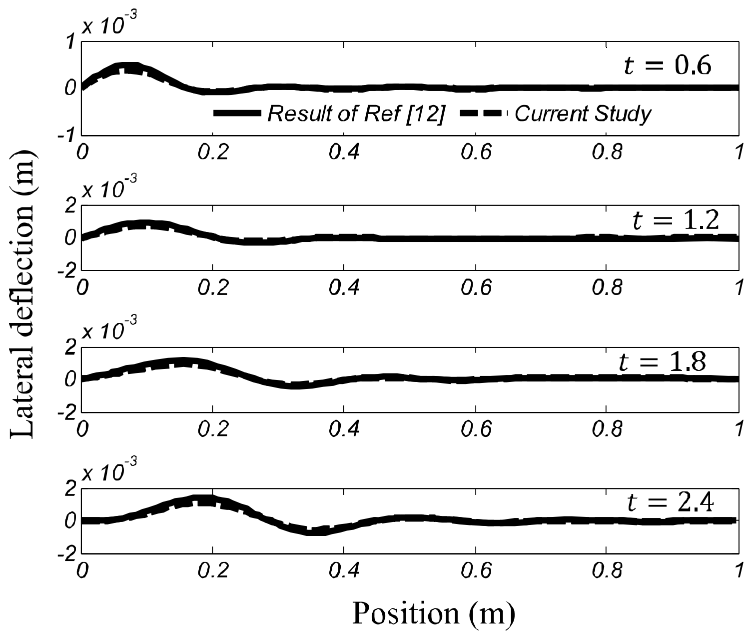
4- رفتار تیر در غیاب ناپیوستگی (محدوده‌ی الاستیک)

راستی آزمایی صحت نتایج استخراج شده از روش معادلات انتقال به همراه متغیرهای غیرفیزیکی برای محاسبه میدان تنش انتشار یافته در امتداد تیر با نتایج مرجع [12] صورت گرفته است. این نتایج در شکل‌های 3 و 4 نمایش داده شده که به ترتیب تنش و میدان جابجایی بی‌بعد را مطابق مرجع [12] می‌باشند. برای مقایسه نتایج حاصل از این روش با مرجع [12]، میدان تنش، جابجایی و زمان مطابق این مرجع در شکل‌های 3 و 4 به صورت بی‌بعد ارائه شده است. بعد از این اعتبارسنجی نتایج جدید در ادامه ارائه شده است.

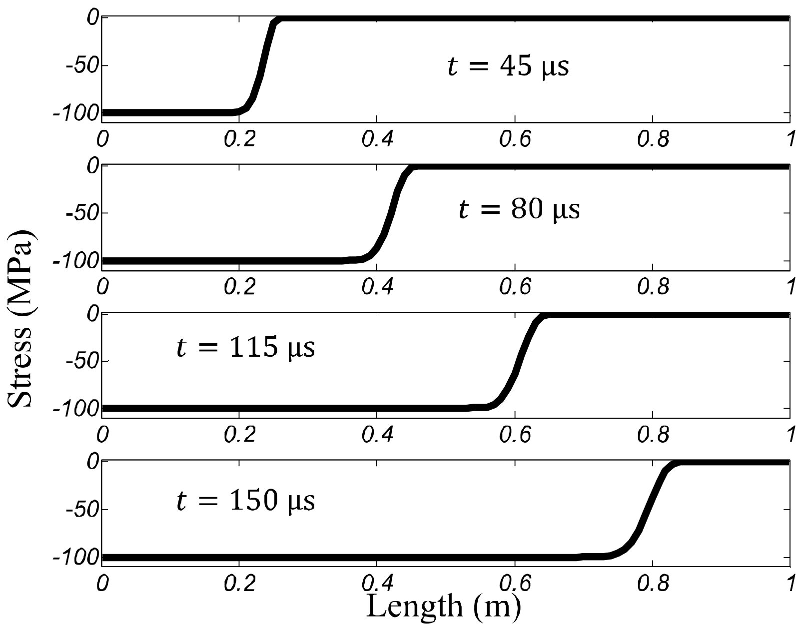
در ادامه به منظور مطالعه و تحلیل به‌کارگیری معادلات انتقال انرژی و مومنتوم به همراه به‌کارگیری متغیرهای غیرفیزیکی، تیری با ویژگی مکانیکی E = 210 GPa ، ρ = 7850 kg/m^3 ، E_t = 500 MPa و υ = 0.3 از جنس فولاد در نظر گرفته شده است. با این مشخصات مکانیکی سرعت موج الاستیک برابر 5170 m/s و سرعت موج پلاستیک 252 m/s می‌باشد. تیر مورد مطالعه دارای طول واحد بوده و بنابراین موج الاستیک و پلاستیک به ترتیب در زمان‌های 194 μs و 4 ms طول تیر را طی می‌کنند. بار دینامیکی به تیر در مدت زمان 776 μs یعنی چهار برابر زمان انتشار موج الاستیک در طول تیر انتخاب شده است. شکل‌های 5 تا 8 نحوه‌ی انتشار موج تنش در شانزده زمان مختلف نشان می‌دهند.



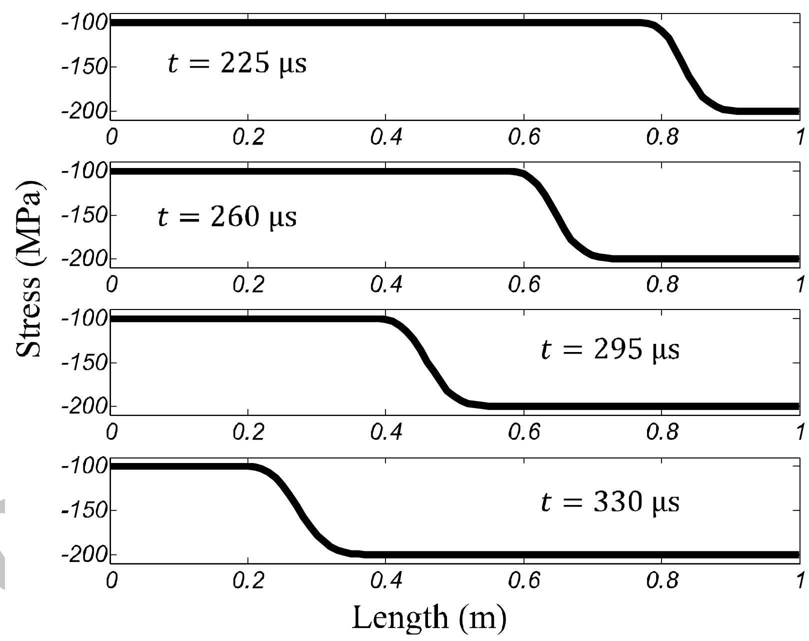
شکل 3 انتشار موج تنش محوری



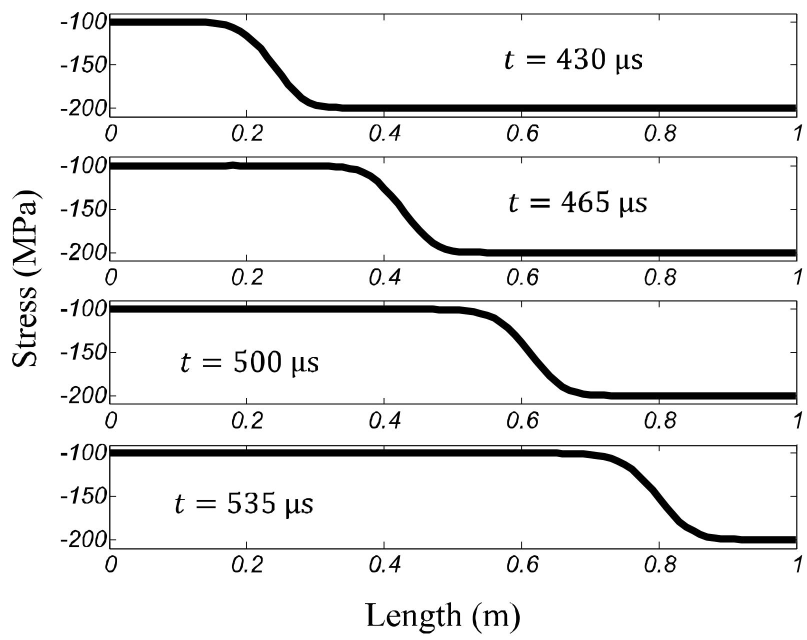
شکل 4 پروفایل تغییر شکل برای تیر



شکل 5 انتشار موج تنش محوری در زمان اول



شکل 6 انتشار موج تنش محوری در زمان دوم

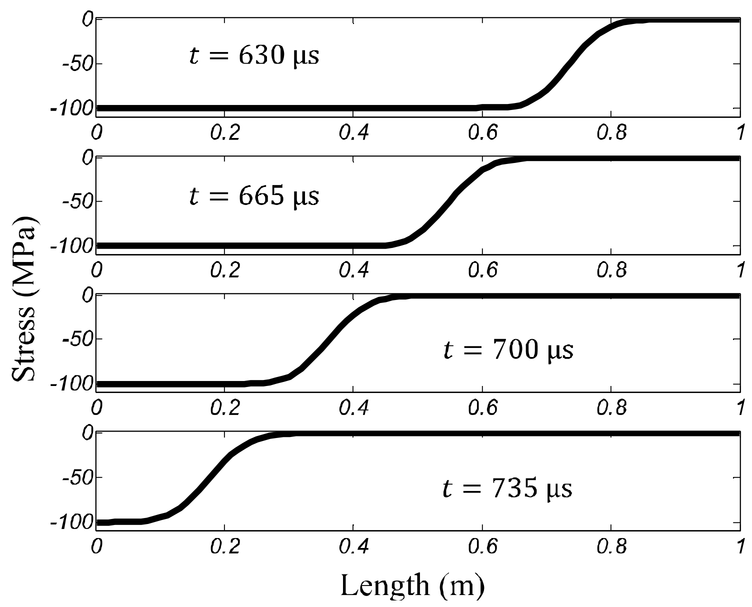


شکل 7 انتشار موج تنش محوری در زمان سوم

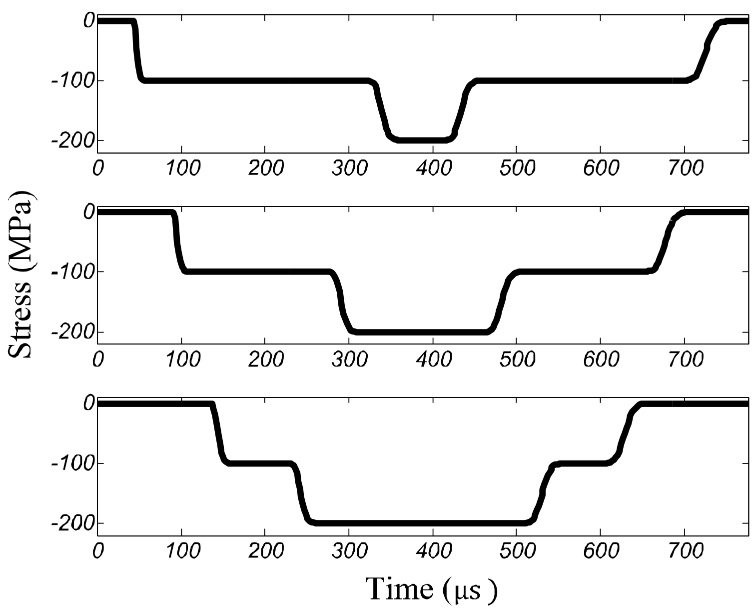
چهار زمان نشان داده شده در شکل 5 به‌گونه‌ای انتخاب شده است که چگونگی انتشار موج را تا قبل از رسیدن موج الاستیک به انتهای تیر برای اولین بار را نشان دهد. با پیشروی موج الاستیک در زمان‌های نشان داده شده تنش ایجاد شده نیز در محدوده‌ی الاستیک با گذشت زمان در امتداد تیر انتشار پیدا می‌کند.

شکل 5 انعکاس موج تنش از انتهای گیردار را در چهار زمان مختلف در بازه زمانی 194 μs < t < 338 μs نشان می‌دهد. با توجه به این‌که تنش به‌صورت فشاری به انتهای گیردار انتشار یافته است انعکاس تنش با دو برابر شدن مقدار آن به‌صورت فشاری بازگشت می‌کند. شکل 7 انعکاس موج تنش را از انتهای آزاد تیر در چهار زمان مختلف در بازه زمانی 388 μs < t < 582 μs نشان می‌دهد. موج فشاری پیش‌رونده در بازه زمانی دوم با رسیدن به انتهای آزاد به‌صورت موج کششی منعکس می‌شود که برآیند آن ایجاد تنشی با نصف مقدار آن در بازه دوم زمانی است. شکل 8 انعکاس موج تنش را از انتهای گیردار تیر در چهار زمان مختلف در بازه زمانی 582 μs < t < 776 μs نشان می‌دهد.

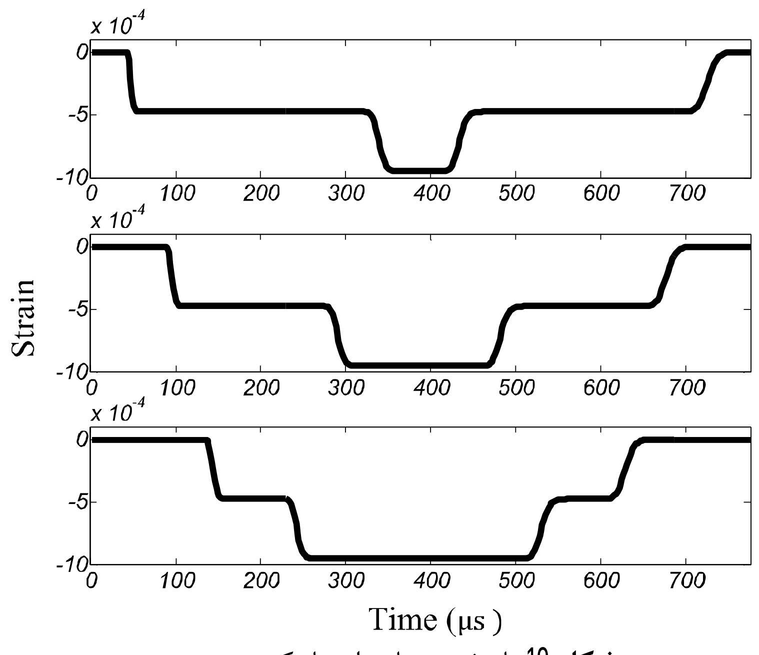
شکل‌های 9 تا 11 تاریخچه زمانی تنش، کرنش و سرعت را در سه نقطه‌ی مختلف به فواصل 25 سانتی‌متر، 50 سانتی‌متر و 75 سانتی‌متر تکیه‌گاه آزاد تیر را نشان می‌دهد. روند نمودارهای تنش و کرنش با توجه به انتشار موج در حوزه‌ی الاستیک یکسان می‌باشد. ولی نمودار سرعت با توجه به فشاری یا کششی بودن موج تنش با توجه به زمان تغییر می‌کند.



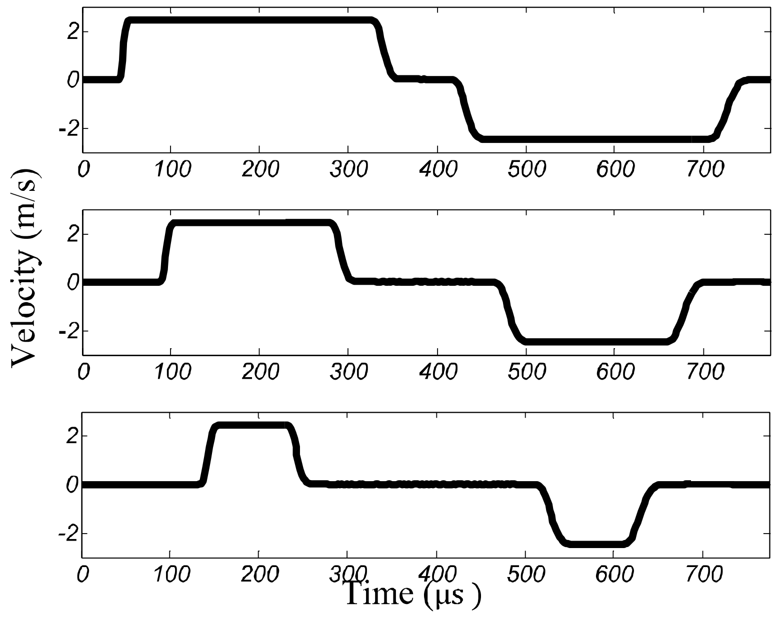
شکل 8 انتشار موج تنش محوری در زمان چهارم



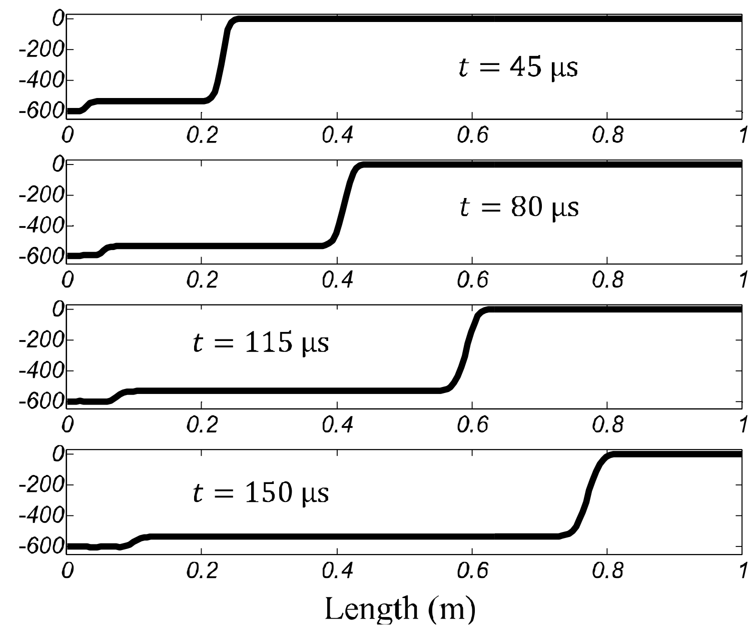
شکل 9 تاریخچه زمانی انتشار تنش محوری



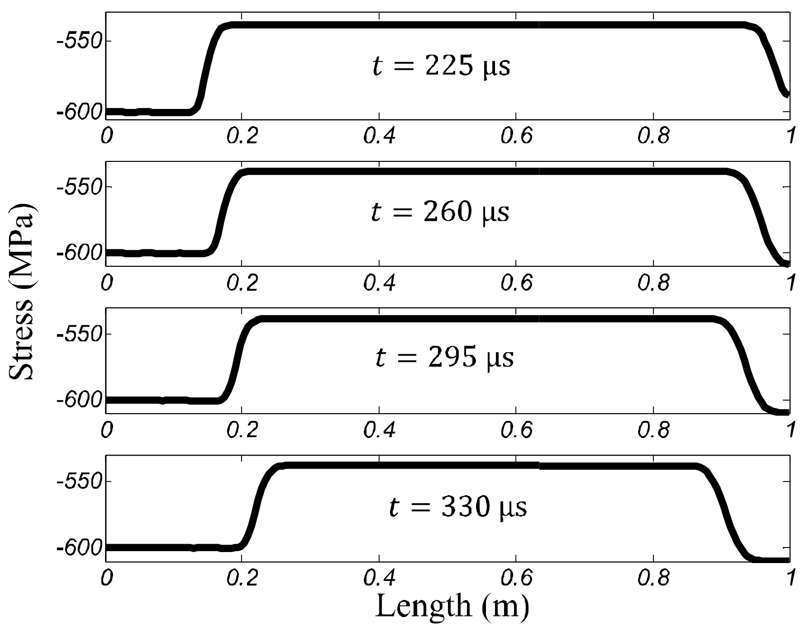
شکل 10 تاریخچه زمانی انتشار کرنش محوری



شکل 11 تاریخچه زمانی سرعت محوری



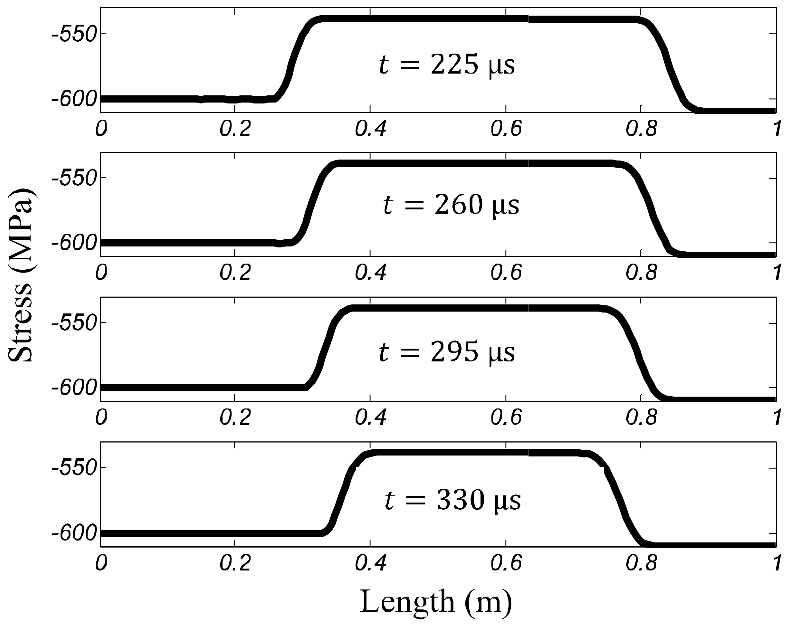
شکل 12 انتشار موج تنش محوری در زمان اول



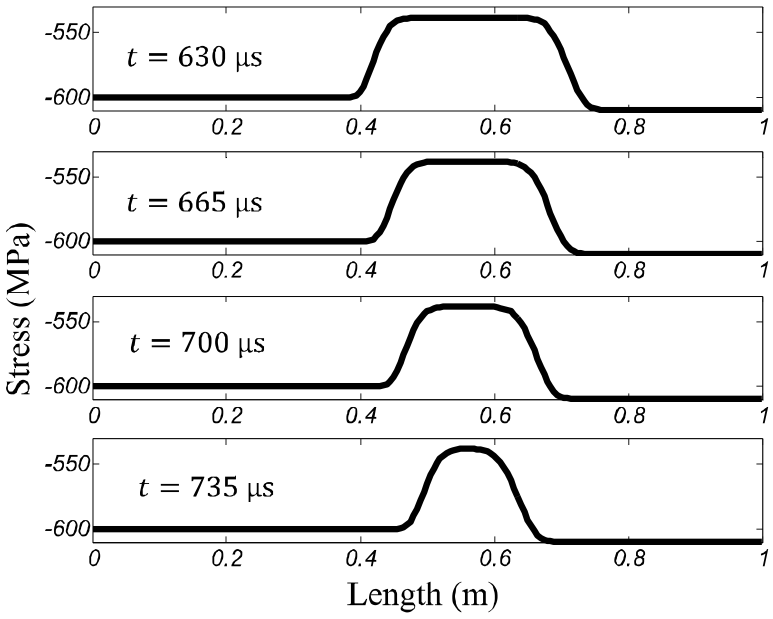
شکل 13 انتشار موج تنش محوری در زمان دوم

5- رفتار تیر در حضور ناپیوستگی (محدوده‌ی الاستوپلاستیک)

به‌کارگیری معادلات انتقال انرژی و مومنتوم برای استخراج منحنی‌های تنش، کرنش و سرعت در هنگام حضور ناپیوستگی اهمیت خود را نشان می‌دهد. در روش‌های کلاسیک حل معادلات در هریک از حوزه‌های مختلف به طور مجزا صورت گرفته و در مرزهای ناپیوستگی ارضای دو معادله الزامی می‌باشد. در این قسمت با افزایش بارگذاری شرایط تولید دو موج الاستیک و پلاستیک در تیر مورد مطالعه ایجاد می‌شود. با توجه به بالاتر بودن سرعت موج الاستیک نسبت به موج پلاستیک، تیر در ابتدا تغییر شکل الاستیک را تجربه کرده و سپس با پیشروی موج تنش پلاستیک تغییر شکل ماندگار در جسم ایجاد می‌شود.



شکل 14 انتشار موج تنش محوری در زمان سوم

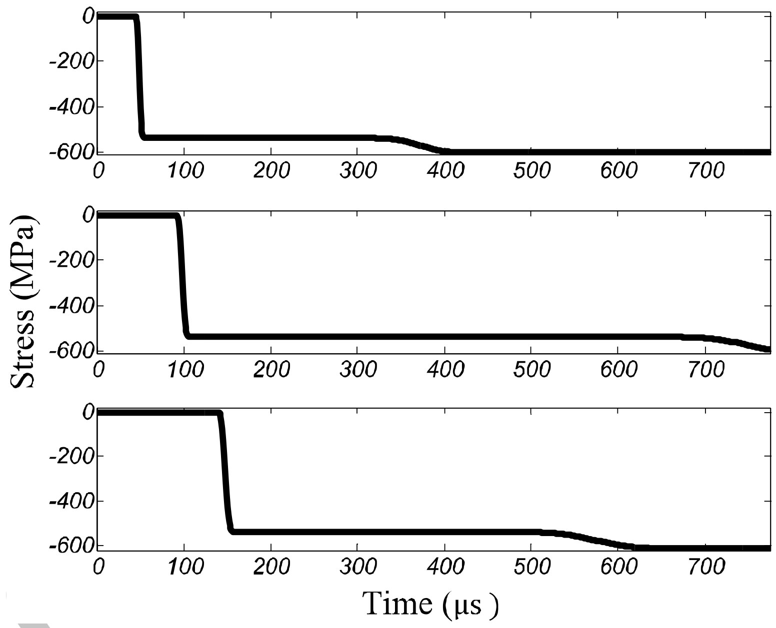


شکل 15 انتشار موج تنش محوری در زمان چهارم

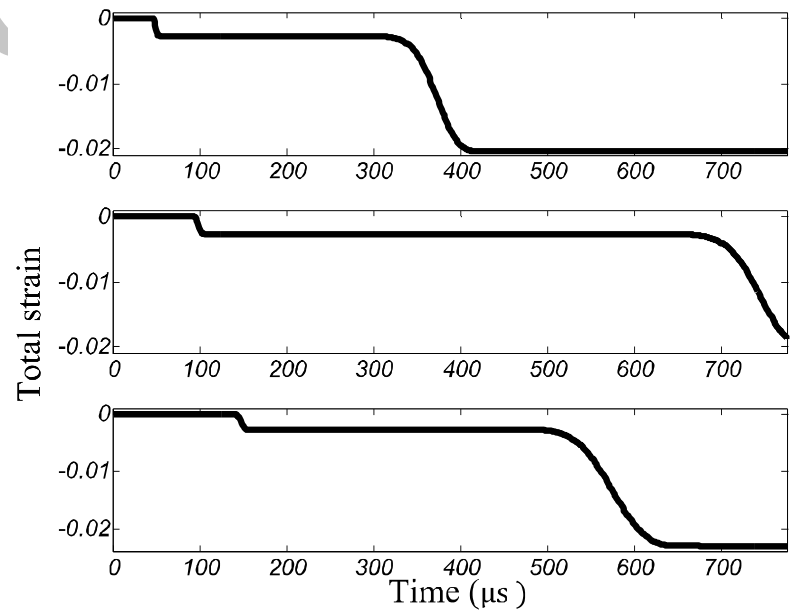
شکل‌های 12 تا 15 در شانزده زمان مختلف نشان داده شده در هریک از شکل‌ها چگونگی پیشروی و انتشار موج تنش را نشان می‌دهند. با توجه به شکل 12 تغییر شکل پلاستیک از ابتدای تیر آغاز می‌شود ولی با رسیدن موج تنش الاستیک به انتهای گیردار تیر و افزایش دو برابری تنش منعکس شده، مقدار تنش از حد تسلیم عبور کرده و موج الاستیک پیشرو به صورت دو موج الاستیک و پلاستیک منعکس می‌شود این روند در شکل 13 به وضوح قابل مشاهده است. با گذشت زمان و انعکاس موج در بازه‌های سوم و چهارم حوزه‌های بیشتری از حد تسلیم عبور کرده و تغییرشکل پلاستیک در آن‌ها رخ می‌دهد. این روند در شکل‌های 14 و 15 نشان داده شده است.

شکل‌های 16 تا 19 تاریخچه زمانی تنش، کرنش کل، کرنش پلاستیک و سرعت را در سه نقطه‌ی مختلف به فواصل 25 سانتی‌متر، 50 سانتی‌متر و 75 سانتی‌متر از تکیه‌گاه آزاد تیر را نشان می‌دهند. با توجه به نمودار اول شکل 16 که تاریخچه زمانی انتشار تنش را نقطه‌ای به فاصله 25 سانتی‌متری از تکیه‌گاه آزاد را نشان می‌دهد، گذر از مرز ناپیوستگی و تولید تنش در حوزه‌ی پلاستیک و به دنبال آن ایجاد تغییرشکل پلاستیک در نواحی نزدیک به تکیه‌گاه آزاد در زمان زودتری نسبت به نواحی دیگر تیر صورت می‌گیرد. همچنین با توجه به انعکاس موج اولیه به دو صورت الاستیک و پلاستیک از انتهای گیردار نقطه‌ای که به فاصله 75 سانتی‌متری از تکیه‌گاه آزاد قرار دارد تنش بیشتری را در زمان پایان بارگذاری نسبت به وسط تیر تحمل می‌کند. این رفتار در نمودارهای تاریخچه زمانی کرنش کل و کرنش پلاستیک نشان داده شده در شکل‌های 17 و 18 نیز قابل مشاهده است. با توجه به نمودارهای شکل 18 می‌توان فهمید که تغییرشکل پلاستیک در نقطه‌ای به

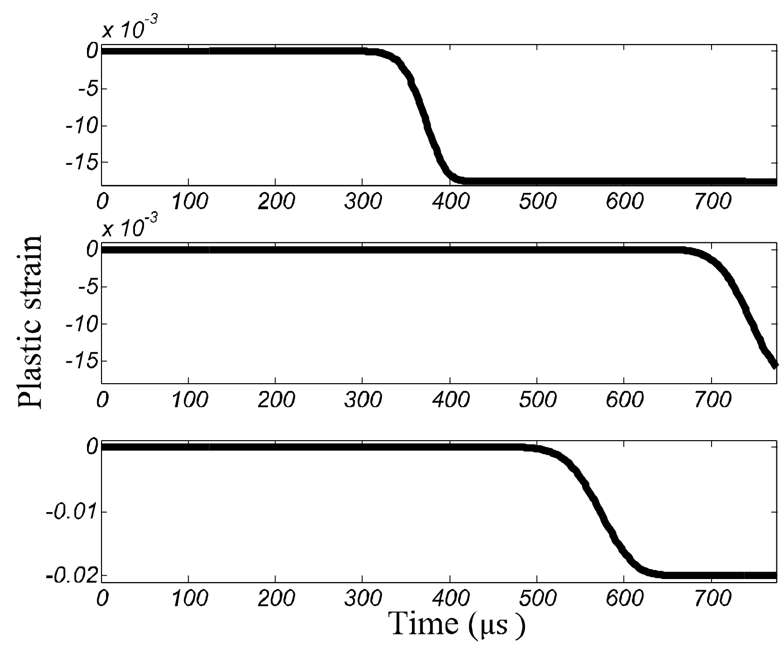
فاصله‌ی 25 سانتی‌متری از انتهای آزاد در دوره زمانی سوم و برای نقطه‌ای به فاصله مکانی 75 سانتی‌متر از انتهای آزاد در بازه زمانی چهارم صورت می-گیرد. عبور موج تنش پلاستیک از هر قسمت منجر به صفرشدن سرعت آن محدوده تحت تأثیر خواهد شد. تغییر شکل پلاستیک شکل 19 که تغییرات سرعت سه نقطه‌ی مختلف از تیر را برحسب زمان نشان می‌دهد به وضوح بیان می‌کند که نقاط نزدیک به تکیه‌گاه‌ها نسبت به نقاط دیگر زودتر سرعت صفر و ایجاد تغییرشکل پلاستیک را تجربه می‌کنند. با به‌کارگیری معادلات انتقال ناپیوستگی مادی موجود حذف و مدلی پیوسته از رفتار الاستوپلاستیک تیر در فرم انتگرالی ارائه می شود.



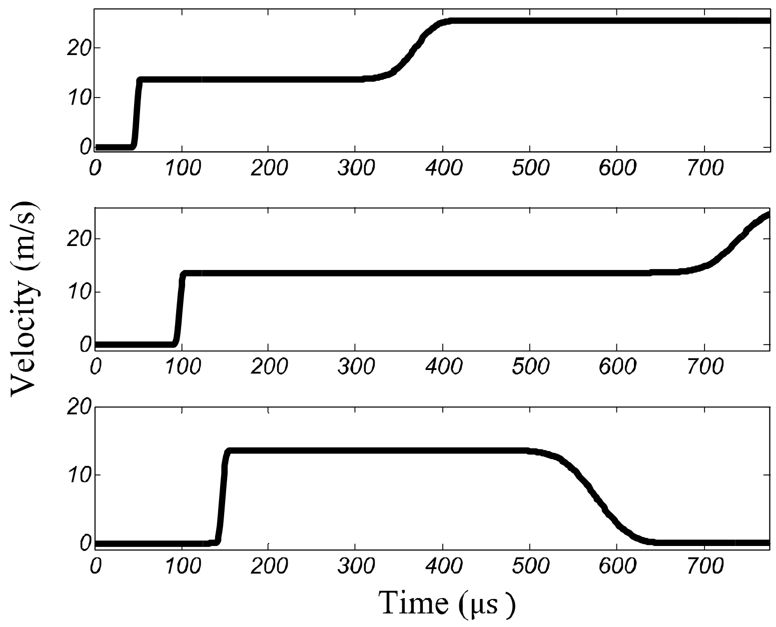
شکل 16 تاریخچه زمانی انتشار تنش محوری



شکل 17 تاریخچه زمانی انتشار کرنش کل محوری



شکل 18 تاریخچه زمانی انتشار کرنش پلاستیک



شکل 19 تاریخچه زمانی انتشار سرعت محوری

6- نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که به‌کارگیری معادلات انتقال جرم، انرژی و مومنتوم به همراه استفاده از متغیرهای غیرفیزیکی روشی مناسب برای مدل کردن رفتار الاستیک- پلاستیک تیر در زمان عبور امواج شوک الاستیک و پلاستیک می‌باشد. با استفاده از این روش ناپیوستگی مادی ناشی از اختلاف رفتار الاستیک و پلاستیک موجود در هر حجم کنترلی مشخص از تیر حذف شده و مدلی پیوسته از این رفتار ارائه شده است. برای حذف ناپیوستگی موجود در حجم کنترلی مورد مطالعه از متغیرهای غیر فیزیکی استفاده شده که شرایط مرز ناپیوسته را به‌صورت ترمی از منبع انرژی داخلی مدل می‌کند. در این روش شرایط مرزی ناپیوسته موجود در فصل مشترک حوزه‌ی الاستیک و پلاستیک در فرم انتگرالی بیان شده و به‌طور مستقیم در معادلات حرکت ظاهر شده است. نتایج به‌دست آمده از تحلیل تیر با دو تکیه‌گاه ساده در محل اعمال بار ضربه و تکیه‌گاه گیردار در انتهای آن نشان می‌دهد که نحوه انتشار و انعکاس موج الاستیک و پلاستیک به شرایط اولیه بارگذاری و مقدار کرنش اولیه ایجاد شده وابسته است. بر طبق نمودارها میدان تنش، کرنش و سرعت، هرگاه مقدار بار باعث تولید موج الاستیک و پلاستیک شود انعکاس موج الاستیک به‌صورت موج الاستیک و پلاستیک بوده و به همین دلیل در نمودار کرنش پلاستیک نقاط نزدیک به انتهای گیردار کرنشی مخالف صفر را دارا می‌باشند. همچنین نمودار تاریخچه سرعت این نقاط نیز در زمان مشابه دارای سرعت صفر بوده که مؤید عبور موج تنش پلاستیک از این نقاط و ایجاد تغییر شکل پلاستیک می‌باشند.

7- مراجع

[1] K. Davey, I. Rosindale, Control volume capacitance method for solidification modeling, *International Journal for numerical methods in engineering,* Vol. 46, pp. 315-340, 1999.

[2] K. Davey, N.J. Rodriguez, Solidification modeling with a control volume method on domains subjected to viscoplastic deformation, *Applied Mathematical Modeling,* Vol. 26, pp. 421-447, 2002.

[3] K. Davey, N.J. Rodriguez, A control volume capacitance method for solidification modeling with mass transport, *International Journal for numerical methods in engineering,* Vol. 53, pp. 2643–2671, 2002.

[4] N.J. Rodriguez, K. Davey, J.L.S. Gaytan, The control volume formulation to model the convective–diffusive unsteady heat transfer over the 1-D semi-infinite domain, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 196, pp. 4059-4074, 2007.

[5] N.J. Rodriguez, K. Davey, J.A. Vazquez Feijoo, A. Juarez-Hernandez, Numerical modeling of unsteady convective-diffusive heat transfer with a control volume hybrid method, *Applied Mathematical Modeling,* Vol. 33, pp. 897-923, 2009.

[6] K. Davey, R. Mondragon, A non-physical enthalpy method for the numerical solution of isothermal solidification, *International Journal for numerical methods in engineering,* Vol. 284, pp. 214-252, 2010.

[7] R. Mondragon, K. Davey, Weak discontinuity annihilationin solidification modeling, *Computers and Structures,* Vol. 89, pp. 681-701, 2011.

[8] U. Lepik,Impulsively loaded fully fixed-endedelastic-plastic beams by galerkin's method, *International Journal of Impact Engineering,* Vol. 15, No. 1, pp. 15-23, 1994.

[9] U. Lepik, Elastic-plastic vibrations of a buckled beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 30, No. 2, pp. 129-139, 1995.

[10] U. Lepik, A contributions to bifurcation analysis of elastic – plastic beams, *International Journal of Impact Engineering,* Vol. 21, pp. 35-49, 1998.

[11] U. Lepik, On dynamic buckling of elastic-plastic beams, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 35, pp. 721-734, 2000.

[12] U. Lepik, Dynamic buckling of elastic - plastic beams including effects ofaxial stress waves, *International Journal of Impact Engineering,* Vol. 25, pp. 537-552, 2001.

[13] A. Frikha ,F. Treyssède, P. Cartraud, Effect of axial load on the propagation of elastic waves in helical beams, Wave Motion, Vol. 48, No.1, PP. 83-92, 2011.

[14] J. Chakrabarty,*Applied Plasticity,* Second Edittion, pp. 561-574, Department of Mechanical Engineering, Florida State University, 2010.

[15] N.D. Cristescu*, Dynamic plasticity,* pp.137-144, university of Florida, USA, 2007.